Modelos de Flujo: Revisión

Renewal and Regenerative Processes: Review

Carlos E. Martínez-Rodríguez

Julio-Agosto 2024

Resumen

Abstract

Índice

Introducción

Introduction

1. Definiciones Básicas

Definición 1.1. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X,\mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A\in\mathcal{F}$.*

Definición 1.2. *Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X=\bigcup_{n\geq 1}X_n$ con $X_n\in\mathcal{F}$ y $\mu\left(X_n\right)<\infty$.*

Definición 1.3. *El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b)\in\mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.4. *Una función $f:X\rightarrow\mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\left\{x\in X:f\left(x\right)>\alpha\right\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}\left(\left(\alpha,\infty\right)\right)=\left\{x\in X:f\left(x\right)>\alpha\right\}\in\mathcal{F}.$$

Definición 1.5. *Sean $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$, $i=1,2,\ldots,$ espacios medibles y $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1,\omega_2,\ldots,)$ tales que $\omega_i\in\Omega_i$, $i=1,2,\ldots,$. Si $B^n\subset\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$, definimos $B_n=\left\{\omega\in\Omega:(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\in B^n\right\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_i$.*

Definición 1.6. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.7. *Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.8. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.9. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{1.1}$$

Nota 1.1. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t), \tag{1.2}$$

entonces la ecuación (1.1) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{1.3}$$

Teorema 1.1. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.4}$$

en $\{T < \infty\}$.

2. Modelo de Flujo

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola. Sea x el número de usuarios en la cola esperando por servicio y $N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política dada y fija mientras el servidor permanece dando servicio, entonces se asume que:

(S1.)
$$lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0. \tag{2.1}$$

(S2.)
$$\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}, \tag{2.2}$$

para cualquier valor de x.

El tiempo que tarda un servidor en volver a dar servicio después de abandonar la cola inmediata anterior y llegar a la próxima se llama tiempo de traslado o de cambio de cola, al momento de la n-ésima visita del servidor a la cola j se genera una sucesión de variables aleatorias $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con la propiedad de que $\mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)] \geq 0$.

Se define
$$\delta^* := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)]. \tag{2.3}$$

Los tiempos entre arribos a la cola k, son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos. Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como

$\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Para el caso más sencillo podemos definir un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada, el estado $\mathbb{X}(t)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}(t) = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t) : k = 1, 2, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right), \tag{2.4}$$

donde $Q_k(t)$ es la longitud de la cola k para los usuarios esperando servicio, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k(t)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio.

Los tiempos entre arribos residuales, que son el tiempo que queda hasta que el próximo usuario llega a la cola para recibir servicio, se denotan por $A_k(t)$. Tanto $B_k(t)$ como $A_k(t)$ se suponen continuos por la derecha [**?**].

Sea $\mathcal{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x = (q, a, b)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = (q, a, b) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x\| = |q| + |a| + |b|$. En [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$\left((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}(t), \theta_t, P_x\right)$$

es un proceso de *Borel Derecho* en el espacio de estados medible $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x\left(\mathbb{X}(t) \in D\right).$$

Definición 2.1. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_X P^t(x, D)\, \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 2.2. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\left\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\right\}$.

Definición 2.3. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

Nota 2.1. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π ([105]).*

*ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso a la medida se le llama **Harris recurrente positiva**.*

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria; se define

$$P_\pi(\cdot) = \int_X P_x(\cdot)\, \pi(dx).$$

Se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, así, el proceso $X = \left\{\mathbb{X}(t), t \geq 0\right\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π.

iv) En [116] se muestra que si $P_x\left\{\tau_D<\infty\right\}=1$ incluso para solamente un conjunto pequeño, entonces el proceso de Harris es recurrente.

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $\left(X\left(t\right)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t\geq0$ está dado por

$$X\left(t\right)=\left(Q\left(t\right),A\left(t\right),H\left(t\right),B\left(t\right),B^{0}\left(t\right),C\left(t\right)\right) \tag{2.5}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X}=\mathbb{Z}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}^{K}, \tag{2.6}$$

- $Q\left(t\right)=\left(Q_{k}\left(t\right),1\leq k\leq K\right)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A\left(t\right)=\left(A_{k}\left(t\right),1\leq k\leq K\right)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H\left(t\right)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B\left(t\right)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^{0}\left(t\right)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C\left(t\right)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H\left(t\right)$.

$A_{k}\left(t\right),B_{m}\left(t\right)$ y $B_{m}^{0}\left(t\right)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([94]).

Dada una condición inicial $x\in\mathcal{X}$, $Q_{k}^{x}\left(t\right)$ es la longitud de la cola k al tiempo t y $T_{m,k}^{x}\left(t\right)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en atender a los usuarios de la cola k. De igual manera se define $T_{m,k}^{x,0}\left(t\right)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en cambiar de cola para volver a atender a los usuarios.

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right), \tag{2.7}$$

$$\overline{T}_{m}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}T_{m}^{x}\left(|x|t\right), \tag{2.8}$$

$$\overline{T}_{m}^{x,0}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}T_{m}^{x,0}\left(|x|t\right). \tag{2.9}$$

Cualquier límite $\overline{Q}\left(t\right)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola, al conjunto de todos los posibles flujos límite se le llamará **modelo de flujo**, ([**?**]).

Definición 2.4. *Un flujo límite para un sistema de visitas bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)$ *y* $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\lambda_{k}t-\sum_{m=1}^{M}\mu_{k}\overline{T}_{m,k}\left(t\right) \tag{2.10}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq0 \textit{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{2.11}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right)=0, \textit{ y } \overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right) \textit{ es no decreciente}, \tag{2.12}$$

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^{0}\left(t\right)+\overline{T}_{m,k}\left(t\right)=t \textit{ param}=1,2,\ldots,M \tag{2.13}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en (4.32)-(4.35) se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Definición 2.5. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_{0} tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$, con $t\geq t_{0}$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.*

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{2.14}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [99]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [99, 94, 95].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{2.15}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{2.16}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{2.17}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{2.18}$$

Definición 2.6 (Definición 4.1, Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (2.14) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (2.15)-(2.18) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 2.7. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 2.1 (Teorema 4.2, Dai [94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{2.19}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 2.8 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

Lema 2.1 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por (2.15)-(2.18) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 2.2 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{2.20}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{2.21}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{2.22}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{2.23}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 2.3 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K}\rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{2.24}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 2.2.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 4.9

Teorema 2.4. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\left\{X(T) \in B, T < \infty|\mathcal{F}(S)\right\} = p(S, T, X(s), B) \tag{2.25}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v\in K}M_v = \left\{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\right\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{\cup_{v\in K}A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0,1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{2.26}$$

y

$$\partial^* M_v = \left\{ z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v \right\}. \tag{2.27}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{2.28}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf \left\{ t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v \right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \\ exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) \, ds \right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{2.29}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[1]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 2.1 (Supuesto 3.1, Davis [98]). *Sea* $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ *el número de saltos en* $[0, t]$. *Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{2.30}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 2.9. *Un espacio topológico* E *es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 2.10. E *es un espacio de Radón si cada medida finita en* $(E, \mathcal{B}(E))$ *es regular interior o cerrada,* tight.

