Temas Selectos de Probabilidad

Carlos E. Martínez-Rodríguez

Julio 2024

Contents

Part I

CUARTA PARTE: MODELOS DE FLUJO

CAPÍTULO 1

MODELOS DE FLUJO

1.1 Funciones Generadoras de Probabilidades

Teorema 1.1.1 (Teorema de Continuidad). *Supóngase que* $\{X_n, n = 1, 2, 3, \ldots\}$ *son variables aleatorias finitas, no negativas con valores enteros tales que* $P(X_n = k) = p_k^{(n)}$, *para* $n = 1, 2, 3, \ldots$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *con* $\sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(n)} = 1$, *para* $n = 1, 2, 3, \ldots$. *Sea* g_n *la PGF para la variable aleatoria* X_n. *Entonces existe una sucesión* $\{p_k\}$ *tal que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} p_k^{(n)} = p_k \text{ para } 0 < s < 1.$$

En este caso, $g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$. *Además*

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \text{ si y sólo si } lim_{s\uparrow 1} g(s) = 1$$

Teorema 1.1.2. *Sea* N *una variable aleatoria con valores enteros no negativos finita tal que* $P(N = k) = p_k$, *para* $k = 0, 1, 2, \ldots$, *y* $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = P(N < \infty) = 1$. *Sea* Φ *la PGF de* N *tal que* $g(s) = \mathbb{E}\left[s^N\right] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$ *con* $g(1) = 1$. *Si* $0 \leq p_1 \leq 1$ *y* $\mathbb{E}[N] = g^{'}(1) \leq 1$, *entonces no existe solución de la ecuación* $g(s) = s$ *en el intervalo* $[0, 1)$. *Si* $\mathbb{E}[N] = g^{'}(1) > 1$, *lo cual implica que* $0 \leq p_1 < 1$, *entonces existe una única solución de la ecuación* $g(s) = s$ *en el intervalo* $[0, 1)$.

Teorema 1.1.3. *Si* X *y* Y *tienen PGF* G_X *y* G_Y *respectivamente, entonces,*

$$G_X(s) = G_Y(s)$$

para toda s, *si y sólo si*

$$P(X = k)) = P(Y = k)$$

para toda $k = 0, 1, \ldots,$, *es decir, si y sólo si* X *y* Y *tienen la misma distribución de probabilidad.*

Teorema 1.1.4. *Para cada* n *fijo, sea la sucesióin de probabilidades* $\{a_{0,n}, a_{1,n}, \ldots,\}$, *tales que* $a_{k,n} \geq 0$ *para toda* $k = 0, 1, 2, \ldots$, *y* $\sum_{k\geq 0} a_{k,n} = 1$, *y sea* $G_n(s)$ *la correspondiente función generadora,* $G_n(s) = \sum_{k\geq 0} a_{k,n} s^k$. *De modo que para cada valor fijo de* k

$$lim_{n\rightarrow\infty} a_{k,n} = a_k,$$

es decir converge en distribución, es necesario y suficiente que para cada valor fijo $s \in [0,)$,

$$lim_{n\rightarrow\infty} G_n(s) = G(s),$$

donde $G(s) = \sum_{k\geq 0} p_k s^k$, *para cualquier*

la función generadora del límite de la sucesión.

Teorema 1.1.5 (Teorema de Abel)**.** *Sea* $G(s) = \sum_{k\geq 0} a_k s^k$ *para cualquier* $\{p_0, p_1, \ldots,\}$*, tales que* $p_k \geq 0$ *para toda* $k = 0, 1, 2, \ldots,$*. Entonces* $G(s)$ *es continua por la derecha en* $s = 1$*, es decir*

$$lim_{s\uparrow 1} G(s) = \sum_{k\geq 0} p_k = G(),$$

sin importar si la suma es finita o no.

Nota 1.1.1. *El radio de Convergencia para cualquier PGF es* $R \geq 1$*, entonces, el Teorema de Abel nos dice que aún en el peor escenario, cuando* $R = 1$*, aún se puede confiar en que la PGF será continua en* $s = 1$*, en contraste, no se puede asegurar que la PGF será continua en el límite inferior* $-R$*, puesto que la PGF es simétrica alrededor del cero: la PGF converge para todo* $s \in (-R, R)$*, y no lo hace para* $s < -R$ *o* $s > R$*. Además nos dice que podemos escribir* $G_X(1)$ *como una abreviación de* $lim_{s\uparrow 1} G_X(s)$*.*

Entonces si suponemos que la diferenciación término a término está permitida, entonces

$$G_X^{'}(s) = \sum_{x=1}^{\infty} x s^{x-1} p_x$$

el Teorema de Abel nos dice que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \lim_{s\uparrow 1} G_X^{'}(s): \\
\mathbb{E}[X] &= = \sum_{x=1}^{\infty} x p_x = G_X^{'}(1) \\
&= \lim_{s\uparrow 1} G_X^{'}(s),
\end{aligned}$$

dado que el Teorema de Abel se aplica a

$$G_X^{'}(s) = \sum_{x=1}^{\infty} x s^{x-1} p_x,$$

estableciendo así que $G_X^{'}(s)$ es continua en $s = 1$. Sin el Teorema de Abel no se podría asegurar que el límite de $G_X^{'}(s)$ conforme $s \uparrow 1$ sea la respuesta correcta para $\mathbb{E}[X]$.

Nota 1.1.2. *La PGF converge para todo* $|s| < R$*, para algún* R*. De hecho la PGF converge absolutamente si* $|s| < R$*. La PGF además converge uniformemente en conjuntos de la forma* $\left\{s : |s| < R^{'}\right\}$*, donde* $R^{'} < R$*, es decir,* $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{Z}$ *tal que* $\forall s$*, con* $|s| < R^{'}$*, y* $\forall n \geq n_0$*,*

$$|\sum_{x=0}^{n} s^x \mathbb{P}(X = x) - G_X(s)| < \epsilon.$$

De hecho, la convergencia uniforme es la que nos permite diferenciar término a término:

$$G_X(s) = \mathbb{E}\left[s^X\right] = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \mathbb{P}(X = x),$$

y sea $s < R$*.*

1.

$$\begin{aligned}
G_X^{'}(s) &= \frac{d}{ds}\left(\sum_{x=0}^{\infty} s^x \mathbb{P}(X = x)\right) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{d}{ds}\left(s^x \mathbb{P}(X = x)\right) \\
&= \sum_{x=0}^{n} x s^{x-1} \mathbb{P}(X = x).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_a^b G_X(s)\,ds &= \int_a^b \left(\sum_{x=0}^{\infty} s^x \mathbb{P}(X=x)\right) ds = \sum_{x=0}^{\infty}\left(\int_a^b s^x \mathbb{P}(X=x)\,ds\right)\\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{s^{x+1}}{x+1}\mathbb{P}(X=x),\end{aligned}$$

para $-R < a < b < R$.

Teorema 1.1.6 (Teorema de Convergencia Monótona para PGF)**.** *Sean X y X_n variables aleatorias no negativas, con valores en los enteros, finitas, tales que*

$$lim_{n\to\infty} G_{X_n}(s) = G_X(s)$$

para $0 \leq s \leq 1$, entonces

$$lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k),$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

El teorema anterior requiere del siguiente lema

Lema 1.1.1. *Sean $a_{n,k} \in \mathbb{Z}^+$, $n \in \mathbb{N}$ constantes no negativas con $\sum_{k\geq 0} a_{k,n} \leq 1$. Supóngase que para $0 \leq s \leq 1$, se tiene*

$$a_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n}s^k \to a(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k.$$

Entonces

$$a_{0,n} \to a_0.$$

1.2 El problema de la ruina del jugador

Supongamos que se tiene un jugador que cuenta con un capital inicial de $\tilde{L}_0 \geq 0$ unidades, esta persona realiza una serie de dos juegos simultáneos e independientes de manera sucesiva, dichos eventos son independientes e idénticos entre sí para cada realización. Para $n \geq 0$ fijo, la ganancia en el n-ésimo juego es $\tilde{X}_n = X_n + Y_n$ unidades de las cuales se resta una cuota de 1 unidad por cada juego simultáneo, es decir, se restan dos unidades por cada juego realizado. En términos de la teoría de colas puede pensarse como el número de usuarios que llegan a una cola vía dos procesos de arribo distintos e independientes entre sí. Su Función Generadora de Probabilidades (FGP) está dada por $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{L}_0}\right]$ para $z \in \mathbb{C}$, además

$$\tilde{P}(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{X}_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n+Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n}z^{Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right]\mathbb{E}\left[z^{Y_n}\right] = P(z)\check{P}(z),$$

con $\tilde{\mu} = \mathbb{E}\left[\tilde{X}_n\right] = \tilde{P}[z] < 1$. Sea $\tilde{L}_n$ el capital remanente después del n-ésimo juego. Entonces

$$\tilde{L}_n = \tilde{L}_0 + \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \cdots + \tilde{X}_n - 2n.$$

La ruina del jugador ocurre después del n-ésimo juego, es decir, la cola se vacía después del n-ésimo juego, entonces sea T definida como $T = min\left\{\tilde{L}_n = 0\right\}$. Si $\tilde{L}_0 = 0$, entonces claramente $T = 0$. En este sentido T puede interpretarse como la longitud del periodo de tiempo que el servidor ocupa para dar servicio en la cola, comenzando con $\tilde{L}_0$ grupos de usuarios presentes en la cola, quienes arribaron conforme a un proceso dado por $\tilde{P}(z)$.

Sea $g_{n,k}$ la probabilidad del evento de que el jugador no caiga en ruina antes del n-ésimo juego, y que además tenga un capital de k unidades antes del n-ésimo juego, es decir, dada $n \in \{1, 2, \ldots\}$ y $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

$$g_{n,k} := P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1, \ldots, n, \tilde{L}_n = k\right\},$$

la cual además se puede escribir como:

$$
\begin{aligned}
g_{n,k} &= P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1, \ldots, n, \tilde{L}_n = k\right\} = \sum_{j=1}^{k+1} g_{n-1,j} P\left\{\tilde{X}_n = k - j + 1\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1\right\} = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1, Y_n = l\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1 | Y_n = l\right\} P\left\{Y_n = l\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n = k - j - l + 1\right\} P\left\{Y_n = l\right\},
\end{aligned}
$$

es decir

$$
g_{n,k} = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n = k - j - l + 1\right\} P\left\{Y_n = l\right\}. \tag{1.1}
$$

Además

$$
g_{0,k} = P\left\{\tilde{L}_0 = k\right\}. \tag{1.2}
$$

Se definen las siguientes FGP:

$$
G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k} z^k, \text{ para } n = 0, 1, \ldots, \tag{1.3}
$$

y

$$
G(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z) w^n, z, w \in \mathbb{C}. \tag{1.4}
$$

En particular para $k = 0$,

$$
g_{n,0} = G_n(0) = P\left\{\tilde{L}_j > 0, \text{ para } j < n, \text{ y } \tilde{L}_n = 0\right\} = P\left\{T = n\right\},
$$

además

$$
G(0, w) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(0) w^n = \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{T = n\right\} w^n = \mathbb{E}\left[w^T\right]
$$

la cuál resulta ser la FGP del tiempo de ruina T.

Proposición 1.2.1. *Sean $z, w \in \mathbb{C}$ y sea $n \geq 0$ fijo. Para $G_n(z)$ y $G(z,w)$ definidas como en (**??**) y (**??**) respectivamente, se tiene que*

$$
G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right] \tilde{P}(z). \tag{1.5}
$$

Además

$$
G(z, w) = \frac{zF(z) - wP(z) G(0, w)}{z - wR(z)}, \tag{1.6}
$$

con un único polo en el círculo unitario, además, el polo es de la forma $z = \theta(w)$ y satisface que

i) $\tilde{\theta}(1) = 1$,

ii) $\tilde{\theta}^{(1)}(1) = \frac{1}{1-\tilde{\mu}}$, *iii)* $\tilde{\theta}^{(2)}(1) = \frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2} + \frac{\tilde{\sigma}}{(1-\tilde{\mu})^3}$.

Finalmente, además se cumple que

$$\mathbb{E}\left[w^T\right] = G(0, w) = F\left[\tilde{\theta}(w)\right]. \tag{1.7}$$

Proof. Multiplicando las ecuaciones (**??**) y (**??**) por el término z^k:

$$\begin{aligned} g_{n,k}z^k &= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-j-l+1\}P\{Y_n = l\}z^k, \\ g_{0,k}z^k &= P\left\{\tilde{L}_0 = k\right\}z^k, \end{aligned}$$

ahora sumamos sobre k

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k}z^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-j-l+1\}P\{Y_n = l\}z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-(j+l-1)\}P\{Y_n = l\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+(j+l-1)-(j+l-1)} \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-(j+l-1)\}P\{Y_n = l\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}z^{j-1}P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}P\{Y_n = l\}z^l \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}z^{j-1} \sum_{k=j+l-1}^{\infty} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}P\{Y_n = l\}z^l \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{l=1}^{j}\sum_{k=j+l-1}^{\infty} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}P\{Y_n = l\}z^l \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}P\{Y_n = l\}z^l \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}\sum_{l=1}^{j} P\{Y_n = l\}z^l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{l=1}^{\infty} P\{Y_n = l\}z^l \sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)} \\ &= \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\check{P}(z)\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)} \\ &= \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\check{P}(z)P(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z), \end{aligned}$$

es decir la ecuación (**??**) se puede reescribir como

$$G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z). \tag{1.8}$$

Por otra parte recordemos la ecuación (**??**)

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k}z^k, \text{ entonces } \frac{G_n(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} g_{n,k}z^{k-1},$$

por lo tanto utilizando la ecuación (**??**):

$$\begin{aligned}
G(z,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z)\, w^n = G_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(z)\, w^n = F(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[G_n(z) - G_n(0)\right] w^n \frac{\tilde{P}(z)}{z}\\
&= F(z) + \frac{w}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \left[G_n(z) - G_n(0)\right] w^{n-1} \tilde{P}(z)
\end{aligned}$$

es decir

$$G(z,w) = F(z) + \frac{w}{z}\left[G(z,w) - G(0,w)\right]\tilde{P}(z),$$

entonces

$$\begin{aligned}
G(z,w) = F(z) + \frac{w}{z}\left[G(z,w) - G(0,w)\right]\tilde{P}(z) &= F(z) + \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\, G(z,w) - \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\, G(0,w)\\
&\Leftrightarrow\\
G(z,w)\left\{1 - \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\right\} &= F(z) - \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\, G(0,w),
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$G(z,w) = \frac{zF(z) - w\tilde{P}(z)\, G(0,w)}{1 - w\tilde{P}(z)}. \tag{1.9}$$

Ahora $G(z,w)$ es analítica en $|z| = 1$. Sean z, w tales que $|z| = 1$ y $|w| \leq 1$, como $\tilde{P}(z)$ es FGP

$$|z - \left(z - w\tilde{P}(z)\right)| < |z| \Leftrightarrow |w\tilde{P}(z)| < |z|$$

es decir, se cumplen las condiciones del Teorema de Rouché y por tanto, z y $z - w\tilde{P}(z)$ tienen el mismo número de ceros en $|z| = 1$. Sea $z = \tilde{\theta}(w)$ la solución única de $z - w\tilde{P}(z)$, es decir

$$\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) = 0, \tag{1.10}$$

con $|\tilde{\theta}(w)| < 1$. Cabe hacer mención que $\tilde{\theta}(w)$ es la FGP para el tiempo de ruina cuando $\tilde{L}_0 = 1$. Considerando la ecuación (**??**)

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)|_{w=1} - \frac{\partial}{\partial w}\left\{w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}|_{w=1} = \tilde{\theta}^{(1)}(w)|_{w=1} - \frac{\partial}{\partial w}w\left\{\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}|_{w=1}\\
&- w\frac{\partial}{\partial w}\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)|_{w=1} = \tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) - w\left\{\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial\tilde{\theta}(w)} \cdot \frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}|_{w=1}\right\}\\
&= \tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\cdot\tilde{\theta}^{(1)}(1),
\end{aligned}$$

luego

$$\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) = \tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\cdot\tilde{\theta}^{(1)}(1) = \tilde{\theta}^{(1)}(1)\left(1 - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\right),$$

por tanto

$$\tilde{\theta}^{(1)}(1) = \frac{\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{\left(1 - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\right)} = \frac{1}{1 - \tilde{\mu}}.$$

Ahora determinemos el segundo momento de $\tilde{\theta}(w)$, nuevamente consideremos la ecuación (**??**):

$$0 = \tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\} \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}\right\}$$

luego se tiene

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)-\frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)-\frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\} \\
= & \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}-\left[\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+w\frac{\partial}{\partial w}P\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\} \\
= & \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}-\left(\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+w\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial w}\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}\right]\right\} \\
= & \frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right\} \\
= & \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\frac{\partial}{\partial w}\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)-\frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right] \\
= & \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial\tilde{\theta}(w)}\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)-w\frac{\partial\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w) \\
- & w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\frac{\partial\tilde{\theta}^{(1)}(w)}{\partial w} \\
= & \tilde{\theta}^{(2)}(w)-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)-w\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\left(\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
- & w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(2)}(w) \\
= & \tilde{\theta}^{(2)}(w)-2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)-w\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\left(\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right)^2-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(2)}(w) \\
= & \tilde{\theta}^{(2)}(w)\left[1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]-\tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(2)}(w) & \quad \left[1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]-\tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]=0 \\
\tilde{\theta}^{(2)}(w) & = \frac{\tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2P^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)} \\
& = \frac{\tilde{\theta}^{(1)}(w)\,w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}+\frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}
\end{aligned}
$$

si evaluamos la expresión anterior en $w=1$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(2)}(1) & = \frac{\left(\tilde{\theta}^{(1)}(1)\right)^2\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}+\frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(1)\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}=\frac{\left(\tilde{\theta}^{(1)}(1)\right)^2\tilde{P}^{(2)}(1)}{1-\tilde{P}^{(1)}(1)}+\frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(1)\tilde{P}^{(1)}(1)}{1-\tilde{P}^{(1)}(1)} \\
& = \frac{\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}}\right)^2\tilde{P}^{(2)}(1)}{1-\tilde{\mu}}+\frac{2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}}\right)\tilde{\mu}}{1-\tilde{\mu}}=\frac{\tilde{P}^{(2)}(1)}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{2\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}=\frac{\sigma^2-\tilde{\mu}+\tilde{\mu}^2}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{2\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2} \\
& = \frac{\sigma^2-\tilde{\mu}+\tilde{\mu}^2+2\tilde{\mu}(1-\tilde{\mu})}{(1-\tilde{\mu})^3}
\end{aligned}
$$

es decir

$$
\tilde{\theta}^{(2)}(1) = \frac{\sigma^2}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}.
$$

□

Corolario 1.2.1. *El tiempo de ruina del jugador tiene primer y segundo momento dados por*

$$\mathbb{E}\left[T\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{1-\tilde{\mu}} \tag{1.11}$$

$$Var\left[T\right] = \frac{Var\left[\tilde{L}_0\right]}{\left(1-\tilde{\mu}\right)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{\left(1-\tilde{\mu}\right)^3}. \tag{1.12}$$

1.3 Sistemas de visitas: Ecuaciones Recursivas

1.3.1 Definiciones

Se considerarán intervalos de tiempo de la forma $[t, t+1]$. Los usuarios arriban por paquetes de manera independiente del resto de las colas. Se define el grupo de usuarios que llegan a cada una de las colas del sistema 1, caracterizadas por Q_1 y Q_2 respectivamente, en el intervalo de tiempo $[t, t+1]$ por $X_1(t), X_2(t)$.

Para cada uno de los procesos anteriores se define su Función Generadora de Probabilidades (PGF):

$$P_1(z_1) = \mathbb{E}\left[z_1^{X_1(t)}\right], \quad P_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{X_2(t)}\right].$$

Con primer momento definidos por

$$\mu_1 = \mathbb{E}\left[X_1(t)\right] = P_1^{(1)}(1),$$
$$\mu_2 = \mathbb{E}\left[X_2(t)\right] = P_2^{(1)}(1).$$

En lo que respecta al servidor, en términos de los tiempos de visita a cada una de las colas, se denotarán por τ_1, τ_2 para Q_1, Q_2 respectivamente; y a los tiempos en que el servidor termina de atender en las colas Q_1, Q_2, se les denotará por $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2$ respectivamente. Entonces, los tiempos de servicio están dados por las diferencias $\overline{\tau}_1 - \tau_1, \overline{\tau}_2 - \tau_2$ para Q_1, Q_2. Análogamente los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por $\tau_2 - \overline{\tau}_1, \tau_1 - \overline{\tau}_2$.

La FGP para estos tiempos de traslado están dados por

$$R_1(z_1) = \mathbb{E}\left[z_1^{\tau_2-\overline{\tau}_1}\right], \quad R_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{\tau_1-\overline{\tau}_2}\right],$$

y al igual que como se hizo con anterioridad

$$r_1 = R_1^{(1)}(1) = \mathbb{E}\left[\tau_2 - \overline{\tau}_1\right], \quad r_2 = R_2^{(1)}(1) = \mathbb{E}\left[\tau_1 - \overline{\tau}_2\right],$$

Sean α_1, α_2 el número de usuarios que arriban en grupo a la cola Q_1 y Q_2 respectivamente. Sus PGF's están definidas como

$$A_1(z) = \mathbb{E}\left[z^{\alpha_1(t)}\right], \quad A_2(z) = \mathbb{E}\left[z^{\alpha_2(t)}\right].$$

Su primer momento está dado por

$$\lambda_1 = \mathbb{E}\left[\alpha_1(t)\right] = A_1^{(1)}(1), \quad \lambda_2 = \mathbb{E}\left[\alpha_2(t)\right] = A_2^{(1)}(1).$$

Sean β_1, β_2 el número de usuarios que arriban en el grupo α_1, α_2 a la cola Q_1 y Q_2, respectivamente, de igual manera se definen sus PGF's

$$B_1(z) = \mathbb{E}\left[z^{\beta_1(t)}\right], \quad B_2(z) = \mathbb{E}\left[z^{\beta_2(t)}\right],$$

con

$$b_1 = \mathbb{E}\left[\beta_1(t)\right] = B_1^{(1)}(1), \quad b_2 = \mathbb{E}\left[\beta_2(t)\right] = B_2^{(1)}(1).$$

La distribución para el número de grupos que arriban al sistema en cada una de las colas se definen por:

$$P_1(z_1) = A_1\left[B_1(z_1)\right] = \mathbb{E}\left[B_1(z_1)^{\alpha_1(t)}\right], \quad P_2(z_1) = A_1\left[B_1(z_1)\right] = \mathbb{E}\left[B_1(z_1)^{\alpha_1(t)}\right],$$

entonces

$$\begin{aligned} P_1^{(1)}(1) &= \mathbb{E}\left[\alpha_1(t) B_1^{(1)}(1)\right] = B_1^{(1)}(1)\,\mathbb{E}\left[\alpha_1(t)\right] = \lambda_1 b_1 \\ P_2^{(1)}(1) &= \mathbb{E}\left[\alpha_2(t) B_2^{(1)}(1)\right] = B_2^{(1)}(1)\,\mathbb{E}\left[\alpha_2(t)\right] = \lambda_2 b_2. \end{aligned}$$

1.3.2 Funciones Generadoras de Probabilidad Conjunta

De lo desarrollado hasta ahora se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}\right] = \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}\right] = \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)+X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right] \\ =\ &\mathbb{E}\left[\left\{z_2^{L_2(\tau_1)}\right\}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right] = \mathbb{E}\left[\left\{z_2^{L_2(\tau_1)}\right\}\left\{P_2(z_2)\right\}^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right] \\ =\ &\mathbb{E}\left[\left\{z_2^{L_2(\tau_1)}\right\}\left\{\theta_1(P_2(z_2))\right\}^{L_1(\tau_1)}\right] = F_1\left(\theta_1(P_2(z_2)), z_2\right) \end{aligned}$$

es decir

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}\right] = F_1\left(\theta_1(P_2(z_2)), z_2\right). \tag{1.13}$$

Procediendo de manera análoga para $\overline{\tau}_2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}\right] &= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)+X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right] = \mathbb{E}\left[\left\{z_1^{L_1(\tau_2)}\right\}\left\{z_1^{X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right\}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left\{z_1^{L_1(\tau_2)}\right\}\left\{P_1(z_1)\right\}^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\right] = \mathbb{E}\left[\left\{z_1^{L_1(\tau_2)}\right\}\left\{\theta_2(P_1(z_1))\right\}^{L_2(\tau_2)}\right] \\ &= F_2\left(z_1, \theta_2(P_1(z_1))\right) \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}\right] = F_2\left(z_1, \theta_2(P_1(z_1))\right) \tag{1.14}$$

Ahora, para el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}_1, \tau_2]$ y $[\overline{\tau}_2, \tau_1]$, los arribos de los usuarios modifican el número de usuarios que llegan a las colas, es decir, los procesos $L_1(t)$ y $L_2(t)$. La PGF para el número de arribos a todas las estaciones durante el intervalo $[\overline{\tau}_1, \tau_2]$ cuya distribución está especificada por la distribución compuesta $R_1(\mathbf{z}), R_2(\mathbf{z})$:

$$\begin{aligned} R_1(\mathbf{z}) = R_1\left(\prod_{i=1}^{2} P(z_i)\right) = \mathbb{E}\left[\left\{\prod_{i=1}^{2} P(z_i)\right\}^{\tau_2-\overline{\tau}_1}\right] \\ R_2(\mathbf{z}) = R_2\left(\prod_{i=1}^{2} P(z_i)\right) = \mathbb{E}\left[\left\{\prod_{i=1}^{2} P(z_i)\right\}^{\tau_1-\overline{\tau}_2}\right] \end{aligned}$$

Dado que los eventos en $[\tau_1, \overline{\tau}_1]$ y $[\overline{\tau}_1, \tau_2]$ son independientes, la PGF conjunta para el número de usuarios en el sistema al tiempo $t = \tau_2$ la PGF conjunta para el número de usuarios en el sistema están dadas por

$$\begin{aligned}
F_1(\mathbf{z}) &= R_2\left(\prod_{i=1}^{2} P(z_i)\right) F_2(z_1, \theta_2(P_1(z_1)))\\
F_2(\mathbf{z}) &= R_1\left(\prod_{i=1}^{2} P(z_i)\right) F_1(\theta_1(P_2(z_2)), z_2)
\end{aligned}$$

Entonces debemos de determinar las siguientes expresiones:

$$\begin{array}{ll}
f_1(1) = \frac{\partial F_1(\mathbf{z})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1}, & f_1(2) = \frac{\partial F_1(\mathbf{z})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1},\\
f_2(1) = \frac{\partial F_2(\mathbf{z})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1}, & f_2(2) = \frac{\partial F_2(\mathbf{z})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1},
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_1(\mathbf{z})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1} &= R_1^{(1)}(1)\, P_1^{(1)}(1)\\
\frac{\partial R_1(\mathbf{z})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1} &= R_1^{(1)}(1)\, P_2^{(1)}(1)\\
\frac{\partial R_2(\mathbf{z})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1} &= R_2^{(1)}(1)\, P_1^{(1)}(1)\\
\frac{\partial R_2(\mathbf{z})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1} &= R_2^{(1)}(1)\, P_2^{(1)}(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_1} F_1(\theta_1(P_2(z_2)), z_2) &= 0\\
\frac{\partial}{\partial z_2} F_1(\theta_1(P_2(z_2)), z_2) &= \frac{\partial F_1}{\partial z_2} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\theta_1^{(1)} P_2^{(1)}(1)\\
\frac{\partial}{\partial z_1} F_2(z_1, \theta_2(P_1(z_1))) &= \frac{\partial F_2}{\partial z_1} + \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\theta_2^{(1)} P_1^{(1)}(1)\\
\frac{\partial}{\partial z_2} F_2(z_1, \theta_2(P_1(z_1))) &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto de las dos secciones anteriores se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial z_1} &= \frac{\partial R_2}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1} + \frac{\partial F_2}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1} = R_2^{(1)}(1)\, P_1^{(1)}(1) + f_2(1) + f_2(2)\, \theta_2^{(1)}(1)\, P_1^{(1)}(1)\\
\frac{\partial F_1}{\partial z_2} &= \frac{\partial R_2}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1} + \frac{\partial F_2}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1} = R_2^{(1)}(1)\, P_2^{(1)}(1)\\
\frac{\partial F_2}{\partial z_1} &= \frac{\partial R_1}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1} = R_1^{(1)}(1)\, P_1^{(1)}(1)\\
\frac{\partial F_2}{\partial z_2} &= \frac{\partial R_1}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1} + \frac{\partial F_1}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1} = R_1^{(1)}(1)\, P_2^{(1)}(1) + f_1(1)\, \theta_1^{(1)}(1)\, P_2^{(1)}(1)
\end{aligned}$$

El cual se puede escribir en forma equivalente:

$$\begin{aligned}
f_1(1) &= r_2\mu_1 + f_2(1) + f_2(2)\frac{\mu_1}{1-\mu_2}\\
f_1(2) &= r_2\mu_2\\
f_2(1) &= r_1\mu_1\\
f_2(2) &= r_1\mu_2 + f_1(2) + f_1(1)\frac{\mu_2}{1-\mu_1}
\end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned}
f_1(1) &= \mu_1\left[r_2+\frac{f_2(2)}{1-\mu_2}\right]+f_2(1)\\
f_2(2) &= \mu_2\left[r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right]+f_1(2)
\end{aligned}$$

Resolviendo para $f_1(1)$:

$$\begin{aligned}
f_1(1) &= r_2\mu_1+f_2(1)+f_2(2)\frac{\mu_1}{1-\mu_2}=r_2\mu_1+r_1\mu_1+f_2(2)\frac{\mu_1}{1-\mu_2}\\
&= \mu_1(r_2+r_1)+f_2(2)\frac{\mu_1}{1-\mu_2}=\mu_1\left(r+\frac{f_2(2)}{1-\mu_2}\right),
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
f_2(2) &= \mu_2\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+f_1(2)=\mu_2\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+r_2\mu_2\\
&= \mu_2\left[r_1+r_2+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right]=\mu_2\left[r+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right]\\
&= \mu_2 r+\mu_1\left(r+\frac{f_2(2)}{1-\mu_2}\right)\frac{\mu_2}{1-\mu_1}\\
&= \mu_2 r+\mu_2\frac{r\mu_1}{1-\mu_1}+f_2(2)\frac{\mu_1\mu_2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}\\
&= \mu_2\left(r+\frac{r\mu_1}{1-\mu_1}\right)+f_2(2)\frac{\mu_1\mu_2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}\\
&= \mu_2\left(\frac{r}{1-\mu_1}\right)+f_2(2)\frac{\mu_1\mu_2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
f_2(2)-f_2(2)\frac{\mu_1\mu_2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)} &= \mu_2\left(\frac{r}{1-\mu_1}\right)\\
f_2(2)\left(1-\frac{\mu_1\mu_2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}\right) &= \mu_2\left(\frac{r}{1-\mu_1}\right)\\
f_2(2)\left(\frac{1-\mu_1-\mu_2+\mu_1\mu_2-\mu_1\mu_2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}\right) &= \mu_2\left(\frac{r}{1-\mu_1}\right)\\
f_2(2)\left(\frac{1-\mu}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}\right) &= \mu_2\left(\frac{r}{1-\mu_1}\right)
\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
f_2(2) &= \frac{r\frac{\mu_2}{1-\mu_1}}{\frac{1-\mu}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}}=\frac{r\mu_2(1-\mu_1)(1-\mu_2)}{(1-\mu_1)(1-\mu)}\\
&= \frac{\mu_2(1-\mu_2)}{1-\mu}r=r\mu_2\frac{1-\mu_2}{1-\mu}.
\end{aligned}$$

es decir

$$f_2(2) = r\mu_2\frac{1-\mu_2}{1-\mu}. \tag{1.15}$$

Entonces

$$\begin{aligned} f_1(1) &= \mu_1 r + f_2(2)\frac{\mu_1}{1-\mu_2} = \mu_1 r + \left(\frac{\mu_2(1-\mu_2)}{1-\mu} r\right)\frac{\mu_1}{1-\mu_2} \\ &= \mu_1 r + \mu_1 r\left(\frac{\mu_2}{1-\mu}\right) = \mu_1 r\left[1 + \frac{\mu_2}{1-\mu}\right] \\ &= r\mu_1 \frac{1-\mu_1}{1-\mu} \end{aligned}$$

1.4 Procesos Regenerativos

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0. \tag{1.16}$$

(S2.)

$$\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}, \tag{1.17}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)] \geq 0$.
- Se define
$$\delta^* := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)]. \tag{1.18}$$
- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\right) \tag{1.19}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1,2,\dots,K\} \times \{1,2,\dots,S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{1.20}$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.

- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([**?**])

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0$
2) $\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}$para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j'}^m = r_{j,j'}$
- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define
$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(i)\right]. \tag{1.21}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m, se denota por $B_m(t)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t; $B_m^0(t)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t, finalmente sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{1.22}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{1.23}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx, \; 0 \leq a < b. \tag{1.24}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto $A2)$ para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [**?**] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

1.4.1 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [**?**], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (**??**), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([**?**], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [**?**]

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [**?**]) en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la σ-algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D)$$

Definición 1.4.1. *Una medida no cero π en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ es* **invariante** *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbf{X}} P^t(x, D)\,\pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.4.2. *El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 1.4.1. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [**?**]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama Proceso Harris recurrente positivo*.*

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\,\pi(dx)$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente.

Definición 1.4.3. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [**?**]:

Lema 1.4.1 (Lema 3.1, Dai[**?**]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{1.25}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris Recurrente Positivo.

Lema 1.4.2 (Lema 3.1, Dai [**?**]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{|x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1.4.1 (Teorema 3.1, Dai[**?**]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{1.26}$$

*entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B = \{|x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.*

Nota 1.4.2. *En Meyn and Tweedie [**?**] muestran que si $P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.5 Preliminares: Modelos de Flujo

1.5.1 Procesos Regenerativos

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0. \tag{1.27}$$

(S2.)

$$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N}, \tag{1.28}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right] \geq 0$.
- Se define
$$\delta^* := \sum_{j,j+1}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right]. \tag{1.29}$$
- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $\left(X(t)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\right) \tag{1.30}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times \left(\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\}\right)^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{1.31}$$

- $Q(t) = \left(Q_k(t), 1 \leq k \leq K\right)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = \left(A_k(t), 1 \leq k \leq K\right)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([**?**])

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0$
2) $\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}$para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j'}^{m} = r_{j,j'}$
- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define
$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(i)\right]. \tag{1.32}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m, se denota por $B_m(t)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t; $B_m^0(t)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t, finalmente sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{1.33}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l\left(1\right)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k\left(1\right) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{1.34}$$
$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k\left(i\right) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k\left(x\right) dx, \;\; 0 \leq a < b. \tag{1.35}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto $A2)$ para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

1.5.2 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (**??**), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([?], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [?]

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right) | \mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la σ-algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right)$$

Definición 1.5.1. *Una medida no cero* π *en* $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ *es* **invariante** *para* X *si* π *es* σ*-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbf{X}} P^t(x, D)\, \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*, con* $t \geq 0$.

Definición 1.5.2. *El proceso de Markov* X *es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad* ν *en* $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$*, tal que si* $\nu(D) > 0$ *y* $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 1.5.1. *i) Si* X *es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante* π *(Getoor [**?**]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama Proceso Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X *es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso* π *denota la distribución estacionaria y hacemos*

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\, \pi(dx)$$

y se utiliza E_π *para denotar el operador esperanza correspondiente.*

Definición 1.5.3. *Un conjunto* $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ *es llamado pequeño si existe un* $t > 0$*, una medida de probabilidad* ν *en* $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*, y un* $\delta > 0$ *tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [**?**]:

Lema 1.5.1 (Lema 3.1, Dai[**?**]). *Sea* B *conjunto pequeño cerrado, supongamos que* $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ *y que para algún* $\delta > 0$ *se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{1.36}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$*. Entonces,* X *es un proceso Harris Recurrente Positivo.*

Lema 1.5.2 (Lema 3.1, Dai [**?**]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto* $B = \{|x| \leq k\}$ *es un conjunto pequeño cerrado para cualquier* $k > 0$.

Teorema 1.5.1 (Teorema 3.1, Dai[**?**]). *Si existe un* $\delta > 0$ *tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{1.37}$$

*entonces la ecuación (**??**) se cumple para* $B = \{|x| \leq k\}$ *con algún* $k > 0$*. En particular,* X *es Harris Recurrente Positivo.*

Nota 1.5.2. *En Meyn and Tweedie [**?**] muestran que si* $P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ *incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1)$-$A3)$, lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.5.3 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in X$, sea $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.38}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{1.39}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.40}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.41}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$,

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.42}$$

De acuerdo a Dai [?], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (**??**)-(**??**), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 1.5.4 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en (**??**) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, *se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.5.2 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t) \tag{1.43}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.5.5 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 1.5.1 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.5.3 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, *y para cada condición inicial* $x \in X$

$$limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p, \tag{1.44}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{1.45}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$. *Donde* π *es la probabilidad invariante para* $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right] = 0. \tag{1.46}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{1.47}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.5.4 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K}\rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{1.48}$$

i) Si $\rho < 1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema* **??**.

ii) Si $\rho < 1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema* **??**

Teorema 1.5.5. *Sea* $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ *Proceso de Markov con espacio de estados* (S_0, χ_0) *generado por una distribuición inicial* P_o *y probabilidad de transición* p_{mn}, *para* $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, *que por notación se escribirá como* $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. *Sea S tiempo de paro relativo a la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_n$. *Sea T función medible,* $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. *Supóngase que* $T \geq S$, *entonces T es tiempo de paro. Si* $B \in \chi_0$, *entonces*

$$P\left\{X(T) \in B, T < \infty|\mathcal{F}(S)\right\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.49}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v\in K} M_v = \left\{(v,\zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\right\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{\cup_{v\in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E,\mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0,1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v\in K} \partial^* M_v. \tag{1.50}$$

y

$$\partial^* M_v = \left\{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t},\zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t,\zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\right\}. \tag{1.51}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t,\zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.52}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t,\mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v,\zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf\left\{t > 0 : \phi_v(t,\zeta) \in \partial^* M_v\right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v,\zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s,\zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0,\epsilon)$. La medida de transición $Q(A;\mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E,\mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n,\mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \left\{\begin{array}{ll} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s,\mathbf{z}))\,ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{array}\right. \tag{1.53}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N,Z) con distribuición $Q(\cdot;\phi_n(T_1,\mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[1]

$$\mathbf{x}_t = (v_t,\zeta_t) = \left\{\begin{array}{ll} (n, \phi_n(t,\mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N,\mathbf{Z}), & t = t_1. \end{array}\right.$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

[1] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

Supuestos 1.5.1 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t\geq t)}$ el número de saltos en $[0,t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[N_t\right] < \infty \text{ para toda } t. \tag{1.54}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.5.6. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1.5.7. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.5.8. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{1.55}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.5.6. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.5.9. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*[2]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B). \tag{1.56}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[3] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.58}$$

Definición 1.5.10. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.5.3. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\right\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.59}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

[2] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[3]

$$\mathbb{P}\left\{H | \mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H | X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.57}$$

Definición 1.5.11. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t\rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E*.*

Definición 1.5.12 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}^*$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *tal que* $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ*.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0=x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 1.5.13. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E,\mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t,s\geq0$*,*

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s} \text{ y } X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{1.60}$$

iii) Para cualquier $x\in E$*,*$\mathbf{P}^x\{X_0=x\}=1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$*.*

Definición 1.5.14 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha>0$ *y cualquier* $f\in S^\alpha$*, el proceso* $t\rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.5.15. *Un sistema* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t)*.*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a* $\mathcal{G}_t$*.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 1.5.3 (Lema 4.2, Dai[**?**])**.** *Sea* $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ *con* $|x_n|\rightarrow\infty$*, conforme* $n\rightarrow\infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0)=\overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n\rightarrow\infty$*, casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t])\rightarrow P_k^{'}t, \text{ u.o.c.,} \tag{1.61}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{1.62}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{1.63}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k=1/m_k=1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$*.*

Lema 1.5.4 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_k\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_k\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right)=_k^x\left(0\right)+E_k^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{1.64}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_{0}^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{1.65}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right)=\left(T_1^x\left(t\right),\ldots,T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$
$$I^x\left(t\right)=\left(I_1^x\left(t\right),\ldots,I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right),\ldots,S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x \left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{1.66}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.67}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.68}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.69}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.70}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{1.71}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso}. \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.5.7 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.72}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \; u.o.c. \tag{1.73}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I-P)' M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{1.74}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.75}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{1.76}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.77}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.78}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{1.79}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.5.1. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) *Los vectores de tiempo ocupado* $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) *Para todo* $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) *Para todo* k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 1.5.5 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 1.5.8 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$, *para toda* $t \geq t_0$.

Lema 1.5.6 (Lema 5.2 [?]). *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{1.80}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) *Para cualquier* $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) *Las variables aleatorias* $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.5.9 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 1.5.2 (Proposición 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.81}$$

Proposición 1.5.3 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.82}$$

Proposición 1.5.4 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V(x)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f(X(s))\, ds\right] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{1.83}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1.5.10 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{1.84}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \tag{1.85}$$

Teorema 1.5.11 (Teorema 6.2 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1.5.12 (Teorema 6.3 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_x\left[Q_t\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_0\right]\right| = 0.$$

Proposición 1.5.5 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{1.86}$$

Lema 1.5.2 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{1.87}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.5.13 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [**?**]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.88}$$

para $t > 0$ *y* $x \in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.5.14 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [**?**]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{1.89}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 1.5.15 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [**?**]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con* $f(x) = f_1(x)$ *se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{1.90}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0.$$

Teorema 1.5.16 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [**?**]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea* ν *cualquier distribución de probabilidad en* $(X, \mathcal{B}_X)$, *y* π *la distribución estacionaria de* X.