[1] Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

Definición 2.11. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{2.31}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 2.5. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.
Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 2.12. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*[2]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B). \tag{2.32}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[3] (2.33) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{2.34}$$

Definición 2.13. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 2.2. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (2.34) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\right\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{2.35}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).
En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (2.35) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 2.14. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 2.15 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 2.16. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

[2] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[3]

$$\mathbb{P}\left\{H | \mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H | X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{2.33}$$

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{2.36}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (2.35) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 2.17 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 2.18. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 2.16, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 2.17, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 2.1 (Lema 4.2, Dai[94])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$*, conforme* $n \rightarrow \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$*, casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \rightarrow P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{2.37}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{2.38}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{2.39}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 2.2 (Lema 4.3, Dai[94])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$*, conforme* $n \rightarrow \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l (S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{2.40}$$

para $k = 1, \dots, K$. Para $i = 1, \dots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{2.41}$$

para $i = 1, \dots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \dots, T_K^x(t))^{'},$$
$$I^x(t) = (I_1^x(t), \dots, I_K^x(t))^{'}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \dots, S_K^x(T_K^x(t)))^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l (S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \tag{2.42}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{2.43}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{2.44}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{2.45}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t)) \, dI_i^x(t) = 0, \tag{2.46}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{2.47}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 3.2:

Teorema 2.6 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \rightarrow \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \rightarrow \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{2.48}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{2.49}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{2.50}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{2.51}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{2.52}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{2.53}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{2.54}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{2.55}$$

En Dai [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X = \{X(t), t \geq 0\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [108].

Sea el proceso de Markov $X = \{X(t), t \geq 0\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] y Meyn y Down [118] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

3. Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X(t) = (Q(t), U(t), V(t)), \tag{3.1}$$

donde $Q(t)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U(t)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V(t)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U(t)$ como $V(t)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = (Q(0), U(0), V(0)) = (q, a, b)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \ldots, K$ se define

$$\begin{aligned}
E_l^x(t) &= max\left\{r : U_l(0) + \xi_l(1) + \cdots + \xi_l(r-1) \leq t\right\} \;\; t \geq 0, \\
S_k^x(t) &= max\left\{r : V_k(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(r-1) \leq t\right\} \;\; t \geq 0.
\end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s-éima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \left\{\phi^k(n), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \ldots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 3.1 (Lema 4.2, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{3.4}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 3.2 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l (S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{3.5}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{3.6}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))^{'},$$
$$I^x(t) = (I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t))^{'}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t)))^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l (S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \tag{3.7}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{3.8}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{3.9}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{3.10}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{3.11}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{3.12}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 3.2:

Teorema 3.1 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{3.13}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \ \ u.o.c. \tag{3.14}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{3.15}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{3.16}$$

$$\overline{T}(t) \ \ \textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{3.17}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \ \ \textit{es no decreciente}, \tag{3.18}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{3.19}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{3.20}$$

Definición 3.1 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en 4.4 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (4.5)-(4.10) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 3.2 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{3.21}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 3.2 (Definición 3.1, Dai y Meyn [95]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ y $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$*

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk}\mu_l \overline{T}_l(t) \tag{3.22}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \ \textit{para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{3.23}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \ \ y\ \overline{T}_k(\cdot) \ \ \textit{es no decreciente}, \tag{3.24}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \ \ \textit{es no decreciente} \tag{3.25}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \ \ \textit{se incrementa al tiempo } t \textit{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{3.26}$$

$$\textit{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \textit{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{3.27}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 4.32-4.37 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 3.3 (Definición 3.2, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $\left(\overline{A}\left(0\right),\overline{B}\left(0\right)\right)\in\mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 4.32-4.37, junto con la condición:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=\overline{Q}\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{A}\left(0\right)\right)^{+}-\left(I-P^{'}\right)M\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{B}\left(0\right)\right)^{+}\tag{3.28}$$

Definición 3.4 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_{0} tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$, con $t\geq t_{0}$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.*

El sigui ente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 3.1 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 4.32-4.37 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_{0}>0$ tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$ para cualquier $t\geq t_{0}$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq1$.*

3.1. Modelo de Flujo Retrasado

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 3.1. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ y $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 3.3 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 3.3 (Teorema 5.2 [91]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 3.4 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante t_{0} que depende de (α,μ,T,U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z\left(t\right)=0$, para toda $t\geq t_{0}$.*

Lema 3.4 (Lema 5.2 [106]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{3.29}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 3.5 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 3.2 (Proposicin 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{3.30}$$

Proposición 3.3 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{3.31}$$

Proposición 3.4 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{3.32}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 3.6 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{3.33}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p \tag{3.34}$$

Teorema 3.7 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*
$$\parallel P^{t}\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$
para $t\rightarrow\infty$ *y* $x\in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[\left|Q_{t}\right|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[\left|Q_{0}\right|^{p}\right]<\infty$$

Teorema 3.8 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^{t}(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_{f}=0},$$

para $x\in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{t}\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{0}\right]\right|=0}.$$

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_{s}\left(x\right)=N\left(x\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]=\overline{N}>0. \tag{3.35}$$

(S2.)
$$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]\leq\overline{N}, \tag{3.36}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]\geq0$.
- Se define
$$\delta^{*}:=\sum_{j,j+1}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]. \tag{3.37}$$
- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$
- también se define $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde es necesario que $\rho<1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $\left(X\left(t\right)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t\geq0$ está dado por
$$X\left(t\right)=\left(Q\left(t\right),A\left(t\right),H\left(t\right),B\left(t\right),B^{0}\left(t\right),C\left(t\right)\right) \tag{3.38}$$
definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X}=\mathbb{Z}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}^{K}, \tag{3.39}$$

- $Q\left(t\right)=\left(Q_{k}\left(t\right),1\leq k\leq K\right)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A\left(t\right)=\left(A_{k}\left(t\right),1\leq k\leq K\right)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H\left(t\right)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B\left(t\right)$ es el tiempo de servicio residual.