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{1.91}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *con* $\pi(|f|) < \infty$, *la ecuación anterior se cumple.*

Teorema 1.5.17 (Teorema 2.2, Down [**?**]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.92}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, *con* $|Q(0)| = 1$. *Entonces para cualquier* $0 < q \leq 1$, *existe* $B < 0$ *tal que para cualquier* $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\} \geq q. \tag{1.93}$$

Definición 1.5.16. *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{F}$ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* X, *la pareja* $(X, \mathcal{F})$ *es llamado espacio medible. Un subconjunto* A *de* X *es llamado medible, o medible con respecto a* $\mathcal{F}$, *si* $A \in \mathcal{F}$.

Definición 1.5.17. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *espacio de medida. Se dice que la medida* μ *es* σ*-finita si se puede escribir* $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ *con* $X_n \in \mathcal{F}$ *y* $\mu(X_n) < \infty$.

Definición 1.5.18. *Sea X el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.5.19. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a $\mathcal{F}$. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.5.20. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1.5.21. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.5.22. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.5.23. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.5.24. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{1.94}$$

Nota 1.5.4. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{1.95}$$

1.5.4 Procesos de Estados de Markov

Teorema 1.5.18. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots,\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.96}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{\bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{1.97}$$

y

$$\partial^* M_v = \left\{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\right\}. \tag{1.98}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.99}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf \left\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \left\{ \begin{array}{ll} & \\ exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) \, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{array} \right. \tag{1.100}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \left\{ \begin{array}{ll} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{array} \right.$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 1.5.2 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{1.101}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[4] se cumple para cualquier tiempo de paro.

[4] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

1.5.5 Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.5.25. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{1.102}$$

Definición 1.5.26. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.5.19. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

1.5.6 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[5], $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.5.27. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{6}. \tag{1.103}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[7] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t)|\mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.105}$$

Definición 1.5.28. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}^{8}.$$

Nota 1.5.5. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.106}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

[5] qué se quiere decir con el término: más general?

[6] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[7]

$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H|X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.104}$$

[8] Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

1.5.7 Primer Condición de Regularidad

Definición 1.5.29. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1.5.30 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1.5.31. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) *$(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) *$(\theta_t)_{t\geq 0}$ es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{1.107}$$

iii) *Para cualquier $x \in E$,$\mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.*

Definición 1.5.32 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.5.33. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) *$\mathbf{X}$ es una realización continua por la derecha,* **??***, de (P_t).*

ii) *$\mathbf{X}$ satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) *$\mathcal{G}_t$ es aumentado y continuo por la derecha.*

1.5.8 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 1.5.7 (Lema 4.2, Dai[?])**.** *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \rightarrow P_k' t, \text{ u.o.c.}, \tag{1.108}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \rightarrow \alpha_k (t - \overline{U}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.109}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \rightarrow \mu_k (t - \overline{V}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.110}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 1.5.8 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k\left(0\right)=\overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k\left(0\right)=\overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+}, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_k\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_k\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S^{x}_{l}\left(t\right)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T^{x}_{l}\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S^{x}_{l}\left(T^{x}_{l}\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi^{x}_{k}\left(S^{x}_{l}\left(T^{x}_{l}\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q^{x}_{k}\left(t\right)=Q^{x}_{k}\left(0\right)+E^{x}_{k}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^{l}_{k}\left(S^{x}_{l}\left(T^{x}_{l}\left(t\right)\right)\right)-S^{x}_{k}\left(T^{x}_{k}\left(t\right)\right) \tag{1.111}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I^{x}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_{i}}T^{x}_{k}\left(t\right).$$

Entonces $I^{x}_{i}\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_{0}^{\infty}\left(\sum_{k\in C_{i}}Q^{x}_{k}\left(t\right)\right)dI^{x}_{i}\left(t\right)=0, \tag{1.112}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^{x}\left(t\right)=\left(T^{x}_{1}\left(t\right),\ldots,T^{x}_{K}\left(t\right)\right)^{'},$$
$$I^{x}\left(t\right)=\left(I^{x}_{1}\left(t\right),\ldots,I^{x}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^{x}\left(T^{x}\left(t\right)\right)=\left(S^{x}_{1}\left(T^{x}_{1}\left(t\right)\right),\ldots,S^{x}_{K}\left(T^{x}_{K}\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{1.113}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.114}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.115}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.116}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.117}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.118}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.5.20 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.119}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \ \textit{u.o.c.} \tag{1.120}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I - P)' M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{1.121}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.122}$$

$$\overline{T}(t) \ \textit{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{1.123}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \ \textit{es no decreciente,} \tag{1.124}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.125}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{1.126}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.5.6. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) *Los vectores de tiempo ocupado* $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^{0}(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0)=\overline{T}^{0}(0)=0$.

ii) *Para todo* $t\geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}(t)+\overline{T}_{k}^{0}(t)\right]=t$$

iii) *Para todo* $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}(t)=\overline{Q}_{k}(0)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}(t)$$

iv) *Para todo* $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}(t)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}(t)=0$.

v) *Para todo* k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}(t)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}(t)$$

vi) *Para todo* $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}(t)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}(t)$$

para $\overline{Q}_{k}(t)>0$.

Teorema 1.5.21 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}(X_{1}]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r}\rightarrow\frac{1}{\mu^{r}}$, *cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$..

Proposición 1.5.7 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1}<\infty$, $\delta>0$ *y un conjunto compacto* $C\subset X$.

$$\mathbb{E}_{x}\left[\int_{0}^{\tau_{C}(\delta)}\left(1+|X(t)|^{p}\right)dt\right]\leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right)\tag{1.127}$$

Proposición 1.5.8 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ *y defina para alguna* $\delta>0$, *y un conjunto cerrado* $C\subset X$

$$V(x):=\mathbb{E}_{x}\left[\int_{0}^{\tau_{C}(\delta)}f(X(t))\,dt\right]$$

para $x\in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k<\infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_{x}\left[V(x)\right]+\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[f(X(s))\,ds\right]\leq\frac{1}{t}V(x)+k,\tag{1.128}$$

para $x\in X$ *y* $t>0$.

1.5.9 Estabilidad

Definición 1.5.34 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0),\overline{B}(0)\right)\in\mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??**, *junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t)=\overline{Q}(0)+\left(\alpha t-\overline{A}(0)\right)^{+}-\left(I-P^{'}\right)M\left(\overline{T}(t)-\overline{B}(0)\right)^{+}\tag{1.129}$$

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 1.5.35 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}\left(t\right) \quad (1.130)$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \quad (1.131)$$

$$\overline{T}_{k}\left(0\right)=0,\ \text{ y } \overline{T}_{k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente,} \quad (1.132)$$

$$\overline{I}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{k\in C_{i}}\overline{T}_{k}\left(t\right) \text{ es no decreciente} \quad (1.133)$$

$$\overline{I}_{i}\left(\cdot\right) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0 \quad (1.134)$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \quad (1.135)$$

Lema 1.5.9 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.5.22 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$*, para toda* $t\geq t_{0}$*.*

Proposición 1.5.9 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_{0}>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \quad (1.136)$$

Lema 1.5.3 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea* $\left\{\zeta\left(k\right):k\in F\right\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $\left(0,\infty\right)$*, y sea* $E\left(t\right)=max\left(n\geq 1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$*. Si* $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$*, entonces para cualquier entero* $r\geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \quad (1.137)$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.5.23 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_{p} *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \quad (1.138)$$

para $t>0$ *y* $x\in X$*. En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 1.5.24 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \quad (1.139)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 1.5.25 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} \left\| P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot) \right\|_f = 0. \tag{1.140}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 1.5.26 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_o^t f(X(s))\, ds = \pi(f) := \int f(x)\, \pi(dx) \tag{1.141}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.5.27 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.142}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{1.143}$$

Definición 1.5.36. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 1.5.37. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 1.5.38. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.5.39. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.5.40. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1.5.41. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.5.42. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.5.43. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.5.44. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B|\mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B|X(s)\}. \tag{1.144}$$

Nota 1.5.6. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B|X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B|X(s)\} \tag{1.145}$$

Teorema 1.5.28. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty|\mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.146}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{1.147}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{1.148}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.149}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v,\zeta)\in E$ existe un $\epsilon>0$ tal que la función $s\rightarrow\lambda\left(v,\phi_{v}\left(s,\zeta\right)\right)\in E$ es integrable para $s\in[0,\epsilon)$. La medida de transición $Q\left(A;\mathbf{x}\right)$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A\in\mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x}\in E\cup\Gamma^{*}$ y es una medida de probabilidad en $(E,\mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x}\in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_{t})$ comenzando en $\mathbf{x}=(n,\mathbf{z})\in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F\left(t\right)=\left\{\begin{array}{ll}\\ exp\left(-\int_{0}^{t}\lambda\left(n,\phi_{n}\left(s,\mathbf{z}\right)\right)ds\right), & t<t^{*}\left(\mathbf{x}\right),\\ 0, & t\geq t^{*}\left(\mathbf{x}\right)\end{array}\right. \tag{1.150}$$

Sea T_{1} una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}\left[T_{1}>t\right]=F\left(t\right)$, ahora sea la variable aleatoria (N,Z) con distribuición $Q\left(\cdot;\phi_{n}\left(T_{1},\mathbf{z}\right)\right)$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_{t})$ para $t\leq T_{1}$ es[9]

$$\mathbf{x}_{t}=\left(v_{t},\zeta_{t}\right)=\left\{\begin{array}{ll}\left(n,\phi_{n}\left(t,\mathbf{z}\right)\right), & t<T_{1},\\ \left(N,\mathbf{Z}\right), & t=t_{1}.\end{array}\right.$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_{1}}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_{2}-T_{1}$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_{2}}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_{t}$ con tiempos de salto $T_{1},T_{2},\ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda,T_{1}>0$ y $T_{1}-T_{2}>0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 1.5.3 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea* $N_{t}:=\sum_{t}\mathbb{1}_{(t\geq t)}$ *el número de saltos en* $[0,t]$. *Entonces*

$$\mathbb{E}\left[N_{t}\right]<\infty \textit{ para toda } t. \tag{1.151}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.5.45. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1.5.46. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1.5.47. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E,\mathcal{B}\left(E\right))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.5.48. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda\left(E\right)=sup\left\{\lambda\left(K\right):K \textit{ es compacto en } E\right\}. \tag{1.152}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.5.29. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E,\mathcal{B}\left(E\right))$ es cerrada.*

1.5.10 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}\left(E\right)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X,\mathcal{G},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I\subset\mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f\left(X_{r}\right):r\in I, rleqt,f\in\mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_{t})$ tal que (X_{t}) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.5.49. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ indexada por pares $s,t\in I$, con $s\leq t$ es una función de transición en $(E,\mathcal{E})$, si para todo $r\leq s<t$ en I y todo $x\in E$, $B\in\mathcal{E}$*

$$P_{r,t}\left(x,B\right)=\int_{E}P_{r,s}\left(x,dy\right)P_{s,t}\left(y,B\right)^{10}. \tag{1.153}$$

[9] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

[10] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E,\mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[11] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_t\right)|\mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t}f\left(X_t\right) \;\; s\leq t\in I,\;\; f\in b\mathcal{E}. \tag{1.155}$$

Definición 1.5.50. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f\left(x\right) = P_t\left(P_sf\right)\left(x\right),\;\; t,s\geq 0,\;\; x\in E\;\; f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.5.7. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t}=P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_{t+s}\right)|\mathcal{G}_t\right\} = P_sf\left(X_t\right) \;\; t,s\geq 0,\;\; f\in b\mathcal{E}. \tag{1.156}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

1.5.11 Primer Condición de Regularidad

Definición 1.5.51. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t\rightarrow X_t\left(w\right)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1.5.52 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}$ y $P_t\left(b\mathcal{E}^*\right)\subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ tal que $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 1.5.53. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E,\mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t,s\geq 0$,*

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s}\;\; y\;\; X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{1.157}$$

*iii) Para cualquier $x\in E$,$\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}=1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.*

Definición 1.5.54 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha>0$ y cualquier $f\in S^\alpha$, el proceso $t\rightarrow f\left(X_t\right)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.5.55. *Un sistema $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

---

[11]
$$\mathbb{P}\left\{H|\mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H|X_t\right\}\;\; H\in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.154}$$

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 1.5.10 (Lema 4.2, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'} t, \ u.o.c., \tag{1.158}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{1.159}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{1.160}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 1.5.11 (Lema 4.3, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x \left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x \left(T_k^x(t)\right) \tag{1.161}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.162}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{1.163}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.164}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.165}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.166}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.167}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{1.168}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.5.30 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} \left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.169}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \ u.o.c. \tag{1.170}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{1.171}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.172}$$

$$\overline{T}(t) \ \text{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{1.173}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \ \text{es no decreciente,} \tag{1.174}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.175}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{1.176}$$

Definición 1.5.56 (Definición 4.1, , Dai [**?**]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 1.5.31 (Teorema 4.2, Dai[**?**]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{1.177}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.5.57 (Definición 3.3, Dai y Meyn [**?**]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [**?**].

Lema 1.5.4 (Lema 3.1, Dai y Meyn [**?**]). *Si el modelo de flujo definido por **??**-**??** es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.5.10. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 1.5.12 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.5.32 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1.5.33 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$*, para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 1.5.13 (Lema 5.2 [?]). *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$*, y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$*, entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r}\tag{1.178}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$*,* $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.5.34 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$*. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r} \rightarrow \frac{1}{\mu^{r}}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 1.5.11 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0. \tag{1.179}$$

Proposición 1.5.12 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_{x}\left[\int_{0}^{\tau_{C}(\delta)}\left(1+|X\left(t\right)|^{p}\right)dt\right]\leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right) \tag{1.180}$$

Proposición 1.5.13 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_{+}$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right):=\mathbb{E}_{x}\left[\int_{0}^{\tau_{C}(\delta)}f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_{x}\left[V\left(x\right)\right]+\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right]\leq\frac{1}{t}V\left(x\right)+k, \tag{1.181}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 1.5.35 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq k_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.182}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq k_{p} \tag{1.183}$$

Teorema 1.5.36 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^{t}\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_{p}}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q_{t}|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q_{0}|^{p}\right]<\infty$$

Teorema 1.5.37 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^{t}(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_{f}=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_{x}[Q_{t}]-\mathbb{E}_{\pi}[Q_{0}]|=0}.$$

Proposición 1.5.14 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{1.184}$$

Lema 1.5.5 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in \digamma\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^{r}. \tag{1.185}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.5.38 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.186}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.5.39 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{1.187}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 1.5.40 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{1.188}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 1.5.41 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{1.189}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.5.42 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.190}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{1.191}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$,
- también se define $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.

1.5.12 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X = \{X(t), t \geq 0\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [?].

Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [?]

.

1.5.13 Procesos Harris Recurrentes Positivos

Sea el proceso de Markov $X = \{X(t), t \geq 0\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] y Meyn y Down [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

1.5.14 Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X(t) = (Q(t), U(t), V(t)), \tag{1.192}$$

donde $Q(t)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U(t)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V(t)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U(t)$ como $V(t)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = (Q(0), U(0), V(0)) = (q, a, b)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \ldots, K$ se define

$$\begin{aligned} E_l^x(t) &= max\{r : U_l(0) + \xi_l(1) + \cdots + \xi_l(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0, \\ S_k^x(t) &= max\{r : V_k(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0. \end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s-éima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \left\{\phi^k(n), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \ldots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 1.5.14 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'}t, \ u.o.c., \tag{1.193}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k\left(t - \overline{U}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{1.194}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k\left(t - \overline{V}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{1.195}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 1.5.15 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x \left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x \left(T_k^x(t)\right) \tag{1.196}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.197}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$

$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{1.198}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.199}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.200}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.201}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.202}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.203}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.5.43 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \rightarrow \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \rightarrow \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.204}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{1.205}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{1.206}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.207}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{1.208}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{1.209}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.210}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{1.211}$$

Definición 1.5.58 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 1.5.44 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{1.212}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.5.59 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ y $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$*

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk}\mu_l \overline{T}_l(t) \tag{1.213}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.214}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.215}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k\in C_i} \overline{T}_k(t) \ \ \textit{es no decreciente} \tag{1.216}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \ \ \textit{se incrementa al tiempo } t \textit{ cuando} \ \sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{1.217}$$

$$\textit{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \textit{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{1.218}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.5.60 (Definición 3.2, Dai y Meyn [**?**]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??**, *junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^{+} - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^{+} \tag{1.219}$$

Definición 1.5.61 (Definición 3.3, Dai y Meyn [**?**]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [**?**].

Lema 1.5.6 (Lema 3.1, Dai y Meyn [**?**]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

1.5.15 Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad

1.5.16 Teorema 2.1

El resultado principal de Down [**?**] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 1.5.45 (Teorema 2.1, Down [**?**]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, *y para cada condición inicial* $x \in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \sup \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{1.220}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{1.221}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$. *Donde* π *es la probabilidad invariante para* $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right] = 0. \tag{1.222}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{1.223}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

Proposición 1.5.15 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [**?**]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{1.224}$$

Lema 1.5.7 (Lema 5.2, Dai y Meyn [**?**]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{1.225}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.5.46 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [**?**]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.226}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 1.5.47 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [**?**]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{1.227}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 1.5.48 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [**?**]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_f=0. \tag{1.228}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 1.5.49 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [**?**]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds=\pi(f):=\int f(x)\,\pi(dx) \tag{1.229}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

1.5.17 Teorema 2.2

Teorema 1.5.50 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.230}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{1.231}$$

1.5.18 Teorema 2.3

Teorema 1.5.51 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js}\overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{1.232}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema **??**.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema **??**

1.5.19 Definiciones Básicas

Definición 1.5.62. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 1.5.63. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 1.5.64. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.5.65. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.5.66. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1.5.67. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.5.68. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.5.69. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.5.70. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B|\mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B|X(s)\}. \tag{1.233}$$

Nota 1.5.8. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B|X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B|X(s)\} \tag{1.234}$$

Teorema 1.5.52. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty|\mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.235}$$

en $\{T < \infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.5.16. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 1.5.16 (Lema 3.1 [**?**]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.5.53 (Teorema 5.2 [**?**]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1.5.54 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 1.5.17 (Lema 5.2 [?]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{1.236}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.5.55 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 1.5.17 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.237}$$

Proposición 1.5.18 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.238}$$

Proposición 1.5.19 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{1.239}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1.5.56 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.240}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p \tag{1.241}$$

Teorema 1.5.57 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\| P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \|_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1.5.58 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)
$$lim_{x\rightarrow\infty} \mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0. \tag{1.242}$$

(S2.)
$$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N}, \tag{1.243}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right] \geq 0$.
- Se define
$$\delta^* := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right]. \tag{1.244}$$
- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\right) \tag{1.245}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times \left(\{1,2,\ldots,K\} \times \{1,2,\ldots,S\}\right)^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{1.246}$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.

- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([**?**])

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

1.5.20 Preliminares

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0$
2) $\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}$para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m} = r_{j,j^{'}}$
- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^* := \sum_{j,j^{'}} p_j r_{j,j^{'}}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(i)\right]. \tag{1.247}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m, se denota por $B_m(t)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t; $B_m^0(t)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t, finalmente sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{1.248}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{1.249}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{1.250}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto $A2)$ para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [**?**] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

1.5.21 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [**?**], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (**??**), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([**?**], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [**?**]

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x \{X(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la σ-algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D)$$

Definición 1.5.71. *Una medida no cero π en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ es* **invariante** *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbf{X}} P^t(x, D) \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.5.72. *El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 1.5.9. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama Proceso Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot) \pi(dx)$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente.

Definición 1.5.73. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 1.5.18 (Lema 3.1, Dai[?])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x [\tau_B(\delta)] < \infty, \quad (1.251)$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris Recurrente Positivo.

Lema 1.5.19 (Lema 3.1, Dai [?])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{|x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1.5.59 (Teorema 3.1, Dai[**?**]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^{x}\left(|x|\delta\right)| = 0, \tag{1.252}$$

*entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B = \{|x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.*

Nota 1.5.10. *En Meyn and Tweedie [**?**] muestran que si $P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1$ incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1)$-$A3)$, lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.5.22 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathrm{X}$, sea $Q_k^x\left(t\right)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^x\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}_m\left(\cdot\right),\overline{T}_m^0\left(\cdot\right)\right)$ para $m = 1,2,\ldots,M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_m^x\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_m^{x,0}\left(|x|t\right)\right) \tag{1.253}$$

para $m = 1,2,\ldots,M$, cuando $x \rightarrow \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}_m\left(t\right),\overline{T}_m^0\left(t\right)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k\left(t\right) = \overline{Q}_k\left(0\right) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M}\mu_k\overline{T}_{m,k}\left(t\right) \tag{1.254}$$

para $k = 1,2,\ldots,K$.

$$\overline{Q}_k\left(t\right) \geq 0 \text{ para } k = 1,2,\ldots,K, \tag{1.255}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente,} \tag{1.256}$$

para $k = 1,2,\ldots,K$ y $m = 1,2,\ldots,M$,

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^0\left(t\right) + \overline{T}_{m,k}\left(t\right) = t \text{ para } m = 1,2,\ldots,M. \tag{1.257}$$

De acuerdo a Dai [**?**], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^0\left(\cdot\right)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (**??**)-(**??**), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 1.5.74 (Definición 4.1, , Dai [**?**]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ en (**??**) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.*

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.5.60 (Teorema 4.2, Dai[**?**]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{1.258}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.5.75 (Definición 3.3, Dai y Meyn [**?**]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [**?**].

Lema 1.5.8 (Lema 3.1, Dai y Meyn [**?**]). *Si el modelo de flujo definido por **??**-**??** es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.5.61 (Teorema 2.1, Down [**?**]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p, \tag{1.259}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{1.260}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right] = 0. \tag{1.261}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{1.262}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.5.62 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{1.263}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema **??**.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema **??**

Teorema 1.5.63. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.264}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v\in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v\in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v\in K} \partial^* M_v. \tag{1.265}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{1.266}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.267}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\,ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{1.268}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[12]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 1.5.4 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{1.269}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.5.76. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1.5.77. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.5.78. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \textit{ es compacto en } E\}. \tag{1.270}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.5.64. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.5.79. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*[13]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B). \tag{1.271}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[14] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t)\,|\mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.273}$$

[12]Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

[13]Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[14]

$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H|X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.272}$$

Definición 1.5.80. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x),\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.5.11. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t)\ t,s\geq 0,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{1.274}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 1.5.81. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t\rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 1.5.82 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}^*$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *tal que* $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0=x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 1.5.83. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E,\mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t,s\geq 0$,

$$\theta_t\circ\theta_s = \theta_{t+s}\ \text{y}\ X_t\circ\theta_t = X_{t+s}; \tag{1.275}$$

iii) Para cualquier $x\in E,\mathbf{P}^x\{X_0=x\}=1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.

Definición 1.5.84 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha>0$ *y cualquier* $f\in S^\alpha$*, el proceso* $t\rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.5.85. *Un sistema* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 1.5.20 (Lema 4.2, Dai[?])**.** *Sea* $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ *con* $|x_n|\rightarrow\infty$*, conforme* $n\rightarrow\infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n\rightarrow\infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^{k}\left(\left[|x_n|t\right]\right)\rightarrow P_{k}^{'}t,\ u.o.c., \tag{1.276}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow \alpha_{k}\left(t-\overline{U}_{k}\right)^{+},\ u.o.c., \tag{1.277}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow \mu_{k}\left(t-\overline{V}_{k}\right)^{+},\ u.o.c., \tag{1.278}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_{k}=1/m_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$.

Lema 1.5.21 (Lema 4.3, Dai[**?**])**.** *Sea $\left\{x_n\right\}\subset \mathbf{X}$ con $|x_n|\rightarrow\infty$, conforme $n\rightarrow\infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}_{k}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}_{k}.$$

a) Conforme $n\rightarrow\infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_{k}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_{k}-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_{k}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_{k}-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t\geq0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_{k}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_{k}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_{l}^{x}\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_{l}^{x}\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_{l}^{x}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_{k}^{x}\left(t\right)=_{k}^{x}\left(0\right)+E_{k}^{x}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_{k}^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)-S_{k}^{x}\left(T_{k}^{x}\left(t\right)\right) \tag{1.279}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_{i}^{x}\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_{i}}T_{k}^{x}\left(t\right).$$

Entonces $I_{i}^{x}\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i} Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{1.280}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right)=\left(T_1^x\left(t\right),\ldots,T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$
$$I^x\left(t\right)=\left(I_1^x\left(t\right),\ldots,I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right),\ldots,S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x\left(t\right)=Q^x\left(0\right)+E^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S^x\left(T^x\left(t\right)\right), \tag{1.281}$$

$$Q^x\left(t\right)\geq 0, \tag{1.282}$$

$$T^x\left(0\right)=0,\text{ y }\overline{T}^x\left(t\right)\text{ es no decreciente}, \tag{1.283}$$

$$I^x\left(t\right)=et-CT^x\left(t\right)\text{ es no decreciente} \tag{1.284}$$

$$\int_0^{\infty}\left(CQ^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{1.285}$$

$$\text{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}^x\left(\cdot\right),\overline{T}^x\left(\cdot\right)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{1.286}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{ll}1, & S\left(k\right)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.5.65 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right),U^{x_{n_j}}\left(0\right),V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(0\right),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{1.287}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)\;\; u.o.c. \tag{1.288}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{1.289}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0, \tag{1.290}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\;\textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{1.291}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{1.292}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.293}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{1.294}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.5.20. *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x \to \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K \left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 1.5.22 (Lema 3.1 [**?**]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 1.5.66 (Teorema 5.1 [**?**]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$, *para toda* $t \geq t_0$.

Lema 1.5.23 (Lema 5.2 [**?**]). *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{1.295}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.5.67 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 1.5.21 (Proposición 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.296}$$

Proposición 1.5.22 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.297}$$

Proposición 1.5.23 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{1.298}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 1.5.68 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.299}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{1.300}$$

Teorema 1.5.69 (Teorema 6.2 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1.5.70 (Teorema 6.3 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_x\left[Q_t\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_0\right]\right| = 0.$$

Proposición 1.5.24 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{1.301}$$

Lema 1.5.9 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [?]). *Sea $\{\zeta\left(k\right):k\in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq 1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{1.302}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r:t\geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.5.71 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.303}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 1.5.72 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{1.304}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q\left(0\right)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 1.5.73 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_f=0. \tag{1.305}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 1.5.74 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{1.306}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.5.75 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.307}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{1.308}$$

Definición 1.5.86. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 1.5.87. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 1.5.88. *Sea X el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.5.89. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a $\mathcal{F}$. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.5.90. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1.5.91. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.5.92. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.5.93. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.5.94. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{1.309}$$

Nota 1.5.12. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (??) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{1.310}$$

1.5.23 Procesos de Estados de Markov

Teorema 1.5.76. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.311}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{ \bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v \right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{1.312}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{1.313}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.314}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{1.315}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot;\phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 1.5.5 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{1.316}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[15] se cumple para cualquier tiempo de paro.

1.5.24 Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.5.95. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{1.317}$$

Definición 1.5.96. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight*.*

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.5.77. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

1.5.25 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[16], $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.5.97. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{17}. \tag{1.318}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[18] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.320}$$

[15] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].
[16] qué se quiere decir con el término: más general?
[17] Ecuación de Chapman-Kolmogorov
[18]
$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.319}$$

Definición 1.5.98. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x),\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}^{19}.$$

Nota 1.5.13. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t}=P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t)\ t,s\geq 0,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{1.321}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

1.5.26 Primer Condición de Regularidad

Definición 1.5.99. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t\rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1.5.100 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ tal que $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0=x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 1.5.101. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E,\mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ es una colección de operadores shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t,s\geq 0$,*

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s}\ y\ X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{1.322}$$

*iii) Para cualquier $x\in E$,$\mathbf{P}^x\{X_0=x\}=1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.*

Definición 1.5.102 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha>0$ y cualquier $f\in S^\alpha$, el proceso $t\rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.5.103. *Un sistema $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

*i) $\mathbf{X}$ es una realización continua por la derecha, **??**, de (P_t).*

*ii) $\mathbf{X}$ satisface la condicion HD2, **??**, relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) $\mathcal{G}_t$ es aumentado y continuo por la derecha.

[19]Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

1.5.27 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 1.5.24 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^{k}\left(\left[|x_n|t\right]\right)\rightarrow P_{k}^{'}t, \text{ u.o.c.}, \tag{1.323}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow \alpha_{k}\left(t-\overline{U}_{k}\right)^{+}, \text{ u.o.c.}, \tag{1.324}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow \mu_{k}\left(t-\overline{V}_{k}\right)^{+}, \text{ u.o.c.}, \tag{1.325}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_{k}=1/m_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$.

Lema 1.5.25 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k\left(0\right)=\overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k\left(0\right)=\overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_{k}-t\right)^{+}, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_{k}-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_{l}^{x}\left(t\right)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_{l}^{x}\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_{k}^{x}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_{k}^{x}\left(t\right)=Q_{k}^{x}\left(0\right)+E_{k}^{x}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_{k}^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)-S_{k}^{x}\left(T_{k}^{x}\left(t\right)\right) \tag{1.326}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.327}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = \left(S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t))\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x(T_l^x(t))\right) - S^x(T^x(t)), \tag{1.328}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.329}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.330}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.331}$$

$$\int_0^{\infty} (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{1.332}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.333}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.5.78 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.334}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \ \textit{u.o.c.} \tag{1.335}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I - P)^{'} M^{-1} \left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{1.336}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.337}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{1.338}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{1.339}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.340}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{1.341}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.5.25. *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x \rightarrow \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$
$$\sum_{k=1}^{K} \left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$
$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$
$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$
para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j
$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$
$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$
para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Teorema 1.5.79 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$*. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$*, cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 1.5.26 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.342}$$

Proposición 1.5.27 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V(x)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f(X(s))\, ds\right] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{1.343}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

1.5.28 Estabilidad

Definición 1.5.104 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??**, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{1.344}$$

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 1.5.105 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ y $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$*

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk}\mu_l \overline{T}_l(t) \tag{1.345}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.346}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.347}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.348}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{1.349}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{1.350}$$

Lema 1.5.26 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.5.80 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Proposición 1.5.28 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0 \tag{1.351}$$

Lema 1.5.10 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^{r}. \tag{1.352}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.5.81 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.353}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.5.82 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{1.354}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 1.5.83 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{1.355}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 1.5.84 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{1.356}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.5.85 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.357}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{1.358}$$

Definición 1.5.106. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 1.5.107. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 1.5.108. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.5.109. *Una función $f : X \to \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.5.110. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1.5.111. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.5.112. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.5.113. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.5.114. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{1.359}$$

Nota 1.5.14. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{1.360}$$

Teorema 1.5.86. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \to p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \to \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.361}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces
$$E = \cup_{v\in K} M_v = \left\{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\right\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{\cup_{v\in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v\in K} \partial^* M_v. \tag{1.362}$$

y

$$\partial^* M_v = \left\{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\right\}. \tag{1.363}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.364}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf\left\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{1.365}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[20]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

[20] Revisar página 362, y 364 de Davis [**?**].

Supuestos 1.5.6 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t\geq t)}$ el número de saltos en $[0,t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[N_t\right] < \infty \text{ para toda } t. \quad (1.366)$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.5.115. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1.5.116. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1.5.117. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.5.118. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \quad (1.367)$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.5.87. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

1.5.29 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.5.119. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B)\,^{21}. \quad (1.368)$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[22] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \quad (1.370)$$

Definición 1.5.120. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.5.15. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\right\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \quad (1.371)$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

[21] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[22]

$$\mathbb{P}\left\{H | \mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H | X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \quad (1.369)$$

1.5.30 Primer Condición de Regularidad

Definición 1.5.121. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1.5.122 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1.5.123. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) *$(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) *$(\theta_t)_{t\geq 0}$ es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{1.372}$$

iii) *Para cualquier $x \in E$,$\mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.*

Definición 1.5.124 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.5.125. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) *$\mathbf{X}$ es una realización continua por la derecha, **??**, de (P_t).*

ii) *$\mathbf{X}$ satisface la condicion HD2, **??**, relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) *$\mathcal{G}_t$ es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 1.5.27 (Lema 4.2, Dai[**?**])**.** *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{1.373}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.374}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.375}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 1.5.28 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$*, conforme* $n \rightarrow \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^{+}, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{1.376}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.377}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$

$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x \left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{1.378}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.379}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.380}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.381}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.382}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{1.383}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.5.88 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} \left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.384}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} \left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{1.385}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I - P)' M^{-1} \left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{1.386}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.387}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{1.388}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.389}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.390}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{1.391}$$

Definición 1.5.126 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en **??** es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 1.5.89 (Teorema 4.2, Dai[**?**]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t)=\frac{1}{|x|}Q^{x}(|x|t) \tag{1.392}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.5.127 (Definición 3.3, Dai y Meyn [**?**]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t)=0$, con $t\geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)|=1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [**?**].

Lema 1.5.11 (Lema 3.1, Dai y Meyn [**?**]). *Si el modelo de flujo definido por **??**-**??** es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0>0$ tal que $\overline{Q}(t)=0$ para cualquier $t\geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}(0)|+|\overline{A}(0)|+|\overline{B}(0)|\leq1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.5.29. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}(0),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}(0),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}(0),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}(0),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^{0}(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0)=\overline{T}^{0}(0)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}(t)+\overline{T}_{k}^{0}(t)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}(t)=\overline{Q}_{k}(0)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}(t)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}(t)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}(t)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}(t)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}(t)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}(t)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}(t)$$

para $\overline{Q}_{k}(t)>0$.

Lema 1.5.29 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.5.90 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1.5.91 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 1.5.30 (Lema 5.2 [?]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{1.393}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.5.92 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 1.5.30 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.394}$$

Proposición 1.5.31 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.395}$$

Proposición 1.5.32 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{1.396}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1.5.93 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.397}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{1.398}$$

Teorema 1.5.94 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1.5.95 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 1.5.33 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{1.399}$$

Lema 1.5.12 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\left\{\zeta\left(k\right):k\in F\right\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $\left(0,\infty\right)$, y sea $E\left(t\right) = max\left(n\geq 1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{1.400}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t\geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.5.96 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.401}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.5.97 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{1.402}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[\left|Q\left(t\right)\right|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[\left|Q\left(0\right)\right|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 1.5.98 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{1.403}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 1.5.99 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_{X}\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{1.404}$$

$\mathbb{P}$*-c.s.*

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.5.100 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$|Q\left(T\right)|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ T\geq0, \tag{1.405}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{1.406}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$,
- también se define $\rho_{k}:=\lambda_{k}/\mu_{k}$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho<1$ para cuestiones de estabilidad.

1.5.31 Procesos de Estados Markoviano para el Sistema

1.5.32 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X=\left\{X\left(t\right),t\geq0\right\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [?].

Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [?]

.

1.5.33 Procesos Harris Recurrentes Positivos

Sea el proceso de Markov $X = \{X(t), t \geq 0\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] y Meyn y Down [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

1.5.34 Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X(t) = (Q(t), U(t), V(t)), \tag{1.407}$$

donde $Q(t)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U(t)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V(t)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U(t)$ como $V(t)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = (Q(0), U(0), V(0)) = (q, a, b)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \ldots, K$ se define

$$\begin{aligned} E_l^x(t) &= max\{r : U_l(0) + \xi_l(1) + \cdots + \xi_l(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0, \\ S_k^x(t) &= max\{r : V_k(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0. \end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s-éima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \left\{\phi^k(n), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \ldots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 1.5.31 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'} t, \; u.o.c., \tag{1.408}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{1.409}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{1.410}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 1.5.32 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{1.411}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j\in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.412}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))',$$
$$I^x(t) = (I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t))'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x(T_l^x(t))\right) - S^x(T^x(t)), \tag{1.413}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.414}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.415}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.416}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{1.417}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{1.418}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso}. \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.5.101 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} \left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.419}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} \left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{1.420}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I - P)' M^{-1} \left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{1.421}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.422}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{1.423}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.424}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.425}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{1.426}$$

Definición 1.5.128 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.

Teorema 1.5.102 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{1.427}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.5.129 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right) = \left(\overline{Q}_{1}\left(t\right), \ldots, \overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}\left(t\right) = \left(\overline{T}_{1}\left(t\right), \ldots, \overline{T}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right) = \overline{Q}_{k}\left(0\right) + \alpha_{k}t - \mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right) + \sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}\left(t\right) \tag{1.428}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.429}$$

$$\overline{T}_{k}\left(0\right) = 0, \text{ y } \overline{T}_{k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente}, \tag{1.430}$$

$$\overline{I}_{i}\left(t\right) = t - \sum_{k \in C_{i}}\overline{T}_{k}\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{1.431}$$

$$\overline{I}_{i}\left(\cdot\right) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right) = 0 \tag{1.432}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}\left(\cdot\right), T^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{1.433}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.5.130 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}\left(0\right), \overline{B}\left(0\right)\right) \in \mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??***, junto con la condición:*

$$\overline{Q}\left(t\right) = \overline{Q}\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{A}\left(0\right)\right)^{+} - \left(I - P^{'}\right)M\left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{B}\left(0\right)\right)^{+} \tag{1.434}$$

Definición 1.5.131 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$*, con* $t \geq t_{0}$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 1.5.13 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_{0} > 0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_{0}$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$.

1.5.35 Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad

1.5.36 Teorema 2.1

El resultado principal de Down [?] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 1.5.103 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \sup \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p, \tag{1.435}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{1.436}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right] = 0. \tag{1.437}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{1.438}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

Proposición 1.5.34 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{1.439}$$

Lema 1.5.14 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{1.440}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.5.104 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.441}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.5.105 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\, t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{1.442}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[\left|Q\left(t\right)\right|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[\left|Q\left(0\right)\right|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 1.5.106 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{1.443}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]\right|=0.$$

Teorema 1.5.107 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_{X}\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{1.444}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(\left|f\right|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

1.5.37 Teorema 2.2

Teorema 1.5.108 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$\left|Q\left(T\right)\right|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\, T\geq0, \tag{1.445}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $\left|Q\left(0\right)\right|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $\left|x\right|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{1.446}$$

1.5.38 Teorema 2.3

Teorema 1.5.109 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_{j}}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_{s}}\right)\delta^{*} \tag{1.447}$$

*i) Si $\rho<1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema **??**.*

*ii) Si $\rho<1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema **??***

1.5.39 Definiciones Básicas

Definición 1.5.132. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 1.5.133. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 1.5.134. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.5.135. *Una función $f : X \to \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.5.136. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1.5.137. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.5.138. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.5.139. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.5.140. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{1.448}$$

Nota 1.5.16. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{1.449}$$

Teorema 1.5.110. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots, m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \to p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \to \{0, 1, \ldots,\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.450}$$

en $\{T < \infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.5.35. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 1.5.33 (Lema 3.1 [**?**]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.5.111 (Teorema 5.2 [**?**]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1.5.112 (Teorema 5.1 [**?**]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$, *para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 1.5.34 (Lema 5.2 [**?**]). *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r}\tag{1.451}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.5.113 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [**?**]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 1.5.36 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.452}$$

Proposición 1.5.37 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1+|X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right) \tag{1.453}$$

Proposición 1.5.38 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X*, sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$*, y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$*. Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C*, entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{1.454}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 1.5.114 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.455}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$*. En particular para cada condicin inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{1.456}$$

Teorema 1.5.115 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$*. En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1.5.116 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$*, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$*. En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

1.5.40 Proceso de Estados Markoviano para el Sistema

Sean $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ el tiempo residual de arribos a la cola k, para cada servidor m, sea $H_m(t)$ par ordenado que consiste en la cola que está siendo atendida y la política de servicio que se está utilizando. $B_m(t)$ los tiempos de servicio residuales, $B_m^0(t)$ el tiempo residual de traslado, $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H_m(t)$.

El proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{1.457}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{1.458}$$
$$P(\xi_k(1) + \ldots \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\,dx0 \text{ y} \tag{1.459}$$
$$\int_0^\infty q_k(x)\,dx > 0 \tag{1.460}$$

1.5.41 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho, Sharpe [?], en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$.

Se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable.

Definición 1.5.141. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1.5.142. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1.5.143. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.5.144. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{1.461}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.5.117. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

1.5.42 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.5.145. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{23}. \tag{1.462}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov [24] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.464}$$

Definición 1.5.146. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t (P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.5.17. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.465}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

1.5.43 Primer Condición de Regularidad

Definición 1.5.147. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \to X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1.5.148 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1.5.149. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;

[23] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[24]
$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.463}$$

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{1.466}$$

iii) *Para cualquier* $x \in E, \mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 1.5.150 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.5.151. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Definición 1.5.152. *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{F}$ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* X*, la pareja* $(X, \mathcal{F})$ *es llamado espacio medible. Un subconjunto* A *de* X *es llamado medible, o medible con respecto a* $\mathcal{F}$*, si* $A \in \mathcal{F}$.

Definición 1.5.153. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *espacio de medida. Se dice que la medida* μ *es* σ*-finita si se puede escribir* $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ *con* $X_n \in \mathcal{F}$ *y* $\mu(X_n) < \infty$.

Definición 1.5.154. *Sea* X *el conjunto de los úmeros reales* $\mathbb{R}$*. El álgebra de Borel es la* σ*-álgebra* B *generada por los intervalos abiertos* $(a, b) \in \mathbb{R}$*. Cualquier conjunto en* B *es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.5.155. *Una función* $f : X \rightarrow \mathbb{R}$*, es medible si para cualquier número real* α *el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X*. Equivalentemente, se dice que* f *es medible si*

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.5.156. *Sean* $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$*,* $i = 1, 2, \ldots,$ *espacios medibles y* $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ *el conjunto de todas las sucesiones* $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ *tales que* $\omega_i \in \Omega_i$*,* $i = 1, 2, \ldots,$*. Si* $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$*, definimos* $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$*. Al conjunto* B_n *se le llama* cilindro *con base* B^n*, el cilindro es llamado medible si* $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.

Definición 1.5.157. *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de* σ*-álgebras* $\mathcal{F}_t$*, para* $t \geq 0$*, si para* $s < t$ *implica que* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$*, y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}_t$*-medible para cada* t*. Si no se especifica* $\mathcal{F}_t$ *entonces se toma* $\mathcal{F}_t$ *como* $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$*, la más pequeña* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω *que hace que cada* $X(s)$*, con* $s \leq t$ *sea Borel medible.*

Definición 1.5.158. *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ *familia creciente de sub* σ*-álgebras. es decir,* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *para* $s \leq t$*. Un tiempo de paro para* $\mathcal{F}(t)$ *es una función* $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ *tal que* $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ *para cada* $t \geq 0$*. Un tiempo de paro para el proceso estocástico* $X(t), t \geq 0$ *es un tiempo de paro para las* σ*-álgebras* $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.

Definición 1.5.159. *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, con* (S, χ) *espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a* $\{\mathcal{F}(t)\}$*, es decir, si para cualquier* $s, t \in I$*,* I *conjunto de índices,* $s < t$*, se tiene que* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}(t)$*-medible,*

Definición 1.5.160. *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a* $\mathcal{F}(t)$ *o que* $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ *es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto* $B \in \chi$*, y* $s, t \in I$*,* $s < t$ *se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{1.467}$$

Nota 1.5.18. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (??) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{1.468}$$

Teorema 1.5.118. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots, m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \to p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \to \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.469}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \to \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \to \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \to [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{1.470}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{1.471}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.472}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \to \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda\left(n, \phi_n(s, \mathbf{z})\right) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{1.473}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[25]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 1.5.7 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{1.474}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.5.161. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1.5.162. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1.5.163. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.5.164. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \textit{ es compacto en } E\}. \tag{1.475}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.5.119. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

1.5.44 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.5.165. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{26}. \tag{1.476}$$

[25] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

[26] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E,\mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[27] (??) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_t\right)|\mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t}f\left(X_t\right)\ \ s\leq t\in I,\ \ f\in b\mathcal{E}. \tag{1.478}$$

Definición 1.5.166. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f\left(x\right) = P_t\left(P_s f\right)\left(x\right),\ \ t,s\geq 0,\ \ x\in E\ \ f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.5.19. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t}=P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (??) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_{t+s}\right)|\mathcal{G}_t\right\} = P_s f\left(X_t\right)\ \ t,s\geq 0,\ \ f\in b\mathcal{E}. \tag{1.479}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (??) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

1.5.45 Primer Condición de Regularidad

Definición 1.5.167. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t\rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1.5.168 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}$ y $P_t\left(b\mathcal{E}^*\right)\subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ tal que $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 1.5.169. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E,\mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) *$(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) *$(\theta_t)_{t\geq 0}$ es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t,s\geq 0$,*

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s}\ \ y\ X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{1.480}$$

iii) *Para cualquier $x\in E$,$\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}=1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (??) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.*

Definición 1.5.170 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha>0$ y cualquier $f\in S^{\alpha}$, el proceso $t\rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.5.171. *Un sistema $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

[27]
$$\mathbb{P}\left\{H|\mathcal{G}_t\right\}=\mathbb{P}\left\{H|X_t\right\}\ \ H\in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.477}$$

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t)*.*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a* $\mathcal{G}_t$*.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 1.5.35 (Lema 4.2, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$*, casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{1.481}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.482}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.483}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$*.*

Lema 1.5.36 (Lema 4.3, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{1.484}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.485}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{1.486}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.487}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.488}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.489}$$

$$\int_0^{\infty} \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.490}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.491}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso}. \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.5.120 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.492}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \;\; u.o.c. \tag{1.493}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{1.494}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.495}$$

$$\overline{T}(t) \;\; \text{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{1.496}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \;\; \text{es no decreciente}, \tag{1.497}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.498}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{1.499}$$

Definición 1.5.172 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Teorema 1.5.121 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{1.500}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.5.173 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 1.5.15 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.5.39. *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x \rightarrow \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 1.5.37 (Lema 3.1 [**?**])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.5.122 (Teorema 5.2 [**?**])**.** *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1.5.123 (Teorema 5.1 [**?**])**.** *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$*, para toda* $t \geq t_0$.

Lema 1.5.38 (Lema 5.2 [**?**])**.** *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$*, y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$*, entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{1.501}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.5.124 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [**?**])**.** *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$*. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 1.5.40 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.502}$$

Proposición 1.5.41 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1+|X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right) \tag{1.503}$$

Proposición 1.5.42 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{1.504}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 1.5.125 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.505}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{1.506}$$

Teorema 1.5.126 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1.5.127 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 1.5.43 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{1.507}$$

Lema 1.5.16 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{1.508}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.5.128 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.509}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.5.129 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{1.510}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x[|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 1.5.130 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{1.511}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 1.5.131 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{1.512}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.5.132 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.513}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{1.514}$$

1.5.46 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]=\overline{N}>0$;

2) $\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(1)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}^{m}r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(i)\right]. \tag{1.515}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}(n)\right\}_{n\geq1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}(n)\right\}_{n\geq1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}<1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_{k}(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^{T}=\left(Q_{k}(t),A_{k}(t),B_{m}(t),B_{m}^{0}(t),C_{m}(t)\right), \tag{1.516}$$

para $k=1,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X}=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{1.517}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\, dx,\ 0 \leq a < b. \tag{1.518}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

1.5.47 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [**?**, **?**].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 1.5.174. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D)\,\pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.5.175. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 1.5.20. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [**?**]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\,\pi(dx),$$

*y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [**?**].*

Definición 1.5.176. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [**?**]:

Lema 1.5.39 (Lema 3.1, Dai [**?**])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{1.519}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 1.5.40 (Lema 3.1, Dai [**?**])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1.5.133 (Teorema 3.1, Dai [**?**])**.** *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{1.520}$$

*donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.5.48 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.521}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{1.522}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{1.523}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.524}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.525}$$

Definición 1.5.177 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1.5.178. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.5.134 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{1.526}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.5.179 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 1.5.17 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.5.135 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{1.527}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{1.528}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\to\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{1.529}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{1.530}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.5.136 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{1.531}$$

*i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.*

*ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??***

Dado el proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ definido en (**??**) que describe la dinámica del sistema de visitas cíclicas, si $U(t)$ es el residual de los tiempos de llegada al tiempo t entre dos usuarios consecutivos y $V(t)$ es el residual de los tiempos de servicio al tiempo t para el usuario que estás siendo atendido por el servidor. Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados que puede tomar el proceso X.

Lema 1.5.41 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k,$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea e es un vector de unos, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{cc} 1, & S\left(k\right)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema (**??**):

Teorema 1.5.137 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right),U^{x_{n_j}}\left(0\right),V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(0\right),\overline{U},\overline{V}\right),\tag{1.532}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)\ \ u.o.c.\tag{1.533}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+},\tag{1.534}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0,\tag{1.535}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\ \text{ es no decreciente y comienza en cero,}\tag{1.536}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right)\ \text{ es no decreciente,}\tag{1.537}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0,\tag{1.538}$$

$$\text{Condiciones en }\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola,}\tag{1.539}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.5.44 (Proposición 4.2, Dai [**?**]). *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_k^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_k^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_k^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. El flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) *Los vectores de tiempo ocupado* $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^{0}(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0)=\overline{T}^{0}(0)=0$.

ii) *Para todo* $t\geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}(t)+\overline{T}_{k}^{0}(t)\right]=t.$$

iii) *Para todo* $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}(t)=\overline{Q}_{k}(0)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}(t).$$

iv) *Para todo* $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}(t)=\rho_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}(t)=0$.

v) *Para todo* k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}(t)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}(t).$$

vi) *Para todo* $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}(t)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}(t),$$

para $\overline{Q}_{k}(t)>0$.

Lema 1.5.42 (Lema 3.1, Chen [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Lema 1.5.43 (Lema 5.2, Gut [?]). *Sea* $\{\xi(k):k\in\mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0,\infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t)=max\{n\geq 1:\xi(1)+\cdots+\xi(n-1)\leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E[\xi_{1}]}\right)^{r}, \tag{1.540}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) *Para cualquier* $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$.

b) *Las variables aleatorias* $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.5.138 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo, Gut [?]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}(X_{1})\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r}\rightarrow\frac{1}{\mu^{r}}$, *cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$.

Proposición 1.5.45 (Proposición 5.1, Dai y Sean [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_{0}>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X(t_{0}|x|)|^{p+1}\right]=0. \tag{1.541}$$

Proposición 1.5.46 (Proposición 5.3, Dai y Sean [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1}<\infty$, $\delta>0$ *y un conjunto compacto* $C\subset X$.

$$\mathbb{E}_{x}\left[\int_{0}^{\tau_{C}(\delta)}(1+|X(t)|^{p})\,dt\right]\leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right). \tag{1.542}$$

Proposición 1.5.47 (Proposición 5.4, Dai y Sean [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right],$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{1.543}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1.5.139 (Teorema 5.5, Dai y Sean [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\}, \tag{1.544}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p. \tag{1.545}$$

Teorema 1.5.140 (Teorema 6.2 Dai y Sean [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0,$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty,$$

donde

$$\parallel P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \parallel_f = sup_{|g \leq f|} | \int \pi(dy)\, g(y) - \int P^t(x, dy)\, g(y) |,$$

para $x \in \mathbb{X}$.

Teorema 1.5.141 (Teorema 6.3, Dai y Sean [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)} \left| P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \right|_f = 0,$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)} |\mathbb{E}_x [Q_t] - \mathbb{E}_\pi [Q_0]| = 0.$$

Proposición 1.5.48 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0. \tag{1.546}$$

Teorema 1.5.142 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\}, \tag{1.547}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.5.143 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right)\pi\left(dx\right), \tag{1.548}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.5.144 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.549}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{1.550}$$

Demostración 1.5.1 (Teorema ??). *La demostración de este teorema se da a continuación:*

*i) Utilizando la proposición **??** se tiene que la proposición **??** es cierta para $f\left(x\right) = 1 + |x|^p$.*

*i) es consecuencia directa del Teorema **??**.*

iii) ver la demostración dada en Dai y Sean [?] páginas 1901-1902.

iv) ver Dai y Sean [?] páginas 1902-1903 ó [?].

Modelo de Flujo y Estabilidad

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k\left(n\right) := \sum_{i=1}^{n}\phi^k\left(i\right). \tag{1.5.551}$$

suponiendo que el estado inicial de la red es $x = (q, a, b) \in X$, entonces para cada k

$$E_k^x\left(t\right) := \max\left\{n \geq 0 : A_k^x\left(0\right) + \psi_k\left(1\right) + \cdots + \psi_k\left(n-1\right) \leq t\right\} \tag{1.5.552}$$
$$S_k^x\left(t\right) := \max\left\{n \geq 0 : B_k^x\left(0\right) + \eta_k\left(1\right) + \cdots + \eta_k\left(n-1\right) \leq t\right\} \tag{1.5.553}$$

Sea $T_k^x\left(t\right)$ el tiempo acumulado que el servidor $s\left(k\right)$ ha utilizado en los usuarios de la clase k en el intervalo $[0, t]$. Entonces se tienen las siguientes ecuaciones:

$$Q_k^x\left(t\right) = Q_k^x\left(0\right) + E_k^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{k}\Phi_k^l S_l^x\left(T_l^x\right) - S_k^x\left(T_k^x\right) \tag{1.5.554}$$

$$Q^x\left(t\right) = \left(Q_1^x\left(t\right), \ldots, Q_K^x\left(t\right)\right)^{'} \geq 0, \tag{1.5.555}$$

$$T^x\left(t\right) = \left(T_1^x\left(t\right), \ldots, T_K^x\left(t\right)\right)^{'} \geq 0, \text{ es no decreciente} \tag{1.5.556}$$

$$I_i^x\left(t\right) = t - \sum_{k\in C_i} T_k^x\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{1.5.557}$$

$$\int_0^\infty \sum_{k\in C_i} Q_k^x\left(t\right) dI_i^x\left(t\right) = 0 \tag{1.5.558}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x\left(\cdot\right), T^x\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{1.5.559}$$

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^{x}(t)=\frac{1}{|x|}Q^{x}(|x|t) \tag{1.5.560}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola. Si se hace $|q|\rightarrow\infty$ y se mantienen las componentes restantes fijas, de la condición inicial x, cualquier punto límite del proceso normalizado $\overline{Q}^{x}$ es una solución del siguiente modelo de flujo, ver [?].

Definición 1.5.180. *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $(Q^{x}(\cdot),T^{x}(\cdot))$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t)=\left(\overline{Q}_{1}(t),\ldots,\overline{Q}_{K}(t)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}(t)=\left(\overline{T}_{1}(t),\ldots,\overline{T}_{K}(t)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_{k}(t)=\overline{Q}_{k}(0)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}(t)+\sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}(t) \tag{1.5.561}$$

$$\overline{Q}_{k}(t)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{1.5.562}$$

$$\overline{T}_{k}(0)=0, \text{ y } \overline{T}_{k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.5.563}$$

$$\overline{I}_{i}(t)=t-\sum_{k\in C_{i}}\overline{T}_{k}(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.5.564}$$

$$\overline{I}_{i}(\cdot) \text{ se incrementa al tiempot cuando } \sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}(t)\,dI_{i}^{x}(t)=0 \tag{1.5.565}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } (Q^{x}(\cdot),T^{x}(\cdot)) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{1.5.566}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.5.181. *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0),\overline{B}(0)\right)\in\mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??**, *junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t)=\overline{Q}(0)+\left(\alpha t-\overline{A}(0)\right)^{+}-\left(I-P^{'}\right)M\left(\overline{T}(t)-\overline{B}(0)\right)^{+} \tag{1.5.567}$$

Definición 1.5.182. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}(t)=0$, *con* $t\geq t_{0}$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)|=1$.

El siguiente resultado se encuentra en [?].

Lema 1.5.18. *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_{0}>0$ *tal que* $\overline{Q}(t)=0$ *para cualquier* $t\geq t_{0}$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|overlinex|=|\overline{Q}(0)|+|\overline{A}(0)|+|\overline{B}(0)|\leq 1$.

Resultados principales

Supuestos necesarios sobre la red

Supuestos 1.5.8. *A1)* $\psi_{1},\ldots,\psi_{K},\eta_{1},\ldots,\eta_{K}$ *son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) Para algún entero $p\geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\psi_{l}(1)^{p+1}\right]<\infty \text{ para } l\in\mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_{k}(1)^{p+1}\right]<\infty \text{ para } k=1,\ldots,K.$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\psi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \quad (1.5.568)$$

$$P(\psi_k(1) + \ldots \psi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\, dx0 \text{ y} \quad (1.5.569)$$

$$\int_0^\infty q_k(x)\, dx > 0 \quad (1.5.570)$$

El argumento dado en [?] en el lema **??** se puede aplicar para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños.Entonces la condición $A3$) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 1.5.145. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] ds \leq \kappa_p \quad (1.5.571)$$

donde p es el entero dado por A2). Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r \quad (1.5.572)$$

para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

iii) EL primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t \to \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0. \quad (1.5.573)$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \quad (1.5.574)$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

Demostración 1.5.2. *La demostración de este resultado se da aplicando los teoremas **??**, **??**, **??** y **??***

Definiciones Generales

Definimos un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada. Bajo cualquier *preemptive buffer priority* disciplina de servicio, el estado $\mathbb{X}(t)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}(t) = (Q_k(t), A_l(t), B_k(t) : k = 1, 2, \ldots, K, l \in \mathcal{A}) \quad (1.5.575)$$

donde $Q_k(t)$ es la longitud de la cola para los usuarios de la clase k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k(t)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio. Los tiempos de arribo residuales, que son iguales al tiempo que queda hasta que el próximo usuario de la clase k llega, se denotan por $A_k(t)$. Tanto $B_k(t)$ como $A_k(t)$ se suponen continuos por la derecha.

Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x = (q, a, b)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = (q, a, b) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x\| = |q| + |a| + |b|$. En [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho en el espacio de estadio medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, est definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y est adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; $\{P_x, x \in X\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in X$

$$P_x \{\mathbb{X}(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{\mathbb{X}(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la sigma algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(\mathbb{X}(t) \in D)$$

Definición 1.5.183. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_X P^t(x, D) \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.5.184. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

- Si X es Harris recurrente, entonces una única medida invariante π existe ([?]).
- Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama *Harris recurrente positiva.*
- Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria y hacemos

  $$P_\pi(\cdot) [= \int_X P_x(\cdot) \pi(dx)$$

  y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, as, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π

Definición 1.5.185. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.[28]

[28]En [?] muestran que si $P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ solamente para uno conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris recurrente

Definiciones y Descripción del Modelo

El modelo está compuesto por c colas de capacidad infinita, etiquetadas de 1 a c las cuales son atendidas por s servidores. Los servidores atienden de acuerdo a una cadena de Markov independiente $\left(X_n^i\right)_n$ con $1 \leq i \leq s$ y $n \in \{1, 2, \ldots, c\}$ con la misma matriz de transición $r_{k,l}$ y única medida invariante (p_k). Cada servidor permanece atendiendo en la cola un periodo llamado de visita y determinada por la política de servicio asignada a la cola.

Los usuarios llegan a la cola k con una tasa λ_k y son atendidos a una razón μ_k. Las sucesiones de tiempos de interarribo $(\tau_k(n))_n$, la de tiempos de servicio $\left(\sigma_k^i(n)\right)_n$ y la de tiempos de cambio $\left(\sigma_{k,l}^{0,i}(n)\right)_n$ requeridas en la cola k para el servidor i son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas con distribución general independiente de i, con media $\sigma_k = \frac{1}{\mu_k}$, respectivamente $\sigma_{k,l}^0 = \frac{1}{\mu_{k,l}^0}$, e independiente de las cadenas de Markov $\left(X_n^i\right)_n$. Además se supone que los tiempos de interarribo se asume son acotados, para cada $\rho_k = \lambda_k \sigma_k < s$ para asegurar la estabilidad de la cola k cuando opera como una cola $M/GM/1$.

Políticas de Servicio

Una política de servicio determina el número de usuarios que serán atendidos sin interrupción en periodo de servicio por los servidores que atienden a la cola. Para un solo servidor esta se define a través de una función f donde $f(x,a)$ es el número de usuarios que son atendidos sin interrupción cuando el servidor llega a la cola y encuentra x usuarios esperando dado el tiempo transcurrido de interarribo a. Sea $v(x,a)$ la duración del periodo de servicio para una sola condición inicial (x,a).

Las políticas de servicio consideradas satisfacen las siguientes propiedades:

i) Hay conservación del trabajo, es decir

$$v(x,a) = \sum_{l=1}^{f(x,a)} \sigma(l)$$

con $f(0,a) = v(0,a) = 0$, donde $(\sigma(l))_l$ es una sucesión independiente e idénticamente distribuida de los tiempos de servicio solicitados.

ii) La selección de usuarios para se atendidos es independiente de sus correspondientes tiempos de servicio y del pasado hasta el inicio del periodo de servicio. Así las distribución (f,v) no depende del orden en el cuál son atendidos los usuarios.

iii) La política de servicio es monótona en el sentido de que para cada $a \geq 0$ los números $f(x,a)$ son monótonos en distribución en x y su límite en distribución cuando $x \to \infty$ es una variable aleatoria F^{*0} que no depende de a.

iv) El número de usuarios atendidos por cada servidor es acotado por $f^{min}(x)$ de la longitud de la cola x que además converge monótonamente en distribución a F^* cuando $x \to \infty$

Proceso de Estados

El sistema de colas se describe por medio del proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ como se define a continuación. El estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = (Q(t), P(t), A(t), R(t), C(t))$$

donde

- $Q(t) = (Q_k(t))_{k=1}^c$, número de usuarios en la cola k al tiempo t.
- $P(t) = \left(P^i(t)\right)_{i=1}^s$, es la posición del servidor i.
- $A(t) = (A_k(t))_{k=1}^c$, es el residual del tiempo de arribo en la cola k al tiempo t.
- $R(t) = \left(R_k^i(t), R_{k,l}^{0,i}(t)\right)_{k,l,i=1}^{c,c,s}$, el primero es el residual del tiempo de servicio del usuario atendido por servidor i en la cola k al tiempo t, la segunda componente es el residual del tiempo de cambio del servidor i de la cola k a la cola l al tiempo t.

- $C(t) = \left(C_k^i(t)\right)_{k,i=1}^{c,s}$, es la componente correspondiente a la cola k y al servidor i que está determinada por la política de servicio en la cola k y que hace al proceso $X(t)$ un proceso de Markov.

Todos los procesos definidos arriba se suponen continuos por la derecha.

El proceso X tiene la propiedad fuerte de Markov y su espacio de estados es el espacio producto

$$\mathcal{X} = \mathbb{N}^c \times E^s \times \mathbb{R}_+^c \times \mathbb{R}_+^{cs} \times \mathbb{R}_+^{c^2 s} \times \mathcal{C}$$

donde $E = \{1,2,\ldots,c\}^2 \cup \{1,2,\ldots,c\}$ y $\mathcal{C}$ depende de las políticas de servicio.

Introducción

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1. $$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0 \tag{1.5.576}$$

2. $$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N} \tag{1.5.577}$$

   para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j'}^m = r_{j,j'}$
- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define
$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right]. \tag{1.5.578}$$

Colas Cíclicas

El *token passing ring* es una estación de un solo servidor con K clases de usuarios. Cada clase tiene su propio regulador en la estación. Los usuarios llegan al regulador con razón α_k y son atendidos con taza μ_k.

La red se puede modelar como un Proceso de Markov con espacio de estados continuo, continuo en el tiempo:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t), B_k^0(t), C(t) : k = 1,\ldots,K, l \in \mathcal{A}\right) \tag{1.5.579}$$

donde $Q_k(t), B_k(t)$ y $A_k(t)$ se define como en **??**, $B_k^0(t)$ es el tiempo residual de cambio de la clase k a la clase $k+1\,(modK)$; $C(t)$ indica el número de servicios que han sido comenzados y/o completados durante la sesión activa del buffer.

Los parámetros cruciales son la carga nominal de la cola k: $\beta_k = \alpha_k/\mu_k$ y la carga total es $\rho_0 = \sum\beta_k$, la media total del tiempo de cambio en un ciclo del token está definido por

$$u^0 = \sum_{k=1}^K \mathbb{E}\left[\eta_k^0(1)\right] = \sum_{k=1}^K \frac{1}{\mu_k^0} \tag{1.5.580}$$

El proceso de la longitud de la cola $Q_k^x(t)$ y el proceso de acumulación del tiempo de servicio $T_k^x(t)$ para el buffer k y para el estado inicial x se definen como antes. Sea $T_k^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo

t que el token tarda en cambiar del buffer k al $k+1 \mod K$. Suponga que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right), \overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right), \frac{1}{|x|}T^{x}\left(|x|t\right), \frac{1}{|x|}T^{x,0}\left(|x|t\right)\right) \tag{1.5.581}$$

cuando $|x| \to \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right), \overline{T}^{0}\left(t\right)\right)$ es un flujo límite retrasado del token ring.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado

Proposición 1.5.49. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^{x}\left(0\right), \frac{1}{|x|}A_k^{x}\left(0\right), \frac{1}{|x|}B_k^{x}\left(0\right), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}\left(0\right)\right) \to \left(\overline{Q}_k\left(0\right), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ y $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}\left(0\right) = \overline{T}^{0}\left(0\right) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k\left(t\right) + \overline{T}_k^{0}\left(t\right)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k\left(t\right) = \overline{Q}_k\left(0\right) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k\left(t\right)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k\left(t\right) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k\left(t\right) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^{0}\overline{T}_k^{0}\left(t\right) = \mu_j^{0}\overline{T}_j^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k\dot{\overline{T}}_k\left(t\right) = l_k\mu_k^{0}\dot{\overline{T}}_k^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_k\left(t\right) > 0$.

Resultados Previos

Lema 1.5.19. *El proceso estocástico Φ es un proceso de markov fuerte, temporalmente homogéneo, con trayectorias muestrales continuas por la derecha, cuyo espacio de estados Y es igual a $X \times \mathbb{R}$*

Proposición 1.5.50. *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{1.5.582}$$

Lema 1.5.20. *Sea $\{\zeta\left(k\right) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $\left(0, \infty\right)$, y sea $E\left(t\right) = max\left(n \geq 1 : \zeta\left(1\right) + \cdots + \zeta\left(n-1\right) \leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^{r}. \tag{1.5.583}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.5.146. *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p \left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.5.584}$$

para $t > 0$ *y* $x \in X$*. En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.5.147. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$||P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)||_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{1.5.585}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 1.5.148. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con* $f(x) = f_1(x)$ *se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}||P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)||_f = 0. \tag{1.5.586}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0.$$

Teorema 1.5.149. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea* ν *cualquier distribución de probabilidad en* $(X, \mathcal{B}_X)$*, y* π *la distribución estacionaria de* X*.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\, ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{1.5.587}$$

$\mathbb{P}$*-c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *con* $\pi(|f|) < \infty$*, la ecuación anterior se cumple.*

Teorema de Estabilidad: Descripción

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1. $$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0 \tag{1.5.588}$$

2. $$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N} \tag{1.5.589}$$

   para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m} = r_{j,j^{'}}$

- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right]. \tag{1.5.590}$$

1.5.49 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(\omega)\right] = \overline{N} > 0$;
2) $\mathbb{E}\left[N(\omega)\right] \leq \overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r^m_{j,j'}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta^m_{j,j'}(n)$, con $\delta^m_{j,j'}(n)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta^m_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\left\{p^m_j\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r^m_{j,j'}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p^m_j r^m_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta^m_{j,j'}(i)\right]. \tag{1.5.591}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^{K}\rho_k < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_k(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;

- $B_m(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_m^0(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right), \tag{1.5.592}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\
\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{1.5.593}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{1.5.594}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

1.5.50 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x \{ f (X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t \} = E_X (\tau) f (X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X (\tau (w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [**?**, **?**].

Sea $P^t (x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t (x, D) = P_x (X (t) \in D).$$

Definición 1.5.186. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi (D) = \int_{\mathbb{X}} P^t (x, D) \pi (dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.5.187. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu (D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf \{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 1.5.21. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [**?**]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi (\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x (\cdot) \pi (dx),$$

*y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [**?**].*

Definición 1.5.188. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t (x, A) \geq \delta \nu (A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [**?**]:

Lema 1.5.44 (Lema 3.1, Dai [**?**])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x (\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x [\tau_B (\delta)] < \infty, \tag{1.5.595}$$

donde $\tau_B (\delta) = inf \{t \geq \delta : X (t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 1.5.45 (Lema 3.1, Dai [**?**])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1.5.150 (Teorema 3.1, Dai [**?**])**.** *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E} |X^x (|x| \delta) | = 0, \tag{1.5.596}$$

*donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.5.51 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.5.597}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{1.5.598}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{1.5.599}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.5.600}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.5.601}$$

Definición 1.5.189 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1.5.190. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.5.151 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{1.5.602}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.5.191 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 1.5.21 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.5.152 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{1.5.603}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{1.5.604}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{1.5.605}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{1.5.606}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.5.153 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{1.5.607}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

1.5.52 Modelo de Flujo

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Sea x el número de usuarios en la cola esperando por servicio y $N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política dada y fija mientras el servidor permanece dando servicio, entonces se asume que:

(S1.)
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]=\overline{N}>0. \tag{1.5.608}$$

(S2.)
$$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]\leq\overline{N}, \tag{1.5.609}$$

para cualquier valor de x.

El tiempo que tarda un servidor en volver a dar servicio después de abandonar la cola inmediata anterior y llegar a la próxima se llama tiempo de traslado o de cambio de cola, al momento de la n-ésima visita del servidor a la cola j se genera una sucesión de variables aleatorias $\delta_{j,j+1}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con la propiedad de que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]\geq0$.

Se define
$$\delta^{*}:=\sum_{j,j+1}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]. \tag{1.5.610}$$

Los tiempos entre arribos a la cola k, son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos. Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho<1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Para el caso más sencillo podemos definir un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada, el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}\left(t\right)=\left(Q_{k}\left(t\right),A_{l}\left(t\right),B_{k}\left(t\right):k=1,2,\ldots,K,l\in\mathcal{A}\right), \tag{1.5.611}$$

donde $Q_{k}\left(t\right)$ es la longitud de la cola k para los usuarios esperando servicio, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_{k}\left(t\right)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio.

Los tiempos entre arribos residuales, que son el tiempo que queda hasta que el próximo usuario llega a la cola para recibir servicio, se denotan por $A_{k}\left(t\right)$. Tanto $B_{k}\left(t\right)$ como $A_{k}\left(t\right)$ se suponen continuos por la derecha [**?**].

Sea $\mathcal{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$, y sea $x=\left(q,a,b\right)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $\left|q\right|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x=\left(q,a,b\right)\in\mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\left\|x\right\|=\left|q\right|+\left|a\right|+\left|b\right|$. En [**?**] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que
$$\left(\left(\Omega,\mathcal{F}\right),\mathcal{F}_{t},\mathbb{X}\left(t\right),\theta_{t},P_{x}\right)$$
es un proceso de *Borel Derecho* en el espacio de estados medible $\left(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}}\right)$.

Sea $P^{t}\left(x,D\right)$, $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t\geq0$ probabilidad de transición de X definida como
$$P^{t}\left(x,D\right)=P_{x}\left(\mathbb{X}\left(t\right)\in D\right).$$

Definición 1.5.192. *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*
$$\pi\left(D\right)=\int_{X}P^{t}\left(x,D\right)\pi\left(dx\right),$$
para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t\geq0$.

Definición 1.5.193. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D)>0$ y $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\left\{\tau_D<\infty\right\}\equiv 1,$$

cuando $\tau_D=inf\left\{t\geq 0:\mathbb{X}_t\in D\right\}$.

Definición 1.5.194. *Un conjunto $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t>0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta>0$ tal que*

$$P^t\left(x,A\right)\geq\delta\nu\left(A\right),$$

para $x\in D, A\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

Nota 1.5.22. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π ([**?**]).*

*ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso a la medida se le llama **Harris recurrente positiva**.*

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria; se define

$$P_{\pi}\left(\cdot\right)=\int_X P_x\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right).$$

Se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, así, el proceso $X=\left\{\mathbb{X}\left(t\right),t\geq 0\right\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_{π}.

*iv) En [**?**] se muestra que si $P_x\left\{\tau_D<\infty\right\}=1$ incluso para solamente un conjunto pequeño, entonces el proceso de Harris es recurrente.*

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $\left(X\left(t\right)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t\geq 0$ está dado por

$$X\left(t\right)=\left(Q\left(t\right),A\left(t\right),H\left(t\right),B\left(t\right),B^0\left(t\right),C\left(t\right)\right)\tag{1.5.612}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X}=\mathbb{Z}^K\times\mathbb{R}_+^K\times\left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^M\times\mathbb{R}_+^K\times\mathbb{R}_+^K\times\mathbb{Z}^K,\tag{1.5.613}$$

- $Q\left(t\right)=\left(Q_k\left(t\right),1\leq k\leq K\right)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A\left(t\right)=\left(A_k\left(t\right),1\leq k\leq K\right)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H\left(t\right)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B\left(t\right)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0\left(t\right)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C\left(t\right)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H\left(t\right)$.

$A_k\left(t\right),B_m\left(t\right)$ y $B_m^0\left(t\right)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([**?**]).

Dada una condición inicial $x\in\mathcal{X}$, $Q_k^x\left(t\right)$ es la longitud de la cola k al tiempo t y $T_{m,k}^x\left(t\right)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en atender a los usuarios de la cola k. De igual manera se define $T_{m,k}^{x,0}\left(t\right)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en cambiar de cola para volver a atender a los usuarios.

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right), \tag{1.5.614}$$

$$\overline{T}_{m}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}T_{m}^{x}\left(|x|t\right), \tag{1.5.615}$$

$$\overline{T}_{m}^{x,0}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}T_{m}^{x,0}\left(|x|t\right). \tag{1.5.616}$$

Cualquier límite $\overline{Q}\left(t\right)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola, al conjunto de todos los posibles flujos límite se le llamará **modelo de flujo**, ([**?**]).

Definición 1.5.195. *Un flujo límite para un sistema de visitas bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}_{m}\left(\cdot\right), \overline{T}_{m}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right) = \left(\overline{Q}_{1}\left(t\right), \ldots, \overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)$ *y* $\overline{T}\left(t\right) = \left(\overline{T}_{1}\left(t\right), \ldots, \overline{T}_{K}\left(t\right)\right)$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right) = \overline{Q}_{k}\left(0\right) + \lambda_{k}t - \sum_{m=1}^{M}\mu_{k}\overline{T}_{m,k}\left(t\right) \tag{1.5.617}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.5.618}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente}, \tag{1.5.619}$$

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^{0}\left(t\right) + \overline{T}_{m,k}\left(t\right) = t \text{ param} = 1, 2, \ldots, M \tag{1.5.620}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en (**??**)-(**??**) se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Definición 1.5.196. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$.

1.5.53 Estabilidad de los Sistemas de Visitas Cíclicas

Es necesario realizar los siguientes supuestos, ver ([**?**]) y ([**?**]):

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k\left(x\right)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_{k}\left(1\right) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{1.5.621}$$

$$P\left(\xi_{k}\left(1\right) + \ldots \xi_{k}\left(j_{k}\right) \in dx\right) \geq q_{k}\left(x\right)dx0 \text{ y} \tag{1.5.622}$$

$$\int_{0}^{\infty}q_{k}\left(x\right)dx > 0 \tag{1.5.623}$$

En [**?**] ser da un argumento para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños. Entonces la condición A3) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 1.5.154. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p} \tag{1.5.624}$$

donde p es el entero dado por A2).

Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right]\leq\kappa_{r} \tag{1.5.625}$$

para $r=1,\ldots,p$ y $k=1,\ldots,K$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0. \tag{1.5.626}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right] \tag{1.5.627}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r=1,\ldots,p$ y $k=1,\ldots,K$.

Teorema 1.5.155. *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\text{ con }T\geq0, \tag{1.5.628}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{1.5.629}$$

1.5.54 Resultados principales

En el caso particular de un modelo con un solo servidor, $M=1$, se tiene que si se define

Definición 1.5.197.

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}+\max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_{j}}{\overline{N}}\right)\delta^{*}. \tag{1.5.630}$$

entonces

Teorema 1.5.156. *i) Si $\rho<1$, entonces la red es estable, es decir el teorema (**??**) se cumple.*

*ii) De lo contrario, es decir, si $\rho>1$ entonces la red es inestable, es decir, el teorema (**??**).*

1.5.55 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]=\overline{N}>0$;
2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]\leq \overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(1\right)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}^{m}r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(i\right)\right]. \tag{1.5.631}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}<1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_{k}\left(t\right)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}\left(t\right)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}\left(t\right)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X\left(t\right)^{T}=\left(Q_{k}\left(t\right),A_{k}\left(t\right),B_{m}\left(t\right),B_{m}^{0}\left(t\right),C_{m}\left(t\right)\right), \tag{1.5.632}$$

para $k=1,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X}=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_{1},\ldots,\xi_{K},\eta_{1},\ldots,\eta_{K}$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p\geq1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_{l}\left(1\right)^{p+1}\right]&<\infty \text{ para } l=1,\ldots,K \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)^{p+1}\right]&<\infty \text{ para } k=1,\ldots,K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \quad (1.5.633)$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx, \; 0 \leq a < b. \quad (1.5.634)$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición ??.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

1.5.56 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 1.5.198. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D)\,\pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.5.199. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 1.5.23. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\,\pi(dx),$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 1.5.200. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 1.5.46 (Lema 3.1, Dai [?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{1.5.635}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 1.5.47 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1.5.157 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{1.5.636}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.5.57 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.5.637}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{1.5.638}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{1.5.639}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{1.5.640}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}^0_{m,k}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.5.641}$$

Definición 1.5.201 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1.5.202. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.5.158 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t). \tag{1.5.642}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.5.203 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 1.5.22 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.5.159 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{1.5.643}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right]=\mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right]\leq\kappa_r, \tag{1.5.644}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]|=0. \tag{1.5.645}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds=\mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{1.5.646}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.5.160 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^K\rho_k+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{1.5.647}$$

i) Si $\rho<1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho>1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

1.5.58 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]=\overline{N}>0$;
2) $\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^m$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^m(n)$, con $\delta_{j,j^{'}}^m(n)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^m(1)\right]\geq0$.

- Sea $\left\{p_j^m\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}^m\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j^m r_{j,j'}^m \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}^m(i)\right]. \tag{1.5.648}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [?].

Si denotamos por

- $Q_k(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_m(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_m^0(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right), \tag{1.5.649}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \left(\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\}\right)^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k(1) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{1.5.650}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{1.5.651}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

1.5.59 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x, x \in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1,$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right) | \mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right),$$

en $\left\{\tau < \infty\right\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right).$$

Definición 1.5.204. *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right) = \int_{\mathbb{X}} P^t\left(x, D\right) \pi\left(dx\right),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.5.205. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$, tal que si $\nu\left(D\right) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\left\{t \geq 0 : X_t \in D\right\}$.

Nota 1.5.24.

i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi\left(\cdot\right) = \int_{\mathbf{X}} P_x\left(\cdot\right) \pi\left(dx\right),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 1.5.206. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t\left(x, A\right) \geq \delta \nu\left(A\right),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 1.5.48 (Lema 3.1, Dai [?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x [\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{1.5.652}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 1.5.49 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1.5.161 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{1.5.653}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.5.60 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.5.654}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{1.5.655}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{1.5.656}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.5.657}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.5.658}$$

Definición 1.5.207 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1.5.208. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta>0$ *que depende de* μ,λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv0$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.5.162 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right). \tag{1.5.659}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.5.209 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$*, con* $t\geq t_{0}$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.

Lema 1.5.23 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_{0}>0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$ *para cualquier* $t\geq t_{0}$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.5.163 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_{p}*, y para cada condición inicial* $x\in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}, \tag{1.5.660}$$

donde p *es el entero dado en (A2).*

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right]\leq\kappa_{r}, \tag{1.5.661}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$*. Donde* π *es la probabilidad invariante para* X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}*:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)\right]|=0. \tag{1.5.662}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-c.s.} \tag{1.5.663}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.5.164 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_k+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{1.5.664}$$

i) Si $\rho<1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho>1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1,\ldots,\xi_K,\eta_1,\ldots,\eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p\geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_l\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l=1,\ldots,K \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k=1,\ldots,K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k=1,2,\ldots,K$ existe una función positiva $q_k\left(\cdot\right)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k\left(1\right)\geq x\right) > 0, \text{ para todo } x>0, \tag{1.5.665}$$

$$P\left\{a\leq\sum_{i=1}^{j_k}\xi_k\left(i\right)\leq b\right\} \geq \int_a^b q_k\left(x\right)dx,\ 0\leq a<b. \tag{1.5.666}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

1.5.61 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X\left(t\right),\theta_t,P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X=\left\{X\left(t\right),t\geq0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega,\mathcal{F})$ y está

adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x \{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [**?**, **?**].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 1.5.210. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D) \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.5.211. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 1.5.25. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [**?**]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot) \pi(dx),$$

*y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [**?**].*

Definición 1.5.212. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [**?**]:

Lema 1.5.50 (Lema 3.1, Dai [**?**])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{1.5.667}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 1.5.51 (Lema 3.1, Dai [**?**])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1.5.165 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x\left(|x|\delta\right)| = 0, \tag{1.5.668}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.5.62 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.5.669}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M}\mu_k\overline{T}_{m,k}(t), \tag{1.5.670}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{1.5.671}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{1.5.672}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.5.673}$$

Definición 1.5.213 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1.5.214. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.5.166 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right). \tag{1.5.674}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.5.215 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_{0} tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$, con $t\geq t_{0}$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.*

Lema 1.5.24 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_{0}>0$ tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$ para cualquier $t\geq t_{0}$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.5.167 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_{p}, y para cada condición inicial $x\in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}, \tag{1.5.675}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right]\leq\kappa_{r}, \tag{1.5.676}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)\right]|=0. \tag{1.5.677}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-}c.s. \tag{1.5.678}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.5.168 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_{j}}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_{s}}\right)\delta^{*} \tag{1.5.679}$$

i) Si $\rho<1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho>1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

1.5.63 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]=\overline{N}>0$;

2) $\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(1)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}^{m}r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(i)\right]. \quad (1.5.680)$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}(n)\right\}_{n\geq1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}(n)\right\}_{n\geq1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}<1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_{k}(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^{T}=\left(Q_{k}(t),A_{k}(t),B_{m}(t),B_{m}^{0}(t),C_{m}(t)\right), \quad (1.5.681)$$

para $k=1,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X}=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times(\{1,2,\ldots,K\}\times\{1,2,\ldots,S\})^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_l\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k\left(\cdot\right)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k\left(1\right) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0, \quad (1.5.682)$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k\left(i\right) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k\left(x\right) dx, \; 0 \leq a < b. \quad (1.5.683)$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición ??.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

1.5.64 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x, x \in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1,$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right) | \mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right),$$

en $\left\{\tau < \infty\right\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right).$$

Definición 1.5.216. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D)\, \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.5.217. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 1.5.26. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [**?**]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\, \pi(dx),$$

*y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [**?**].*

Definición 1.5.218. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [**?**]:

Lema 1.5.52 (Lema 3.1, Dai [**?**])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{1.5.684}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 1.5.53 (Lema 3.1, Dai [**?**])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1.5.169 (Teorema 3.1, Dai [**?**])**.** *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{1.5.685}$$

*donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.5.65 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.5.686}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{1.5.687}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{1.5.688}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.5.689}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.5.690}$$

Definición 1.5.219 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1.5.220. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, *se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.5.170 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{1.5.691}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.5.221 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 1.5.25 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.5.171 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{1.5.692}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{1.5.693}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{1.5.694}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{1.5.695}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.5.172 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{1.5.696}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??***.*

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

1.5.66 Ya revisado

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \ldots, L_N(t)]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j(\tau_i(m)) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}[C_i]$ como

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i\left(z\right)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i\left(z\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i\left(t\right)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i\left(z\right)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i\left(z\right)}\\
&= \frac{1-I_i\left[P_i\left(z\right)\right]}{1-P_i\left(z\right)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}
Q_i\left(z\right) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i\left(z\right)}{P_i\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}\\
&= \frac{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}{f_i\left(i\right)}\cdot\frac{1-F_i\left(z\right)}{P_i\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}
\end{aligned}$$

Definición 1.5.222. *Sea L_i^* el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= f_i\left(i\right) &(1.5.697)\\ Var\left[L_i^*\right] &= f_i\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. &(1.5.698)\end{aligned}$$

Definición 1.5.223. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}S_i\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right]=F_i\left(\theta\left(z\right)\right),\\ F\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\ P\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\ F_i\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right],\theta_i\left(z\right)-zP_i\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1-\mu_i}=\frac{f_i\left(i\right)}{1-\mu_i},\\ Var\left[S_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^3}\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var\left[L_i^*\right] = f_i\left(i,i\right)+f_i\left(i\right)-f_i\left(i\right)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t=\tau_i\left(m+1\right)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $\left[\overline{\tau}\left(m\right),\tau_i\left(m+1\right)\right]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z_i\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si

$$I_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i\left(z\right)=I_i\left[P_i\left(z\right)\right]$$

para $i=1,2$, por tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[I_i\right]\\ Var\left[L_i^*\right] &= \mu_i^2Var\left[I_i\right]+\sigma^2\mathbb{E}\left[I_i\right]\end{aligned}$$

para $i=1,2$, por tanto

$$\mathbb{E}\left[I_i\right] = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i},$$

además

$$Var\left[I_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i\left(i\right).$$

Si $C_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i\left(z\right) = I_i\left[\theta_i\left(z\right)\right],$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)} \\
Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[C_i\right], \\
\mathbb{E}\left[I_i\right] &= \left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right]
\end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_i\left(z\right)}{dz} &= \frac{\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} \\
&- \frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} \\
&- \frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)\left(P_i^{'}\left(z\right)-1\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)^2} \\
&+ \frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} \\
&+ \frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)^2\left(P_i\left(z\right)-z\right)}
\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z \rightarrow 1^+$:

$$\begin{aligned}
Q_i^{(1)}\left(z\right) = \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{dQ_i\left(z\right)}{dz} &= \lim_{z\rightarrow 1}\frac{\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} && (1.5.699)\\
&- \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} && (1.5.700)\\
&- \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)\left(P_i^{'}\left(z\right)-1\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)^2} && (1.5.701)\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} && (1.5.702)\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)^2\left(P_i\left(z\right)-z\right)} && (1.5.703)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)+\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)+(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}} = \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}\right]}\\
=&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} = \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
=&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} = \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
=&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}'[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

En nuestra notación $V\left(t\right)\equiv C_{i}$ y $X_{i}=C_{i}^{(m)}$ para nuestra segunda definición, mientras que para la primera la notación es: $X\left(t\right)\equiv C_{i}$ y $R_{i}\equiv C_{i}^{(m)}$.