- $B^{0}(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_{k}(t), B_{m}(t)$ y $B_{m}^{0}(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([94]).

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_{k}(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_{k}(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}[\xi_{k}(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}[\eta_{k}(1)]$.
- también se define $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde es necesario que $\rho<1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola. Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_{s}(x)=N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)]=\overline{N}>0$.
2) $\mathbb{E}[N(x)]\leq\overline{N}$para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}=r_{j,j^{'}}$.
- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right]\geq 0$.
- Sea $\{p_{j}\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}r_{j,j^{'}}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(i)\right]. \tag{3.40}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_{k}(n)\}_{n\geq 1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\{\eta_{k}(n)\}_{n\geq 1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}[\xi_{k}(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}[\eta_{k}(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho<1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_{k}(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_{k}(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m, se denota por $B_{m}(t)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t; $B_{m}^{0}(t)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t, finalmente sea $C_{m}(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^{T}=\left(Q_{k}(t), A_{k}(t), B_{m}(t), B_{m}^{0}(t), C_{m}(t)\right) \tag{3.41}$$

para $k=1,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times(\{1,2,\ldots,K\}\times\{1,2,\ldots,S\})^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:
Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l (1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k (1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{3.42}$$
$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\, dx,\ \ 0 \leq a < b. \tag{3.43}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto $A2$) para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.
En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición 4.3.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente.
Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega \to \infty} \mathbb{E}[N(\omega)] = \overline{N} > 0$;

2) $\mathbb{E}[N(\omega)] \leq \overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r^m_{j,j^{'}}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta^m_{j,j^{'}}(n)$, con $\delta^m_{j,j^{'}}(n)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta^m_{j,j^{'}}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\left\{p^m_j\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r^m_{j,j^{'}}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^* := \sum_{j,j^{'}} p^m_j r^m_{j,j^{'}} \mathbb{E}\left[\delta^m_{j,j^{'}}(i)\right]. \tag{3.44}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como

$\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^{K}\rho_k < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [105].

Si denotamos por

- $Q_k(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_m(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_m^0(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right), \tag{3.45}$$

para $k = 1,\ldots,K$ y $m = 1,2,\ldots,M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1,2,\ldots,K\} \times \{1,2,\ldots,S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

A1) Los procesos $\xi_1,\ldots,\xi_K,\eta_1,\ldots,\eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1,\ldots,K \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1,\ldots,K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1,2,\ldots,K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{3.46}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k}\xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{3.47}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición 4.3.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3'$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [94, 95].

4. Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [98], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (2.1), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([98], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [95]

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [123]) en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x \{X(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la σ-algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D)$$

Definición 4.1. *Una medida no cero π en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ es* **invariante** *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbf{X}} P^t(x, D) \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 4.2. *El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 4.1. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [105]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama Proceso Harris recurrente positivo*.*

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot) \pi(dx)$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente.

Definición 4.3. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [94]:

Lema 4.1 (Lema 3.1, Dai[94])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{4.1}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris Recurrente Positivo.

Lema 4.2 (Lema 3.1, Dai [94])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{|x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 4.1 (Teorema 3.1, Dai[94])**.** *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{4.2}$$

entonces la ecuación (4.1) se cumple para $B = \{|x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.

Nota 4.2. *En Meyn and Tweedie [116] muestran que si* $P_x\{\tau_D<\infty\}\equiv 1$ *incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

Dado el proceso $X=\{X(t), t\geq 0\}$ definido en (3.45) que describe la dinámica del sistema de visitas cíclicas, si $U(t)$ es el residual de los tiempos de llegada al tiempo t entre dos usuarios consecutivos y $V(t)$ es el residual de los tiempos de servicio al tiempo t para el usuario que estás siendo atendido por el servidor. Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados que puede tomar el proceso X.

Lema 4.3 (Lema 4.3, Dai[94])**.** *Sea* $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ *con* $|x_n|\rightarrow\infty$, *conforme* $n\rightarrow\infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0)=\overline{U}_k,$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0)=\overline{V}_k.$$

a) Conforme $n\rightarrow\infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+}, \textit{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t\geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea e es un vector de unos, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{ll}1, & S(k)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema (3.2):

Teorema 4.2 (Teorema 4.1, Dai [94])**.** *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación, para casi todas las trayectorias muestrales* ω *y cualquier sucesión de estados iniciales* $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, *con* $|x_n|\rightarrow\infty$, *existe una subsucesión* $\{x_{n_j}\}$ *con* $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ *tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(0),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)\ \textit{ u.o.c.} \tag{4.4}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}(t)=Q(0)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}(t)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{4.5}$$

$$\overline{Q}(t)\geq 0, \tag{4.6}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{4.7}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{4.8}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{4.9}$$

$$\text{Condiciones en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{4.10}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 4.1 (Proposición 4.2, Dai [94]). *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de 2.14 y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. El flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t.$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t).$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \rho_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t).$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t),$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 4.4 (Lema 3.1, Chen [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Lema 4.5 (Lema 5.2, Gut [106]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r, \tag{4.11}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$.

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 4.3 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo, Gut [106])**.** *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$*. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$*.*

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$*, cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$*.*

Proposición 4.2 (Proposición 5.1, Dai y Sean [95])**.** *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{4.12}$$

Proposición 4.3 (Proposición 5.3, Dai y Sean [95])**.** *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$*,* $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$*.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X\left(t\right)|^p\right) dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right). \tag{4.13}$$

Proposición 4.4 (Proposición 5.4, Dai y Sean [95])**.** *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X*, sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$*, y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right) dt\right],$$

para $x \in X$*. Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C*, entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x \left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x \left[f\left(X\left(s\right)\right) ds\right] \leq \frac{1}{t} V\left(x\right) + k, \tag{4.14}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$*.*

Teorema 4.4 (Teorema 5.5, Dai y Sean [95])**.** *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q\left(s\right)|^p\right] ds \leq k_p \left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\}, \tag{4.15}$$

para $t \geq 0$*,* $x \in X$*. En particular para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q\left(s\right)|^p\right] ds \leq k_p. \tag{4.16}$$

Teorema 4.5 (Teorema 6.2 Dai y Sean [95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(x, \cdot\right) - \pi\left(\cdot\right) \parallel_{f_p} \rightarrow 0,$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$*. En particular para cada condición inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x \left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi \left[|Q_0|^p\right] < \infty,$$

donde

$$\parallel P^t\left(c, \cdot\right) - \pi\left(\cdot\right) \parallel_f = sup_{|g\leq f|} | \int \pi\left(dy\right) g\left(y\right) - \int P^t\left(x, dy\right) g\left(y\right) |,$$

para $x \in \mathbb{X}$.