Definición 1.5.224. *Sea L_{i}^{*} el número de usuarios en la cola Q_{i} cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right] &= f_{i}\left(i\right) &(1.5.704)\\
Var\left[L_{i}^{*}\right] &= f_{i}\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]-\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]^{2}. &(1.5.705)
\end{aligned}$$

Definición 1.5.225. *El tiempo de Ciclo C_i es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1)-\tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 1.5.226. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
S_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right]=F_i(\theta(z)),\\
F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\
P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\
F_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right],\theta_i(z)-zP_i
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{1-\mu_i}=\frac{f_i(i)}{1-\mu_i},\\
Var[S_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{(1-\mu_i)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^3}
\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var[L_i^*] = f_i(i,i)+f_i(i)-f_i(i)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t=\tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m),\tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right]=\mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i(z)=I_i[P_i(z)]$$

para $i=1,2$, por tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L_i^*] &= \mu_i\mathbb{E}[I_i]\\
Var[L_i^*] &= \mu_i^2 Var[I_i]+\sigma^2\mathbb{E}[I_i]
\end{aligned}$$

para $i=1,2$, por tanto

$$\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},$$

además

$$Var\left[I_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i\left(i\right).$$

Si $C_i\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i\left(z\right) = I_i\left[\theta_i\left(z\right)\right],$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}\\
Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[C_i\right],\\
\mathbb{E}\left[I_i\right] &= \left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right]
\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $\left[L_1\left(t\right), L_2\left(t\right), \ldots, L_N\left(t\right)\right]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j\left(\tau_i\left(m\right)\right)=0$ para $i=1,2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m=1,2,\ldots,M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}\left[C_i\right]$ como

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Nota 1.5.27. *En Stidham[**?**] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Nota incompleta!!

1.5.67 Procesos de Renovación y Regenerativos

Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i\left(t\right)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i\left(z\right)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \left\{P_i\left(z\right)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i\left(z\right)} \\
&= \frac{1-I_i\left[P_i\left(z\right)\right]}{1-P_i\left(z\right)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que
Sea

$$Q_i\left(z\right) = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]} \cdot \frac{1-F_i\left(z\right)}{P_i\left(z\right)-z} \cdot \frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}$$

Consideremos una cola de la red de sistemas de visitas cíclicas fija, Q_l.

Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (**??**), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_l es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1\left(T_i\right) = 0, L_2\left(T_i\right) = 0, \hat{L}_1\left(T_i\right) = 0$ y $\hat{L}_2\left(T_i\right) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 1.5.227. *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 1.5.228. *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 1.5.229. *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

En nuestra notación $V(t) \equiv C_i$ y $X_i = C_i^{(m)}$ para nuestra segunda definición, mientras que para la primera la notación es: $X(t) \equiv C_i$ y $R_i \equiv C_i^{(m)}$.

Definición 1.5.230. *Sea L_i^*el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= f_i\left(i\right) && (1.5.706)\\
Var\left[L_i^*\right] &= f_i\left(i, i\right) + \mathbb{E}\left[L_i^*\right] - \mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. && (1.5.707)
\end{aligned}
$$

Definición 1.5.231. *El tiempo de Ciclo C_i es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i\left(m+1\right) - \tau_i\left(m\right)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i\left(m+1\right) - \overline{\tau}_i\left(m\right)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
S_i\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m) - \tau_i(m)}\right] = F_i\left(\theta\left(z\right)\right),\\
F\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\
P\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\
F_i\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right], \theta_i\left(z\right) - zP_i
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{1-\mu_i},\\
Var\left[S_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^3}
\end{aligned}
$$

donde recordemos que

$$
Var\left[L_i^*\right] = f_i\left(i, i\right) + f_i\left(i\right) - f_i\left(i\right)^2.
$$

por tanto

$$
\mathbb{E}\left[I_i\right] = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i},
$$

además

$$
Var\left[I_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i\left(i\right).
$$

Si $C_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i(z) = I_i\left[\theta_i(z)\right],$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i(z)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)}\\
Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[C_i\right],\\
\mathbb{E}\left[I_i\right] &= (1-\mu_i)\,\mathbb{E}\left[C_i\right]
\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \ldots, L_N(t)]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j(\tau_i(m)) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}[C_i]$ como

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i\left(z\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i\left(t\right)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i\left(z\right)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i\left(z\right)}\\
&= \frac{1-I_i\left[P_i\left(z\right)\right]}{1-P_i\left(z\right)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}
Q_i\left(z\right) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i\left(z\right)}{P_i\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}\\
&= \frac{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}{f_i\left(i\right)}\cdot\frac{1-F_i\left(z\right)}{P_i\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}
\end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2}\\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}
\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z\rightarrow 1^{+}$:

$$Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{dQ_i(z)}{dz} = \lim_{z\rightarrow 1}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \tag{1.5.708}$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \tag{1.5.709}$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} \tag{1.5.710}$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \tag{1.5.711}$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} \tag{1.5.712}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}[(1-F_i(z))P_i(z)]}{\frac{d}{dz}[(1-P_i(z))(-z+P_i(z))]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_i(z)F_i^{'}(z)+(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_i(z)F_i^{'}(z)+(1-z)F_i^{'}(z)P_i^{'}(z)+(1-z)P_i(z)F_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2\right]}\\
= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}&\frac{-(1-F_i(z))P_i(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2P_i^{'}(z)}\\
+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}&\frac{+(1-z)(1-F_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)P_i^{'}(z)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2P_i^{'}(z)}\\
+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}&\frac{+(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{''}(z)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
= \lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
= \lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}'[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

Definición 1.5.232. *Sea L_{i}^{*} el número de usuarios en la cola Q_{i} cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right] &= f_{i}\left(i\right) && (1.5.713)\\
Var\left[L_{i}^{*}\right] &= f_{i}\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]-\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]^{2}. && (1.5.714)
\end{aligned}
$$

Definición 1.5.233. *El tiempo de Ciclo C_{i} es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_{i}\left(m+1\right)-\tau_{i}\left(m\right)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_{i}\left(m+1\right)-\overline{\tau}_{i}\left(m\right)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 1.5.234. *El tiempo de intervisita I_{i} es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_{i}\left(m+1\right)-\overline{\tau}_{i}\left(m\right)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
S_{i}\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_{i}(m)-\tau_{i}(m)}\right]=F_{i}\left(\theta\left(z\right)\right),\\
F\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_{0}}\right],\\
P\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{X_{n}}\right],\\
F_{i}\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_{i}(\tau_{i}(m))}\right],\theta_{i}\left(z\right)-zP_{i}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_{i}\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]}{1-\mu_{i}}=\frac{f_{i}\left(i\right)}{1-\mu_{i}},\\
Var\left[S_{i}\right] &= \frac{Var\left[L_{i}^{*}\right]}{\left(1-\mu_{i}\right)^{2}}+\frac{\sigma^{2}\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]}{\left(1-\mu_{i}\right)^{3}}
\end{aligned}
$$

donde recordemos que

$$
Var\left[L_{i}^{*}\right] = f_{i}\left(i,i\right)+f_{i}\left(i\right)-f_{i}\left(i\right)^{2}.
$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i(z) = I_i[P_i(z)]$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L_i^*] &= \mu_i \mathbb{E}[I_i] \\
Var[L_i^*] &= \mu_i^2 Var[I_i] + \sigma^2 \mathbb{E}[I_i]
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},$$

además

$$Var[I_i] = \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).$$

Si $C_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i(z) = I_i[\theta_i(z)],$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i]\mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)} \\
Var[C_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_i] &= \mu_i \mathbb{E}[C_i], \\
\mathbb{E}[I_i] &= (1-\mu_i)\mathbb{E}[C_i]
\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \ldots, L_N(t)]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j(\tau_i(m)) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \dots, M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}[C_i]$ como

$$\mathbb{E}[C_i] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}[M_i]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}[C_i] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)} \\
&= \frac{1-I_i\left[P_i(z)\right]}{1-P_i(z)}
\end{aligned}
$$

por tanto

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}
$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$
\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \\
&= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}
\end{aligned}
$$

Sea $V_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\frac{I_i(z)-1}{z-P_i(z)}$

$$
\frac{\partial V_i(z)}{\partial z} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\left[\frac{I_i{}'(z)\left(z-P_i(z)\right)}{z-P_i(z)} - \frac{\left(I_i(z)-1\right)\left(1-P_i{}'(z)\right)}{\left(z-P_i(z)\right)^2}\right]
$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$
U_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\cdot\frac{I_i(z)-1}{1-z}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}V_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\right)\frac{I_i(z)-1}{1-z} + \frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\frac{d}{dz}\left(\frac{I_i(z)-1}{1-z}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\left\{\frac{-P_i(z)\left(z-P_i(z)\right)-\left(1-P_i(z)\right)\left(1-P_i^{'}(z)\right)}{\left(z-P_i(z)\right)^2}\cdot\frac{I_i(z)-1}{1-z}\right\} \\
&+ \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\left\{\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\cdot\frac{I_i^{'}(z)(1-z)+\left(I_i(z)-1\right)}{(1-z)^2}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_i(z)}{\partial z} &= \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])}{(1-z)^2\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])} + \frac{(1-P_i[z])I_i^{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])} - \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])\left(1-P'[z]\right)}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])^2} \\
&- \frac{(-1+I_i[z])P_i{}'[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}
\end{aligned}
$$

Sea

$$
Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}
$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2}\\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}
\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z\rightarrow 1^{+}$:

$$\begin{aligned}
Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \lim_{z\rightarrow 1}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &(1.5.715)\\
&- \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &(1.5.716)\\
&- \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} &(1.5.717)\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &(1.5.718)\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} &(1.5.719)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-F_i(z))P_i(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_i(z)F_i^{'}(z)+(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_i(z)F_i^{'}(z)+(1-z)F_i^{'}(z)P_i^{'}(z)+(1-z)P_i(z)F_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} = \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-(1-F_i(z))P_i(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2P_i^{'}(z)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{+(1-z)(1-F_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)P_i^{'}(z)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2P_i^{'}(z)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{+(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{''}(z)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}&=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
=\lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}&=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
=\lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}'[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+\lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\end{aligned}$$

1.5.68 Tiempo de Ciclo Promedio

Consideremos una cola de la red de sistemas de visitas cíclicas fija, Q_l.

Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (**??**), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_l es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 1.5.235. *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 1.5.236. *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 1.5.237. *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

En nuestra notación $V(t) \equiv C_i$ y $X_i = C_i^{(m)}$ para nuestra segunda definición, mientras que para la primera la notación es: $X(t) \equiv C_i$ y $R_i \equiv C_i^{(m)}$.

1.5.69 Tiempos de Ciclo e Intervisita

Definición 1.5.238. *Sea L_i^* el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\mathbb{E}\left[L_i^*\right] = f_i(i) \tag{1.5.720}$$

$$Var\left[L_i^*\right] = f_i(i,i) + \mathbb{E}\left[L_i^*\right] - \mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. \tag{1.5.721}$$

Definición 1.5.239. *El tiempo de Ciclo C_i es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 1.5.240. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
S_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right] = F_i(\theta(z)),\\
F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\
P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\
F_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right], \theta_i(z) - zP_i
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{1-\mu_i},\\
Var[S_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{(1-\mu_i)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^3}
\end{aligned}
$$

donde recordemos que

$$
Var[L_i^*] = f_i(i,i) + f_i(i) - f_i(i)^2.
$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$
\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]
$$

entonces, si

$$
I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]
$$

se tienen que

$$
F_i(z) = I_i[P_i(z)]
$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[L_i^*] &= \mu_i\mathbb{E}[I_i]\\
Var[L_i^*] &= \mu_i^2 Var[I_i] + \sigma^2\mathbb{E}[I_i]
\end{aligned}
$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$
\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},
$$

además

$$
Var[I_i] = \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).
$$

Si $C_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i(z) = I_i[\theta_i(z)],$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i]\,\mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)}\\
Var[C_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_i] &= \mu_i\mathbb{E}[C_i],\\
\mathbb{E}[I_i] &= (1-\mu_i)\,\mathbb{E}[C_i]
\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \ldots, L_N(t)]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j(\tau_i(m)) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}[C_i]$ como

$$\mathbb{E}[C_i] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}[M_i]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}[C_i] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i\left(z\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i\left(t\right)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i\left(z\right)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i\left(z\right)}\\
&= \frac{1-I_i\left[P_i\left(z\right)\right]}{1-P_i\left(z\right)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}
Q_i\left(z\right) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i\left(z\right)}{P_i\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}\\
&= \frac{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}{f_i\left(i\right)}\cdot\frac{1-F_i\left(z\right)}{P_i\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}
\end{aligned}$$

1.5.70 Longitudes de la Cola en cualquier tiempo

Sea

$$Q_i\left(z\right) = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i\left(z\right)}{P_i\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2}\\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}
\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z\rightarrow 1^{+}$:

$$\begin{aligned}
Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \lim_{z\rightarrow 1}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} && (1.5.722)\\
&- \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} && (1.5.723)\\
&- \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} && (1.5.724)\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} && (1.5.725)\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} && (1.5.726)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-F_i(z))P_i(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_i(z)F_i^{'}(z)+(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_i(z)F_i^{'}(z)+(1-z)F_i^{'}(z)P_i^{'}(z)+(1-z)P_i(z)F_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} = \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-(1-F_i(z))P_i(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2P_i^{'}(z)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{+(1-z)(1-F_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)P_i^{'}(z)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2P_i^{'}(z)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{+(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{''}(z)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}$$
$$=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}$$

$$\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}$$
$$=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{\prime}[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}$$
$$+\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}$$

1.5.71 Por resolver

$$\frac{\partial Q_{i}\left(z\right)}{\partial z}=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}\right\}$$
$$=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\right)\cdot\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}+\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\right)+\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}\right)$$
$$=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}\cdot\frac{-F_{i}^{'}\left(z\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)}{\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}}$$
$$+\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-P_{i}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}}$$

$$\begin{aligned}Q_{i}^{(1)}\left(z\right)&=\frac{\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}-\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}\\&-\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}}+\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}\\&+\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}\end{aligned}$$

Sea $V_{i}\left(z\right)=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{z-P_{i}\left(z\right)}$

$$\frac{\partial V_{i}\left(z\right)}{\partial z}=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left[\frac{I_{i}{'}\left(z\right)\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}-\frac{\left(I_{i}\left(z\right)-1\right)\left(1-P_{i}{'}\left(z\right)\right)}{\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}}\right]$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$U_{i}\left(z\right)=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\cdot\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}V_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\right)\frac{I_i(z)-1}{1-z}+\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\frac{d}{dz}\left(\frac{I_i(z)-1}{1-z}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{-P_i(z)(z-P_i(z))-(1-P_i(z))\left(1-P_i^{'}(z)\right)}{(z-P_i(z))^2}\cdot\frac{I_i(z)-1}{1-z}\right\}\\
&+ \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\cdot\frac{I_i^{'}(z)(1-z)+(I_i(z)-1)}{(1-z)^2}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_i(z)}{\partial z} &= \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])}{(1-z)^2\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}+\frac{(1-P_i[z])I_i^{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}-\frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])(1-P'[z])}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])^2}\\
&- \frac{(-1+I_i[z])P_i{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}
\end{aligned}$$

1.5.72 Tiempos de Ciclo e Intervisita

Definición 1.5.241. *Sea L_i^* el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\mathbb{E}[L_i^*] = f_i(i) \tag{1.5.727}$$
$$Var[L_i^*] = f_i(i,i)+\mathbb{E}[L_i^*]-\mathbb{E}[L_i^*]^2. \tag{1.5.728}$$

Definición 1.5.242. *El tiempo de Ciclo C_i es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1)-\tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 1.5.243. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
S_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right]=F_i(\theta(z)),\\
F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\
P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\
F_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right],\theta_i(z)-zP_i
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{1-\mu_i}=\frac{f_i(i)}{1-\mu_i},\\
Var[S_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{(1-\mu_i)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^3}
\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var[L_i^*] = f_i(i,i)+f_i(i)-f_i(i)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i(z) = I_i[P_i(z)]$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_i^*] &= \mu_i \mathbb{E}[I_i] \\ Var[L_i^*] &= \mu_i^2 Var[I_i] + \sigma^2 \mathbb{E}[I_i] \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},$$

además

$$Var[I_i] = \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).$$

Si $C_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i(z) = I_i[\theta_i(z)],$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i]\mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)} \\ Var[C_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}. \end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_i] &= \mu_i \mathbb{E}[C_i], \\ \mathbb{E}[I_i] &= (1-\mu_i)\mathbb{E}[C_i] \end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \ldots, L_N(t)]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j(\tau_i(m)) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}\left[C_i\right]$ como

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i\left(z\right)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i\left(m+1\right) - \tau_i\left(m\right)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right] \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i\left(m+1\right) - \tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right] \mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right) - \tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i\left(z\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right) - \tau_i\left(m\right)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i\left(z\right) - 1}{z - P_i\left(z\right)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)} \\
&= \frac{1-I_i\left[P_i(z)\right]}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)\,P_i(z)}{1-P_i(z)} \\
&= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)\,P_i(z)}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))\,P_i(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} \\
&- \frac{(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} \\
&- \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)^2} \\
&+ \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} \\
&+ \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))^2\,(P_i(z)-z)}
\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z\rightarrow 1^{+}$:

$$\begin{aligned}
Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \lim_{z\rightarrow 1}\frac{(1-F_i(z))\,P_i(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} && (1.5.729)\\
&- \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} && (1.5.730)\\
&- \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)^2} && (1.5.731)\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} && (1.5.732)\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))^2\,(P_i(z)-z)} && (1.5.733)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)+\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)+(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}} &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}\right]}\\
= \lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
= \lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
= \lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}'[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\end{aligned}$$

1.5.73 Longitudes de la Cola en cualquier tiempo

Sea $V_{i}\left(z\right)=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{z-P_{i}\left(z\right)}$

$$\frac{\partial V_{i}\left(z\right)}{\partial z} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left[\frac{I_{i}{'}\left(z\right)\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}-\frac{\left(I_{i}\left(z\right)-1\right)\left(1-P_{i}{'}\left(z\right)\right)}{\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}}\right]$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$U_{i}\left(z\right)=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\cdot\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}V_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\right)\frac{I_i(z)-1}{1-z}+\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\frac{d}{dz}\left(\frac{I_i(z)-1}{1-z}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{-P_i(z)(z-P_i(z))-(1-P_i(z))\left(1-P_i^{'}(z)\right)}{(z-P_i(z))^2}\cdot\frac{I_i(z)-1}{1-z}\right\}\\
&+ \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\cdot\frac{I_i^{'}(z)(1-z)+(I_i(z)-1)}{(1-z)^2}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_i(z)}{\partial z} &= \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])}{(1-z)^2\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}+\frac{(1-P_i[z])I_i^{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}-\frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])(1-P'[z])}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])^2}\\
&- \frac{(-1+I_i[z])P_i{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}
\end{aligned}
$$

1.5.74 Material por agregar

Teorema 1.5.173. *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t, $A_j(t) = \{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\}$ para algún tiempo $t \geq 0$ y Q_j la cola j-ésima en la RSVC, para $j = 1,2,3,4$. Existe un intervalo $I \neq \emptyset$ tal que para $T^* \in I$, tal que $\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(Tt^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I\} > 0$.*

Proof. Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.

Sea $n \geq 1$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1(n) > 0$, entonces tenemos que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1(n)$.

Definamos el intervalo $I_1 \equiv [\overline{\tau}_1(n), \tau_2(n)]$ de longitud $\xi_1 = r_1(n)$.

Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$
\mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)}. \tag{1.5.734}
$$

Por otra parte, para la cola Q_2 el tiempo $\overline{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\overline{\tau}_2(n-1)) = 0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n.

Entonces tenemos un sgundo intervalo $I_2 \equiv [\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$
\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)}, \tag{1.5.735}
$$

$$
\xi_2(n) = \tau_2(n) - \overline{\tau}_2(n-1) \tag{1.5.736}
$$

Ahora, dado que $I_1(n) \subset I_2(n)$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\xi_1(n) \leq \xi_2(n) &\Leftrightarrow -\xi_1(n) \geq -\xi_2(n)\\
-\tilde{\mu}_2\xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2\xi_2(n) &\Leftrightarrow e^{-\tilde{\mu}_2\xi_1(n)} \geq e^{-\tilde{\mu}_2\xi_2(n)}\\
\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\} &\geq \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\}.
\end{aligned}
$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{A_1(t), A_2(t) \,|t \in I_1(n)\right\} &= \mathbb{P}\left\{A_1(t) \,|t \in I_1(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_2(t) \,|t \in I_1(n)\right\} \\ &\geq \mathbb{P}\left\{A_1(t) \,|t \in I_1(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_2(t) \,|t \in I_2(n)\right\} \\ &= e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]}.\end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_1(t), A_2(t) \,|t \in I_1(n)\right\} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]} > 0. \tag{1.5.737}$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC para algún $m \geq 1$ se tiene que $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$ por lo tanto se cumple cualquiera de los siguientes cuatro casos

a) $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \overline{\tau}_3(m)$

b) $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$

c) $\tau_4(m) < \tau_2(n) < \overline{\tau}_4(m)$

d) $\overline{\tau}_4(m) < \tau_2(n) < \tau_3(m+1)$

Sea el intervalo $I_3(m) \equiv [\tau_3(m), \overline{\tau}_3(m)]$ tal que $\tau_2(n) \in I_3(m)$, con longitud de intervalo $\xi_3 \equiv \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m)$, entonces se tiene que para Q_3

$$\mathbb{P}\left\{A_3(t) \,|t \in I_3(m)\right\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)}. \tag{1.5.738}$$

mientras que para Q_4 consideremos el intervalo $I_4(m) \equiv [\tau_4(m-1), \overline{\tau}_3(m)]$, entonces por construcción $I_3(m) \subset I_4(m)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\xi_3(m) \leq \xi_4(m) &\Leftrightarrow -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\ -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m) &\Leftrightarrow e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(n)} \\ \mathbb{P}\left\{A_4(t) \,|t \in I_3(m)\right\} &\geq \mathbb{P}\left\{A_4(t) \,|t \in I_4(m)\right\}.\end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t) \,|t \in I_3(m)\right\} &= \mathbb{P}\left\{A_3(t) \,|t \in I_3(m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(t) \,|t \in I_3(m)\right\} \\ &\geq \mathbb{P}\left\{A_3(t) \,|t \in I_3(m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(t) \,|t \in I_4(m)\right\} \\ &= e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)} e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} = e^{-(\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m))}.\end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t) \,|t \in I_3(m)\right\} \geq e^{-(\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m))} > 0. \tag{1.5.739}$$

Sea el intervalo $I_3(m) \equiv [\overline{\tau}_3(m), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_3 \equiv \tau_4(m) - \overline{\tau}_3(m)$, entonces se tiene que para Q_3

$$\mathbb{P}\left\{A_3(t) \,|t \in I_3(m)\right\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)}. \tag{1.5.740}$$

mientras que para Q_4 consideremos el intervalo $I_4(m) \equiv [\overline{\tau}_4(m-1), \tau_4(m)]$, entonces por construcción $I_3(m) \subset I_4(m)$, y al igual que en el caso anterior se tiene que

$$\begin{aligned}\xi_3(m) \leq \xi_4(m) &\Leftrightarrow -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\ -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m) &\Leftrightarrow e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(n)} \\ \mathbb{P}\left\{A_4(t) \,|t \in I_3(m)\right\} &\geq \mathbb{P}\left\{A_4(t) \,|t \in I_4(m)\right\}.\end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t) \,|t \in I_3(m)\right\} &= \mathbb{P}\left\{A_3(t) \,|t \in I_3(m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(t) \,|t \in I_3(m)\right\} \\ &\geq \mathbb{P}\left\{A_3(t) \,|t \in I_3(m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(t) \,|t \in I_4(m)\right\} \\ &= e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)} e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} = e^{-(\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m))}.\end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t) \,|t \in I_4(m)\right\} \geq e^{-(\tilde{\mu}_3 + \tilde{\mu}_4) \xi_3(m)} > 0. \tag{1.5.741}$$

Para el intervalo $I_3(m) = [\tau_4(m), \overline{\tau}_4(m)]$, se tiene que este caso es análogo al caso (a).

Para el intevalo $I_3(m) \equiv [\overline{\tau}_4(m), \tau_4(m+1)]$, se tiene que es análogo al caso (b).

Por construcción se tiene que $I(n,m) \equiv I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$,entonces en particular se tienen las contenciones $I(n,m) \subseteq I_1(n)$ y $I(n,m) \subseteq I_3(m)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m} \equiv \ell(I(n,m))$ tenemos que

$$\begin{aligned}\xi_{n,m} \leq \xi_1(n) \text{ y } \xi_{n,m} \leq \xi_3(m) \text{ entonces}\\ -\xi_{n,m} \geq -\xi_1(n) \text{ y } -\xi_{n,m} \leq -\xi_3(m)\end{aligned}$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{array}{ll} -\tilde{\mu}_1\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_1\xi_1(n), & -\tilde{\mu}_2\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_2\xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2\xi_2(n), \\ -\tilde{\mu}_3\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_3\xi_3(m), & -\tilde{\mu}_4\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_4\xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4\xi_4(m). \end{array}$$

Sea $T^* \in I(n,m)$, entonces dado que en particular $T^* \in I_1(n)$, se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2, en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4, es decir, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$, $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I(n,m)$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4, por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{A_1(T^*), A_2(T^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I(n,m)\right\}\\
&= \prod_{j=1}^{4} \mathbb{P}\left\{A_j(T^*) | T^* \in I(n,m)\right\}\\
&\geq \mathbb{P}\left\{A_1(T^*) | T^* \in I_1(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_2(T^*) | T^* \in I_2(n)\right\}\\
&\mathbb{P}\left\{A_3(T^*) | T^* \in I_3(m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(T^*) | T^* \in I_4(m)\right\}\\
&= e^{-\mu_1\xi_1(n)} e^{-\mu_2\xi_2(n)} e^{-\mu_3\xi_3(m)} e^{-\mu_4\xi_4(m)}\\
&= e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n) + \tilde{\mu}_2\xi_2(n) + \tilde{\mu}_3\xi_3(m) + \tilde{\mu}_4\xi_4(m)]} > 0.
\end{aligned} \tag{1.5.742}$$

Ahora solo resta demostrar que para $n \geq 1$, existe $m \geq 1$ tal que se cumplen cualquiera de los cuatro casos arriba mencionados:

a) $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \overline{\tau}_3(m)$

b) $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$

c) $\tau_4(m) < \tau_2(n) < \overline{\tau}_4(m)$

d) $\overline{\tau}_4(m) < \tau_2(n) < \tau_3(m+1)$

Consideremos nuevamente el primer caso. Supongamos que no existe $m \geq 1$, tal que $I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$, es decir, para toda $m \geq 1$, $I_1(n) \cap I_3(m) = \emptyset$, entonces se tiene que ocurren cualquiera de los dos casos

a) $\tau_2(n) \leq \tau_3(m)$: Recordemos que $\tau_2(m) = \overline{\tau}_1 + r_1(m)$ donde cada una de las variables aleatorias son tales que $\mathbb{E}[\overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n)] < \infty$, $\mathbb{E}[R_1] < \infty$ y $\mathbb{E}[\tau_3(m)] < \infty$, lo cual contradice el hecho de que no exista un ciclo $m \geq 1$ que satisfaga la condición deseada.

b) $\tau_2(n) \geq \overline{\tau}_3(m)$: por un argumento similar al anterior se tiene que no es posible que no exista un ciclo $m \geq 1$ tal que satisaface la condición deseada.

Para el resto de los casos la demostración es análoga. Por lo tanto, se tiene que efectivamente existe $m \geq 1$ tal que $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$. □

En Sigman, Thorison y Wolff [?] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 1.5.51. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.

- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.

- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 1.5.174. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) Los tiempos de servicio son identicamente cero;
  b) $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;
  c) $L = 1$ y $G = D$;
  d) $L = \infty$ y $G = M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;
  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;
  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.

- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.

- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.

- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 1.5.175. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$
  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.
  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$

d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 1.5.176. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Definición 1.5.244 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.5.28. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots$, que satisfacen la propiedad deseada [**?**].*

Nota 1.5.29. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 1.5.245. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.5.30. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 1.5.31. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 1.5.32. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 1.5.33. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.5.246. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.5.247. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.5.248. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.5.177. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Corolario 1.5.1. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \to \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \to \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 1.5.249. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.5.743}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.5.250. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, para* $n \geq 1$*, son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F*, donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$*. Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 1.5.34. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F*, con* $F(0) = 0$*, para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F*. Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$*, donde* $T_n \to \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 1.5.35. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 1.5.178 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.5.52. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.5.251. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}[X(T + t) | T] = \mathbb{E}[X(t)],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.5.53. *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t),\ donde\ h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 1.5.179 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.5.54. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.5.36. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.5.180. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \; c.s. \tag{1.5.744}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \; c.s. \tag{1.5.745}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.5.2 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \; c.s. \; cuando \; t \to \infty. \tag{1.5.746}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.5.252. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.5.181. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \; c.s. && (1.5.747)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \; c.s. && (1.5.748)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.5.3. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \; c.s. \; cuando \; t \rightarrow \infty. \quad (1.5.749)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 1.5.55. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.5.37. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 1.5.182. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \; c.s. && (1.5.750)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu, \; c.s. && (1.5.751)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.5.4 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.5.752}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.5.253. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.5.183. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (1.5.753)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (1.5.754) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.5.5. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.5.755}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq &\quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.5.56. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.5.38. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.5.184. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (1.5.756)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (1.5.757)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.5.6 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.5.758)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.5.254. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.5.185. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (1.5.759)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (1.5.760)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.5.7. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.5.761)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\
P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)
\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.5.57. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.5.39. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.5.186. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.5.762}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.5.763}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.5.8 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.5.764}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.5.255. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.5.187. *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.5.765}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.5.766}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.5.9. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.5.767}$$

1.5.75 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq \quad t &< T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.5.58. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.5.40. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.5.188. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.5.768}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.5.769}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.5.10 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.5.770}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.5.256. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.5.189. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) = a, \text{ c.s.} \tag{1.5.771}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.5.772}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.5.11. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.5.773}$$

Definición 1.5.257. *Sea $h\left(t\right)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h\left(t\right)$ y la distribución F es*

$$H\left(t\right) = h\left(t\right) + \int_{\left[0,t\right]} H\left(t-s\right)dF\left(s\right), \ t \geq 0, \tag{1.5.774}$$

donde $H\left(t\right)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H\left(t\right)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.5.59. *La función $U \star h\left(t\right)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.5.190 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.5.258. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N\left(t\right)$, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = \mathbb{1}\left(t \geq 0\right)$.

Proposición 1.5.60. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U\left(t\right)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 1.5.259. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t}dF\left(t\right), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 1.5.61. *La Transformada de Laplace $\hat{U}\left(\alpha\right)$ y $\hat{F}\left(\alpha\right)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}\left(\alpha\right) = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$.*

Nota 1.5.41. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.5.191. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.5.12 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 1.5.260. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.5.775}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.5.261. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.5.42. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 1.5.262. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.5.776}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.5.263. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.5.43. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.5.62. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 1.5.1 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 1.5.44. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.5.192. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{1.5.777}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{1.5.778}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 1.5.13 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \tag{1.5.779}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.5.264. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.5.193. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a, \ c.s. & (1.5.780)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \ c.s. & (1.5.781)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.5.14. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \tag{1.5.782}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.5.265. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.5.63. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 1.5.266. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.5.64. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.5.45. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.5.194. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.5.15 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t)+1]\,,\ t \geq 0,$$

Definición 1.5.267. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s)\,,\ t \geq 0, \tag{1.5.783}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.5.65. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.5.195 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.5.268. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)\,,\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.5.66. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 1.5.269. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t)\,,\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.5.67. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.5.46. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.5.196. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\, ,\; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\, ,\; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.5.16 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1]\, ,\; t \geq 0,$$

Definición 1.5.270. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s)\, ,\; t \geq 0, \tag{1.5.784}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.5.68. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.5.197 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 1.5.47. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.5.198 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.5.69. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\, ,\; \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.5.271. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.5.70. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 1.5.199 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Nota 1.5.48. *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.5.200 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 1.5.71. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 1.5.272. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.5.72. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 1.5.201 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Definición 1.5.273. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 1.5.49. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \to S$.

Nota 1.5.50. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 1.5.51. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.5.274. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 1.5.52. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 1.5.202 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 1.5.275 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t.
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t*, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t.
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$*, la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t.

Nota 1.5.53. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n*, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$*. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{1.5.785}$$

Ejemplo 1.5.2 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*, entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 1.5.54. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 1.5.276. *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 1.5.55. *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 1.5.73. *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 1.5.203. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación* N *es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante* $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 1.5.56. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 1.5.17. *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 1.5.57. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 1.5.58. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.5.277 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 1.5.278. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.5.59. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.5.279. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.5.60. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.5.61. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.5.280 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.5.62. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.5.281. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}\left[R_1\right]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.5.63. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.5.282. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.5.283. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.5.284. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.5.204. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.5.285. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.5.286. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.5.287. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.5.205. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$[29], se sigue del lema de Wald que:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}
$$

por tanto se tiene que

$$
Q_i\left(z\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}
$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (**??**): $n\rightarrow t-\tau_i\left(m\right)$, $T\rightarrow\overline{\tau}_i\left(m\right)-\tau_i\left(m\right)$, $L_n\rightarrow L_i\left(t\right)$ y $F\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{L_0}\right]\rightarrow F_i\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{L_i\tau_i(m)}\right]$, se puede ver que

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)} \tag{1.5.786}
$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i\left(t\right)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i\left(z\right)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i\left(z\right)}\\
&= \frac{1-I_i\left[P_i\left(z\right)\right]}{1-P_i\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

por tanto

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
Q_i\left(z\right) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right]+\mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\left\{z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)}+\frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}\right\}
\end{aligned}
$$

[29]En Stidham[**?**] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]<\infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$, además, como $M_i>0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}\left[C_i\right]<\infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N}\mu_k<1$.

es decir

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1-z)P_i(z)}{1 - P_i(z)} \tag{1.5.787}$$

Teorema 1.5.206. *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t, $A_j(t) = \{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\}$ para algún tiempo $t \geq 0$ y Q_j la cola j-ésima en la RSVC, para $j = 1, 2, 3, 4$. Existe un intervalo $I \neq \emptyset$ tal que para $T^* \in I$, tal que $\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(Tt^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I\} > 0$.*

Proof. Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.

Sea $n > 0$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1(n) > 0$, entonces tenemos que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1(n)$.

Definamos el intervalo $I_1 \equiv [\overline{\tau}_1(n), \tau_2(n)]$ de longitud $\xi_1 = r_1(n)$. Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$\mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)}. \tag{1.5.788}$$

Por otra parte, para la cola Q_2, el tiempo $\overline{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\overline{\tau}_2(n-1)) = 0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n. Entonces tenemos un sgundo intervalo $I_2 \equiv [\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)}, \tag{1.5.789}$$

donde $\xi_2(n) = \tau_2(n) - \overline{\tau}_2(n-1)$.

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} &= \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\} \\ &\geq \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} \\ &= e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]}. \end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]} > 0. \tag{1.5.790}$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC, se afirma que existe $m > 0$ tal que $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$.

Para Q_3 sea $I_3 = [\overline{\tau}_3(m), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_3(m) = r_3(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(n)}. \tag{1.5.791}$$

Análogamente que como se hizo para Q_2, tenemos que para Q_4 se tiene el intervalo $I_4 = [\overline{\tau}_4(m-1), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_4(m) = \tau_4(m) - \overline{\tau}_4(m-1)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} = e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(n)}. \tag{1.5.792}$$

Al igual que para el primer sistema, dado que $I_3(m) \subset I_4(m)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \xi_3(m) \leq \xi_4(m) &\Leftrightarrow -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\ -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m) &\Leftrightarrow e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} \\ \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} &\geq \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} \end{aligned}$$

Entonces, dado que los eventos A_3 y A_4 son independientes, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\right\} &= \mathbb{P}\left\{A_3(t) | t \in I_3(m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(t) | t \in I_3(m)\right\} \\ &\geq \mathbb{P}\left\{A_3(t) | t \in I_3(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(t) | t \in I_4(n)\right\} \\ &= e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)} e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} = e^{-\left[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)\right]}.\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\right\} = e^{-\left[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)\right]} > 0. \tag{1.5.793}$$

Por construcción se tiene que $I(n,m) \equiv I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$,entonces en particular se tienen las contenciones $I(n,m) \subseteq I_1(n)$ y $I(n,m) \subseteq I_3(m)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m} \equiv \ell(I(n,m))$ tenemos que

$$\xi_{n,m} \leq \xi_1(n) \text{ y } \xi_{n,m} \leq \xi_3(m) \text{ entonces } -\xi_{n,m} \geq -\xi_1(n) \text{ y } -\xi_{n,m} \leq -\xi_3(m)$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{array}{ll} -\tilde{\mu}_1 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_1 \xi_1(n), & -\tilde{\mu}_2 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_2(n), \\ -\tilde{\mu}_3 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_3 \xi_3(m), & -\tilde{\mu}_4 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m). \end{array}$$

Sea $T^* \in I_{n,m}$, entonces dado que en particular $T^* \in I_1(n)$ se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2, en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4, es decir, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$, $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I_{n,m}$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4, por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left\{A_1(T^*), A_2(T^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I_{n,m}\right\} = \prod_{j=1}^4 \mathbb{P}\left\{A_j(T^*) | T^* \in I_{n,m}\right\} \\ &\geq \mathbb{P}\left\{A_1(T^*) | T^* \in I_1(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_2(T^*) | T^* \in I_2(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_3(T^*) | T^* \in I_3(m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(T^*) | T^* \in I_4(m)\right\} \\ &= e^{-\mu_1 \xi_1(n)} e^{-\mu_2 \xi_2(n)} e^{-\mu_3 \xi_3(m)} e^{-\mu_4 \xi_4(m)} = e^{-\left[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n) + \tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)\right]} > 0.\end{aligned} \tag{1.5.794}$$

□

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [?] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 1.5.207. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\ var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right) 2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2 (1-\delta)^{-1}.\end{aligned}$$

  Teorema 1.5.208. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 1.5.209. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

En Sigman, Thorison y Wolff [?] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 1.5.74. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k (X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 1.5.210. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*
  b) *$L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;*
  c) *$L = 1$ y $G = D$;*
  d) *$L = \infty$ y $G = M$.*

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;
  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;
  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 1.5.211. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

a) $s = \infty$

b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*

c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para* $L < \infty$

d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 1.5.212. *En cualquier sistema de colas* $GI/G/1/L$ *con* $1 \leq L < \infty$ *y distribución de interarribos* A *y distribución de los tiempos de servicio* B*, tal que* $A(0) = 0$*,* $A(t)(1 - B(t)) > 0$ *para alguna* $t > 0$ *y* $B(t)$ *para toda* $t > 0$*, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [?] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.

- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.

- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.

- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 1.5.213. *En un sistema estacionario* $GI/M/1$ *los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2(1-\delta)^{-1}.
\end{aligned}$$

  Teorema 1.5.214. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario* $GI/M/1$ *es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 1.5.215. *Los intervalos de interpartida* $\{D_n\}$ *de un sistema* $M/G/1$ *estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo* $M/M/1$.

1.6 Preliminares: Modelos de Flujo

1.6.1 Procesos Regenerativos

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0. \tag{1.6.1}$$

(S2.)
$$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N}, \tag{1.6.2}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right] \geq 0$.

- Se define
$$\delta^{*} := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right]. \tag{1.6.3}$$
- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\right) \tag{1.6.4}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1,2,\ldots,K\} \times \{1,2,\ldots,S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{1.6.5}$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([**?**])

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]=\overline{N}>0$

2) $\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]\leq\overline{N}$para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}=r_{j,j^{'}}$
- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}\left(1\right)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}r_{j,j^{'}}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}\left(i\right)\right]. \tag{1.6.6}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho<1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_{k}\left(t\right)$ el número de usuarios en la cola k, $A_{k}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m, se denota por $B_{m}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t; $B_{m}^{0}\left(t\right)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t, finalmente sea $C_{m}\left(t\right)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X\left(t\right)^{T}=\left(Q_{k}\left(t\right),A_{k}\left(t\right),B_{m}\left(t\right),B_{m}^{0}\left(t\right),C_{m}\left(t\right)\right) \tag{1.6.7}$$

para $k=1,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_{1},\ldots,\xi_{K},\eta_{1},\ldots,\eta_{K}$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p\geq1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_{l}\left(1\right)^{p+1}\right]&<\infty\text{ para }l\in\mathcal{A}\text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)^{p+1}\right]&<\infty\text{ para }k=1,\ldots,K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k=1,2,\ldots,K$ existe una función positiva $q_{k}\left(x\right)$ definida en $\mathbb{R}_{+}$, y un entero j_{k}, tal que

$$P\left(\xi_{k}\left(1\right)\geq x\right)>0\text{, para todo }x>0 \tag{1.6.8}$$

$$P\left\{a\leq\sum_{i=1}^{j_{k}}\xi_{k}\left(i\right)\leq b\right\}\geq\int_{a}^{b}q_{k}\left(x\right)dx,\ 0\leq a<b. \tag{1.6.9}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto $A2$) para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

1.6.2 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (**??**), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([?], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [?]

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x \{X(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la σ-algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D)$$

Definición 1.6.1. *Una medida no cero π en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ es* **invariante** *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbf{X}} P^t(x, D) \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.6.2. *El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = inf \{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 1.6.1. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama Proceso Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\,\pi(dx)$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente.

Definición 1.6.3. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [**?**]:

Lema 1.6.1 (Lema 3.1, Dai[**?**]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{1.6.10}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris Recurrente Positivo.

Lema 1.6.2 (Lema 3.1, Dai [**?**]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{|x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1.6.1 (Teorema 3.1, Dai[**?**]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{1.6.11}$$

*entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B = \{|x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.*

Nota 1.6.2. *En Meyn and Tweedie [**?**] muestran que si $P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1)$-$A3)$, lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.6.3 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathrm{X}$, sea $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.6.12}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{1.6.13}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.6.14}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.6.15}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$,

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}^{0}_{m,k}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.6.16}$$

De acuerdo a Dai [?], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^{0}(\cdot)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (??)-(??), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 1.6.4 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.6.2 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{1.6.17}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.6.5 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 1.6.1 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por **??**-**??** es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.6.3 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_{0}^{t} \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^{p}\right] ds \leq \kappa_p, \tag{1.6.18}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right]\leq\kappa_{r}, \qquad (1.6.19)$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$*. Donde* π *es la probabilidad invariante para* $\mathbf{X}$*.*

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}*:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)\right]=0. \qquad (1.6.20)$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-}c.s. \qquad (1.6.21)$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$*.*

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.6.4 (Teorema 2.3, Down [**?**])**.** *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_{j}}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_{s}}\right)\delta^{*} \qquad (1.6.22)$$

i) Si $\rho<1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema* **??***.*

ii) Si $\rho<1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema* **??**

Teorema 1.6.5. *Sea* $\left(X_{n},\mathcal{F}_{n},n=0,1,\ldots,\right\}$ *Proceso de Markov con espacio de estados* $\left(S_{0},\chi_{0}\right)$ *generado por una distribuición inicial* P_{o} *y probabilidad de transición* p_{mn}*, para* $m,n=0,1,\ldots,$ $m<n$*, que por notación se escribirá como* $p\left(m,n,x,B\right)\rightarrow p_{mn}\left(x,B\right)$*. Sea* S *tiempo de paro relativo a la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_{n}$*. Sea* T *función medible,* $T:\Omega\rightarrow\left\{0,1,\ldots,\right\}$*. Supóngase que* $T\geq S$*, entonces* T *es tiempo de paro. Si* $B\in\chi_{0}$*, entonces*

$$P\left\{X\left(T\right)\in B,T<\infty|\mathcal{F}\left(S\right)\right\}=p\left(S,T,X\left(s\right),B\right) \qquad (1.6.23)$$

en $\left\{T<\infty\right\}$*.*

Sea K conjunto numerable y sea $d:K\rightarrow\mathbb{N}$ función. Para $v\in K$, M_{v} es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E=\cup_{v\in K}M_{v}=\left\{(v,\zeta):v\in K,\zeta\in M_{v}\right\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E}=\left\{\cup_{v\in K}A_{v}:A_{v}\in\mathcal{M}_{v}\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_{v}. Entonces $(E,\mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_{t}=(v_{t},\zeta_{t})$. La distribución de $(\mathbf{x}_{t})$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_{v},v\in K)$.

ii) Una función medible $\lambda:E\rightarrow\mathbb{R}_{+}$.

iii) Una medida de transición $Q:\mathcal{E}\times(E\cup\Gamma^{*})\rightarrow[0,1]$ donde

$$\Gamma^{*}=\cup_{v\in K}\partial^{*}M_{v}. \qquad (1.6.24)$$

y

$$\partial^{*}M_{v}=\left\{z\in\partial M_{v}:\phi_{\mathbf{v}}\left(\mathbf{t},\zeta\right)=\mathbf{z}\text{ para alguna }(t,\zeta)\in\mathbb{R}_{+}\times M_{v}\right\}. \qquad (1.6.25)$$

∂M_{v} denota la frontera de M_{v}.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t,\zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.6.26}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf \left\{t > 0 : \phi_v(t,\zeta) \in \partial^* M_v\right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \to \lambda(v, \phi_v(s,\zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \\ exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{1.6.27}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[30]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 1.6.1 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{1.6.28}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.6.6. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1.6.7. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.6.8. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \textit{ es compacto en } E\right\}. \tag{1.6.29}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.6.6. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

[30] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.6.9. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*[31]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B). \tag{1.6.30}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[32] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.6.32}$$

Definición 1.6.10. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.6.3. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.6.33}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 1.6.11. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \to X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1.6.12 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1.6.13. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) *$(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) *$(\theta_t)_{t \geq 0}$ es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \;\; y \;\; X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{1.6.34}$$

[31] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[32]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.6.31}$$

iii) *Para cualquier* $x \in E$,$\mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$, *y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 1.6.14 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$, *el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.6.15. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 1.6.3 (Lema 4.2, Dai[**?**])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k ([|x_n| t]) \rightarrow P_k^{'} t, \text{ u.o.c.,} \tag{1.6.35}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n} (|x_n| t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{1.6.36}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n} (|x_n| t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{1.6.37}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 1.6.4 (Lema 4.3, Dai[**?**])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) *Conforme* $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n} (|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n} (|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) *Para cada* $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n} (|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n} (|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l (S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{1.6.38}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.6.39}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))',$$
$$I^x(t) = (I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t))'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l (S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \tag{1.6.40}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.6.41}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.6.42}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.6.43}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t)) \, dI_i^x(t) = 0, \tag{1.6.44}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.6.45}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.6.7 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.6.46}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \;\; u.o.c. \tag{1.6.47}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{1.6.48}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.6.49}$$

$$\overline{T}(t) \;\; \textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{1.6.50}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \;\; \textit{es no decreciente}, \tag{1.6.51}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.6.52}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{1.6.53}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.6.1. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 1.6.5 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 1.6.8 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 1.6.6 (Lema 5.2 [?]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{1.6.54}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.6.9 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 1.6.2 (Proposición 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.6.55}$$

Proposición 1.6.3 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.6.56}$$

Proposición 1.6.4 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{1.6.57}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1.6.10 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.6.58}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p \tag{1.6.59}$$

Teorema 1.6.11 (Teorema 6.2 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \to 0$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x[|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 1.6.12 (Teorema 6.3 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)} |\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]| = 0.$$

Proposición 1.6.5 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{1.6.60}$$

Lema 1.6.2 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{1.6.61}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.6.13 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p \left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.6.62}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.6.14 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t \to \infty, x \in X. \tag{1.6.63}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x[|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 1.6.15 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\to\infty} t^{p-1} \left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{1.6.64}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\to\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 1.6.16 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{1.6.65}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.6.17 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\; T \geq 0, \tag{1.6.66}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \to \infty\} \geq q. \tag{1.6.67}$$

Definición 1.6.16. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 1.6.17. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 1.6.18. *Sea X el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.6.19. *Una función $f : X \to \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a $\mathcal{F}$. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.6.20. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1.6.21. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.6.22. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.6.23. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.6.24. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{1.6.68}$$

Nota 1.6.4. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{1.6.69}$$

1.6.4 Procesos de Estados de Markov

Teorema 1.6.18. *Sea* $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots, \}$ *Proceso de Markov con espacio de estados* (S_0, χ_0) *generado por una distribuición inicial* P_o *y probabilidad de transición* p_{mn}*, para* $m, n = 0, 1, \dots,$ $m < n$*, que por notación se escribirá como* $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$*. Sea* S *tiempo de paro relativo a la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_n$*. Sea* T *función medible,* $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, \}$*. Supóngase que* $T \geq S$*, entonces* T *es tiempo de paro. Si* $B \in \chi_0$*, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.6.70}$$

en $\{T < \infty\}$*.*

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{\bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{1.6.71}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{1.6.72}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.6.73}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{1.6.74}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 1.6.2 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{1.6.75}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[33] se cumple para cualquier tiempo de paro.

1.6.5 Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.6.25. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{1.6.76}$$

Definición 1.6.26. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.6.19. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

1.6.6 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[34], $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.6.27. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B)^{35}. \tag{1.6.77}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[36] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.6.79}$$

[33] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

[34] qué se quiere decir con el término: más general?

[35] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[36]
$$\mathbb{P}\left\{H | \mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H | X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.6.78}$$

Definición 1.6.28. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_sf)(x),\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}^{37}.$$

Nota 1.6.5. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_sf(X_t)\ t,s\geq 0,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{1.6.80}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

1.6.7 Primer Condición de Regularidad

Definición 1.6.29. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t\rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 1.6.30 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}^*$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *tal que* $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0=x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 1.6.31. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E,\mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X} = (\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t,s\geq 0$,

$$\theta_t\circ\theta_s = \theta_{t+s}\ \text{y}\ X_t\circ\theta_t = X_{t+s}; \tag{1.6.81}$$

iii) Para cualquier $x\in E$*,*$\mathbf{P}^x\{X_0=x\}=1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.

Definición 1.6.32 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha>0$ *y cualquier* $f\in S^\alpha$*, el proceso* $t\rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.6.33. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

[37]Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

1.6.8 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 1.6.7 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U\left(0\right) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V\left(0\right) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k\left(\left[|x_n|t\right]\right) \rightarrow P_k^{'}t, \text{ u.o.c.}, \tag{1.6.82}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \alpha_k\left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.6.83}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \mu_k\left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.6.84}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$.

Lema 1.6.8 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k\left(0\right) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k\left(0\right) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x\left(t\right)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_k^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right) = Q_k^x\left(0\right) + E_k^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{1.6.85}$$

para $k = 1, \dots, K$. Para $i = 1, \dots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.6.86}$$

para $i = 1, \dots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \dots, T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \dots, I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = \left(S_1^x(T_1^x(t)), \dots, S_K^x(T_K^x(t))\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x(T_l^x(t))\right) - S^x(T^x(t)), \tag{1.6.87}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.6.88}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.6.89}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.6.90}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{1.6.91}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.6.92}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.6.20 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.6.93}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \;\; u.o.c. \tag{1.6.94}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{1.6.95}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0, \tag{1.6.96}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{1.6.97}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente,} \tag{1.6.98}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0, \tag{1.6.99}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{1.6.100}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.6.6. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Teorema 1.6.21 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?])**.** *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r}\rightarrow\frac{1}{\mu^{r}}$, *cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$..

Proposición 1.6.7 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.6.101}$$

Proposición 1.6.8 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{1.6.102}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

1.6.9 Estabilidad

Definición 1.6.34 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??**, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{1.6.103}$$

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 1.6.35 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ y $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$*

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk} \mu_l \overline{T}_l(t) \tag{1.6.104}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.6.105}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{1.6.106}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.6.107}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{1.6.108}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{1.6.109}$$

Lema 1.6.9 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.6.22 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Proposición 1.6.9 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0 \tag{1.6.110}$$

Lema 1.6.3 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^{r}. \tag{1.6.111}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.6.23 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.6.112}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.6.24 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{1.6.113}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 1.6.25 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{1.6.114}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 1.6.26 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{1.6.115}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.6.27 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.6.116}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{1.6.117}$$

Definición 1.6.36. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X,\mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A\in\mathcal{F}$.*

Definición 1.6.37. *Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X=\bigcup_{n\geq1}X_n$ con $X_n\in\mathcal{F}$ y $\mu(X_n)<\infty$.*

Definición 1.6.38. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b)\in\mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.6.39. *Una función $f:X\rightarrow\mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x\in X:f(x)>\alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha,\infty))=\{x\in X:f(x)>\alpha\}\in\mathcal{F}.$$

Definición 1.6.40. *Sean $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$, $i=1,2,\ldots,$ espacios medibles y $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1,\omega_2,\ldots,)$ tales que $\omega_i\in\Omega_i$, $i=1,2,\ldots,$. Si $B^n\subset\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$, definimos $B_n=\{\omega\in\Omega:(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_i$.*

Definición 1.6.41. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t),t\geq0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t\geq0$, si para $s<t$ implica que $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s),s\leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s\leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.6.42. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t),t\geq0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s)\subset\mathcal{F}(t)$ para $s\leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T:\Omega\rightarrow[0,\infty]$ tal que $\{T\leq t\}\in\mathcal{F}(t)$ para cada $t\geq0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t),t\geq0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t)=\mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.6.43. *Sea $X(t),t\geq0$ proceso estocástico, con (S,χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s,t\in I$, I conjunto de índices, $s<t$, se tiene que $\mathcal{F}(s)\subset\mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.6.44. *Sea $X(t),t\geq0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t),\mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B\in\chi$, y $s,t\in I$, $s<t$ se cumple que*

$$P\{X(t)\in B|\mathcal{F}(s)\}=P\{X(t)\in B|X(s)\}. \tag{1.6.118}$$

Nota 1.6.6. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t)=\mathcal{F}_0(t)=\mathcal{F}(X(r),r\leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t)\in B|X(r),r\leq s\}=P\{X(t)\in B|X(s)\} \tag{1.6.119}$$

Teorema 1.6.28. *Sea $(X_n,\mathcal{F}_n,n=0,1,\ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0,χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m,n=0,1,\ldots,$ $m<n$, que por notación se escribirá como $p(m,n,x,B)\rightarrow p_{mn}(x,B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T:\Omega\rightarrow\{0,1,\ldots,\}$. Supóngase que $T\geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B\in\chi_0$, entonces*

$$P\{X(T)\in B,T<\infty|\mathcal{F}(S)\}=p(S,T,X(s),B) \tag{1.6.120}$$

en $\{T<\infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \left\{ (v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v \right\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{ \cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v \right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{1.6.121}$$

y

$$\partial^* M_v = \left\{ z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}} (\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v \right\}. \tag{1.6.122}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v (t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f (\zeta_t) = \mathcal{H} f (\zeta_t), \tag{1.6.123}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi (t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf \left\{ t > 0 : \phi_v (t, \zeta) \in \partial^* M_v \right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda (v, \phi_v (s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q (A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F (t) = \left\{ \begin{array}{ll} exp \left(- \int_0^t \lambda (n, \phi_n (s, \mathbf{z})) \, ds \right), & t < t^* (\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^* (\mathbf{x}) \end{array} \right. \tag{1.6.124}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P} [T_1 > t] = F (t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q (\cdot; \phi_n (T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[38]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \left\{ \begin{array}{ll} (n, \phi_n (t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{array} \right.$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

[38] Revisar página 362, y 364 de Davis [**?**].

Supuestos 1.6.3 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea* $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ *el número de saltos en* $[0, t]$. *Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{1.6.125}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.6.45. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1.6.46. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1.6.47. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.6.48. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{1.6.126}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.6.29. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

1.6.10 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.6.49. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)\,[39]. \tag{1.6.127}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[40] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.6.129}$$

Definición 1.6.50. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.6.7. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.6.130}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

[39] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[40]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.6.128}$$

1.6.11 Primer Condición de Regularidad

Definición 1.6.51. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t\rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 1.6.52 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* $/P_t)$ *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E, *existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$, *y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *tal que* $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0=x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 1.6.53. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E,\mathcal{E})$. *La colección* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$;

ii) $(\theta_t)_{t\geq0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X, *es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t,s\geq0$,

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s} \text{ y } X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{1.6.131}$$

iii) Para cualquier $x\in E$,$\mathbf{P}^x\{X_0=x\}=1$, *y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.

Definición 1.6.54 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha>0$ *y cualquier* $f\in S^\alpha$, *el proceso* $t\rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.6.55. *Un sistema* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 1.6.10 (Lema 4.2, Dai[**?**])**.** *Sea* $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ *con* $|x_n|\rightarrow\infty$, *conforme* $n\rightarrow\infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0)=\overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n\rightarrow\infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t])\rightarrow P_k^{'}t,\ u.o.c., \tag{1.6.132}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{1.6.133}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{1.6.134}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k=1/m_k=1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 1.6.11 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_k\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_k\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S^x_l\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T^x_l\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S^x_l\left(T^x_l\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi^x_l\left(S^x_l\left(T^x_l\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q^x_k\left(t\right)=^x_k\left(0\right)+E^x_k\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l_k\left(S^x_l\left(T^x_l\left(t\right)\right)\right)-S^x_k\left(T^x_k\left(t\right)\right) \tag{1.6.135}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I^x_i\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T^x_k\left(t\right).$$

Entonces $I^x_i\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_{0}^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q^x_k\left(t\right)\right)dI^x_i\left(t\right)=0, \tag{1.6.136}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right)=\left(T^x_1\left(t\right),\ldots,T^x_K\left(t\right)\right)^{'},$$

$$I^x\left(t\right)=\left(I^x_1\left(t\right),\ldots,I^x_K\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right)=\left(S^x_1\left(T^x_1\left(t\right)\right),\ldots,S^x_K\left(T^x_K\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{1.6.137}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.6.138}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.6.139}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.6.140}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.6.141}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.6.142}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.6.30 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.6.143}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \; u.o.c. \tag{1.6.144}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I-P)' M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{1.6.145}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.6.146}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{1.6.147}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.6.148}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.6.149}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{1.6.150}$$

Definición 1.6.56 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 1.6.31 (Teorema 4.2, Dai[**?**]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{1.6.151}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.6.57 (Definición 3.3, Dai y Meyn [**?**]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$, con $t\geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [**?**].

Lema 1.6.4 (Lema 3.1, Dai y Meyn [**?**]). *Si el modelo de flujo definido por **??**-**??** es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0>0$ tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$ para cualquier $t\geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.6.10. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ y $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 1.6.12 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.6.32 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1.6.33 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 1.6.13 (Lema 5.2 [?]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{1.6.152}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.6.34 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 1.6.11 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.6.153}$$

Proposición 1.6.12 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.6.154}$$

Proposición 1.6.13 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{1.6.155}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1.6.35 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.6.156}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq k_p \tag{1.6.157}$$

Teorema 1.6.36 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right]<\infty$$

Teorema 1.6.37 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 1.6.14 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right]=0 \tag{1.6.158}$$

Lema 1.6.5 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1)+\cdots+\zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{1.6.159}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.6.38 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.6.160}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.6.39 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_p}, \; t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{1.6.161}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 1.6.40 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x)=f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_f=0. \tag{1.6.162}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 1.6.41 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds=\pi(f):=\int f(x)\,\pi(dx) \tag{1.6.163}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.6.42 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0,c_0\geq0$,*

$$|Q(T)|\geq\epsilon_0 T-c_0,\; T\geq0, \tag{1.6.164}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{1.6.165}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k=1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_k=1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$,
- también se define $\rho_k:=\lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho<1$ para cuestiones de estabilidad.

1.6.12 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X=\left\{X(t),t\geq0\right\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [?].

Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [?]

.

1.6.13 Procesos Harris Recurrentes Positivos

Sea el proceso de Markov $X = \{X(t), t \geq 0\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] y Meyn y Down [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

1.6.14 Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X(t) = (Q(t), U(t), V(t)), \tag{1.6.166}$$

donde $Q(t)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U(t)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V(t)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U(t)$ como $V(t)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = (Q(0), U(0), V(0)) = (q, a, b)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \ldots, K$ se define

$$\begin{aligned} E_l^x(t) &= max\{r : U_l(0) + \xi_l(1) + \cdots + \xi_l(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0, \\ S_k^x(t) &= max\{r : V_k(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0. \end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s-éima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \left\{\phi^k(n), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \ldots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 1.6.14 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'} t, \; u.o.c., \tag{1.6.167}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+ , \; u.o.c., \tag{1.6.168}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+ , \; u.o.c., \tag{1.6.169}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$.

Lema 1.6.15 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$*, conforme* $n \rightarrow \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+ , \; u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+ .$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right) =_k^x \left(0\right) + E_k^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{1.6.170}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x\left(t\right) = t - \sum_{j\in C_i} T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k\in C_i} Q_k^x\left(t\right)\right) dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{1.6.171}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{1.6.172}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.6.173}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.6.174}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.6.175}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.6.176}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{1.6.177}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.6.43 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.6.178}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{1.6.179}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{1.6.180}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.6.181}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{1.6.182}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.6.183}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.6.184}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{1.6.185}$$

Definición 1.6.58 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.

Teorema 1.6.44 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{1.6.186}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.6.59 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right) = \left(\overline{Q}_{1}\left(t\right), \ldots, \overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}\left(t\right) = \left(\overline{T}_{1}\left(t\right), \ldots, \overline{T}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right) = \overline{Q}_{k}\left(0\right) + \alpha_{k}t - \mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}\left(t\right) \tag{1.6.187}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right) \geq 0 \textit{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.6.188}$$

$$\overline{T}_{k}\left(0\right) = 0, \textit{ y } \overline{T}_{k}\left(\cdot\right) \textit{ es no decreciente,} \tag{1.6.189}$$

$$\overline{I}_{i}\left(t\right) = t - \sum_{k \in C_{i}} \overline{T}_{k}\left(t\right) \textit{ es no decreciente} \tag{1.6.190}$$

$$\overline{I}_{i}\left(\cdot\right) \textit{ se incrementa al tiempo } t \textit{ cuando } \sum_{k \in C_{i}} Q_{k}^{x}\left(t\right) dI_{i}^{x}\left(t\right) = 0 \tag{1.6.191}$$

$$\textit{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}\left(\cdot\right), T^{x}\left(\cdot\right)\right) \textit{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{1.6.192}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.6.60 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}\left(0\right), \overline{B}\left(0\right)\right) \in \mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??***, junto con la condición:*

$$\overline{Q}\left(t\right) = \overline{Q}\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{A}\left(0\right)\right)^{+} - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{B}\left(0\right)\right)^{+} \tag{1.6.193}$$

Definición 1.6.61 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$*, con* $t \geq t_{0}$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 1.6.6 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_{0} > 0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_{0}$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$.

1.6.15 Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad

1.6.16 Teorema 2.1

El resultado principal de Down [?] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 1.6.45 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \sup \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{1.6.194}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{1.6.195}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right] = 0. \tag{1.6.196}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{1.6.197}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

Proposición 1.6.15 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{1.6.198}$$

Lema 1.6.7 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{1.6.199}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.6.46 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.6.200}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.6.47 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\, t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{1.6.201}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 1.6.48 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{1.6.202}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 1.6.49 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_{X}\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{1.6.203}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

1.6.17 Teorema 2.2

Teorema 1.6.50 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$|Q\left(T\right)|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\, T\geq0, \tag{1.6.204}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{1.6.205}$$

1.6.18 Teorema 2.3

Teorema 1.6.51 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_{j}}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_{s}}\right)\delta^{*} \tag{1.6.206}$$

i) Si $\rho<1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema **??**.

ii) Si $\rho<1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema **??**

1.6.19 Definiciones Básicas

Definición 1.6.62. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $\left(X,\mathcal{F}\right)$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A\in\mathcal{F}$.*

Definición 1.6.63. *Sea $\left(X,\mathcal{F},\mu\right)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X=\bigcup_{n\geq1}X_{n}$ con $X_{n}\in\mathcal{F}$ y $\mu\left(X_{n}\right)<\infty$.*

Definición 1.6.64. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b)\in\mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.6.65. *Una función $f:X\rightarrow\mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\left\{x\in X:f\left(x\right)>\alpha\right\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}\left(\left(\alpha,\infty\right)\right)=\left\{x\in X:f\left(x\right)>\alpha\right\}\in\mathcal{F}.$$

Definición 1.6.66. *Sean $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$, $i=1,2,\ldots,$ espacios medibles y $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1,\omega_2,\ldots,)$ tales que $\omega_i\in\Omega_i$, $i=1,2,\ldots,$. Si $B^n\subset\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$, definimos $B_n=\{\omega\in\Omega:(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_i$.*

Definición 1.6.67. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X\left(t\right),t\geq0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t\geq0$, si para $s<t$ implica que $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$, y $X\left(t\right)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}\left(X\left(s\right),s\leq t\right)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X\left(s\right)$, con $s\leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.6.68. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}\left(t\right),t\geq0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}\left(s\right)\subset\mathcal{F}\left(t\right)$ para $s\leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}\left(t\right)$ es una función $T:\Omega\rightarrow[0,\infty]$ tal que $\{T\leq t\}\in\mathcal{F}\left(t\right)$ para cada $t\geq0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X\left(t\right),t\geq0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}\left(t\right)=\mathcal{F}\left(X\left(s\right)\right)$.*

Definición 1.6.69. *Sea $X\left(t\right),t\geq0$ proceso estocástico, con $\left(S,\chi\right)$ espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}\left(t\right)\}$, es decir, si para cualquier $s,t\in I$, I conjunto de índices, $s<t$, se tiene que $\mathcal{F}\left(s\right)\subset\mathcal{F}\left(t\right)$ y $X\left(t\right)$ es $\mathcal{F}\left(t\right)$-medible,*

Definición 1.6.70. *Sea $X\left(t\right),t\geq0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}\left(t\right)$ o que $\{X\left(t\right),\mathcal{F}\left(t\right)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B\in\chi$, y $s,t\in I$, $s<t$ se cumple que*

$$P\{X\left(t\right)\in B|\mathcal{F}\left(s\right)\}=P\{X\left(t\right)\in B|X\left(s\right)\}. \tag{1.6.207}$$

Nota 1.6.8. *Si se dice que $\{X\left(t\right)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}\left(t\right)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}\left(t\right)=\mathcal{F}_0\left(t\right)=\mathcal{F}\left(X\left(r\right),r\leq t\right),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X\left(t\right)\in B|X\left(r\right),r\leq s\}=P\{X\left(t\right)\in B|X\left(s\right)\} \tag{1.6.208}$$

Teorema 1.6.52. *Sea $\left(X_n,\mathcal{F}_n,n=0,1,\ldots,\right\}$ Proceso de Markov con espacio de estados $\left(S_0,\chi_0\right)$ generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m,n=0,1,\ldots,$ $m<n$, que por notación se escribirá como $p\left(m,n,x,B\right)\rightarrow p_{mn}\left(x,B\right)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T:\Omega\rightarrow\{0,1,\ldots,\}$. Supóngase que $T\geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B\in\chi_0$, entonces*

$$P\{X\left(T\right)\in B,T<\infty|\mathcal{F}\left(S\right)\}=p\left(S,T,X\left(s\right),B\right) \tag{1.6.209}$$

en $\{T<\infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.6.16. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^0\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_k^x\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_k^x\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_k^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_k\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^{0}(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0)=\overline{T}^{0}(0)=0$.

ii) Para todo $t\geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}(t)+\overline{T}_{k}^{0}(t)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}(t)=\overline{Q}_{k}(0)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}(t)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}(t)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}(t)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}(t)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}(t)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}(t)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}(t)$$

para $\overline{Q}_{k}(t)>0$.

Lema 1.6.16 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.6.53 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1.6.54 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α,μ,T,U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t)=0$, *para toda* $t\geq t_0$.

Lema 1.6.17 (Lema 5.2 [?]). *Sea* $\{\xi(k):k\in\mathbb{Z}\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0,\infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t)=max\left\{n\geq 1:\xi(1)+\cdots+\xi(n-1)\leq t\right\}.$$

Si $E[\xi(1)]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^{r}\tag{1.6.210}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.6.55 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}(X_1]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r}\rightarrow\frac{1}{\mu^{r}}$, *cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$..

Proposición 1.6.17 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right]=0.\tag{1.6.211}$$

Proposición 1.6.18 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.6.212}$$

Proposición 1.6.19 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) \, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x \left[V(x)\right] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[f(X(s)) \, ds\right] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{1.6.213}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1.6.56 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{1.6.214}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$Limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \tag{1.6.215}$$

Teorema 1.6.57 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x \left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi \left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1.6.58 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)\left|P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot)\right|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)\left|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]\right| = 0}.$$

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0. \tag{1.6.216}$$

(S2.)

$$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N}, \tag{1.6.217}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right] \geq 0$.
- Se define
$$\delta^{*} := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right]. \tag{1.6.218}$$
- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_{k}(n)\right\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}(n)\right\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}(1)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}(1)\right]$
- también se define $\rho_{k} = \lambda_{k}/\mu_{k}$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $\left(X(t)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^{0}(t), C(t)\right) \tag{1.6.219}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \left(\{1,2,\ldots,K\} \times \{1,2,\ldots,S\}\right)^{M} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}^{K}, \tag{1.6.220}$$

- $Q(t) = \left(Q_{k}(t), 1 \leq k \leq K\right)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = \left(A_{k}(t), 1 \leq k \leq K\right)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^{0}(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_{k}(t), B_{m}(t)$ y $B_{m}^{0}(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([**?**])

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_{k}(n)\right\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}(n)\right\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}(1)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}(1)\right]$
- también se define $\rho_{k} = \lambda_{k}/\mu_{k}$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

1.6.20 Preliminares

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0$

2) $\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N}$para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m} = r_{j,j^{'}}$
- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^{*} := \sum_{j,j^{'}} p_j r_{j,j^{'}} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(i)\right]. \tag{1.6.221}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m, se denota por $B_m(t)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t; $B_m^0(t)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t, finalmente sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{1.6.222}$$

para $k = 1,\dots,K$ y $m = 1,2,\dots,M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \left(\{1,2,\dots,K\} \times \{1,2,\dots,S\}\right)^{M} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1,\dots,\xi_K,\eta_1,\dots,\eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1,\dots,K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{1.6.223}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\, dx,\ 0 \leq a < b. \tag{1.6.224}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto $A2)$ para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [**?**] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

1.6.21 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [**?**], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (**??**), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([**?**], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [**?**]

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [**?**]) en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la σ-algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D)$$

Definición 1.6.71. *Una medida no cero π en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ es* **invariante** *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbf{X}} P^t(x, D)\, \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.6.72. *El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 1.6.9. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama Proceso Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\,\pi(dx)$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente.

Definición 1.6.73. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 1.6.18 (Lema 3.1, Dai[?])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{1.6.225}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris Recurrente Positivo.

Lema 1.6.19 (Lema 3.1, Dai [?])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{|x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1.6.59 (Teorema 3.1, Dai[?])**.** *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{1.6.226}$$

*entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B = \{|x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.*

Nota 1.6.10. *En Meyn and Tweedie [?] muestran que si $P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.6.22 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in$ X, sea $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.6.227}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{1.6.228}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.6.229}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{1.6.230}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$,

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}^0_{m,k}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.6.231}$$

De acuerdo a Dai [?], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (??)-(??), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 1.6.74 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??-??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.6.60 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \tag{1.6.232}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.6.75 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 1.6.8 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por **??-??** es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.6.61 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces* *i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$*

$$limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p, \tag{1.6.233}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{1.6.234}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)\right] = 0. \tag{1.6.235}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right)ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{1.6.236}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.6.62 (Teorema 2.3, Down [**?**])**.** *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{1.6.237}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema **??**.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema **??**

Teorema 1.6.63. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p\left(m, n, x, B\right) \rightarrow p_{mn}\left(x, B\right)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\left\{X\left(T\right) \in B, T < \infty|\mathcal{F}\left(S\right)\right\} = p\left(S, T, X\left(s\right), B\right) \tag{1.6.238}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v\in K}M_v = \left\{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\right\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{\cup_{v\in K}A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0,1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{1.6.239}$$

y

$$\partial^* M_v = \left\{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\right\}. \tag{1.6.240}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.6.241}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf \left\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \left\{ \begin{array}{ll} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{array} \right. \tag{1.6.242}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[41]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \left\{ \begin{array}{ll} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{array} \right.$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 1.6.4 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{1.6.243}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.6.76. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

[41] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

Definición 1.6.77. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.6.78. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{1.6.244}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.6.64. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.6.79. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*[42]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B). \tag{1.6.245}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[43] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.6.247}$$

Definición 1.6.80. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.6.11. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.6.248}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 1.6.81. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1.6.82 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

[42] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[43]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.6.246}$$

Definición 1.6.83. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{1.6.249}$$

*iii) Para cualquier $x \in E$,$\mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.*

Definición 1.6.84 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^{\alpha}$, el proceso $t \to f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.6.85. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de (P_t).*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 1.6.20 (Lema 4.2, Dai[**?**])**.** *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k ([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{1.6.250}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n} (|x_n| t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.6.251}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n} (|x_n| t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.6.252}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 1.6.21 (Lema 4.3, Dai[**?**])**.** *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n} (|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n} (|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right) =_k^x\left(0\right) + E_k^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{1.6.253}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x\left(t\right) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x\left(t\right)\right) dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{1.6.254}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right) = \left(T_1^x\left(t\right), \ldots, T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$

$$I^x\left(t\right) = \left(I_1^x\left(t\right), \ldots, I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x\left(t\right) = Q^x\left(0\right) + E^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S^x\left(T^x\left(t\right)\right), \tag{1.6.255}$$

$$Q^x\left(t\right) \geq 0, \tag{1.6.256}$$

$$T^x\left(0\right) = 0, \text{ y } \overline{T}^x\left(t\right) \text{ es no decreciente,} \tag{1.6.257}$$

$$I^x\left(t\right) = et - CT^x\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{1.6.258}$$

$$\int_0^{\infty}\left(CQ^x\left(t\right)\right) dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{1.6.259}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^{x}\left(\cdot\right), \overline{T}^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.6.260}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S\left(k\right) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.6.65 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right), U^{x_{n_j}}\left(0\right), V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right) \to \left(\overline{Q}\left(0\right), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.6.261}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right) \ \text{u.o.c.} \tag{1.6.262}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right) = Q\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - \left(I - P\right)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{1.6.263}$$

$$\overline{Q}\left(t\right) \geq 0, \tag{1.6.264}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \ \text{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{1.6.265}$$

$$\overline{I}\left(t\right) = et - C\overline{T}\left(t\right) \ \text{es no decreciente,} \tag{1.6.266}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right) d\overline{I}\left(t\right) = 0, \tag{1.6.267}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{1.6.268}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.6.20. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x\left(0\right), \frac{1}{|x|}A_k^x\left(0\right), \frac{1}{|x|}B_k^x\left(0\right), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}\left(0\right)\right) \to \left(\overline{Q}_k\left(0\right), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ y $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}\left(0\right) = \overline{T}^{0}\left(0\right) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k\left(t\right) + \overline{T}_k^{0}\left(t\right)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k\left(t\right) = \overline{Q}_k\left(0\right) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k\left(t\right)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 1.6.22 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 1.6.66 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$*, para toda* $t \geq t_0$.

Lema 1.6.23 (Lema 5.2 [?]). *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$*, y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$*, entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{1.6.269}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.6.67 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$*, cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 1.6.21 (Proposición 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.6.270}$$

Proposición 1.6.22 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.6.271}$$

Proposición 1.6.23 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X*, sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$*, y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V(x)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f(X(s))\,ds\right] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{1.6.272}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1.6.68 (Teorema 5.5 [**?**]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.6.273}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \tag{1.6.274}$$

Teorema 1.6.69 (Teorema 6.2 [**?**]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1.6.70 (Teorema 6.3 [**?**]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_x\left[Q_t\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_0\right]\right| = 0.$$

Proposición 1.6.24 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [**?**]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{1.6.275}$$

Lema 1.6.9 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [**?**]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{1.6.276}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.6.71 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [**?**]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.6.277}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.6.72 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [**?**]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{1.6.278}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 1.6.73 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [**?**]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x)=f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_f=0. \tag{1.6.279}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 1.6.74 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [**?**]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds=\pi(f):=\int f(x)\,\pi(dx) \tag{1.6.280}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.6.75 (Teorema 2.2, Down [**?**]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0,c_0\geq0$,*

$$|Q(T)|\geq\epsilon_0T-c_0,\ T\geq0, \tag{1.6.281}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{1.6.282}$$

Definición 1.6.86. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X,\mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A\in\mathcal{F}$.*

Definición 1.6.87. *Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X=\bigcup_{n\geq1}X_n$ con $X_n\in\mathcal{F}$ y $\mu(X_n)<\infty$.*

Definición 1.6.88. *Sea X el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b)\in\mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.6.89. *Una función $f:X\rightarrow\mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\left\{x\in X:f(x)>\alpha\right\}$$

pertenece a $\mathcal{F}$. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha,\infty))=\left\{x\in X:f(x)>\alpha\right\}\in\mathcal{F}.$$

Definición 1.6.90. *Sean $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$, $i=1,2,\ldots,$ espacios medibles y $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1,\omega_2,\ldots,)$ tales que $\omega_i\in\Omega_i$, $i=1,2,\ldots,$. Si $B^n\subset\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$, definimos $B_n=\left\{\omega\in\Omega:(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\in B^n\right\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_i$.*

Definición 1.6.91. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.6.92. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.6.93. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.6.94. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{1.6.283}$$

Nota 1.6.12. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{1.6.284}$$

1.6.23 Procesos de Estados de Markov

Teorema 1.6.76. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \to p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \to \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.6.285}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \to \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{ \bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v \right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \to \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \to [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{1.6.286}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{1.6.287}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t,\zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.6.288}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t,\mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v,\zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf\left\{t > 0 : \phi_v(t,\zeta) \in \partial^* M_v\right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v,\zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \to \lambda(v, \phi_v(s,\zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0,\epsilon)$. La medida de transición $Q(A;\mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E,\mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n,\mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \\ exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s,\mathbf{z}))\,ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{1.6.289}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N,Z) con distribuición $Q(\cdot;\phi_n(T_1,\mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t,\zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t,\mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N,\mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 1.6.5 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0,t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{1.6.290}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[44] se cumple para cualquier tiempo de paro.

1.6.24 Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.6.95. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{1.6.291}$$

Definición 1.6.96. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.6.77. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

[44] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

1.6.25 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma \{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[45], $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.6.97. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{46}. \tag{1.6.292}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[47] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.6.294}$$

Definición 1.6.98. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}^{48}.$$

Nota 1.6.13. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.6.295}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

1.6.26 Primer Condición de Regularidad

Definición 1.6.99. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \to X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1.6.100 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x \{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1.6.101. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

[45] qué se quiere decir con el término: más general?