Teorema 4.6 (Teorema 6.3, Dai y Sean [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)} \left|P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot)\right|_f = 0,$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)} \left|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]\right| = 0.$$

Proposición 4.5 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{4.17}$$

Teorema 4.7 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p \left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\}, \tag{4.18}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 4.8 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_\mathbb{X})$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\, ds = \pi(f) := \int f(x)\, \pi(dx), \tag{4.19}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 4.9 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{4.20}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{4.21}$$

Demostración 4.1 (Teorema 2.2). *La demostración de este teorema se da a continuación:*

i) Utilizando la proposición 4.3 se tiene que la proposición 4.4 es cierta para $f(x) = 1 + |x|^p$.

i) es consecuencia directa del Teorema 4.12.

iii) ver la demostración dada en Dai y Sean [95] páginas 1901-1902.

iv) ver Dai y Sean [95] páginas 1902-1903 ó [117].

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i). \tag{4.22}$$

suponiendo que el estado inicial de la red es $x = (q, a, b) \in X$, entonces para cada k

$$E_k^x(t) := \text{máx}\{n \geq 0 : A_k^x(0) + \psi_k(1) + \cdots + \psi_k(n-1) \leq t\} \tag{4.23}$$
$$S_k^x(t) := \text{máx}\{n \geq 0 : B_k^x(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(n-1) \leq t\} \tag{4.24}$$

Sea $T_k^x(t)$ el tiempo acumulado que el servidor $s(k)$ ha utilizado en los usuarios de la clase k en el intervalo $[0,t]$. Entonces se tienen las siguientes ecuaciones:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{k} \Phi_k^l S_l^x(T_l^x) - S_k^x(T_k^x) \tag{4.25}$$

$$Q^x(t) = (Q_1^x(t), \ldots, Q_K^x(t))^{'} \geq 0, \tag{4.26}$$

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))^{'} \geq 0, \text{ es no decreciente} \tag{4.27}$$

$$I_i^x(t) = t - \sum_{k \in C_i} T_k^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{4.28}$$

$$\int_0^\infty \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{4.29}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } (Q^x(\cdot), T^x(\cdot)) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{4.30}$$

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \tag{4.31}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola. Si se hace $|q| \rightarrow \infty$ y se mantienen las componentes restantes fijas, de la condición inicial x, cualquier punto límite del proceso normalizado $\overline{Q}^x$ es una solución del siguiente modelo de flujo, ver [94].

Definición 4.4. *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $(Q^x(\cdot), T^x(\cdot))$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk} \mu_l \overline{T}_l(t) \tag{4.32}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \textit{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{4.33}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \textit{ y } \overline{T}_k(\cdot) \textit{ es no decreciente,} \tag{4.34}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \textit{ es no decreciente} \tag{4.35}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \textit{ se incrementa al tiempot cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{4.36}$$

$$\textit{condiciones adicionales sobre } (Q^x(\cdot), T^x(\cdot)) \textit{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{4.37}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 4.32-4.37 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 4.5. *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 4.32-4.37, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{4.38}$$

Definición 4.6. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en [91].

Lema 4.1. *Si el modelo de flujo definido por 4.32-4.37 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|overlinex| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Supuestos necesarios sobre la red

Supuestos 4.1. *A1) $\psi_1, \ldots, \psi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\psi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\psi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{4.39}$$
$$P(\psi_k(1) + \ldots \psi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\, dx0 \text{ y} \tag{4.40}$$
$$\int_0^\infty q_k(x)\, dx > 0 \tag{4.41}$$

El argumento dado en [**?**] en el lema 4.2 se puede aplicar para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños.Entonces la condición $A3$) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 4.10. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] ds \leq \kappa_p \tag{4.42}$$

donde p es el entero dado por A2). Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r \tag{4.43}$$

para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

iii) EL primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0. \tag{4.44}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \tag{4.45}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

Demostración 4.2. *La demostración de este resultado se da aplicando los teoremas 4.11, 4.12, 4.13 y 4.14*

Definimos un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada. Bajo cualquier *preemptive buffer priority* disciplina de servicio, el estado $\mathbb{X}(t)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}(t) = (Q_k(t), A_l(t), B_k(t) : k = 1, 2, \ldots, K, l \in \mathcal{A}) \tag{4.46}$$

donde $Q_k(t)$ es la longitud de la cola para los usuarios de la clase k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k(t)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio. Los tiempos de arribo residuales, que son iguales al tiempo que queda hasta que el próximo usuario de la clase k llega, se denotan por $A_k(t)$. Tanto $B_k(t)$ como $A_k(t)$ se suponen continuos por la derecha.

Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x = (q, a, b)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = (q, a, b) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x| = |q| + |a| + |b|$. En [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho en el espacio de estadio medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, est definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y est adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; $\{P_x, x \in X\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in X$

$$P_x \{\mathbb{X}(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{\mathbb{X}(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la sigma algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(\mathbb{X}(t) \in D)$$

Definición 4.7. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_X P^t(x, D) \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 4.8. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

- Si X es Harris recurrente, entonces una única medida invariante π existe ([105]).
- Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama *Harris recurrente positiva.*
- Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria y hacemos

  $$P_\pi(\cdot) [= \int_X P_x(\cdot) \pi(dx)$$

  y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, as, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π

Definición 4.9. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.[4]

El modelo está compuesto por c colas de capacidad infinita, etiquetadas de 1 a c las cuales son atendidas por s servidores. Los servidores atienden de acuerdo a una cadena de Markov independiente $\left(X_n^i\right)_n$ con $1 \leq i \leq s$ y $n \in \{1, 2, \ldots, c\}$ con la misma matriz de transición $r_{k,l}$ y única medida invariante (p_k). Cada servidor permanece atendiendo en la cola un periodo llamado de visita y determinada por la política de servicio asignada a la cola.

Los usuarios llegan a la cola k con una tasa λ_k y son atendidos a una razón μ_k. Las sucesiones de tiempos de interarribo $(\tau_k(n))_n$, la de tiempos de servicio $\left(\sigma_k^i(n)\right)_n$ y la de tiempos de cambio $\left(\sigma_{k,l}^{0,i}(n)\right)_n$ requeridas en la cola k para el servidor i son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas con distribución general independiente de i, con media $\sigma_k = \frac{1}{\mu_k}$, respectivamente $\sigma_{k,l}^0 = \frac{1}{\mu_{k,l}^0}$, e independiente de las cadenas de Markov $\left(X_n^i\right)_n$. Además se supone que los tiempos de interarribo se asume son acotados, para cada $\rho_k = \lambda_k\sigma_k < s$ para asegurar la estabilidad de la cola k cuando opera como una cola $M/GM/1$.

Una política de servicio determina el número de usuarios que serán atendidos sin interrupción en periodo de servicio por los servidores que atienden a la cola. Para un solo servidor esta se define a través de una función f donde $f(x, a)$ es el número de usuarios que son atendidos sin interrupción cuando el servidor llega a la cola y encuentra x usuarios esperando dado el tiempo transcurrido de interarribo a. Sea $v(x, a)$ la duración del periodo de servicio para una sola condición inicial (x, a).

Las políticas de servicio consideradas satisfacen las siguientes propiedades:

i) Hay conservación del trabajo, es decir

$$v(x, a) = \sum_{l=1}^{f(x,a)} \sigma(l)$$

con $f(0, a) = v(0, a) = 0$, donde $(\sigma(l))_l$ es una sucesión independiente e idénticamente distribuida de los tiempos de servicio solicitados.

ii) La selección de usuarios para se atendidos es independiente de sus correspondientes tiempos de servicio y del pasado hasta el inicio del periodo de servicio. Así las distribución (f, v) no depende del orden en el cuál son atendidos los usuarios.

iii) La política de servicio es monótona en el sentido de que para cada $a \geq 0$ los números $f(x, a)$ son monótonos en distribución en x y su límite en distribución cuando $x \to \infty$ es una variable aleatoria F^{*0} que no depende de a.

iv) El número de usuarios atendidos por cada servidor es acotado por $f^{min}(x)$ de la longitud de la cola x que además converge monótonamente en distribución a F^* cuando $x \to \infty$

El sistema de colas se describe por medio del proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ como se define a continuación. El estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = (Q(t), P(t), A(t), R(t), C(t))$$

donde

- $Q(t) = (Q_k(t))_{k=1}^c$, número de usuarios en la cola k al tiempo t.
- $P(t) = \left(P^i(t)\right)_{i=1}^s$, es la posición del servidor i.
- $A(t) = (A_k(t))_{k=1}^c$, es el residual del tiempo de arribo en la cola k al tiempo t.
- $R(t) = \left(R_k^i(t), R_{k,l}^{0,i}(t)\right)_{k,l,i=1}^{c,c,s}$, el primero es el residual del tiempo de servicio del usuario atendido por servidor i en la cola k al tiempo t, la segunda componente es el residual del tiempo de cambio del servidor i de la cola k a la cola l al tiempo t.

[4] En [116] muestran que si $P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ solamente para uno conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris recurrente

- $C(t) = \left(C_k^i(t)\right)_{k,i=1}^{c,s}$, es la componente correspondiente a la cola k y al servidor i que está determinada por la política de servicio en la cola k y que hace al proceso $X(t)$ un proceso de Markov.

Todos los procesos definidos arriba se suponen continuos por la derecha.

El proceso X tiene la propiedad fuerte de Markov y su espacio de estados es el espacio producto

$$\mathcal{X} = \mathbb{N}^c \times E^s \times \mathbb{R}_+^c \times \mathbb{R}_+^{cs} \times \mathbb{R}_+^{c^2 s} \times \mathcal{C}$$

donde $E = \{1, 2, \ldots, c\}^2 \cup \{1, 2, \ldots, c\}$ y $\mathcal{C}$ depende de las políticas de servicio.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1. $$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0 \tag{4.47}$$

2. $$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N} \tag{4.48}$$

   para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m} = r_{j,j^{'}}$
- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.
- Finalmente, se define
$$\delta^{*} := \sum_{j,j^{'}} p_j r_{j,j^{'}} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right]. \tag{4.49}$$

El *token passing ring* es una estación de un solo servidor con K clases de usuarios. Cada clase tiene su propio regulador en la estación. Los usuarios llegan al regulador con razón α_k y son atendidos con taza μ_k.

La red se puede modelar como un Proceso de Markov con espacio de estados continuo, continuo en el tiempo:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t), B_k^0(t), C(t) : k = 1, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right) \tag{4.50}$$

donde $Q_k(t), B_k(t)$ y $A_k(t)$ se define como en 4.46, $B_k^0(t)$ es el tiempo residual de cambio de la clase k a la clase $k+1\,(modK)$; $C(t)$ indica el número de servicios que han sido comenzados y/o completados durante la sesión activa del buffer.

Los parámetros cruciales son la carga nominal de la cola k: $\beta_k = \alpha_k/\mu_k$ y la carga total es $\rho_0 = \sum \beta_k$, la media total del tiempo de cambio en un ciclo del token está definido por

$$u^0 = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}\left[\eta_k^0(1)\right] = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\mu_k^0} \tag{4.51}$$

El proceso de la longitud de la cola $Q_k^x(t)$ y el proceso de acumulación del tiempo de servicio $T_k^x(t)$ para el buffer k y para el estado inicial x se definen como antes. Sea $T_k^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el token tarda en cambiar del buffer k al $k+1 \mod K$. Suponga que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^{x,0}(|x|t)\right) \tag{4.52}$$

cuando $|x| \rightarrow \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t), \overline{T}^0(t)\right)$ es un flujo límite retrasado del token ring.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado

Proposición 4.6. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de 4.52 y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 4.2. *El proceso estocástico* Φ *es un proceso de markov fuerte, temporalmente homogéneo, con trayectorias muestrales continuas por la derecha, cuyo espacio de estados* Y *es igual a* $X\times\mathbb{R}$

Proposición 4.7. *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_{0}>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{4.53}$$

Lema 4.3. *Sea* $\left\{\zeta\left(k\right):k\in F\right\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)=max\left(n\geq1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. *Si* $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{4.54}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 4.11. *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_{p} *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{4.55}$$

para $t>0$ *y* $x\in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 4.12. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$||P^{t}(x,\cdot)-\pi(\cdot)||_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{4.56}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q(t)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q(0)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 4.13. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x)=f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}||P^{t}(x,\cdot)-\pi(\cdot)||_{f}=0. \tag{4.57}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 4.14. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f: X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f(X(s))\,ds=\pi(f):=\int f(x)\,\pi(dx) \tag{4.58}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f: X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi(|f|)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x)=N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1. $$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right]=\overline{N}>0 \tag{4.59}$$

2. $$\mathbb{E}\left[N(x)\right]\leq\overline{N} \tag{4.60}$$

   para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}=r_{j,j^{'}}$
- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right]\geq0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}r_{j,j^{'}}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right]. \tag{4.61}$$

Referencias

[1] Asmussen, S. (1987). *Applied Probability and Queues*. John Wiley and Sons.