[46] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[47]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.6.293}$$

[48] Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso E-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$*,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{1.6.296}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$*.*

Definición 1.6.102 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \to f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.6.103. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t)*.*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a* $\mathcal{G}_t$*.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

1.6.27 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 1.6.24 (Lema 4.2, Dai[**?**])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$*, casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \text{ u.o.c.,} \tag{1.6.297}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{1.6.298}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{1.6.299}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$*.*

Lema 1.6.25 (Lema 4.3, Dai[**?**])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x\left(t\right)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_k^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right) = Q_k^x\left(0\right) + E_k^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{1.6.300}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x\left(t\right) = t - \sum_{j\in C_i} T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i} Q_k^x\left(t\right)\right) dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{1.6.301}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right) = \left(T_1^x\left(t\right), \ldots, T_K^x\left(t\right)\right)',$$

$$I^x\left(t\right) = \left(I_1^x\left(t\right), \ldots, I_K^x\left(t\right)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x\left(t\right) = Q^x\left(0\right) + E^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S^x\left(T^x\left(t\right)\right), \tag{1.6.302}$$

$$Q^x\left(t\right) \geq 0, \tag{1.6.303}$$

$$T^x\left(0\right) = 0, \text{ y } \overline{T}^x\left(t\right) \text{ es no decreciente}, \tag{1.6.304}$$

$$I^x\left(t\right) = et - CT^x\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{1.6.305}$$

$$\int_0^{\infty}\left(CQ^x\left(t\right)\right) dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{1.6.306}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^{x}(\cdot), \overline{T}^{x}(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.6.307}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.6.78 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.6.308}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \ \textit{u.o.c.} \tag{1.6.309}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{1.6.310}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.6.311}$$

$$\overline{T}(t) \ \textit{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{1.6.312}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \ \textit{es no decreciente,} \tag{1.6.313}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.6.314}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{1.6.315}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.6.25. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^{0}(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^{0}(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^{0}(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Teorema 1.6.79 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 1.6.26 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p)\, dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.6.316}$$

Proposición 1.6.27 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{1.6.317}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

1.6.28 Estabilidad

Definición 1.6.104 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??**, *junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P'\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{1.6.318}$$

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 1.6.105 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)'$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)'$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^k P_{lk}\mu_l \overline{T}_l(t) \tag{1.6.319}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.6.320}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.6.321}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.6.322}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{1.6.323}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } (Q^x(\cdot), T^x(\cdot)) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{1.6.324}$$

Lema 1.6.26 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.6.80 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Proposición 1.6.28 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0 \tag{1.6.325}$$

Lema 1.6.10 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t \to \infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{1.6.326}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.6.81 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{1.6.327}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.6.82 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\| P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot) \right\|_{f_p}, \; t \to \infty, x \in X. \tag{1.6.328}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}_x [|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 1.6.83 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t \to \infty} t^{p-1} \left\| P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot) \right\|_f = 0. \tag{1.6.329}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \to \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q(0)]| = 0.$$

Teorema 1.6.84 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_o^t f\left(X\left(s\right)\right) ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right) \pi\left(dx\right) \tag{1.6.330}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.6.85 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.6.331}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{1.6.332}$$

Definición 1.6.106. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 1.6.107. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu\left(X_n\right) < \infty$.*

Definición 1.6.108. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.6.109. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\left\{x \in X : f\left(x\right) > \alpha\right\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}\left(\left(\alpha, \infty\right)\right) = \left\{x \in X : f\left(x\right) > \alpha\right\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.6.110. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \left\{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\right\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1.6.111. *[TSP, Ash [?]] Sea $X\left(t\right), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X\left(t\right)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}\left(X\left(s\right), s \leq t\right)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X\left(s\right)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.6.112. *[TSP, Ash [?]] Sea $\left\{\mathcal{F}\left(t\right), t \geq 0\right\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}\left(s\right) \subset \mathcal{F}\left(t\right)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}\left(t\right)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\left\{T \leq t\right\} \in \mathcal{F}\left(t\right)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X\left(t\right), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}\left(t\right) = \mathcal{F}\left(X\left(s\right)\right)$.*

Definición 1.6.113. *Sea $X\left(t\right), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\left\{\mathcal{F}\left(t\right)\right\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}\left(s\right) \subset \mathcal{F}\left(t\right)$ y $X\left(t\right)$ es $\mathcal{F}\left(t\right)$-medible,*

Definición 1.6.114. *Sea $X\left(t\right), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}\left(t\right)$ o que $\left\{X\left(t\right), \mathcal{F}\left(t\right)\right\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\left\{X\left(t\right) \in B|\mathcal{F}\left(s\right)\right\} = P\left\{X\left(t\right) \in B|X\left(s\right)\right\}. \tag{1.6.333}$$

Nota 1.6.14. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (??) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{1.6.334}$$

Teorema 1.6.86. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.6.335}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{1.6.336}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{1.6.337}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.6.338}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{1.6.339}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[49]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 1.6.6 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea* $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ *el número de saltos en* $[0, t]$. *Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{1.6.340}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.6.115. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1.6.116. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1.6.117. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.6.118. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{1.6.341}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.6.87. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

1.6.29 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.6.119. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B)\, ^{50}. \tag{1.6.342}$$

[49] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

[50] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E,\mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[51] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_t\right)|\mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t}f\left(X_t\right)\ \ s\leq t\in I,\ \ f\in b\mathcal{E}. \tag{1.6.344}$$

Definición 1.6.120. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f\left(x\right) = P_t\left(P_s f\right)\left(x\right),\ \ t,s\geq 0,\ \ x\in E\ \ f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.6.15. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t}=P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_{t+s}\right)|\mathcal{G}_t\right\} = P_s f\left(X_t\right)\ \ t,s\geq 0,\ \ f\in b\mathcal{E}. \tag{1.6.345}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

1.6.30 Primer Condición de Regularidad

Definición 1.6.121. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t\rightarrow X_t\left(w\right)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1.6.122 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}$ y $P_t\left(b\mathcal{E}^*\right)\subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ tal que $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 1.6.123. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E,\mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) *$(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) *$(\theta_t)_{t\geq 0}$ es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t,s\geq 0$,*

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s}\ \ y\ X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{1.6.346}$$

iii) *Para cualquier $x\in E$,$\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}=1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.*

Definición 1.6.124 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha>0$ y cualquier $f\in S^\alpha$, el proceso $t\rightarrow f\left(X_t\right)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.6.125. *Un sistema $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

[51]

$$\mathbb{P}\left\{H|\mathcal{G}_t\right\}=\mathbb{P}\left\{H|X_t\right\}\ \ H\in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.6.343}$$

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 1.6.27 (Lema 4.2, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$*, casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'} t, \ u.o.c., \tag{1.6.347}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{1.6.348}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{1.6.349}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 1.6.28 (Lema 4.3, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x \left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x \left(T_k^x(t)\right) \tag{1.6.350}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.6.351}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{1.6.352}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.6.353}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.6.354}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.6.355}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.6.356}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{1.6.357}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.6.88 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.6.358}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)\ u.o.c. \tag{1.6.359}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{1.6.360}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0, \tag{1.6.361}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\ \textit{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{1.6.362}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right)\ \textit{es no decreciente,} \tag{1.6.363}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0, \tag{1.6.364}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)\textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{1.6.365}$$

Definición 1.6.126 (Definición 4.1, , Dai [**?**]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (*__??__*)-(*__??__*) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta>0$ *que depende de* μ,α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv 0$.

Teorema 1.6.89 (Teorema 4.2, Dai[**?**]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{1.6.366}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.6.127 (Definición 3.3, Dai y Meyn [**?**]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$*, con* $t\geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [**?**].

Lema 1.6.11 (Lema 3.1, Dai y Meyn [**?**]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0>0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$ *para cualquier* $t\geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq 1$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.6.29. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 1.6.29 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.6.90 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1.6.91 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* (α,μ,T,U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$, *para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 1.6.30 (Lema 5.2 [?]). *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r} \tag{1.6.367}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.6.92 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}(X_{1}]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 1.6.30 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.6.368}$$

Proposición 1.6.31 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.6.369}$$

Proposición 1.6.32 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{1.6.370}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 1.6.93 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.6.371}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{1.6.372}$$

Teorema 1.6.94 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1.6.95 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 1.6.33 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{1.6.373}$$

Lema 1.6.12 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^{r}. \tag{1.6.374}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.6.96 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.6.375}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.6.97 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{1.6.376}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x[|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 1.6.98 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{1.6.377}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 1.6.99 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{1.6.378}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.6.100 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.6.379}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{1.6.380}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\left\{\xi_k\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)\right]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$,
- también se define $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.

1.6.31 Procesos de Estados Markoviano para el Sistema

1.6.32 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X = \left\{X\left(t\right), t\geq0\right\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [?].

Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [?]

.

1.6.33 Procesos Harris Recurrentes Positivos

Sea el proceso de Markov $X = \left\{X\left(t\right), t\geq0\right\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] y Meyn y Down [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

1.6.34 Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X\left(t\right) = \left(Q\left(t\right), U\left(t\right), V\left(t\right)\right), \tag{1.6.381}$$

donde $Q\left(t\right)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U\left(t\right)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V\left(t\right)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U\left(t\right)$ como $V\left(t\right)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = \left(Q\left(0\right), U\left(0\right), V\left(0\right)\right) = \left(q, a, b\right)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l\in\mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k=1,\ldots,K$ se define

$$\begin{aligned} E_l^x\left(t\right) &= max\left\{r : U_l\left(0\right) + \xi_l\left(1\right) + \cdots + \xi_l\left(r-1\right) \leq t\right\} \;\; t\geq0, \\ S_k^x\left(t\right) &= max\left\{r : V_k\left(0\right) + \eta_k\left(1\right) + \cdots + \eta_k\left(r-1\right) \leq t\right\} \;\; t\geq0. \end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s-éima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \left\{\phi^k(n), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \ldots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 1.6.31 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'} t, \ u.o.c., \tag{1.6.382}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{1.6.383}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{1.6.384}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 1.6.32 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l (S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{1.6.385}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.6.386}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))',$$

$$I^x(t) = (I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t))'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l (S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \tag{1.6.387}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.6.388}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.6.389}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.6.390}$$

$$\int_0^{\infty} (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{1.6.391}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{1.6.392}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.6.101 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.6.393}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \;\; u.o.c. \tag{1.6.394}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{1.6.395}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.6.396}$$

$$\overline{T}(t) \;\; \textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{1.6.397}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \;\; \textit{es no decreciente}, \tag{1.6.398}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.6.399}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{1.6.400}$$

Definición 1.6.128 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en **??** es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 1.6.102 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{1.6.401}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.6.129 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ y $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$*

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk}\mu_l \overline{T}_l(t) \tag{1.6.402}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \;\; \textit{para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.6.403}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \;\; y\; \overline{T}_k(\cdot) \;\; \textit{es no decreciente}, \tag{1.6.404}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.6.405}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{1.6.406}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{1.6.407}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.6.130 (Definición 3.2, Dai y Meyn [**?**]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??***, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{1.6.408}$$

Definición 1.6.131 (Definición 3.3, Dai y Meyn [**?**]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [**?**].

Lema 1.6.13 (Lema 3.1, Dai y Meyn [**?**]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

1.6.35 Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad

1.6.36 Teorema 2.1

El resultado principal de Down [**?**] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 1.6.103 (Teorema 2.1, Down [**?**]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p*, y para cada condición inicial* $x \in X$

$$lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{1.6.409}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{1.6.410}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$*. Donde* π *es la probabilidad invariante para* $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}*:*

$$lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right] = 0. \tag{1.6.411}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{1.6.412}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

Proposición 1.6.34 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{1.6.413}$$

Lema 1.6.14 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{1.6.414}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.6.104 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.6.415}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 1.6.105 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{1.6.416}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 1.6.106 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_f=0. \tag{1.6.417}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 1.6.107 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds=\pi(f):=\int f(x)\,\pi(dx) \tag{1.6.418}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

1.6.37 Teorema 2.2

Teorema 1.6.108 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.6.419}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, *con* $|Q(0)| = 1$. *Entonces para cualquier* $0 < q \leq 1$, *existe* $B < 0$ *tal que para cualquier* $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{1.6.420}$$

1.6.38 Teorema 2.3

Teorema 1.6.109 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{1.6.421}$$

i) Si $\rho < 1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema* **??**.

ii) Si $\rho < 1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema* **??**

1.6.39 Definiciones Básicas

Definición 1.6.132. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 1.6.133. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 1.6.134. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.6.135. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.6.136. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1.6.137. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.6.138. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.6.139. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.6.140. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{1.6.422}$$

Nota 1.6.16. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{1.6.423}$$

Teorema 1.6.110. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots, m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.6.424}$$

en $\{T < \infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.6.35. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 1.6.33 (Lema 3.1 [?])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.6.111 (Teorema 5.2 [?])**.** *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1.6.112 (Teorema 5.1 [?])**.** *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$, *para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 1.6.34 (Lema 5.2 [?])**.** *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r}\qquad(1.6.425)$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.6.113 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?])**.** *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$..

Proposición 1.6.36 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0. \qquad (1.6.426)$$

Proposición 1.6.37 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1}<\infty$, $\delta>0$ *y un conjunto compacto* $C\subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1+|X\left(t\right)|^p\right)dt\right]\leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right) \qquad (1.6.427)$$

Proposición 1.6.38 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta>0$, *y un conjunto cerrado* $C\subset X$

$$V\left(x\right):=\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x\in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k<\infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right]+\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right]\leq\frac{1}{t}V\left(x\right)+k, \qquad (1.6.428)$$

para $x\in X$ *y* $t>0$.

Teorema 1.6.114 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p<\infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \qquad (1.6.429)$$

para $t\geq0$, $x\in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq k_p \qquad (1.6.430)$$

Teorema 1.6.115 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow0$$

para $t\rightarrow\infty$ *y* $x\in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right]<\infty$$

Teorema 1.6.116 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x\in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

1.6.40 Proceso de Estados Markoviano para el Sistema

Sean $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ el tiempo residual de arribos a la cola k, para cada servidor m, sea $H_m(t)$ par ordenado que consiste en la cola que está siendo atendida y la política de servicio que se está utilizando. $B_m(t)$ los tiempos de servicio residuales, $B_m^0(t)$ el tiempo residual de traslado, $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H_m(t)$.

El proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{1.6.431}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{1.6.432}$$
$$P(\xi_k(1) + \ldots \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\, dx0 \text{ y} \tag{1.6.433}$$
$$\int_0^\infty q_k(x)\, dx > 0 \tag{1.6.434}$$

1.6.41 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho, Sharpe [?], en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$.

Se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable.

Definición 1.6.141. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1.6.142. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1.6.143. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.6.144. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{1.6.435}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.6.117. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

1.6.42 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.6.145. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{52}. \tag{1.6.436}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov [53] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.6.438}$$

Definición 1.6.146. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.6.17. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.6.439}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

1.6.43 Primer Condición de Regularidad

Definición 1.6.147. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1.6.148 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1.6.149. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;

[52] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[53]
$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.6.437}$$

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$*,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{1.6.440}$$

iii) *Para cualquier* $x \in E$*,*$\mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$*.*

Definición 1.6.150 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.6.151. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t)*.*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a* $\mathcal{G}_t$*.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Definición 1.6.152. *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{F}$ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* X*, la pareja* $(X, \mathcal{F})$ *es llamado espacio medible. Un subconjunto* A *de* X *es llamado medible, o medible con respecto a* $\mathcal{F}$*, si* $A \in \mathcal{F}$*.*

Definición 1.6.153. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *espacio de medida. Se dice que la medida* μ *es* σ*-finita si se puede escribir* $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ *con* $X_n \in \mathcal{F}$ *y* $\mu(X_n) < \infty$*.*

Definición 1.6.154. *Sea* X *el conjunto de los úmeros reales* $\mathbb{R}$*. El álgebra de Borel es la* σ*-álgebra* B *generada por los intervalos abiertos* $(a, b) \in \mathbb{R}$*. Cualquier conjunto en* B *es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.6.155. *Una función* $f : X \rightarrow \mathbb{R}$*, es medible si para cualquier número real* α *el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X*. Equivalentemente, se dice que* f *es medible si*

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.6.156. *Sean* $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$*,* $i = 1, 2, \ldots,$ *espacios medibles y* $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ *el conjunto de todas las sucesiones* $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ *tales que* $\omega_i \in \Omega_i$*,* $i = 1, 2, \ldots,$*. Si* $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$*, definimos* $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$*. Al conjunto* B_n *se le llama* cilindro *con base* B^n*, el cilindro es llamado medible si* $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$*.*

Definición 1.6.157. *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de* σ*-álgebras* $\mathcal{F}_t$*, para* $t \geq 0$*, si para* $s < t$ *implica que* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$*, y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}_t$*-medible para cada* t*. Si no se especifica* $\mathcal{F}_t$ *entonces se toma* $\mathcal{F}_t$ *como* $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$*, la más pequeña* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω *que hace que cada* $X(s)$*, con* $s \leq t$ *sea Borel medible.*

Definición 1.6.158. *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ *familia creciente de sub* σ*-álgebras. es decir,* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *para* $s \leq t$*. Un tiempo de paro para* $\mathcal{F}(t)$ *es una función* $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ *tal que* $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ *para cada* $t \geq 0$*. Un tiempo de paro para el proceso estocástico* $X(t), t \geq 0$ *es un tiempo de paro para las* σ*-álgebras* $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$*.*

Definición 1.6.159. *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, con* (S, χ) *espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a* $\{\mathcal{F}(t)\}$*, es decir, si para cualquier* $s, t \in I$*,* I *conjunto de índices,* $s < t$*, se tiene que* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}(t)$*-medible,*

Definición 1.6.160. *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a* $\mathcal{F}(t)$ *o que* $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ *es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto* $B \in \chi$*, y* $s, t \in I$*,* $s < t$ *se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{1.6.441}$$

Nota 1.6.18. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (??) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{1.6.442}$$

Teorema 1.6.118. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.6.443}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{1.6.444}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{1.6.445}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.6.446}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{1.6.447}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[54]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 1.6.7 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{1.6.448}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.6.161. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1.6.162. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1.6.163. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.6.164. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{1.6.449}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.6.119. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

1.6.44 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.6.165. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B)^{55}. \tag{1.6.450}$$

[54] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].
[55] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[56] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_t\right)|\mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t}f\left(X_t\right)\ \ s \leq t \in I,\ \ f \in b\mathcal{E}. \tag{1.6.452}$$

Definición 1.6.166. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f\left(x\right) = P_t\left(P_sf\right)\left(x\right),\ \ t, s \geq 0,\ \ x \in E\ \ f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.6.19. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_{t+s}\right)|\mathcal{G}_t\right\} = P_sf\left(X_t\right)\ \ t, s \geq 0,\ \ f \in b\mathcal{E}. \tag{1.6.453}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

1.6.45 Primer Condición de Regularidad

Definición 1.6.167. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t\left(w\right)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1.6.168 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t\left(b\mathcal{E}^*\right) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1.6.169. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) *$(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) *$(\theta_t)_{t\geq 0}$ es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s}\ \ y\ X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{1.6.454}$$

iii) *Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.*

Definición 1.6.170 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^{\alpha}$, el proceso $t \rightarrow f\left(X_t\right)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.6.171. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

[56]
$$\mathbb{P}\left\{H|\mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H|X_t\right\}\ \ H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.6.451}$$

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 1.6.35 (Lema 4.2, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k ([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \text{ u.o.c.,} \tag{1.6.455}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n} (|x_n| t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{1.6.456}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n} (|x_n| t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{1.6.457}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 1.6.36 (Lema 4.3, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n} (|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n} (|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n} (|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n} (|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{1.6.458}$$

para $k = 1, \dots, K$. Para $i = 1, \dots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.6.459}$$

para $i = 1, \dots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \dots, T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \dots, I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \dots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{1.6.460}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.6.461}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.6.462}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.6.463}$$

$$\int_0^{\infty} \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.6.464}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.6.465}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.6.120 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.6.466}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \;\; u.o.c. \tag{1.6.467}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{1.6.468}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.6.469}$$

$$\overline{T}(t) \;\; \textit{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{1.6.470}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \;\; \textit{es no decreciente,} \tag{1.6.471}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.6.472}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{1.6.473}$$

Definición 1.6.172 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$*.*

Teorema 1.6.121 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{1.6.474}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.6.173 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$*.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 1.6.15 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$*.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.6.39. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 1.6.37 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.6.122 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1.6.123 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$, *para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 1.6.38 (Lema 5.2 [?]). *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r} \qquad (1.6.475)$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.6.124 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 1.6.40 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.6.476}$$

Proposición 1.6.41 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.6.477}$$

Proposición 1.6.42 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{1.6.478}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 1.6.125 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.6.479}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{1.6.480}$$

Teorema 1.6.126 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1.6.127 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 1.6.43 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{1.6.481}$$

Lema 1.6.16 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{1.6.482}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.6.128 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p \left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.6.483}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.6.129 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x \in X. \tag{1.6.484}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 1.6.130 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{1.6.485}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 1.6.131 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{1.6.486}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.6.132 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.6.487}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{1.6.488}$$

1.6.46 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]=\overline{N}>0$;
2) $\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(1)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}^{m}r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(i)\right]. \tag{1.6.489}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}(n)\right\}_{n\geq1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}(n)\right\}_{n\geq1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}<1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_{k}(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^{T}=\left(Q_{k}(t),A_{k}(t),B_{m}(t),B_{m}^{0}(t),C_{m}(t)\right), \tag{1.6.490}$$

para $k=1,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X}=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\})^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_l (1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k (1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \quad (1.6.491)$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\, dx,\ 0 \leq a < b. \quad (1.6.492)$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

1.6.47 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 1.6.174. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right)=\int_{\mathbb{X}}P^{t}\left(x,D\right)\pi\left(dx\right),$$

para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t\geq0$.

Definición 1.6.175. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu\left(D\right)>0$ y $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_{x}\left\{\tau_{D}<\infty\right\}\equiv1,$$

cuando $\tau_{D}=inf\left\{t\geq0:X_{t}\in D\right\}$.

Nota 1.6.20. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}\left(\cdot\right)=\int_{\mathbf{X}}P_{x}\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right),$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 1.6.176. *Un conjunto $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t>0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta>0$ tal que*

$$P^{t}\left(x,A\right)\geq\delta\nu\left(A\right),$$

para $x\in D,A\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 1.6.39 (Lema 3.1, Dai [?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_{x}\left(\tau_{B}<\infty\right)\equiv1$ y que para algún $\delta>0$ se cumple que*

$$\sup\mathbb{E}_{x}\left[\tau_{B}\left(\delta\right)\right]<\infty, \tag{1.6.493}$$

donde $\tau_{B}\left(\delta\right)=inf\left\{t\geq\delta:X\left(t\right)\in B\right\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 1.6.40 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B=\left\{x\in\mathbb{X}:\left|x\right|\leq k\right\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k>0$.*

Teorema 1.6.133 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta>0$ tal que*

$$lim_{\left|x\right|\rightarrow\infty}\frac{1}{\left|x\right|}\mathbb{E}\left|X^{x}\left(\left|x\right|\delta\right)\right|=0, \tag{1.6.494}$$

donde X^{x} se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B=\left\{x\in\mathbb{X}:\left|x\right|\leq k\right\}$ con algún $k>0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.6.48 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.6.495}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{1.6.496}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{1.6.497}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.6.498}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.6.499}$$

Definición 1.6.177 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1.6.178. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.6.134 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{1.6.500}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.6.179 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t)=0$, con $t\geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)|=1$.*

Lema 1.6.17 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0>0$ tal que $\overline{Q}(t)=0$ para cualquier $t\geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}(0)|+|\overline{A}(0)|+|\overline{B}(0)|\leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.6.135 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x\in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds\leq\kappa_p, \tag{1.6.501}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right]=\mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right]\leq\kappa_r, \tag{1.6.502}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]|=0. \tag{1.6.503}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds=\mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{1.6.504}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.6.136 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^K\rho_k+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{1.6.505}$$

i) Si $\rho<1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho>1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

Dado el proceso $X=\{X(t),t\geq0\}$ definido en (??) que describe la dinámica del sistema de visitas cíclicas, si $U(t)$ es el residual de los tiempos de llegada al tiempo t entre dos usuarios consecutivos y $V(t)$ es el residual de los tiempos de servicio al tiempo t para el usuario que estás siendo atendido por el servidor. Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados que puede tomar el proceso X.

Lema 1.6.41 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ con $|x_n|\rightarrow\infty$, conforme $n\rightarrow\infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0)=\overline{U}_k,$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0)=\overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t\geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea e es un vector de unos, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{cc} 1, & S\left(k\right)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema (**??**):

Teorema 1.6.137 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\left\{x_n\right\}\subset \mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right),U^{x_{n_j}}\left(0\right),V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(0\right),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{1.6.506}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)\ \ u.o.c. \tag{1.6.507}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{1.6.508}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0, \tag{1.6.509}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\ \text{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{1.6.510}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right)\ \text{ es no decreciente}, \tag{1.6.511}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0, \tag{1.6.512}$$

$$\text{Condiciones en }\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{1.6.513}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.6.44 (Proposición 4.2, Dai [**?**]). *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_k^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_k^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_k^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. El flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) *Los vectores de tiempo ocupado* $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) *Para todo* $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t.$$

iii) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t).$$

iv) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \rho_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) *Para todo* k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t).$$

vi) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t),$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 1.6.42 (Lema 3.1, Chen [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Lema 1.6.43 (Lema 5.2, Gut [?]). *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r, \tag{1.6.514}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) *Para cualquier* $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$.

b) *Las variables aleatorias* $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.6.138 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo, Gut [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$.

Proposición 1.6.45 (Proposición 5.1, Dai y Sean [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.6.515}$$

Proposición 1.6.46 (Proposición 5.3, Dai y Sean [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right). \tag{1.6.516}$$

Proposición 1.6.47 (Proposición 5.4, Dai y Sean [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right],$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{1.6.517}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1.6.139 (Teorema 5.5, Dai y Sean [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\}, \tag{1.6.518}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p. \tag{1.6.519}$$

Teorema 1.6.140 (Teorema 6.2 Dai y Sean [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0,$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x[|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q_0|^p] < \infty,$$

donde

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_f = sup_{|g\leq f|} | \int \pi(dy)\, g(y) - \int P^t(x,dy)\, g(y) |,$$

para $x \in \mathbb{X}$.

Teorema 1.6.141 (Teorema 6.3, Dai y Sean [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)} \left| P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \right|_f = 0,$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)} |\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]| = 0.$$

Proposición 1.6.48 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0. \tag{1.6.520}$$

Teorema 1.6.142 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\}, \tag{1.6.521}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.6.143 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right) ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right)\pi\left(dx\right), \tag{1.6.522}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.6.144 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.6.523}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{1.6.524}$$

Demostración 1.6.1 (Teorema ??). *La demostración de este teorema se da a continuación:*

i) Utilizando la proposición ?? se tiene que la proposición ?? es cierta para $f\left(x\right) = 1 + |x|^p$.

i) es consecuencia directa del Teorema ??.

iii) ver la demostración dada en Dai y Sean [?] páginas 1901-1902.

iv) ver Dai y Sean [?] páginas 1902-1903 ó [?].

Modelo de Flujo y Estabilidad

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k\left(n\right) := \sum_{i=1}^{n}\phi^k\left(i\right). \tag{1.6.525}$$

suponiendo que el estado inicial de la red es $x = (q, a, b) \in X$, entonces para cada k

$$E_k^x\left(t\right) := \max\left\{n \geq 0 : A_k^x\left(0\right) + \psi_k\left(1\right) + \cdots + \psi_k\left(n-1\right) \leq t\right\} \tag{1.6.526}$$

$$S_k^x\left(t\right) := \max\left\{n \geq 0 : B_k^x\left(0\right) + \eta_k\left(1\right) + \cdots + \eta_k\left(n-1\right) \leq t\right\} \tag{1.6.527}$$

Sea $T_k^x\left(t\right)$ el tiempo acumulado que el servidor $s\left(k\right)$ ha utilizado en los usuarios de la clase k en el intervalo $[0, t]$. Entonces se tienen las siguientes ecuaciones:

$$Q_k^x\left(t\right) = Q_k^x\left(0\right) + E_k^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{k}\Phi_k^l S_l^x\left(T_l^x\right) - S_k^x\left(T_k^x\right) \tag{1.6.528}$$

$$Q^x\left(t\right) = \left(Q_1^x\left(t\right), \ldots, Q_K^x\left(t\right)\right)^{'} \geq 0, \tag{1.6.529}$$

$$T^x\left(t\right) = \left(T_1^x\left(t\right), \ldots, T_K^x\left(t\right)\right)^{'} \geq 0, \text{ es no decreciente} \tag{1.6.530}$$

$$I_i^x\left(t\right) = t - \sum_{k\in C_i} T_k^x\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{1.6.531}$$

$$\int_0^\infty \sum_{k\in C_i} Q_k^x\left(t\right) dI_i^x\left(t\right) = 0 \tag{1.6.532}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x\left(\cdot\right), T^x\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{1.6.533}$$

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^{x}(t)=\frac{1}{|x|}Q^{x}(|x|t) \qquad (1.6.534)$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola. Si se hace $|q|\rightarrow\infty$ y se mantienen las componentes restantes fijas, de la condición inicial x, cualquier punto límite del proceso normalizado $\overline{Q}^{x}$ es una solución del siguiente modelo de flujo, ver [?].

Definición 1.6.180. *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $(Q^{x}(\cdot),T^{x}(\cdot))$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t)=\left(\overline{Q}_{1}(t),\ldots,\overline{Q}_{K}(t)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}(t)=\left(\overline{T}_{1}(t),\ldots,\overline{T}_{K}(t)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_{k}(t)=\overline{Q}_{k}(0)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}(t)+\sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}(t) \qquad (1.6.535)$$

$$\overline{Q}_{k}(t)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \qquad (1.6.536)$$

$$\overline{T}_{k}(0)=0, \text{ y } \overline{T}_{k}(\cdot) \text{ es no decreciente}, \qquad (1.6.537)$$

$$\overline{I}_{i}(t)=t-\sum_{k\in C_{i}}\overline{T}_{k}(t) \text{ es no decreciente} \qquad (1.6.538)$$

$$\overline{I}_{i}(\cdot) \text{ se incrementa al tiempot cuando } \sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}(t)\,dI_{i}^{x}(t)=0 \qquad (1.6.539)$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } (Q^{x}(\cdot),T^{x}(\cdot)) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \qquad (1.6.540)$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.6.181. *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0),\overline{B}(0)\right)\in\mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??**, *junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t)=\overline{Q}(0)+\left(\alpha t-\overline{A}(0)\right)^{+}-\left(I-P^{'}\right)M\left(\overline{T}(t)-\overline{B}(0)\right)^{+} \qquad (1.6.541)$$

Definición 1.6.182. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}(t)=0$, *con* $t\geq t_{0}$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)|=1$.

El siguiente resultado se encuentra en [?].

Lema 1.6.18. *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_{0}>0$ *tal que* $\overline{Q}(t)=0$ *para cualquier* $t\geq t_{0}$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|overlinex|=|\overline{Q}(0)|+|\overline{A}(0)|+|\overline{B}(0)|\leq 1$.

Resultados principales

Supuestos necesarios sobre la red

Supuestos 1.6.8. *A1)* $\psi_{1},\ldots,\psi_{K},\eta_{1},\ldots,\eta_{K}$ *son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) Para algún entero $p\geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\psi_{l}(1)^{p+1}\right]<\infty \text{ para } l\in\mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_{k}(1)^{p+1}\right]<\infty \text{ para } k=1,\ldots,K.$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ *es un singleton, y para cada* $k \in \mathcal{A}$*, existe una función positiva* $q_k(x)$ *definida en* $\mathbb{R}_+$*, y un entero* j_k*, tal que*

$$P(\psi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{1.6.542}$$

$$P(\psi_k(1) + \ldots \psi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\, dx0 \text{ y} \tag{1.6.543}$$

$$\int_0^\infty q_k(x)\, dx > 0 \tag{1.6.544}$$

El argumento dado en [?] en el lema **??** se puede aplicar para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños.Entonces la condición $A3$) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 1.6.145. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p*, y para cada condición inicial* $x \in X$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] ds \leq \kappa_p \tag{1.6.545}$$

donde p es el entero dado por A2). Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r \tag{1.6.546}$$

para $r = 1, \ldots, p$ *y* $k = 1, \ldots, K$*.*

iii) EL primer momento converge con razón t^{p-1}*:*

$$\lim_{t\to\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0. \tag{1.6.547}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \tag{1.6.548}$$

$\mathbb{P}$*-c.s., para* $r = 1, \ldots, p$ *y* $k = 1, \ldots, K$*.*

Demostración 1.6.2. *La demostración de este resultado se da aplicando los teoremas* **??**, **??**, **??** *y* **??**

Definiciones Generales

Definimos un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada. Bajo cualquier *preemptive buffer priority* disciplina de servicio, el estado $\mathbb{X}(t)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}(t) = (Q_k(t), A_l(t), B_k(t) : k = 1, 2, \ldots, K, l \in \mathcal{A}) \tag{1.6.549}$$

donde $Q_k(t)$ es la longitud de la cola para los usuarios de la clase k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k(t)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio. Los tiempos de arribo residuales, que son iguales al tiempo que queda hasta que el próximo usuario de la clase k llega, se denotan por $A_k(t)$. Tanto $B_k(t)$ como $A_k(t)$ se suponen continuos por la derecha.

Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x = (q, a, b)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = (q, a, b) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x\| = |q| + |a| + |b|$. En [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho en el espacio de estadio medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, est definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y est adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; $\{P_x, x \in X\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in X$

$$P_x \{\mathbb{X}(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{\mathbb{X}(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la sigma algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(\mathbb{X}(t) \in D)$$

Definición 1.6.183. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_X P^t(x, D) \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.6.184. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

- Si X es Harris recurrente, entonces una única medida invariante π existe ([**?**]).
- Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama *Harris recurrente positiva.*
- Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria y hacemos

  $$P_\pi(\cdot) [= \int_X P_x(\cdot) \pi(dx)$$

  y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, as, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π

Definición 1.6.185. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.[57]

[57]En [**?**] muestran que si $P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ solamente para uno conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris recurrente

Definiciones y Descripción del Modelo

El modelo está compuesto por c colas de capacidad infinita, etiquetadas de 1 a c las cuales son atendidas por s servidores. Los servidores atienden de acuerdo a una cadena de Markov independiente $\left(X_n^i\right)_n$ con $1 \leq i \leq s$ y $n \in \{1, 2, \ldots, c\}$ con la misma matriz de transición $r_{k,l}$ y única medida invariante (p_k). Cada servidor permanece atendiendo en la cola un periodo llamado de visita y determinada por la política de servicio asignada a la cola.

Los usuarios llegan a la cola k con una tasa λ_k y son atendidos a una razón μ_k. Las sucesiones de tiempos de interarribo $(\tau_k(n))_n$, la de tiempos de servicio $\left(\sigma_k^i(n)\right)_n$ y la de tiempos de cambio $\left(\sigma_{k,l}^{0,i}(n)\right)_n$ requeridas en la cola k para el servidor i son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas con distribución general independiente de i, con media $\sigma_k = \frac{1}{\mu_k}$, respectivamente $\sigma_{k,l}^0 = \frac{1}{\mu_{k,l}^0}$, e independiente de las cadenas de Markov $\left(X_n^i\right)_n$. Además se supone que los tiempos de interarribo se asume son acotados, para cada $\rho_k = \lambda_k \sigma_k < s$ para asegurar la estabilidad de la cola k cuando opera como una cola $M/GM/1$.

Políticas de Servicio

Una política de servicio determina el número de usuarios que serán atendidos sin interrupción en periodo de servicio por los servidores que atienden a la cola. Para un solo servidor esta se define a través de una función f donde $f(x,a)$ es el número de usuarios que son atendidos sin interrupción cuando el servidor llega a la cola y encuentra x usuarios esperando dado el tiempo transcurrido de interarribo a. Sea $v(x,a)$ la duración del periodo de servicio para una sola condición inicial (x,a).

Las políticas de servicio consideradas satisfacen las siguientes propiedades:

i) Hay conservación del trabajo, es decir

$$v(x,a) = \sum_{l=1}^{f(x,a)} \sigma(l)$$

con $f(0,a) = v(0,a) = 0$, donde $(\sigma(l))_l$ es una sucesión independiente e idénticamente distribuida de los tiempos de servicio solicitados.

ii) La selección de usuarios para se atendidos es independiente de sus correspondientes tiempos de servicio y del pasado hasta el inicio del periodo de servicio. Así las distribución (f,v) no depende del orden en el cuál son atendidos los usuarios.

iii) La política de servicio es monótona en el sentido de que para cada $a \geq 0$ los números $f(x,a)$ son monótonos en distribución en x y su límite en distribución cuando $x \to \infty$ es una variable aleatoria F^{*0} que no depende de a.

iv) El número de usuarios atendidos por cada servidor es acotado por $f^{min}(x)$ de la longitud de la cola x que además converge monótonamente en distribución a F^* cuando $x \to \infty$

Proceso de Estados

El sistema de colas se describe por medio del proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ como se define a continuación. El estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = (Q(t), P(t), A(t), R(t), C(t))$$

donde

- $Q(t) = (Q_k(t))_{k=1}^c$, número de usuarios en la cola k al tiempo t.
- $P(t) = \left(P^i(t)\right)_{i=1}^s$, es la posición del servidor i.
- $A(t) = (A_k(t))_{k=1}^c$, es el residual del tiempo de arribo en la cola k al tiempo t.
- $R(t) = \left(R_k^i(t), R_{k,l}^{0,i}(t)\right)_{k,l,i=1}^{c,c,s}$, el primero es el residual del tiempo de servicio del usuario atendido por servidor i en la cola k al tiempo t, la segunda componente es el residual del tiempo de cambio del servidor i de la cola k a la cola l al tiempo t.

- $C(t) = \left(C_k^i(t)\right)_{k,i=1}^{c,s}$, es la componente correspondiente a la cola k y al servidor i que está determinada por la política de servicio en la cola k y que hace al proceso $X(t)$ un proceso de Markov.

Todos los procesos definidos arriba se suponen continuos por la derecha.

El proceso X tiene la propiedad fuerte de Markov y su espacio de estados es el espacio producto

$$\mathcal{X} = \mathbb{N}^c \times E^s \times \mathbb{R}_+^c \times \mathbb{R}_+^{cs} \times \mathbb{R}_+^{c^2 s} \times \mathcal{C}$$

donde $E = \{1, 2, \ldots, c\}^2 \cup \{1, 2, \ldots, c\}$ y $\mathcal{C}$ depende de las políticas de servicio.

Introducción

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1. $$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0 \quad (1.6.550)$$

2. $$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N} \quad (1.6.551)$$

   para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m} = r_{j,j^{'}}$
- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^{*} := \sum_{j,j^{'}} p_j r_{j,j^{'}} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right]. \quad (1.6.552)$$

Colas Cíclicas

El *token passing ring* es una estación de un solo servidor con K clases de usuarios. Cada clase tiene su propio regulador en la estación. Los usuarios llegan al regulador con razón α_k y son atendidos con taza μ_k.

La red se puede modelar como un Proceso de Markov con espacio de estados continuo, continuo en el tiempo:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t), B_k^0(t), C(t) : k = 1, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right) \quad (1.6.553)$$

donde $Q_k(t), B_k(t)$ y $A_k(t)$ se define como en **??**, $B_k^0(t)$ es el tiempo residual de cambio de la clase k a la clase $k+1\,(modK)$; $C(t)$ indica el número de servicios que han sido comenzados y/o completados durante la sesión activa del buffer.

Los parámetros cruciales son la carga nominal de la cola k: $\beta_k = \alpha_k/\mu_k$ y la carga total es $\rho_0 = \sum \beta_k$, la media total del tiempo de cambio en un ciclo del token está definido por

$$u^0 = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}\left[\eta_k^0(1)\right] = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\mu_k^0} \quad (1.6.554)$$

El proceso de la longitud de la cola $Q_k^x(t)$ y el proceso de acumulación del tiempo de servicio $T_k^x(t)$ para el buffer k y para el estado inicial x se definen como antes. Sea $T_k^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo

t que el token tarda en cambiar del buffer k al $k+1 \mod K$. Suponga que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.6.555}$$

cuando $|x| \to \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t), \overline{T}^0(t)\right)$ es un flujo límite retrasado del token ring.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado

Proposición 1.6.49. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Resultados Previos

Lema 1.6.19. *El proceso estocástico Φ es un proceso de markov fuerte, temporalmente homogéneo, con trayectorias muestrales continuas por la derecha, cuyo espacio de estados Y es igual a $X \times \mathbb{R}$*

Proposición 1.6.50. *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{1.6.556}$$

Lema 1.6.20. *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t \to \infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{1.6.557}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.6.146. *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.6.558}$$

para $t>0$ *y* $x \in X$*. En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.6.147. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$||P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)||_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{1.6.559}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 1.6.148. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con* $f(x) = f_1(x)$ *se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}||P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)||_f = 0. \tag{1.6.560}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0.$$

Teorema 1.6.149. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea* ν *cualquier distribución de probabilidad en* $(X,\mathcal{B}_X)$*, y* π *la distribución estacionaria de* X*.*

i) Para cualquier $f: X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{1.6.561}$$

$\mathbb{P}$*-c.s.*

ii) Para cualquier $f: X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *con* $\pi(|f|)<\infty$*, la ecuación anterior se cumple.*

Teorema de Estabilidad: Descripción

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1. $$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0 \tag{1.6.562}$$

2. $$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N} \tag{1.6.563}$$

   para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^m = r_{j,j^{'}}$

- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right]. \tag{1.6.564}$$

1.6.49 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega \to \infty} \mathbb{E}[N(\omega)] = \overline{N} > 0$;
2) $\mathbb{E}[N(\omega)] \leq \overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r^m_{j,j'}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta^m_{j,j'}(n)$, con $\delta^m_{j,j'}(n)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta^m_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\left\{p^m_j\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r^m_{j,j'}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p^m_j r^m_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta^m_{j,j'}(i)\right]. \tag{1.6.565}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_k(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;

- $B_m(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_m^0(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right), \tag{1.6.566}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\
\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{1.6.567}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx, \ 0 \leq a < b. \tag{1.6.568}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición ??.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

1.6.50 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x \left\{ f \left(X \circ \theta_t \right) | \mathcal{F}_t \right\} = E_X \left(\tau \right) f \left(X \right),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau \right) \left(w \right) = \left\{ X \left(\tau \left(w \right) + t, w \right), t \geq 0 \right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [**?**, **?**].

Sea $P^t \left(x, D \right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t \left(x, D \right) = P_x \left(X \left(t \right) \in D \right).$$

Definición 1.6.186. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi \left(D \right) = \int_{\mathbb{X}} P^t \left(x, D \right) \pi \left(dx \right),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.6.187. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu \left(D \right) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \left\{ \tau_D < \infty \right\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf \left\{ t \geq 0 : X_t \in D \right\}$.