[2] Bhat, N. (2008). *An Introduction to Queueing Theory: Modelling and Analysis in Applications*. Birkhauser.

[3] Boxma, J. O. (1987). Pseudoconservation Laws in Cyclic Service Systems. *Journal of Applied Probability*, 24, 949-964.

[4] Borovkov, A. A., and Schassberger, R. (1995). Ergodicity of a Polling Network. *Stochastic Processes and their Applications*, 50(2), 253-262.

[5] van den Bos, L., and Boon, M. (2013). *Networks of Polling Systems* (report). Eindhoven University of Technology.

[6] Boon, M. A. A., van der Mei, R. D., and Winands, E. M. M. (2011). Applications of Polling Systems. February 24, 2011.

[7] Ng, C. H., and Soong, B. H. (2008). *Queueing Modelling Fundamentals with Applications in Communications Networks*. John Wiley and Sons.

[8] Chen, H. (1995). Fluid Approximations and Stability of Multiclass Queueing Networks I: Work-conserving Disciplines. *Annals of Applied Probability*.

[9] Cooper, R. B. (1970). Queues Served in Cyclic Order: Waiting Times. *The Bell System Technical Journal*, 49, 399-413.

[10] Dai, J. G. (1995). On Positive Harris Recurrence of Multiclass Queueing Networks: A Unified Approach Via Fluid Limit Models. *The Annals of Applied Probability*, 5(1), 49-77.

[11] Dai, J. G., and Meyn, S. P. (1995). Stability and Convergence of Moments for Multiclass Queueing Networks Via Fluid Limit Models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(11), 1889-1904.

[12] Dai, J. G., and Weiss, G. (1996). Stability and Instability of Fluid Models for Reentrant Lines. *Mathematics of Operations Research*, 21(1), 115-134.

[13] Daley, D. J. (1968). The Correlation Structure of the Output Process of Some Single Server Queueing Systems. *The Annals of Mathematical Statistics*, 39(3), 1007-1019.

[14] Davis, M. H. A. (1984). Piecewise Deterministic Markov Processes: A General Class of Nondiffusion Stochastic Models. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 46(3), 353-388.

[15] Down, D. (1998). On the Stability of Polling Models with Multiple Servers. *Journal of Applied Probability*, 35(3), 925-935.

[16] Disney, R. L., Farrell, R. L., and Morais, P. R. (1973). A Characterization of $M/G/1$ Queues with Renewal Departure Processes. *Management Science*, 19(11), Theory Series, 1222-1228.

[17] Eisenberg, M. (1972). Queues with Periodic Service and Changeover Time. *Operations Research*, 20(2), 440-451.

[18] Fricker, C., and Jaïbi, M. R. (1994). Monotonicity and Stability of Periodic Polling Models. *Queueing Systems*, 15(1-4), 211-238.

[19] Getoor, R. K. (1979). Transience and Recurrence of Markov Processes. In J. Azema and M. Yor (Eds.), *Seminaire de Probabilités XIV* (pp. 397-409). New York: Springer-Verlag.

[20] Gut, A. (1995). *Stopped Random Walks: Limit Theorems and Applications*. Applied Probability.

[21] Kaspi, H., and Mandelbaum, A. (1992). Regenerative Closed Queueing Networks. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 39(4), 239-258.

[22] Kleinrock, L. (1975). *Queueing Systems: Theory, Volume 1*. Wiley-Interscience.

[23] Konheim, A. G., Levy, H., and Srinivasan, M. M. (1994). Descendant Set: An Efficient Approach for the Analysis of Polling Systems. *IEEE Transactions on Communications*, 42(2-4), 1245-1253.

[24] Lang, S. (1973). *Calculus of Several Variables*. Addison-Wesley Publishing Company.

[25] Levy, H., and Sidi, M. (1990). Polling Systems: Applications, Modeling, and Optimization. *IEEE Transactions on Communications*, 30(10), 1750-1760.

[26] Fricker, C., and Jaïbi, M. R. (1998). Stability of Multi-server Polling Models. Institute National de Recherche en Informatique et en Automatique.

[27] Meyn, S. P., and Tweedie, R. L. (1993). *Markov Chains and Stochastic Stability*. Springer-Verlag.

[28] Meyn, S. P., and Down, D. (1994). Stability of Generalized Jackson Networks. *The Annals of Applied Probability*.

[29] van der Mei, R. D., and Borst, S. C. (1997). Analysis of Multiple-server Polling Systems by Means of the Power-Series Algorithm. *Stochastic Models*, 13(2), 339-369.

[30] Meyn, S. P. (1995). Transience of Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models. *The Annals of Applied Probability*, 5(4), 946-957.

[31] Adan, I. J. B. F., van Leeuwaarden, J. S. H., and Winands, E. M. M. (2006). On the Application of Rouche's Theorem in Queueing Theory. *Operations Research Letters*, 34(3), 355-360.

[32] Roubos, A. (2007). *Polling Systems and their Applications*. Vrije Universiteit Amsterdam.

[33] Saavedra, B. P. (2011). Informe Técnico del Microsimulador. Departamento de Matemáticas.

[34] Vishnevskii, V. M., and Semenova, O. V. (2006). Mathematical Methods to Study the Polling Systems. *Automation and Remote Control*, 67(2), 173-220.

[35] Serfozo, R. (2009). *Basics of Applied Stochastic Processes*. Springer-Verlag.

[36] Sharpe, M. (1998). *General Theory of Markov Processes*. Academic.

[37] Sigman, K. (1990). The Stability of Open Queueing Networks. *Stochastic Processes and their Applications*, 35(1), 11-15.

[38] Sidi, M., and Levy, H. (1990). Customer Routing in Polling Systems. In P. King, I. Mitrani, and R. Pooley (Eds.), *Proceedings Performance '90*. North-Holland, Amsterdam.

[39] Sidi, M., and Levy, H. (1991). Polling Systems with Simultaneous Arrivals. *IEEE Transactions on Communications*, 39(6), 823-827.

[40] Sigman, K., Thorisson, H., and Wolff, R. W. (1994). A Note on the Existence of Regeneration Times. *Journal of Applied Probability*, 31, 1116-1122.

[41] Stidham, S. Jr. (1972). Regenerative Processes in the Theory of Queues, with Applications to the Alternating Priority Queue. *Advances in Applied Probability*, 4(3), 542-577.

[42] Takagi, H. (1986). *Analysis of Polling Systems*. Cambridge: MIT Press.

[43] Takagi, H., and Kleinrock. (1986). Analysis of Polling Systems. Cambridge: MIT Press.

[44] Takagi, H. (1988). Queueing Analysis of Polling Models. *ACM Computing Surveys*, 20(1), 5-28.

[45] Thorisson, H. (2000). *Coupling, Stationarity, and Regeneration*. Probability and its Applications. Springer-Verlag.

[46] Winands, E. M. M., Adan, I. J. B. F., and van Houtum, G. J. (2006). Mean Value Analysis for Polling Systems. *Queueing Systems*, 54, 35-44.

[47] James, G., Witten, D., Hastie, T., and Tibshirani, R. (2013). *An Introduction to Statistical Learning: with Applications in R*. Springer.

[48] Hosmer, D. W., Lemeshow, S., and Sturdivant, R. X. (2013). *Applied Logistic Regression* (3rd ed.). Wiley.

[49] Bishop, C. M. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer.

[50] Harrell, F. E. (2015). *Regression Modeling Strategies: With Applications to Linear Models, Logistic and Ordinal Regression, and Survival Analysis*. Springer.

[51] R Documentation and Tutorials: `https://cran.r-project.org/manuals.html`

[52] Tutorials on R-bloggers: `https://www.r-bloggers.com/`

[53] Coursera: *Machine Learning* by Andrew Ng.

[54] edX: *Data Science and Machine Learning Essentials* by Microsoft.

[55] Ross, S. M. (2014). *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*. Academic Press.

[56] DeGroot, M. H., and Schervish, M. J. (2012). *Probability and Statistics* (4th ed.). Pearson.

[57] Hogg, R. V., McKean, J., and Craig, A. T. (2019). *Introduction to Mathematical Statistics* (8th ed.). Pearson.

[58] Kleinbaum, D. G., and Klein, M. (2010). *Logistic Regression: A Self-Learning Text* (3rd ed.). Springer.

[59] Wasserman, L. (2004). *All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference*. Springer.

[60] Probability and Statistics Tutorials on Khan Academy: `https://www.khanacademy.org/math/statistics-probability`

[61] Online Statistics Education: `http://onlinestatbook.com/`

[62] Peng, C. Y. J., Lee, K. L., and Ingersoll, G. M. (2002). *An Introduction to Logistic Regression Analysis and Reporting*. The Journal of Educational Research.

[63] Agresti, A. (2007). *An Introduction to Categorical Data Analysis* (2nd ed.). Wiley.

[64] Han, J., Pei, J., and Kamber, M. (2011). *Data Mining: Concepts and Techniques*. Morgan Kaufmann.

[65] Data Cleaning and Preprocessing on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/data-cleaning-and-preprocessing`

[66] Molinaro, A. M., Simon, R., and Pfeiffer, R. M. (2005). *Prediction Error Estimation: A Comparison of Resampling Methods*. Bioinformatics.

[67] Evaluating Machine Learning Models on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/evaluating-machine-learning-models`

[68] Practical Guide to Logistic Regression in R on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/practical-guide-to-logistic-regression-in-r`

[69] Coursera: *Statistics with R* by Duke University.

[70] edX: *Data Science: Probability* by Harvard University.

[71] Coursera: *Logistic Regression* by Stanford University.

[72] edX: *Data Science: Inference and Modeling* by Harvard University.

[73] Coursera: *Data Science: Wrangling and Cleaning* by Johns Hopkins University.

[74] edX: *Data Science: R Basics* by Harvard University.

[75] Coursera: *Regression Models* by Johns Hopkins University.

[76] edX: *Data Science: Statistical Inference* by Harvard University.

[77] An Introduction to Survival Analysis on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/an-introduction-to-survival-analysis`

[78] Multinomial Logistic Regression on DataCamp: `https://www.datacamp.com/community/tutorials/multinomial-logistic-regression-R`

[79] Coursera: *Survival Analysis* by Johns Hopkins University.

[80] edX: *Data Science: Statistical Inference and Modeling for High-throughput Experiments* by Harvard University.

[81] Sigman, K., and Wolff, R. W. (1993). A Review of Regenerative Processes. *SIAM Review*, 38(2), 269-288.

[82] I.J.B.F. Adan, J.S.H. van Leeuwaarden, and E.M.M. Winands. On the application of Rouches theorem in queueing theory. Operations Research Letters, 34(3):355-360, 2006.

[83] Asmussen Soren, Applied Probability and Queues, John Wiley and Sons, 1987.

[84] Bhat Narayan, An Introduction to Queueing Theory Modelling and Analysis in Applications, Birkhauser, 2008.

[85] Boxma J. O., Analysis and Optimization of Polling Systems, Queueing, Performance and Control in ATM, pp. 173-183, 1991.

[86] Boxma J. O., Pseudoconservation Laws in Cyclic Service Systems, Journal of Applied Probability, vol. 24, 1987, pp. 949-964.

[87] Boon M.A.A., Van der Mei R.D. and Winands E.M.M., Applications of Polling Systems, 2011.

[88] Borovkov. A. A. and Schassberger R., Ergodicity of a Polling Network, Stochastic Processes and their Applications, vol. 50, no. 2, 1995, pp. 253-262.

[89] Laurent van den Bos and Marko Boon, Networks of Polling Systems (report), Eindhoven University of Technology, 2013.

[90] Chee-Hook Ng. y Boon-Hee Soong, Queueing Modelling Fundemantals with Applications in Communications Networks, John-Wiley and Sons, Ltd, 2008.

[91] Chen H., Fluid Approximations and Stability of Multiclass Queueing Networks I: Work-Conserving Disciplines, Annals Applied Probabability, vol. 5, no. 3, 1995, pp. 637-665.

[92] R.B. Cooper, G. Murray, Queues served in cyclic order (The Bell System Technical Journal, 48 (1969) 675-689).

[93] R.B. Cooper, Queues served in cyclic order: waiting times (The Bell System Technical Journal, 49 (1970) 399-413).

[94] Dai Jean G., On positive Harris Recurrence of Multiclass Queueing Networks: A Unified Approach Via Fluid Limit Models, The Annals of Applied Probability, vol. 5, No. 1, 1995, pp. 49-77.

[95] Dai Jim G. and Meyn Sean P., Stability and Convergence of Moments for Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models, IEEE transactions on Automatic Control, vol. 40, No. 11, 1995, pp. 1889-1904.

[96] Dai Jim G. and Weiss G., Stability and Inestability of Fluid Models for Reentrant Lines, Mathematics of Operation Research, vol. 21, no. 1, 1996, pp. 115-134.