Nota 1.6.21. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [**?**]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi \left(\cdot \right) = \int_{\mathbf{X}} P_x \left(\cdot \right) \pi \left(dx \right),$$

*y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [**?**].*

Definición 1.6.188. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t \left(x, A \right) \geq \delta \nu \left(A \right),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [**?**]:

Lema 1.6.44 (Lema 3.1, Dai [**?**])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x \left(\tau_B < \infty \right) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x \left[\tau_B \left(\delta \right) \right] < \infty, \tag{1.6.569}$$

donde $\tau_B \left(\delta \right) = inf \left\{ t \geq \delta : X \left(t \right) \in B \right\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 1.6.45 (Lema 3.1, Dai [**?**])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \left\{ x \in \mathbb{X} : |x| \leq k \right\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1.6.150 (Teorema 3.1, Dai [**?**])**.** *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E} |X^x \left(|x| \delta \right)| = 0, \tag{1.6.570}$$

*donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B = \left\{ x \in \mathbb{X} : |x| \leq k \right\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1)$-$A3)$, lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.6.51 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.6.571}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{1.6.572}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{1.6.573}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.6.574}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.6.575}$$

Definición 1.6.189 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1.6.190. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.6.151 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{1.6.576}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.6.191 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 1.6.21 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.6.152 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{1.6.577}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{1.6.578}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{1.6.579}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{1.6.580}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.6.153 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{1.6.581}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

1.6.52 Modelo de Flujo

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Sea x el número de usuarios en la cola esperando por servicio y $N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política dada y fija mientras el servidor permanece dando servicio, entonces se asume que:

(S1.)
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]=\overline{N}>0. \quad (1.6.582)$$

(S2.)
$$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]\leq\overline{N}, \quad (1.6.583)$$

para cualquier valor de x.

El tiempo que tarda un servidor en volver a dar servicio después de abandonar la cola inmediata anterior y llegar a la próxima se llama tiempo de traslado o de cambio de cola, al momento de la n-ésima visita del servidor a la cola j se genera una sucesión de variables aleatorias $\delta_{j,j+1}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con la propiedad de que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]\geq0$.

Se define
$$\delta^{*}:=\sum_{j,j+1}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]. \quad (1.6.584)$$

Los tiempos entre arribos a la cola k, son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos. Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho<1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Para el caso más sencillo podemos definir un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada, el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}\left(t\right)=\left(Q_{k}\left(t\right),A_{l}\left(t\right),B_{k}\left(t\right):k=1,2,\ldots,K,l\in\mathcal{A}\right), \quad (1.6.585)$$

donde $Q_{k}\left(t\right)$ es la longitud de la cola k para los usuarios esperando servicio, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_{k}\left(t\right)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio.

Los tiempos entre arribos residuales, que son el tiempo que queda hasta que el próximo usuario llega a la cola para recibir servicio, se denotan por $A_{k}\left(t\right)$. Tanto $B_{k}\left(t\right)$ como $A_{k}\left(t\right)$ se suponen continuos por la derecha [**?**].

Sea $\mathcal{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$, y sea $x=\left(q,a,b\right)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $\left|q\right|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x=\left(q,a,b\right)\in\mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\left\|x\right\|=\left|q\right|+\left|a\right|+\left|b\right|$. En [**?**] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$\left(\left(\Omega,\mathcal{F}\right),\mathcal{F}_{t},\mathbb{X}\left(t\right),\theta_{t},P_{x}\right)$$

es un proceso de *Borel Derecho* en el espacio de estados medible $\left(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}}\right)$.

Sea $P^{t}\left(x,D\right)$, $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t\geq0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^{t}\left(x,D\right)=P_{x}\left(\mathbb{X}\left(t\right)\in D\right).$$

Definición 1.6.192. *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right)=\int_{X}P^{t}\left(x,D\right)\pi\left(dx\right),$$

para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t\geq0$.

Definición 1.6.193. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf \{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

Definición 1.6.194. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t (x, A) \geq \delta\nu (A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

Nota 1.6.22. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π ([**?**]).*

*ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso a la medida se le llama **Harris recurrente positiva**.*

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria; se define

$$P_\pi (\cdot) = \int_X P_x (\cdot) \pi (dx).$$

Se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, así, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π.

*iv) En [**?**] se muestra que si $P_x \{\tau_D < \infty\} = 1$ incluso para solamente un conjunto pequeño, entonces el proceso de Harris es recurrente.*

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\right) \tag{1.6.586}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{1.6.587}$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([**?**]).

Dada una condición inicial $x \in \mathcal{X}$, $Q_k^x(t)$ es la longitud de la cola k al tiempo t y $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en atender a los usuarios de la cola k. De igual manera se define $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en cambiar de cola para volver a atender a los usuarios.

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t), \tag{1.6.588}$$

$$\overline{T}_{m}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} T_{m}^{x}(|x|t), \tag{1.6.589}$$

$$\overline{T}_{m}^{x,0}(t) = \frac{1}{|x|} T_{m}^{x,0}(|x|t). \tag{1.6.590}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola, al conjunto de todos los posibles flujos límite se le llamará **modelo de flujo**, ([**?**]).

Definición 1.6.195. *Un flujo límite para un sistema de visitas bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_{m}(\cdot), \overline{T}_{m}^{0}(\cdot)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_{1}(t), \ldots, \overline{Q}_{K}(t)\right)$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_{1}(t), \ldots, \overline{T}_{K}(t)\right)$

$$\overline{Q}_{k}(t) = \overline{Q}_{k}(0) + \lambda_{k} t - \sum_{m=1}^{M} \mu_{k} \overline{T}_{m,k}(t) \tag{1.6.591}$$

$$\overline{Q}_{k}(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.6.592}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.6.593}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^{0}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ param} = 1, 2, \ldots, M \tag{1.6.594}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en (**??**)-(**??**) se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Definición 1.6.196. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_{0}$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

1.6.53 Estabilidad de los Sistemas de Visitas Cíclicas

Es necesario realizar los siguientes supuestos, ver ([**?**]) y ([**?**]):

A1) $\xi_{1}, \ldots, \xi_{K}, \eta_{1}, \ldots, \eta_{K}$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\xi_{k}(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y} \\
\mathbb{E}\left[\eta_{k}(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.
\end{aligned}$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_{k}(x)$ definida en $\mathbb{R}_{+}$, y un entero j_{k}, tal que

$$P(\xi_{k}(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{1.6.595}$$

$$P(\xi_{k}(1) + \ldots \xi_{k}(j_{k}) \in dx) \geq q_{k}(x)\, dx0 \text{ y} \tag{1.6.596}$$

$$\int_{0}^{\infty} q_{k}(x)\, dx > 0 \tag{1.6.597}$$

En [**?**] ser da un argumento para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños. Entonces la condición A3) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 1.6.154. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(t)|^p \right] ds \leq \kappa_p \tag{1.6.598}$$

donde p es el entero dado por A2).

Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x \left[Q_k(t)^r \right] = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right] \leq \kappa_r \tag{1.6.599}$$

para $r = 1, \dots, p$ y $k = 1, \dots, K$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x \left[Q(t) \right] - \mathbb{E}_\pi \left[Q(0) \right]| = 0. \tag{1.6.600}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s) \, ds = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right] \tag{1.6.601}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r = 1, \dots, p$ y $k = 1, \dots, K$.

Teorema 1.6.155. *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \text{ con } T \geq 0, \tag{1.6.602}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \left\{ \mathbb{X} \rightarrow \infty \right\} \geq q. \tag{1.6.603}$$

1.6.54 Resultados principales

En el caso particular de un modelo con un solo servidor, $M = 1$, se tiene que si se define

Definición 1.6.197.

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + \max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\overline{N}} \right) \delta^*. \tag{1.6.604}$$

entonces

Teorema 1.6.156. *i) Si $\rho < 1$, entonces la red es estable, es decir el teorema (**??**) se cumple.*

*ii) De lo contrario, es decir, si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, el teorema (**??**).*

1.6.55 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]=\overline{N}>0$;

2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(1\right)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}^{m}r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(i\right)\right]. \tag{1.6.605}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}<1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_{k}\left(t\right)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}\left(t\right)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}\left(t\right)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X\left(t\right)^{T}=\left(Q_{k}\left(t\right),A_{k}\left(t\right),B_{m}\left(t\right),B_{m}^{0}\left(t\right),C_{m}\left(t\right)\right), \tag{1.6.606}$$

para $k=1,\dots,K$ y $m=1,2,\dots,M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X}=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\left(\left\{1,2,\dots,K\right\}\times\left\{1,2,\dots,S\right\}\right)^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_{1},\dots,\xi_{K},\eta_{1},\dots,\eta_{K}$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p\geq1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_{l}\left(1\right)^{p+1}\right]&<\infty\text{ para }l=1,\dots,K\text{ y}\\\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)^{p+1}\right]&<\infty\text{ para }k=1,\dots,K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \quad (1.6.607)$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \quad (1.6.608)$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición ??.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

1.6.56 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 1.6.198. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D)\,\pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.6.199. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 1.6.23. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}\left(\cdot\right)=\int_{\mathbf{X}}P_{x}\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right),$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 1.6.200. *Un conjunto $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t>0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta>0$ tal que*

$$P^{t}\left(x,A\right)\geq\delta\nu\left(A\right),$$

para $x\in D, A\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 1.6.46 (Lema 3.1, Dai [?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_{x}\left(\tau_{B}<\infty\right)\equiv1$ y que para algún $\delta>0$ se cumple que*

$$\sup\mathbb{E}_{x}\left[\tau_{B}\left(\delta\right)\right]<\infty, \tag{1.6.609}$$

donde $\tau_{B}\left(\delta\right)=inf\left\{t\geq\delta:X\left(t\right)\in B\right\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 1.6.47 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B=\left\{x\in\mathbb{X}:|x|\leq k\right\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k>0$.*

Teorema 1.6.157 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^{x}\left(|x|\delta\right)|=0, \tag{1.6.610}$$

donde X^{x} se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B=\left\{x\in\mathbb{X}:|x|\leq k\right\}$ con algún $k>0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.6.57 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x\in\mathbb{X}$, sea

- $Q_{k}^{x}\left(t\right)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^{x}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ para $m=1,2,\ldots,M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x,0}\left(|x|t\right)\right) \tag{1.6.611}$$

para $m=1,2,\ldots,M$, cuando $x\rightarrow\infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}_{m}\left(t\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(t\right)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{1.6.612}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{1.6.613}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.6.614}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}^0_{m,k}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.6.615}$$

Definición 1.6.201 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1.6.202. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.6.158 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t). \tag{1.6.616}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.6.203 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 1.6.22 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.6.159 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{1.6.617}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right]\leq\kappa_{r}, \tag{1.6.618}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)\right]|=0. \tag{1.6.619}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-}c.s. \tag{1.6.620}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.6.160 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_{j}}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_{s}}\right)\delta^{*} \tag{1.6.621}$$

i) Si $\rho<1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho>1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

1.6.58 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N\left(\omega\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]=\overline{N}>0$;

2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(1\right)\right]\geq0$.

- Sea $\left\{p_j^m\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}^m\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j^m r_{j,j'}^m \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}^m(i)\right]. \quad (1.6.622)$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_k(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_m(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_m^0(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right), \quad (1.6.623)$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \quad (1.6.624)$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx, \ 0 \leq a < b. \quad (1.6.625)$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [**?**] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3'$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [**?**, **?**].

1.6.59 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x, x \in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1,$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right) | \mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right),$$

en $\left\{\tau < \infty\right\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right).$$

Definición 1.6.204. *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right) = \int_{\mathbb{X}} P^t\left(x, D\right) \pi\left(dx\right),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.6.205. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$, tal que si $\nu\left(D\right) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\left\{t \geq 0 : X_t \in D\right\}$.

Nota 1.6.24. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi\left(\cdot\right) = \int_{\mathbf{X}} P_x\left(\cdot\right) \pi\left(dx\right),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 1.6.206. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t\left(x, A\right) \geq \delta\nu\left(A\right),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 1.6.48 (Lema 3.1, Dai [?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{1.6.626}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 1.6.49 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1.6.161 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{1.6.627}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.6.60 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.6.628}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M}\mu_k\overline{T}_{m,k}(t), \tag{1.6.629}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{1.6.630}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.6.631}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.6.632}$$

Definición 1.6.207 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right), \overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado* flujo solución *de la disciplina.*

Definición 1.6.208. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.6.162 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right). \tag{1.6.633}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.6.209 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}\left(t\right) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$.*

Lema 1.6.23 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.6.163 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds \leq \kappa_p, \tag{1.6.634}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right] = \mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right] \leq \kappa_{r}, \tag{1.6.635}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)\right]| = 0. \tag{1.6.636}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds = \mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right], \ \mathbb{P}_{x}\text{-c.s.} \tag{1.6.637}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.6.164 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{1.6.638}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{1.6.639}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\, dx, \; 0 \leq a < b. \tag{1.6.640}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

1.6.61 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está

adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x \{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [**?**, **?**].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 1.6.210. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D) \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.6.211. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf \{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 1.6.25. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [**?**]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot) \pi(dx),$$

*y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [**?**].*

Definición 1.6.212. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [**?**]:

Lema 1.6.50 (Lema 3.1, Dai [**?**]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x [\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{1.6.641}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf \{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 1.6.51 (Lema 3.1, Dai [**?**]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1.6.165 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^{x}\left(|x|\delta\right)| = 0, \tag{1.6.642}$$

donde X^{x} se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1)$-$A3)$, lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.6.62 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_{k}^{x}\left(t\right)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^{x}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x,0}\left(|x|t\right)\right) \tag{1.6.643}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}_{m}\left(t\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(t\right)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right) = \overline{Q}_{k}\left(0\right) + \lambda_{k}t - \sum_{m=1}^{M}\mu_{k}\overline{T}_{m,k}\left(t\right), \tag{1.6.644}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{1.6.645}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente,} \tag{1.6.646}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^{0}\left(t\right) + \overline{T}_{m,k}\left(t\right) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.6.647}$$

Definición 1.6.213 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1.6.214. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.6.166 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t). \tag{1.6.648}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.6.215 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 1.6.24 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.6.167 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p \right] ds \leq \kappa_p, \tag{1.6.649}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x \left[Q_k(t)^r \right] = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right] \leq \kappa_r, \tag{1.6.650}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x \left[Q_k(t) \right] - \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0) \right]| = 0. \tag{1.6.651}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right], \; \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{1.6.652}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.6.168 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{1.6.653}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

1.6.63 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(\omega)] = \overline{N} > 0$;

2) $\mathbb{E}[N(\omega)] \leq \overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*} := \sum_{j,j^{'}} p_{j}^{m} r_{j,j^{'}}^{m} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(i)\right]. \tag{1.6.654}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}(n)\right\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}(n)\right\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k} = 1/\mathbb{E}[\xi_{k}(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k} = 1/\mathbb{E}[\eta_{k}(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k} = \lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_{k} < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_{k}(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^{T} = \left(Q_{k}(t), A_{k}(t), B_{m}(t), B_{m}^{0}(t), C_{m}(t)\right), \tag{1.6.655}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^{M} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_l\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k\left(\cdot\right)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k\left(1\right) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{1.6.656}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k\left(i\right) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k\left(x\right) dx, \; 0 \leq a < b. \tag{1.6.657}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

1.6.64 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x, x \in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1,$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right) | \mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right),$$

en $\left\{\tau < \infty\right\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right).$$

Definición 1.6.216. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D)=\int_{\mathbb{X}}P^{t}(x,D)\,\pi(dx),$$

para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t\geq 0$.

Definición 1.6.217. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D)>0$ y $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_{x}\{\tau_{D}<\infty\}\equiv 1,$$

cuando $\tau_{D}=inf\{t\geq 0:X_{t}\in D\}$.

Nota 1.6.26. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}(\cdot)=\int_{\mathbf{X}}P_{x}(\cdot)\,\pi(dx),$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 1.6.218. *Un conjunto $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t>0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta>0$ tal que*

$$P^{t}(x,A)\geq\delta\nu(A),$$

para $x\in D,A\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 1.6.52 (Lema 3.1, Dai [?])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_{x}(\tau_{B}<\infty)\equiv 1$ y que para algún $\delta>0$ se cumple que*

$$\sup\mathbb{E}_{x}[\tau_{B}(\delta)]<\infty, \tag{1.6.658}$$

donde $\tau_{B}(\delta)=inf\{t\geq\delta:X(t)\in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 1.6.53 (Lema 3.1, Dai [?])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B=\{x\in\mathbb{X}:|x|\leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k>0$.*

Teorema 1.6.169 (Teorema 3.1, Dai [?])**.** *Si existe un $\delta>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^{x}(|x|\delta)|=0, \tag{1.6.659}$$

donde X^{x} se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B=\{x\in\mathbb{X}:|x|\leq k\}$ con algún $k>0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.6.65 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.6.660}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{1.6.661}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{1.6.662}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.6.663}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.6.664}$$

Definición 1.6.219 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1.6.220. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.6.170 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{1.6.665}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.6.221 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 1.6.25 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.6.171 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{1.6.666}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x \left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{1.6.667}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x \left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{1.6.668}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{1.6.669}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.6.172 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js}\overline{N}_s}\right) \delta^* \tag{1.6.670}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

1.7 Fuera de tema

Definición 1.7.1. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.7.1}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.7.2. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.7.1. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

1.7.1 Teorema Principal de Renovación

Nota 1.7.2. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.7.1 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.7.1. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.7.3. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T + t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.7.2. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 1.7.2 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

1.7.2 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.7.3. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.7.3. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.7.3. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \quad (1.7.2)$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \quad (1.7.3)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.7.1 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \to \infty. \quad (1.7.4)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.7.4. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.7.4. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) = a, \text{ c.s.} \tag{1.7.5}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.7.6}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.7.2. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.7.7}$$

1.7.3 Procesos de Renovación

Definición 1.7.5. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\left(T_n \leq t\right), \tag{1.7.8}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N\left(t\right)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\left\{N\left(t\right) : t \geq 0\right\}$, denotado por $N\left(t\right)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N\left(t\right)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 1.7.6. *Un proceso puntual $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F\left(0\right) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N\left(t\right)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 1.7.4. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F\left(0\right) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\left(T_n \leq t\right)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

1.7.4 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 1.7.7. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\left(T_n \leq t\right), \tag{1.7.9}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N\left(t\right)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\left\{N\left(t\right) : t \geq 0\right\}$, denotado por $N\left(t\right)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N\left(t\right)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 1.7.8. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.7.5. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.7.4. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 1.7.1 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 1.7.6. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.7.5. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{1.7.10}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{1.7.11}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.7.3 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.7.12}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.7.9. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.7.6. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (1.7.13)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (1.7.14)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.7.4. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.7.15}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.7.10. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.7.5. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 1.7.11. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.7.6. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.7.7. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.7.7. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.7.5 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1]\,,\; t \geq 0,$$

Definición 1.7.12. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s)\,,\; t \geq 0, \tag{1.7.16}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.7.7. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.7.8 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.7.13. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)\,,\;\; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.7.8. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\; t \geq 0.$$

Definición 1.7.14. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t)\,,\; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.7.9. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.7.8. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.7.9. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.7.6 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 1.7.15. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{1.7.17}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.7.10. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.7.10 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 1.7.9. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.7.11 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.7.11. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.7.16. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.7.12. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 1.7.12 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Nota 1.7.10. *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.7.13 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 1.7.13. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 1.7.17. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.7.14. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 1.7.14 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Definición 1.7.18. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 1.7.11. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 1.7.12. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 1.7.13. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.7.19. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 1.7.14. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 1.7.15 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 1.7.20 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t*.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t*, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t*.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$*, la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t*.*

Nota 1.7.15. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n*, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$*. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{1.7.18}$$

Ejemplo 1.7.2 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*, entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$*.*

Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 1.7.21. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 1.7.16. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 1.7.15. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 1.7.16. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 1.7.17. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 1.7.7. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

1.7.5 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 1.7.22. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.7.19}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.7.23. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.7.18. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.7.16. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 1.7.3 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 1.7.19. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.7.17. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{1.7.20}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{1.7.21}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.7.8 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \tag{1.7.22}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.7.24. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.7.18. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (1.7.23)\\ lim_{t\to\infty} t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (1.7.24)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.7.9. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1}Z\left(t\right) \to \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \quad (1.7.25)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.7.25. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.7.17. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 1.7.26. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF\left(t\right), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 1.7.18. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.7.20. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.7.19. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f\left(T_n\right)\right] = \int_{(0,t]} f\left(s\right) d\eta\left(s\right), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f\left(s\right) d\eta\left(s\right), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.7.10 (Identidad de Wald para Renovaciones). *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right],\ t \geq 0,$$

Definición 1.7.27. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{1.7.26}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.7.19. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.7.20 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.7.28. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.7.20. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 1.7.29. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.7.21. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.7.21. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.7.21. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.7.11 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t) + 1\right],\ t \geq 0,$$

Definición 1.7.30. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s),\ t \geq 0, \tag{1.7.27}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.7.22. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.7.22 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 1.7.22. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.7.23 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 1.7.23. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.7.31. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ \text{para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.7.24. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t),\ \text{donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 1.7.24 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 1.7.23. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 1.7.25 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.7.25. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.7.32. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.7.26. *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 1.7.26 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T > t)\right]$*.*

Definición 1.7.33. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 1.7.24. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 1.7.25. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 1.7.26. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_{+}$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.7.34. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 1.7.27. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 1.7.27 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 1.7.35 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 1.7.28. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{1.7.28}$$

Ejemplo 1.7.4 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x+y$.

Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 1.7.36. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 1.7.29. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 1.7.27. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 1.7.28. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación N es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\,ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 1.7.30. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 1.7.12. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

1.7.6 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.7.37. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.7.31. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.7.32. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.7.38 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.7.33. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.7.39. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.7.34. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

1.7.7 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.7.40. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$, *para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 1.7.41. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1.7.42. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$, *es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$, S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 1.7.29. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$. *Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t, *además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,*entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

1.8 De nuevo

1.8.1 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 1.8.1. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.1}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.2. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.1. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.1. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.2. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.1. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \quad (1.8.2)$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \quad (1.8.3)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.1 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.4}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.3. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.2. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.5}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.6}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.2. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1}Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.7}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.4. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.2. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 1.8.5. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.3. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.3. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.3. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.3 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1]\,,\ t \geq 0,$$

Definición 1.8.6. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s)\,,\ t \geq 0, \tag{1.8.8}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.4. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.4 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.7. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)\,,\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.5. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 1.8.8. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t)\,,\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.6. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.4. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.5. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.4 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 1.8.9. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \ t \geq 0, \tag{1.8.9}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.7. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.6 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \ \textit{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 1.8.5. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.7 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.8.8. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \ \textit{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.10. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right], \text{ para } t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.9. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right), \text{ donde } h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 1.8.8 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Nota 1.8.6. *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.9 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 1.8.10. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right), \text{ donde } h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 1.8.11. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right], \text{ para } t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.11. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right), \text{ donde } h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 1.8.10 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

1.8.2 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.12. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.13. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.14. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.11. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

1.8.3 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.15. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 1.8.16. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1.8.17. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 1.8.12. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

1.8.4 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.18. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 1.8.19. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1.8.20. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 1.8.13. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right] \quad = \quad \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]<\infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]<\infty$,*entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t}V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$*.*

1.8.5 Procesos de Renovación

Definición 1.8.21. *Sean* $0\leq T_{1}\leq T_{2}\leq\dots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_{n} *en el intervalo* $\left[0,t\right)$ *es*

$$N\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\left(T_{n}\leq t\right), \tag{1.8.10}$$

para $t\geq0$*.*

Si se consideran los puntos T_{n} como elementos de $\mathbb{R}_{+}$, y $N\left(t\right)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\left\{N\left(t\right):t\geq0\right\}$, denotado por $N\left(t\right)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_{+}$. Los T_{n} son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N\left(t\right)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0<T_{1}<T_{2}<\dots$ casi seguramente.

Definición 1.8.22. *Un proceso puntual* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_{n}=T_{n}-T_{n-1}$, *para* $n\geq1$, *son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F, *donde* $F\left(0\right)=0$ *y* $T_{0}=0$. *Los* T_{n} *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_{n} *son los tiempos de inter-renovación, y* $N\left(t\right)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $\left[0,t\right)$

Nota 1.8.7. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F, *con* $F\left(0\right)=0$, *para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_{1},\xi_{2},\dots$ *definidas en este con distribución* F. *Entonces las otras cantidades son* $T_{n}=\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}$ *y* $N\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\left(T_{n}\leq t\right)$, *donde* $T_{n}\rightarrow\infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

1.8.6 Teorema Principal de Renovación

Nota 1.8.8. *Una función* $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h\left(t\right)\geq0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h\left(t\right)|\leq b\left(t\right)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 1.8.14 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h\left(t\right)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 1.8.12. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.23. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.13. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 1.8.15 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

1.8.7 Función de Renovación

Definición 1.8.24. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s), \; t \geq 0, \tag{1.8.11}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.14. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.16 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

1.8.8 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.15. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.9. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.17. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} &(1.8.12)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} &(1.8.13)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 1.8.5 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.14}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.25. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.18. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} &(1.8.15)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} &(1.8.16)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.6. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.17}$$

1.8.9 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.26. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.16. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 1.8.27. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.17. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.10. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.19. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.7 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

1.8.10 Procesos de Renovación

Definición 1.8.28. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.18}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.29. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.11. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

1.8.11 Procesos Regenerativos

Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [?]

Definición 1.8.30 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.12. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots$, que satisfacen la propiedad deseada [?].*

Nota 1.8.13. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 1.8.31. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.14. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 1.8.15. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 1.8.16. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 1.8.17. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.32. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.33. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.34. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.20. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 1.8.8. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \to \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\,ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \to \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

1.8.12 Procesos de Renovación

Definición 1.8.35. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.19}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.36. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.18. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

1.8.13 Teorema Principal de Renovación

Nota 1.8.19. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.21 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \to \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 1.8.18. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.37. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right], \text{ para } t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.19. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right), \text{ donde } h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 1.8.22 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|: t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

1.8.14 Función de Renovación

Definición 1.8.38. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H\left(t\right)=h\left(t\right)+\int_{\left[0,t\right]}H\left(t-s\right)dF\left(s\right), \ t\geq 0, \tag{1.8.20}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 1.8.20. *La función $U\star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.23 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U\left(t\right)\rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t\rightarrow\infty.$$

1.8.15 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.39. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}\left(t\right), \ t\geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t)=\mathbb{1}(t\geq 0)$.

Proposición 1.8.21. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t>0$, y es $U^{'}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right)>N\left(t-\right)\right\}=0, \ t\geq 0.$$

Definición 1.8.40. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right)=\int_{\mathbb{R}_{+}}e^{-\alpha t}dF\left(t\right), \ \alpha\geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.22. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.20. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.24. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.9 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1]\,,\; t \geq 0,$$

1.8.16 Procesos de Renovación

Definición 1.8.41. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)\,, \tag{1.8.21}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.42. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.21. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Definición 1.8.43. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.22}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 1.8.44. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.22. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.23. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 1.8.1 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 1.8.23. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.25. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \; c.s. \tag{1.8.23}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \; c.s. \tag{1.8.24}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.10 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \; c.s. \; cuando \; t \rightarrow \infty. \tag{1.8.25}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.45. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.26. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \; c.s. \tag{1.8.26}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \; c.s. \tag{1.8.27}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.11. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \; c.s. \; cuando \; t \rightarrow \infty. \tag{1.8.28}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.46. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.24. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1.8.47. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.25. *La Transformada de Laplace* $\hat{U}(\alpha)$ *y* $\hat{F}(\alpha)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.

Nota 1.8.24. *Un proceso de renovación* $N(t)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, *para* $t \geq 0$.

Teorema 1.8.27. *Sea* $N(t)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ *es finita para cada* t. *Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N(t)$ *tal que* $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, *independiente de* n. *Entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.12 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación* $N(t)$,

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 1.8.48. *Sea* $h(t)$ *función de valores reales en* $\mathbb{R}$ *acotada en intervalos finitos e igual a cero para* $t < 0$ *La ecuación de renovación para* $h(t)$ *y la distribución* F *es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{1.8.29}$$

donde $H(t)$ *es una función de valores reales. Esto es* $H = h + F \star H$. *Decimos que* $H(t)$ *es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para* $t < 0$.

Proposición 1.8.26. *La función* $U \star h(t)$ *es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.28 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.49. *La función de renovación asociada con la distribución* F, *del proceso* $N(t)$, *es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.27. *Supóngase que la distribución de inter-renovación* F *tiene densidad* f. *Entonces* $U(t)$ *también tiene densidad, para* $t > 0$, *y es* $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. *Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 1.8.50. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right)=\int_{\mathbb{R}_{+}}e^{-\alpha t}dF\left(t\right),\ \alpha\geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F}\left(\alpha\right)^{n}=\frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 1.8.28. *La Transformada de Laplace $\hat{U}\left(\alpha\right)$ y $\hat{F}\left(\alpha\right)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}\left(\alpha\right)=\frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$.*

Nota 1.8.25. *Un proceso de renovación $N\left(t\right)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U\left(t\right)\right]=\lambda t$, para $t\geq 0$.*

Teorema 1.8.29. *Sea $N\left(t\right)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta\left(t\right)=\mathbb{E}\left[N\left(\right)\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N\left(\right)}f\left(T_n\right)\right]=\int_{\left(0,t\right]}f\left(s\right)d\eta\left(s\right),\ t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1,X_2,\ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N\left(t\right)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n|T_n=s\right]=f\left(s\right)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N\left(t\right)}X_n\right]=\int_{\left(0,t\right]}f\left(s\right)d\eta\left(s\right),\ t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.13 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N\left(t\right)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N\left(t\right)+1}\right]=\mu\mathbb{E}\left[N\left(t\right)+1\right],\ t\geq 0,$$

Definición 1.8.51. *Sea $h\left(t\right)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h\left(t\right)$ y la distribución F es*

$$H\left(t\right)=h\left(t\right)+\int_{\left[0,t\right]}H\left(t-s\right)dF\left(s\right),\ t\geq 0, \tag{1.8.30}$$

donde $H\left(t\right)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H\left(t\right)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 1.8.29. *La función $U\star h\left(t\right)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.30 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U\left(t\right)\rightarrow 1/\mu,\ cuando\ t\rightarrow\infty.$$

Nota 1.8.26. *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h\left(t\right)\geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $\left|h\left(t\right)\right|\leq b\left(t\right)$, donde b es DRI.*

Teorema 1.8.31 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 1.8.30. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\text{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 1.8.52. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\text{ para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.31. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\text{ donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 1.8.32 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Nota 1.8.27. *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 1.8.33 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 1.8.32. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\text{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 1.8.53. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\text{ para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.33. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\text{ donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 1.8.34 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Definición 1.8.54. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.28. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.8.29. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 1.8.30. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.55. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.31. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 1.8.35 (Procesos Regenerativos). *Suponga que el proceso*

Definición 1.8.56 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- *$A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- *$B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- *$L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 1.8.32. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{1.8.31}$$

Ejemplo 1.8.2 (Tiempos de recurrencia Poisson). *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (??) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 1.8.33. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 1.8.57. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 1.8.34. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 1.8.34. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 1.8.36. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

- *i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.*
- *ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.*
- *iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,*
- *iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$*

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 1.8.35. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 1.8.14. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Procesos Regenerativos

Nota 1.8.36. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.8.37. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.58 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

- *i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$*
- *ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$*

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 1.8.59. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.38. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.60. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.39. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.8.40. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.61 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.41. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.62. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty}\leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.42. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

1.8.17 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t)\in A|X_1+X_2+\cdots+X_{R(t)}=s,\{V(\tau),\tau<s\}\right\}=\mathbb{P}\left\{V(t-s)\in A|X_1>t-s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.63. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t)\in A\}=\frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty}\mathbb{P}\{V(t+x)\in A|X>x\}(1-F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.64. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.65. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.37. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{X} V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t}V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$*.*

1.8.18 Output Process and Regenerative Processes

En Sigman, Thorison y Wolff [?] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_{1}\leq\tau_{2}\leq\cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_{1}, donde $R_{j}=\tau_{j}-\tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$, y proceso estocástico $X=\left\{X\left(t\right):t\geq0\right\}$ con espacio de estados $\left(S,\mathcal{R}\right)$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 1.8.35. *Si existe una variable aleatoria no negativa* R_{1} *tal que* $\theta_{R1}X=_{D}X$*, entonces* $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ *puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias* $R=\left\{R_{k}:k\geq1\right\}$*, tal que para* $k\geq1$*,*

$$\theta_{k}\left(X,R\right)=_{D}\left(X,R\right).$$

Además, para $k\geq1$*,* $\theta_{k}R$ *es condicionalmente independiente de* $\left(X,R_{1},\dots,R_{k}\right)$*, dado* $\theta_{\tau k}X$*.*

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 1.8.38. *Para el sistema de espera* $M/G/1/L$ *con disciplina FIFO, el proceso* $\boldsymbol{I}$ *es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) Los tiempos de servicio son identicamente cero;
  b) $L=0$*, para cualquier proceso de servicio* S*;*
  c) $L=1$ *y* $G=D$*;*
  d) $L=\infty$ *y* $G=M$*.*

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\left\{T_{n+1}-T_{n}\leq t\right\}$ *son*

  a) $1-e^{-\lambda t}$*,* $t\geq0$*;*
  b) $1-e^{-\lambda t}*F\left(t\right)$*,* $t\geq0$*;*
  c) $1-e^{-\lambda t}*\mathbb{1}_{d}\left(t\right)$*,* $t\geq0$*;*
  d) $1-e^{-\lambda t}*F\left(t\right)$*,* $t\geq0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1\leq L\leq\infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_{n} y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G=D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.

- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 1.8.39. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.

  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$

  d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 1.8.40. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

1.8.19 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [?]

Definición 1.8.66 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.43. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [?].*

Nota 1.8.44. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 1.8.67. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.45. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 1.8.46. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 1.8.47. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 1.8.48.

a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.68. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.69. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.70. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.41. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Corolario 1.8.15. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\,ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 1.8.71. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.32}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.72. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.49. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 1.8.50. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.42 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 1.8.36. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.73. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.37. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 1.8.43 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.38. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.51. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.44. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.33}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.34}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.16 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.35}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t): t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.74. *Para el proceso $\{Z(t): t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.45. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.36}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.37}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.17. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.38}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.39. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.52. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.46. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n &= \mu, \ c.s. && (1.8.39)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \ c.s. && (1.8.40)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.18 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \quad (1.8.41)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.75. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.47. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a, \ c.s. && (1.8.42)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \ c.s. && (1.8.43)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.19. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \quad (1.8.44)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.40. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.53. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.48. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.45}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.46}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.20 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.47}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.76. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.49. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.48}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.49}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.21. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.50}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.41. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.54. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.50. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.51}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.52}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.22 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.53}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.77. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.51. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.54}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.55}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.23. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.56}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.42. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.55. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.52. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.57}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.58}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 1.8.24 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.59}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.78. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.53. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (1.8.60)$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (1.8.61)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.25. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.8.62)$$

Definición 1.8.79. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s), \; t \geq 0, \quad (1.8.63)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.43. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.54 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.80. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.44. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1.8.81. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.45. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.56. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.55. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.26 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 1.8.82. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.64}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.83. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.57. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 1.8.84. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.65}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.85. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 1.8.58. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \ t \ < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.46. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 1.8.3 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 1.8.59. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.56. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \ c.s. \quad (1.8.66) \\ lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \ c.s. \quad (1.8.67) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.27 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.68}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.86. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.57. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \quad (1.8.69)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (1.8.70) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.28. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.71}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.87. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.47. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 1.8.88. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.48. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.60. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.58. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.29 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t)+1], \; t \geq 0,$$

Definición 1.8.89. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{1.8.72}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.49. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.59 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.90. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \;\; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.50. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1.8.91. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.51. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.61. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.60. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.30 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 1.8.92. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{1.8.73}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.52. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.61 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 1.8.62. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.62 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.8.53. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.93. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right], \textit{ para } t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.54. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t), \textit{ donde } h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 1.8.63 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\left\{|X(t)|:t\leq T\right\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Nota 1.8.63. *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.64 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds.$$

Proposición 1.8.55. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t), \textit{ donde } h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 1.8.94. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right], \textit{ para } t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.56. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t), \textit{ donde } h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 1.8.65 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\left\{|X(t)|:t\leq T\right\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Definición 1.8.95. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.64. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.8.65. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 1.8.66. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.96. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.67. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 1.8.66 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 1.8.97 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 1.8.68. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t + y) - N((t - x)) = 0\} \tag{1.8.74}$$

Ejemplo 1.8.4 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 1.8.69. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 1.8.98. *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 1.8.70. *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 1.8.57. *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 1.8.67. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N *es estacionario.*

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 1.8.71. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 1.8.31. *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 1.8.72. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 1.8.73. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.99 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 1.8.100. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.74. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t): t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.101. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)): t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t): 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.75. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f: \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.8.76. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.102 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t): t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1): t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t): t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1): t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t): t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.77. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.103. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}\left[R_1\right]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.78. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.104. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.105. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.106. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.68. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.107. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 1.8.108. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1.8.109. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 1.8.69. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$[58], se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i\left(z\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (**??**): $n \rightarrow t-\tau_i\left(m\right)$, $T \rightarrow \overline{\tau}_i\left(m\right)-\tau_i\left(m\right)$, $L_n \rightarrow L_i\left(t\right)$ y $F\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right] \rightarrow F_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{L_i\tau_i(m)}\right]$, se puede ver que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)} \tag{1.8.75}$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i\left(t\right)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i\left(z\right)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i\left(z\right)}\\
&= \frac{1-I_i\left[P_i\left(z\right)\right]}{1-P_i\left(z\right)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Q_i\left(z\right) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right]+\mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\left\{z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)}+\frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}\right\}
\end{aligned}$$

[58]En Stidham[**?**] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1$.

es decir

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1-z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \tag{1.8.76}$$

Teorema 1.8.70. *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t, $A_j(t) = \{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\}$ para algún tiempo $t \geq 0$ y Q_j la cola j-ésima en la RSVC, para $j = 1, 2, 3, 4$. Existe un intervalo $I \neq \emptyset$ tal que para $T^* \in I$, tal que $\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(Tt^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I\} > 0$.*

Proof. Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.

Sea $n > 0$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1(n) > 0$, entonces tenemos que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1(n)$.

Definamos el intervalo $I_1 \equiv [\overline{\tau}_1(n), \tau_2(n)]$ de longitud $\xi_1 = r_1(n)$. Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$\mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)}. \tag{1.8.77}$$

Por otra parte, para la cola Q_2, el tiempo $\overline{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\overline{\tau}_2(n-1)) = 0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n. Entonces tenemos un sgundo intervalo $I_2 \equiv [\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)}, \tag{1.8.78}$$

donde $\xi_2(n) = \tau_2(n) - \overline{\tau}_2(n-1)$.

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} &= \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\} \\
&\geq \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} \\
&= e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]}.
\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]} > 0. \tag{1.8.79}$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC, se afirma que existe $m > 0$ tal que $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$.

Para Q_3 sea $I_3 = [\overline{\tau}_3(m), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_3(m) = r_3(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(n)}. \tag{1.8.80}$$

Análogamente que como se hizo para Q_2, tenemos que para Q_4 se tiene el intervalo $I_4 = [\overline{\tau}_4(m-1), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_4(m) = \tau_4(m) - \overline{\tau}_4(m-1)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} = e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(n)}. \tag{1.8.81}$$

Al igual que para el primer sistema, dado que $I_3(m) \subset I_4(m)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\xi_3(m) \leq \xi_4(m) &\Leftrightarrow -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\
-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m) &\Leftrightarrow e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} \\
\mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} &\geq \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\}
\end{aligned}$$

Entonces, dado que los eventos A_3 y A_4 son independientes, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t) \mid t \in I_3(m)\right\} &= \mathbb{P}\left\{A_3(t) \mid t \in I_3(m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(t) \mid t \in I_3(m)\right\} \\ &\geq \mathbb{P}\left\{A_3(t) \mid t \in I_3(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(t) \mid t \in I_4(n)\right\} \\ &= e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)} e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} = e^{-\left[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)\right]}.\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t) \mid t \in I_3(m)\right\} = e^{-\left[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)\right]} > 0. \tag{1.8.82}$$

Por construcción se tiene que $I(n,m) \equiv I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$,entonces en particular se tienen las contenciones $I(n,m) \subseteq I_1(n)$ y $I(n,m) \subseteq I_3(m)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m} \equiv \ell(I(n,m))$ tenemos que

$$\xi_{n,m} \leq \xi_1(n) \text{ y } \xi_{n,m} \leq \xi_3(m) \text{ entonces } -\xi_{n,m} \geq -\xi_1(n) \text{ y } -\xi_{n,m} \leq -\xi_3(m)$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{array}{ll} -\tilde{\mu}_1 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_1 \xi_1(n), & -\tilde{\mu}_2 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_2(n), \\ -\tilde{\mu}_3 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_3 \xi_3(m), & -\tilde{\mu}_4 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m). \end{array}$$

Sea $T^* \in I_{n,m}$, entonces dado que en particular $T^* \in I_1(n)$ se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2, en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4, es decir, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$, $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I_{n,m}$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4, por lo tanto tenemos que

$$\begin{array}{l} \mathbb{P}\left\{A_1(T^*), A_2(T^*), A_3(T^*), A_4(T^*) \mid T^* \in I_{n,m}\right\} = \prod_{j=1}^{4} \mathbb{P}\left\{A_j(T^*) \mid T^* \in I_{n,m}\right\} \\ \geq \mathbb{P}\left\{A_1(T^*) \mid T^* \in I_1(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_2(T^*) \mid T^* \in I_2(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_3(T^*) \mid T^* \in I_3(m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(T^*) \mid T^* \in I_4(m)\right\} \\ = e^{-\mu_1 \xi_1(n)} e^{-\mu_2 \xi_2(n)} e^{-\mu_3 \xi_3(m)} e^{-\mu_4 \xi_4(m)} = e^{-\left[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n) + \tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)\right]} > 0. \end{array} \tag{1.8.83}$$

□

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [?] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 1.8.71. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\ var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right) 2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2 (1-\delta)^{-1}.\end{aligned}$$

  Teorema 1.8.72. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 1.8.73. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

En Sigman, Thorison y Wolff [?] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 1.8.58. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k (X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 1.8.74. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) Los tiempos de servicio son identicamente cero;
  b) $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;
  c) $L = 1$ y $G = D$;
  d) $L = \infty$ y $G = M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;
  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;
  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 1.8.75. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

a) $s = \infty$

b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*

c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para* $L < \infty$

d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 1.8.76. *En cualquier sistema de colas* $GI/G/1/L$ *con* $1 \leq L < \infty$ *y distribución de interarribos* A *y distribución de los tiempos de servicio* B*, tal que* $A(0) = 0$*,* $A(t)(1 - B(t)) > 0$ *para alguna* $t > 0$ *y* $B(t)$ *para toda* $t > 0$*, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [?] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 1.8.77. *En un sistema estacionario* $GI/M/1$ *los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right) 2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2 (1-\delta)^{-1}.
\end{aligned}$$

  Teorema 1.8.78. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario* $GI/M/1$ *es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 1.8.79. *Los intervalos de interpartida* $\{D_n\}$ *de un sistema* $M/G/1$ *estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo* $M/M/1$.