[97] D.J. Daley, The correlation structure of the output process of some single server queueing systems, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 39. No. 3, pp. 1007-1019, 1968.

[98] Davis, M. H. A., Piecewise Deterministic Markov Processes: A General Class of Nondifussion Stochastic Models. Journal of Royal Statistics Society Serie B, vol. 46, no. 3, 1984, pp. 353-388.

[99] Down D., On the Stability of Polling Models with Multiple Servers, Journal of Applied Probability, vol. 35, no. 3, 1998, pp. 925-935.

[100] D.J. Daley, The correlation structure of the output process of some single server queueing systems, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 39. No. 3, pp. 1007-1019, 1968.

[101] Ralpjh L. Disney, Robert L. Farrell and Paulo Renato Morais, A Characterization of $M/G/1$ Queues with Renewal Departure Processes, Manage of Science, Vol. 19, No. 11, Theory Series, pp. 1222-1228, 1973.

[102] M. Eisenberg, Queues with periodic service and changeover time (Operations Research, 20 (2)(1972) 440-451).

[103] Fricker Christine and Jaïbi M.R., Monotonicity and Stability of Periodic Polling Models, Queueing Systems, vol. 15, no. 1-4, 1994, pp. 211-238.

[104] Fricker Christine and Jaïbi M.R., Stability of Multi-Server Polling Models, Institute National de Recherche en Informatique et en Automatique, Issue 3347, 1998.

[105] Getoor R. K., Transience and recurrence of Markov processes, Siminaire de Probabilitis XIV, J. Azema and M Yor, Eds. New York Springer-Verlag, 1979.

[106] Gut A., Stopped Random Walks: Limit Theorems and Applications, Applied Probability, 1995.

[107] Chee-Hook Ng. y Boon-Hee Soong, Queueing Modelling Fundemantals with Applications in Communications Networks, John-Wiley and Sons, Ltd, 2008.

[108] Kaspi H. and Mandelbaum A., Regenerative Closed Queueing Networks, Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, vol. 39, no. 4, 1992, pp. 239-258.

[109] A.G. Konheim, H. Levy, M.M. Srinivasan, Descendant set: an efficient approach for the analysis of polling systems (IEEE Transactions on Communications, 42 (2/3/4)(1994) 1245-1253).

[110] Leonard Kleinrock, Theory, Volume 1, Queueing Systems Wiley-Interscience, 1975,

[111] A. G. Konheim, h. Levy and M. M. Srinivasan. Descendant set: an efficient approach for the analysis of polling systems. IEEE Trabsanctions on Communications, 42(2-4): pp. 1245-1253, 1994.

[112] Serge Lang, Calculus of Several Variables, Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

[113] Levy Hanoch y Sidi Moshe , Polling Systems: Applications, Modeling, and Optimization, IEEE Transactions on Communications, vol. 30, no. 10, 1990, pp. 1750-1760.

[114] van der Mei, R.D. and Borst, S. C., Analysis of Multiple-Server Polling Systems by Means of the Power-Series Algorithm, Stochastic Models, vol. 13, no. 2, 1997, pp. 339-369.

[115] Meyn Sean P., Transience of Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models, The Annals of Applied Probability, vol. 5, no. 4, 1995, pp.946-957.

[116] Meyn S. P. and Tweedie R. L., Stability of Markovian Processes II:Continuous Time Processes and Sample Chains, Advanced Applied Pobability, vol. 25, 1993, pp. 487-517.

[117] Meyn S. P. and Tweedie R. L., Markov Chains and Stochastic Stability, 1993.

[118] Meyn, S.P. and Down, D., Stability of Generalized Jackson Networks, The Annals of Applied Probability, 1994.

[119] Roubos Alex, Polling Systems and their Applications, Vrije Universiteit Amsterdam, 2007.

[120] Saavedra B. P., Informe Técnico del Microsimulador, Departamento de Matemátias, 2011.

[121] Vishnevskii V.M. and Semenova O.V., Mathematical Methods to Study the Polling Systems, Automation and Remote Control, vol. 67, no. 2, 2006, pp. 173-220.

[122] Richard Serfozo, Basics of Applied Stochastic Processes, Springer-Verlag, 2009.

[123] Sharpe Michael , General Theory of Markov Processes. Boston, M.A. Academic, 1998.

[124] Sigman Karl, The Stability of Open Queueing Networks, Stochastic Processes and their Applications, vol. 35, no. 1, 1990, pp. 11-15.

[125] Sidi M. and Levy H., Customer Routing in Polling Systems, In: P. King, I. Mitrani, and R. Pooley (Eds.), Proceedings Performance '90, North-Holland, Amsterdam, 1990.

[126] Sidi M. and Levy H., Polling Systems with Simultaneus Arrivals. IEEE Transactions on Communications, vol. 39, no. 6, 1991, pp. 823-827.

[127] Karl Sigman, Hermann Thorisson and Ronald W. Wolff, A Note on the Existence of Regeneration Times, Journal of Applied Probability, vol. 31, pp. 1116-1122, 1994.

[128] Shaler Stidham, Jr., Regenerative Processes in the theory ow queues, with applications to the alternating priority queue, Advances in Applied Probability, Vol. 4, no. 3, 1972,pp. 542-577.

[129] Takagi H., Analysis of Polling Systems, Cambdrige: MIT Press, 1986

[130] Takagi H. and Kleinrock, Analysis of Polling Systems, Cambdrige: MIT Press, 1986

[131] Takagi Hideaki, Queueing Analysis of Polling Models, ACM computing Surveys, vol. 20, no. 1, 1988, pp. 5-28.

[132] Hermann Thorisson, Coupling, Stationarity, and Regeneration, Probability and its Applications, Springer-Verlag, 2000.

[133] E.M.M. Winands, I.J.B.F. Adan adn G.J. van Houtum, Mean value analysis for polling systems, Queueing Systems (2006), 54:35-44,

[134] Konheim, A.G. and Meister, B., Waiting Lines and Times in a System with Polling, J. ACM, 1974, vol. 21, n0. 3, pp. 470-490.

[135] Levy, H. and Kleinrock, L., Polling Systems with Zero Switch-over Periods: A General Method for Analysis the Expected DElay, Performance Evaluat., 1991, vol. 13, no. 2, pp. 97-107.

[136] Yechiali, U., Analysis and Control of Polling systems, in Performance Evaluation of Computer and Communications Systems, Donatiello, L. and Nelson R., Eds. Berlin: Springer Verlag, 1993, pp. 630-650.

Índice alfabético