Sean Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 en una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC). Supongamos que cada una de las colas es del tipo $M/M/1$ con tasa de arribo μ_i y que la transferencia de usuarios entre los dos sistemas ocurre entre $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$ con respectiva tasa de arribo igual a la tasa de salida $\hat{\mu}_i = \mu_i$, esto se sabe por lo desarrollado en la sección anterior.

Consideremos, sin pérdida de generalidad como base del análisis, la cola Q_1 además supongamos al servidor lo comenzamos a observar una vez que termina de atender a la misma para desplazarse y llegar a Q_2, es decir al tiempo τ_2.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, ciclo del servidor en que regresa a Q_1 para dar servicio y atender conforme a la política exhaustiva, entonces se tiene que $\overline{\tau}_1(n)$ es el tiempo del servidor en el sistema 1 en que termina de dar servicio a todos los usuarios presentes en la cola, por lo tanto se cumple que $L_1(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, entonces el servidor para llegar a Q_2 incurre en un tiempo de traslado r_1 y por tanto se cumple que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1$. Dado que los tiempos entre arribos son exponenciales se cumple que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n) + r_1\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_1 r_1}, \\
\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n) + r_1\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_2 r_1}.
\end{aligned}$$

El evento que nos interesa consiste en que no haya arribos desde que el servidor abandonó Q_2 y regresa nuevamente para dar servicio, es decir en el intervalo de tiempo $\left[\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)\right]$. Entonces, si hacemos

$$\begin{aligned}\varphi_1(n) &\equiv \overline{\tau}_1(n) + r_1 = \overline{\tau}_2(n-1) + r_1 + r_2 + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n)\\ &= \overline{\tau}_2(n-1) + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r,,\end{aligned}$$

y longitud del intervalo

$$\begin{aligned}\xi &\equiv \overline{\tau}_1(n) + r_1 - \overline{\tau}_2(n-1) = \overline{\tau}_2(n-1) + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r - \overline{\tau}_2(n-1)\\ &= \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r.\end{aligned}$$

Entonces, determinemos la probabilidad del evento no arribos a Q_2 en $[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]$:

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_2\xi}. \tag{1.8.84}$$

De manera análoga, tenemos que la probabilidad de no arribos a Q_1 en $[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]$ esta dada por

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_1\xi}, \tag{1.8.85}$$

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_2\xi}. \tag{1.8.86}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ y } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\}\\ &= \mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\}\\ &\times\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_1\xi}e^{-\tilde{\mu}_2\xi} = e^{-\tilde{\mu}\xi}.\end{aligned} \tag{1.8.87}$$

Para el segundo sistema, consideremos nuevamente $\overline{\tau}_1(n) + r_1$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $m > 0$ tal que $\overline{\tau}_3(m) < \overline{\tau}_1 + r_1 < \tau_4(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_3(m), \overline{\tau}_1(n) + r_1]\} = e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3}, \tag{1.8.88}$$

donde

$$\xi_3 = \overline{\tau}_1(n) + r_1 - \overline{\tau}_3(m) = \overline{\tau}_1(n) - \overline{\tau}_3(m) + r_1, \tag{1.8.89}$$

mientras que para Q_4 al igual que con Q_2 escribiremos $\tau_4(m)$ en términos de $\overline{\tau}_4(m-1)$:
$\varphi_2 \equiv \tau_4(m) = \overline{\tau}_4(m-1) + r_4 + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) + r_3 = \overline{\tau}_4(m-1) + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) + \hat{r}$, además,
$\xi_2 \equiv \varphi_2(m) - \overline{\tau}_1 - r_1 = \overline{\tau}_4(m-1) + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) - \overline{\tau}_1(n) + \hat{r} - r_1$.
Entonces

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_4 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]\} = e^{-\tilde{\mu}_4\xi_2}, \tag{1.8.90}$$

mientras que para Q_3 se tiene que

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]\} = e^{-\tilde{\mu}_3\xi_2} \tag{1.8.91}$$

Por tanto

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_3 \wedge Q_4 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]\} = e^{-\hat{\mu}\xi_2} \tag{1.8.92}$$

donde $\hat{\mu} = \tilde{\mu}_3 + \tilde{\mu}_4$.

Ahora, definamos los intervalos $\mathcal{I}_1 = [\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_1(n)]$ y $\mathcal{I}_2 = [\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]$, entonces, sea $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ el intervalo donde cada una de las colas se encuentran vacías, es decir, si tomamos $T^* \in \mathcal{I}$, entonces $L_1(T^*) = L_2(T^*) = L_3(T^*) = L_4(T^*) = 0$.

Ahora, dado que por construcción $\mathcal{I} \neq \emptyset$ y que para $T^* \in \mathcal{I}$ en ninguna de las colas han llegado usuarios, se tiene que no hay transferencia entre las colas, por lo tanto, el sistema 1 y el sistema 2 son condicionalmente independientes en $\mathcal{I}$, es decir

$$\mathbb{P}\{L_1(T^*), L_2(T^*), L_3(T^*), L_4(T^*) | T^* \in \mathcal{I}\} = \prod_{j=1}^{4} \mathbb{P}\{L_j(T^*)\}, \tag{1.8.93}$$

para $T^* \in \mathcal{I}$.

Definición 1.8.110 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.79. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [**?**].*

Nota 1.8.80. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 1.8.111. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.81. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 1.8.82. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 1.8.83. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 1.8.84. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.112. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.113. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.114. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.80. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] \;=\; \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 1.8.32. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 1.8.115. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.94}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 1.8.116. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.85. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 1.8.86. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.81 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \to \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.8.59. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.117. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T + t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.60. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 1.8.82 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &=& 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.61. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.87. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.83. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.95}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.96}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.33 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.97}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.118. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.84. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (1.8.98)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (1.8.99)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.34. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (1.8.100)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.62. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.88. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.85. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (1.8.101)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (1.8.102)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.35 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.103}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.119. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.86. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (1.8.104)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.105) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.36. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.106}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq &\; t \; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.63. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.89. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.87. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (1.8.107)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.108)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.37 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$
t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.109}
$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.120. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$
M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|
$$

Teorema 1.8.88. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (1.8.110)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.111)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.38. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z(T_1) - Z(T_0)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.112}
$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\
T_{N(t)} \leq &\quad t \quad < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N(T_n) = n$, y

$$
N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}
$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$
P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)
$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.64. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.90. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.89. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu,\ c.s. &(1.8.113)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu,\ c.s. &(1.8.114)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N\,/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.39 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t \rightarrow \infty. \tag{1.8.115}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.121. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.90. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a,\ c.s. &(1.8.116)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu,\ c.s. &(1.8.117)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.40. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]},\ c.s.\ cuando\ t \rightarrow \infty. \tag{1.8.118}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq \quad t &< T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.65. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.91. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.91. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.119}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.120}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.41 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.121}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.122. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.92. *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$, *donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (1.8.122)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.123)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 1.8.42. *Si* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación, y* $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, *para* $n \geq 1$, *son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (1.8.124)
$$

Definición 1.8.123. *Sea* $h\left(t\right)$ *función de valores reales en* $\mathbb{R}$ *acotada en intervalos finitos e igual a cero para* $t < 0$ *La ecuación de renovación para* $h\left(t\right)$ *y la distribución* F *es*

$$
H\left(t\right) = h\left(t\right) + \int_{\left[0,t\right]} H\left(t-s\right) dF\left(s\right), \ t \geq 0, \qquad (1.8.125)
$$

donde $H\left(t\right)$ *es una función de valores reales. Esto es* $H = h + F \star H$. *Decimos que* $H\left(t\right)$ *es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para* $t < 0$.

Proposición 1.8.66. *La función* $U \star h\left(t\right)$ *es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.93 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$
t^{-1} U\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.
$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.124. *La función de renovación asociada con la distribución* F, *del proceso* $N\left(t\right)$, *es*

$$
U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \ t \geq 0,
$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = \mathbb{1}\left(t \geq 0\right)$.

Proposición 1.8.67. *Supóngase que la distribución de inter-renovación* F *tiene densidad* f. *Entonces* $U\left(t\right)$ *también tiene densidad, para* $t > 0$, *y es* $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$. *Además*

$$
\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \ t \geq 0.
$$

Definición 1.8.125. *La Transformada de Laplace-Stieljes de* F *está dada por*

$$
\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_{+}} e^{-\alpha t} dF\left(t\right), \ \alpha \geq 0.
$$

Entonces

$$
\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}\left(\alpha\right)}.
$$

Proposición 1.8.68. *La Transformada de Laplace* $\hat{U}\left(\alpha\right)$ *y* $\hat{F}\left(\alpha\right)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}\left(\alpha\right) = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$.

Nota 1.8.92. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.94. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \dots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.43 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 1.8.126. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.126}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 1.8.127. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.93. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 1.8.128. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.127}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 1.8.129. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.94. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.69. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 1.8.5 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 1.8.95. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.95. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (1.8.128) \\ lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.129) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.44 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.130}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.130. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.96. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.131}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.132}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.45. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1}Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.133}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.131. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.70. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 1.8.132. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.71. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.96. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.97. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.46 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 1.8.133. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{1.8.134}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.72. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.98 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu,\ cuando\ t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.134. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.73. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 1.8.135. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.74. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.97. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.99. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n|T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.47 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 1.8.136. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{1.8.135}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.75. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.100 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 1.8.98. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.101 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.8.76. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.137. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.77. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 1.8.102 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Nota 1.8.99. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.103 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 1.8.78. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.138. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.79. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 1.8.104 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Definición 1.8.139. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 1.8.100. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 1.8.101. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 1.8.102. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.140. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 1.8.103. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 1.8.105 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 1.8.141 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t*.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t*, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t*.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$*, la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t*.*

Nota 1.8.104. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n*, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$*. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{1.8.136}$$

Ejemplo 1.8.6 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*, entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$*.*

Nota 1.8.105. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 1.8.142. *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 1.8.106. *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 1.8.80. *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 1.8.106. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N *es estacionario.*

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 1.8.107. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 1.8.48. *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 1.8.108. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 1.8.109. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.143 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 1.8.144. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.110. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.145. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.111. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Nota 1.8.112. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.146 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.113. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.147. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.114. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.148. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.149. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.150. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.107. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

1.8.20 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [?]

Definición 1.8.151 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.115. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [?].*

Nota 1.8.116. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 1.8.152. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.117. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 1.8.118. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 1.8.119. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 1.8.120. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

1.8.21 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.153. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.154. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.155. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.108. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 1.8.49. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 1.8.156. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.137}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.157. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.121. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 1.8.122. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.109 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.8.81. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.158. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.82. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 1.8.110 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$.

1.8.22 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.83. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.123. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.111. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \; c.s. \tag{1.8.138}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \; c.s. \tag{1.8.139}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.50 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \; c.s. \; cuando \; t \rightarrow \infty. \tag{1.8.140}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.159. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.112. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \ c.s. && (1.8.141)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \ c.s. && (1.8.142)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.51. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \quad (1.8.143)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 1.8.84. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.124. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 1.8.113. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \ c.s. && (1.8.144)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \ c.s. && (1.8.145)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.52 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.146}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.160. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.114. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.147}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.148}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.53. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.149}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \ t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.85. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.125. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.115. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (1.8.150)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (1.8.151) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.54 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.8.152)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.161. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.116. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (1.8.153)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (1.8.154) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.55. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.8.155)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.86. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.126. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.117. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.156}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.157}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.56 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.158}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.162. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.118. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.159}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.160}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.57. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.161}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \;\; t \; < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.87. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.127. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.119. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (1.8.162)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.163)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.58 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.164}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.163. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.120. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (1.8.165)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.166)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.59. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.167}$$

1.8.23 Función de Renovación

Definición 1.8.164. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{1.8.168}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.88. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.121 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.165. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.89. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1.8.166. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.90. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.128. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.122. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.60 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right], \, t \geq 0,$$

Definición 1.8.167. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\left(T_n \leq t\right), \tag{1.8.169}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 1.8.168. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.129. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

1.8.24 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 1.8.169. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\left(T_n \leq t\right), \tag{1.8.170}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 1.8.170. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.130. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.91. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 1.8.7 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 1.8.131. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.123. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.171}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.172}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.61 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.173}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.171. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.124. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.174}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.175}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.62. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z(T_1) - Z(T_0)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.176}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.172. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.92. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 1.8.173. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.93. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.132. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.125. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.63 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right], \; t \geq 0,$$

Definición 1.8.174. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{1.8.177}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 1.8.94. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.126 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.175. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \;\; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.95. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t>0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1.8.176. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_{+}} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^{n} = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.96. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.133. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.127. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.64 (Identidad de Wald para Renovaciones). *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right], \; t \geq 0,$$

Definición 1.8.177. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{1.8.178}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.97. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.128 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 1.8.134. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.129 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.8.98. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.178. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.99. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 1.8.130 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 1.8.135. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 1.8.131 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds.$$

Proposición 1.8.100. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t<0$ *puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 1.8.179. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.101. *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}\,(T>t)\right].$$

Teorema 1.8.132 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}\,(T>t)\right]$*.*

Definición 1.8.180. *Para el proceso* $\{(N(t),X(t)):t\geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1},T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n=(\xi_n,\{X(T_{n-1}+t):0\leq t<\xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 1.8.136. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t)=f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f:\tilde{S}\rightarrow S$*.*

Nota 1.8.137. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 1.8.138. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t):t\geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t):t\geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_{+}$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n=T_n-T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.181. *Para el proceso* $\{(N(t),X(t)):t\geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1},T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n=(\xi_n,\{X(T_{n-1}+t):0\leq t<\xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 1.8.139. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 1.8.133 (Procesos Regenerativos). *Suponga que el proceso*

Definición 1.8.182 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 1.8.140. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{1.8.179}$$

Ejemplo 1.8.8 (Tiempos de recurrencia Poisson). *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 1.8.183. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 1.8.141. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 1.8.102. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 1.8.134. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 1.8.142. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 1.8.65. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

1.8.25 Procesos Regenerativos

Nota 1.8.143. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.8.144. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.184 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 1.8.185. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.145. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.186. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.146. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.8.147. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.187 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.148. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.188. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.149. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.189. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t + x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.190. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1.8.191. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 1.8.135. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.192. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t + x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 1.8.193. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1.8.194. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 1.8.136. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}(0)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\, ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t} V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Para $\{X(t): t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_{+}$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_{n}=T_{n}-T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

1.8.26 Puntos de Renovación

Para cada cola Q_{i} se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\left\{T_{1}^{i}, T_{2}^{i}, \ldots, T_{k}^{i}, \ldots\right\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\left\{T_{1}^{1}, T_{1}^{2}, T_{1}^{3}, T_{1}^{4}\right\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_{i}$. Además se sabe que para

$$T^{*}=\min\left\{T_{1}^{1}, T_{1}^{2}, T_{1}^{3}, T_{1}^{4}\right\},$$

T^{*} se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^{*}=\sum_{i=1}^{4} \mu_{i}.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r}=r_{1}+r_{2} \quad \text{y} \quad \hat{r}=r_{3}+r_{4}.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r}<\mu^{*},$$

entonces si tomamos

$$r^{*}=\min\{\tilde{r}, \hat{r}\},$$

se tiene que para

$$t^{*} \in\left(0, r^{*}\right)$$

se cumple que

$$\tau_{1}(1)=0 \quad \text{y por tanto} \quad \overline{\tau}_{1}=0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_{2}=\overline{\tau}_{1}+r_{1}=r_{1}<\mu^{*},$$

y por tanto se tiene que

$$\overline{\tau}_{2}=\tau_{2}.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_{1}(2)=\tau_{2}(1)+r_{2}=\tilde{r}<\mu^{*}.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^{*} tal que en el intervalo $\left(0, t^{*}\right)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_{i}\left(t^{*}\right)=0$$

para $i=1,2,3,4$.

1.8.27 Resultados para Procesos de Salida

1.8.28 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.195. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 1.8.1. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 1.8.2. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.196 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.150. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.197. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.151. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

1.8.29 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 1.8.198. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \qquad (1.8.180)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.199. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, *para* $n \geq 1$, *son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F, *donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$. *Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 1.8.152. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F, *con* $F(0) = 0$, *para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F. *Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, *donde* $T_n \to \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.103. *Para cada* $t \geq 0$, *la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, *para* $m \geq 1$.

Nota 1.8.153. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.137. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.181}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.182}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.66 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.183}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.200. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.138. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.184}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.185}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.67. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.186}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.201. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.104. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1.8.202. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.105. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.154. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.139. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.68 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1],\ t \geq 0,$$

Definición 1.8.203. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{1.8.187}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.106. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.140 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.204. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.107. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 1.8.205. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.108. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.155. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.141. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.69 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 1.8.206. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t - s) \, dF(s), \; t \geq 0, \tag{1.8.188}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.109. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.142 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 1.8.156. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 1.8.143 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds.$$

Proposición 1.8.110. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 1.8.207. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.111. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 1.8.144 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Nota 1.8.157. *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t)\geq0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 1.8.145 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds.$$

Proposición 1.8.112. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 1.8.208. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.113. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 1.8.146 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

1.8.30 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.209. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 1.8.3. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 1.8.4. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.210 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

- *i)* $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$
- *ii)* $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.158. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.211. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.159. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

1.8.31 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.212. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 1.8.5. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 1.8.6. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.213 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.160. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.214. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.161. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

1.8.32 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.215. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.216. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.217. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.147. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

1.8.33 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.218. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^{*}(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_{0}^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 1.8.219. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1.8.220. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 1.8.148. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^{*}(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^{*}(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s) \, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t} V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

1.8.34 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.114. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.162. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.149. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (1.8.189)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.190)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.70 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.191}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.221. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.150. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (1.8.192)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.193)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.71. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z(T_1) - Z(T_0)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.194}$$

1.8.35 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\
T_{N(t)} \leq &\quad t \quad < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.115. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.163. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.151. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.195}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.196}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.72 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.197}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.222. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.152. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.198}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.199}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.73. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.200}$$

1.8.36 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.116. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.164. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.153. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.201}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.202}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 1.8.74 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.203}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.223. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.154. *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$, *donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \; c.s. && (1.8.204)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \; c.s. && (1.8.205)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 1.8.75. *Si* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación, y* $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, *para* $n \geq 1$, *son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \; c.s. \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.206}$$

1.8.37 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 1.8.117. *Para cada* $t \geq 0$, *la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, *para* $m \geq 1$.

Nota 1.8.165. *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n, *para* $n \geq 2$, *a* $N\left(t\right)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G, *entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$

Teorema 1.8.155. *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n &= \mu, \; c.s. && (1.8.207)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu, \; c.s. && (1.8.208)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.76 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.209}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.224. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.156. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.210}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.211}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.77. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.212}$$

1.8.38 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.225. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.226. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.227. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.157. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^{*}(0)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}(0)\right] < \infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\,ds\right] < \infty$,*entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t} V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

1.8.39 Procesos de Renovación

Definición 1.8.228. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\left(T_n \leq t\right), \tag{1.8.213}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_{+}$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_{+}$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.229. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, *para* $n \geq 1$, *son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F, *donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$. *Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 1.8.166. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F, *con* $F(0) = 0$, *para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F. *Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\left(T_n \leq t\right)$, *donde* $T_n \rightarrow \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

1.8.40 Teorema Principal de Renovación

Nota 1.8.167. *Una función* $h : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 1.8.158 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds.$$

Proposición 1.8.118. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t),\ donde\ h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 1.8.230. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.119. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t),\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 1.8.159 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

1.8.41 Función de Renovación

Definición 1.8.231. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t)=h(t)+\int_{[0,t]}H(t-s)\,dF(s),\ t\geq 0,\tag{1.8.214}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 1.8.120. *La función $U\star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.160 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t)\rightarrow 1/\mu,\ cuando\ t\rightarrow\infty.$$

1.8.42 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t)\geq n\} & = & \{T_n\leq t\}\\ T_{N(t)}\leq & t & <T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n)=n$, y

$$N(t)=\max\{n:T_n\leq t\}=\min\{n:T_{n+1}>t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n\leq t\}=F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.121. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.168. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.161. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.215}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.216}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.78 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.217}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.232. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.162. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.218}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.219}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.79. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.220}$$

1.8.43 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.233. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.122. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1.8.234. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.123. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.169. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.163. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.80 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

1.8.44 Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\left\{T_1^i, T_2^i, \ldots, T_k^i, \ldots\right\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_i$. Además se sabe que para

$$T^* = \min\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

T^* se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{4} \mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad \text{y} \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min\left\{\tilde{r}, \hat{r}\right\},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \overline{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \overline{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\overline{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

1.8.45 Resultados para Procesos de Salida

En [?] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 1.8.124. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 1.8.164. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) Los tiempos de servicio son identicamente cero;
  b) $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;
  c) $L = 1$ y $G = D$;
  d) $L = \infty$ y $G = M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\left\{T_{n+1} - T_n \leq t\right\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;
  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;
  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 1.8.165. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$
  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.
  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$
  d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 1.8.166. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [**?**] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.

- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 1.8.167. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right) 2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2 (1-\delta)^{-1}.
\end{aligned}$$

  Teorema 1.8.168. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 1.8.169. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

1.8.46 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.235. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 1.8.7. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Observación 1.8.8. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.236 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.170. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.237. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.171. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

1.8.47 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 1.8.238. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.221}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.239. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 1.8.172. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq &\;\; t \;\; < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.125. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.173. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.170. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.222}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.223}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.81 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.224}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.240. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.171. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.225}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.226}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.82. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.227}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.241. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.126. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 1.8.242. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.127. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.174. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.172. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.83 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 1.8.243. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{1.8.228}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 1.8.128. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.173 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.244. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.129. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t>0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1.8.245. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.130. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.175. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.174. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.84 (Identidad de Wald para Renovaciones). *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right], \; t \geq 0,$$

Definición 1.8.246. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{1.8.229}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 1.8.131. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.175 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 1.8.176. *Una función $h: \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.176 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.8.132. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.247. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.133. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 1.8.177 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T>t)\right]$.

Nota 1.8.177. *Una función $h: \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.178 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) \, ds.$$

Proposición 1.8.134. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.248. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.135. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 1.8.179 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) \, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

1.8.48 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.249. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 1.8.9. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 1.8.10. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.250 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.178. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.251. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty}\leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.179. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

1.8.49 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.252. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 1.8.11. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 1.8.12. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.253 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.180. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.254. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.181. *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$, *donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_{∞}

1.8.50 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.255. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$, *para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 1.8.256. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1.8.257. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t,w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 1.8.180. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

1.8.51 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.258. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 1.8.259. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1.8.260. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t,w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 1.8.181. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

1.8.52 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.136. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.182. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.182. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \; c.s. \tag{1.8.230}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \; c.s. \tag{1.8.231}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.85 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \; c.s. \; cuando \; t \rightarrow \infty. \tag{1.8.232}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.261. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.183. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (1.8.233)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.234)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.86. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.8.235)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \;\; t \;\; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 1.8.137. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.183. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 1.8.184. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (1.8.236)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.237)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 1.8.87 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.238}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.262. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.185. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \quad (1.8.239)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (1.8.240) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.88. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.241}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.138. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.184. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.186. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (1.8.242)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.243)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.89 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.8.244)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.263. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.187. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (1.8.245)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.246)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.90. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.8.247)$$

1.8.53 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq &\ t \ < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ P\{N(t)\leq n\} &= 1-F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.139. *Para cada $t\geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right]<\infty$, para $m\geq 1$.*

Nota 1.8.185. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n\geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G\star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.188. *Para una constante $\mu\leq\infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n = \mu,\ c.s. \tag{1.8.248}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N(t) = 1/\mu,\ c.s. \tag{1.8.249}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.91 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu\leq\infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t)\rightarrow 1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \tag{1.8.250}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t):t\geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.264. *Para el proceso $\{Z(t):t\geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1},T_n]$:*

$$M_n=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_n}|Z(t)-Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.189. *Supóngase que $n^{-1}T_n\rightarrow\mu$ c.s. cuando $n\rightarrow\infty$, donde $\mu\leq\infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) = a,\ c.s. \tag{1.8.251}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) = a/\mu,\ c.s. \tag{1.8.252}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n=0$ c.s.

Corolario 1.8.92. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n)-Z(T_{n-1}),M_n)$, para $n\geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t)\rightarrow\frac{\mathbb{E}[Z(T_1)-Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]},\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \tag{1.8.253}$$

1.8.54 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.265. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.266. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.267. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.190. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

1.8.55 Procesos de Renovación

Definición 1.8.268. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.254}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.269. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, para* $n \geq 1$*, son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F*, donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$*. Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 1.8.186. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F*, con* $F(0) = 0$*, para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F*. Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$*, donde* $T_n \to \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

1.8.56 Teorema Principal de Renovación

Nota 1.8.187. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 1.8.191 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.8.140. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.270. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.141. *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 1.8.192 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$*.*

1.8.57 Función de Renovación

Definición 1.8.271. *Sea* $h(t)$ *función de valores reales en* $\mathbb{R}$ *acotada en intervalos finitos e igual a cero para* $t < 0$ *La ecuación de renovación para* $h(t)$ *y la distribución* F *es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{1.8.255}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.142. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (??).*

Teorema 1.8.193 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu,\ cuando\ t \rightarrow \infty.$$

1.8.58 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\ \ t\ \ < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.143. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.188. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.194. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu,\ c.s. \tag{1.8.256}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu,\ c.s. \tag{1.8.257}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.93 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.258}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.272. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.195. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.259}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.260}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.94. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.261}$$

1.8.59 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.273. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.144. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 1.8.274. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.145. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.189. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.196. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.95 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

1.8.60 Procesos de Renovación

Definición 1.8.275. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.262}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.276. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.190. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

1.8.61 Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\left\{T_1^i, T_2^i, \ldots, T_k^i, \ldots\right\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_i$. Además se sabe que para

$$T^* = \min \left\{ T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4 \right\},$$

T^* se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{4} \mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad \text{y} \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min \left\{ \tilde{r}, \hat{r} \right\},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1 (1) = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \overline{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \overline{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\overline{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1 (2) = \tau_2 (1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_i (t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

1.8.62 Resultados para Procesos de Salida

En [?] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 1.8.146. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k (X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.

- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 1.8.197. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) Los tiempos de servicio son identicamente cero;

  b) $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;

  c) $L = 1$ y $G = D$;

  d) $L = \infty$ y $G = M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\left\{T_{n+1} - T_n \leq t\right\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;

  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;

  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;

  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 1.8.198. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.

  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$

  d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 1.8.199. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [?] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.

- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.8.200. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right]\\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right]\\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right) 2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2(1-\delta)^{-1}.
\end{aligned}$$

Teorema 1.8.201. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 1.8.202. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

1.8.63 Procesos Regenerativos

Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [?]

Definición 1.8.277 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.191. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [**?**].*

Nota 1.8.192. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 1.8.278. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.193. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 1.8.194. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 1.8.195. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 1.8.196.

a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.279. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.280. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.281. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.203. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Corolario 1.8.96. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \to \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\,ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \to \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 1.8.282. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.263}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.283. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.197. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 1.8.198. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.204 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 1.8.147. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.284. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.148. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 1.8.205 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.149. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.199. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.206. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (1.8.264)$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (1.8.265)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.97 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \quad (1.8.266)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.285. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.207. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.267}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.268}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.98. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.269}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq &\ t < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.150. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.200. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.208. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \quad (1.8.270)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (1.8.271)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.99 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.8.272)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.286. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.209. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \quad (1.8.273)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (1.8.274)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.100. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.8.275)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.151. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^{m}\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.201. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 1.8.210. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (1.8.276)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.277)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.101 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (1.8.278)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\left\{Z\left(t\right) : t \geq 0\right\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N\left(t\right)$

Definición 1.8.287. *Para el proceso $\left\{Z\left(t\right) : t \geq 0\right\}$ se define la fluctuación máxima de $Z\left(t\right)$ en el intervalo $\left(T_{n-1}, T_n\right]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z\left(t\right) - Z\left(T_{n-1}\right)|$$

Teorema 1.8.211. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (1.8.279)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.280)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.102. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (1.8.281)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq &\ \ t \ < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.152. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.202. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.212. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.282}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.283}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.103 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.284}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.288. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.213. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.285}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.286}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.104. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.287}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.153. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.203. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.214. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.288}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.289}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.105 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.290}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.289. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.215. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (1.8.291)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.292)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.106. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (1.8.293)$$

Definición 1.8.290. *Sea $h\left(t\right)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h\left(t\right)$ y la distribución F es*

$$H\left(t\right) = h\left(t\right) + \int_{\left[0,t\right]} H\left(t-s\right) dF\left(s\right), \; t \geq 0, \qquad (1.8.294)$$

donde $H\left(t\right)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H\left(t\right)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.154. *La función $U \star h\left(t\right)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.216 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.291. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N\left(t\right)$, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = \mathbb{1}\left(t \geq 0\right)$.

Proposición 1.8.155. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U\left(t\right)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1.8.292. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF\left(t\right), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 1.8.156. *La Transformada de Laplace $\hat{U}\left(\alpha\right)$ y $\hat{F}\left(\alpha\right)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}\left(\alpha\right) = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$.*

Nota 1.8.204. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.217. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.107 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 1.8.293. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.295}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.294. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.205. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 1.8.295. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.296}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.296. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.206. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.157. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 1.8.9 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 1.8.207. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.218. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.297}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.298}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.108 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.299}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.297. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.219. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.300}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.301}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.109. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.302}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.298. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.158. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 1.8.299. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.159. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.208. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.220. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.110 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1]\,,\ t \geq 0,$$

Definición 1.8.300. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s)\,,\ t \geq 0, \tag{1.8.303}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.160. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.221 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.301. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)\,,\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.161. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 1.8.302. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t)\,,\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.162. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.209. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.222. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.111 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t)+1],\ t \geq 0,$$

Definición 1.8.303. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{1.8.304}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.163. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.223 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \to \infty.$$

Nota 1.8.210. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 1.8.224 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.8.164. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ \textit{donde}\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.304. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.165. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 1.8.225 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Nota 1.8.211. *Una función $h : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.226 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds.$$

Proposición 1.8.166. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.305. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.167. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 1.8.227 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Definición 1.8.306. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 1.8.212. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 1.8.213. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 1.8.214. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.307. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 1.8.215. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 1.8.228 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 1.8.308 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t*.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t*, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t*.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$*, la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t*.*

Nota 1.8.216. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n*, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$*. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t + y) - N((t - x)) = 0\} \tag{1.8.305}$$

Ejemplo 1.8.10 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*, entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$*.*

Nota 1.8.217. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 1.8.309. *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 1.8.218. *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 1.8.168. *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 1.8.229. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N *es estacionario.*

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 1.8.219. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 1.8.112. *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 1.8.220. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \to S$.

Nota 1.8.221. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.310 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 1.8.311. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t \to \infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t \to \infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\, du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.222. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.312. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.223. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.8.224. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.313 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.225. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.314. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_{0}^{\infty} X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_{0}^{\infty} I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.226. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.315. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.316. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.317. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.230. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.318. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.319. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.320. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.231. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces

Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t. Entonces, determinando el primer momento es posible ver que

Definición 1.8.321. *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 1.8.322. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.*

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t=\tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m),\tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right]=\mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si $I_i(z)=\mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$ se tiene que $F_i(z)=I_i[P_i(z)]$ para $i=1,2$.

Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (**??**), sean $T_1,T_2,\ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i)=0, L_2(T_i)=0, \hat{L}_1(T_i)=0$ y $\hat{L}_2(T_i)=0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 1.8.323. *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 1.8.324. *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 1.8.325. *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m=1,2,\ldots,M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

[59]

Para $\{X(t):t\geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n=T_n-T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.326. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ a $(E,\mathcal{E})$, es decir, para $A\in\mathcal{E}$, se tiene que $\{Y\in A\}\in\mathcal{F}$, donde $\{Y\in A\}:=\{w\in\Omega:Y(w)\in A\}=:Y^{-1}A$.*

Nota 1.8.227. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 1.8.327. *Para cada $i\in\mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i,\mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i):=\left(\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i\in\mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i:=\sigma\left\{\{y:y_i\in A\}:i\in\mathbb{I}\text{ y }A\in\mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 1.8.328. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi\in(\Omega,\mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 1.8.232. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i\in\mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i,\mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y\in\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i:y_i\in A_{i_1},\ldots,y_n\in A_{i_n}\right)=P_{i_1}(A_{i_n})\cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n>0$, toda $i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{I}$ y todo $A_{i_1}\in\mathcal{E}_{i_1},\ldots,A_{i_n}\in\mathcal{E}_{i_n}$

[59]In Stidham and Heyman [**?**] shows that is sufficient for the regenerative process to be stationary that the mean regenerative cycle time is finite: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}C_i^{(m)}\right]<\infty$,

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i]<\infty$, además, como $M_i>0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i]<\infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N}\mu_k<1$.

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\left(E_i,\mathcal{E}_i,P_i\right) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}},E_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 1.8.329. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 1.8.330. *Dos espacios medibles $(E,\mathcal{E})$ y $(G,\mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \rightarrow G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 1.8.331. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G,\mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0,1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 1.8.228. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 1.8.332. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ es una familia $Z = \left(\mathbb{Z}_s\right)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E,\mathcal{E})$.*

Definición 1.8.333. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0,\infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}}(E,\mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w) = \left(Z_s(w)\right)_{s\in\mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 1.8.229. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 1.8.230. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E,\mathcal{E}) = (\mathbb{R},\mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_1} \leq x_1,\ldots,Z_{t_n} \leq x_n\right), x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}, t_1,\ldots,t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{1.8.306}$$

Nota 1.8.231. *Para espacios polacos $(E,\mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 1.8.334. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 1.8.232. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H,\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{1.8.307}$$

Nota 1.8.233. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ a $(H,\mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H,\mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 1.8.234. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H,\mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 1.8.335. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0,\infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) . w \in \Omega.$$

Definición 1.8.336. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible* **(CM)** *si el mapeo que toma $(w,t) \in \Omega \times [0,\infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 1.8.235. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w,T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w,T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 1.8.337. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H,\mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible* **(CCM)** *si el mapeo $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 1.8.236. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0,\infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w,t) en $(Z(w),t)$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w),t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 1.8.338. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante* **(ISI)** *si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s\in[0,\infty)} : z \in H\right\} = H,\ t \in [0,\infty).$$

Definición 1.8.339. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0,\infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s\in[0,\infty)},\ z \in H.$$

Definición 1.8.340. *Se dice que un proceso Z es shift-medible* **(SM)** *si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ medible.*

Nota 1.8.237. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 1.8.238.
- *Dado el espacio polaco $(E,\mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0,\infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 1.8.239. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 1.8.233. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 1.8.341. *Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L,\mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^\infty \in [0,\infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.

Así el par (Z,S) es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 1.8.342. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z,(s_k)_0^\infty\right) = \theta_t\left(z,\left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^\infty\right)$$

donde $n_{t-} = inf\{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 1.8.240. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 1.8.343. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0,S_n), S_0,\ldots,S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 1.8.241. *Si el par (Z,S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 1.8.234. *Supóngase que el par (Z,S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**},S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z,S) con periodo d.*

Definición 1.8.344. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx > 0$ con $X_2, X_3, \ldots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\,dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 1.8.345. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0,S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 1.8.242.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 1.8.243. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 1.8.235. *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 1.8.236. *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0,S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega,\mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*,S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0,S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*,S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*,S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0,S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 1.8.237. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{1.8.308}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{1.8.309}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{1.8.310}$$

Also the intervisit time I_i is defined as the period beginning at the time of its service completion in a cycle and ending at the time when it is polled in the next cycle; its duration is given by $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.

So we the following are still true

$$\begin{array}{ll}
\mathbb{E}[L_i] = \mu_i \mathbb{E}[I_i], & \mathbb{E}[C_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)}, \\
\mathbb{E}[S_i] = \mu_i \mathbb{E}[C_i], & \mathbb{E}[I_i] = (1-\mu_i)\mathbb{E}[C_i], \\
Var[L_i] = \mu_i^2 Var[I_i] + \sigma^2 \mathbb{E}[I_i], & Var[C_i] = \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}, \\
Var[S_i] = \frac{Var[L_i^*]}{(1-\mu_i)^2} + \frac{\sigma^2 \mathbb{E}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^3}, & Var[I_i] = \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).
\end{array} \tag{1.8.311}$$

Definición 1.8.346. *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 1.8.347. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.*

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si $I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$ se tiene que $F_i(z) = I_i[P_i(z)]$ para $i = 1, 2$.

Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (**??**), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 1.8.348. *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 1.8.349. *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 1.8.350. *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$[60], se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i\left(z\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (??): $n\rightarrow t-\tau_i\left(m\right)$, $T\rightarrow\overline{\tau}_i\left(m\right)-\tau_i\left(m\right)$, $L_n\rightarrow L_i\left(t\right)$ y $F\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{L_0}\right]\rightarrow F_i\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{L_i\tau_i(m)}\right]$, se puede ver que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right]=z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)} \tag{1.8.312}$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i\left(t\right)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i\left(z\right)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right]=\frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i\left(z\right)}\\
&= \frac{1-I_i\left[P_i\left(z\right)\right]}{1-P_i\left(z\right)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}$$

Por lo tanto

[60] En Stidham[?] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}C_i^{(m)}\right]<\infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$, además, como $M_i>0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}\left[C_i\right]<\infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N}\mu_k<1$.

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} + \sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)} + \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}\right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

es decir

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \tag{1.8.313}$$

Si hacemos:

$$S(z) = 1-F(z) \tag{1.8.314}$$

$$T(z) = z-P(z) \tag{1.8.315}$$

$$U(z) = 1-P(z) \tag{1.8.316}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[C_i\right]Q(z) = \frac{(z-1)S(z)P(z)}{T(z)U(z)} \tag{1.8.317}$$

A saber, si $a_k = P\{L(t)=k\}$

$$S(z) = 1-F(z) = 1-\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

entonces

$S^{'}(z) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}$, por tanto $S^{(1)}(1) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k = -\mathbb{E}\left[L(t)\right]$, luego $S^{''}(z) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k z^{k-2}$ y $S^{(2)}(1) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k = \mathbb{E}\left[L(L-1)\right]$; de la misma manera $S^{'''}(z) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)a_k z^{k-3}$ y $S^{(3)}(1) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)a_k = -\mathbb{E}\left[L(L-1)(L-2)\right] = -\mathbb{E}\left[L^3\right] + 3 - \mathbb{E}\left[L^2\right] - 2 - \mathbb{E}\left[L\right]$.

Es decir

$$\begin{aligned}
S^{(1)}(1) &= -\mathbb{E}\left[L(t)\right], \\
S^{(2)}(1) &= -\mathbb{E}\left[L(L-1)\right] = -\mathbb{E}\left[L^2\right] + \mathbb{E}\left[L\right], \\
S^{(3)}(1) &= -\mathbb{E}\left[L(L-1)(L-2)\right] = -\mathbb{E}\left[L^3\right] + 3\mathbb{E}\left[L^2\right] - 2\mathbb{E}\left[L\right].
\end{aligned}$$

Expandiendo alrededor de $z=1$

$$\begin{aligned}
S(z) &= S(1) + \frac{S^{'}(1)}{1!}(z-1) + \frac{S^{''}(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{S^{'''}(1)}{3!}(z-1)^3 + \ldots + \\
&= (z-1)\left\{S^{'}(1) + \frac{S^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{S^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \ldots +\right\} \\
&= (z-1)R_1(z)
\end{aligned}$$

con $R_1(z) \neq 0$, pues

$$R_1(z) = -\mathbb{E}[L] \tag{1.8.318}$$

entonces

$$R_1(z) = S^{'}(1) + \frac{S^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{S^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \frac{S^{iv}(1)}{4!}(z-1)^3 + \ldots + \tag{1.8.319}$$

Calculando las derivadas y evaluando en $z = 1$

$$\begin{aligned}
R_1(1) &= S^{(1)}(1) = -\mathbb{E}[L] && (1.8.320)\\
R_1^{(1)}(1) &= \frac{1}{2}S^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[L^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[L] && (1.8.321)\\
R_1^{(2)}(1) &= \frac{2}{3!}S^{(3)}(1) = -\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[L^3\right] + \mathbb{E}\left[L^2\right] - \frac{2}{3}\mathbb{E}[L] && (1.8.322)
\end{aligned}$$

De manera análoga se puede ver que para $T(z) = z - P(z)$ se puede encontrar una expanción alrededor de $z = 1$

Expandiendo alrededor de $z = 1$

$$\begin{aligned}
T(z) &= T(1) + \frac{T^{'}(1)}{1!}(z-1) + \frac{T^{''}(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{T^{'''}(1)}{3!}(z-1)^3 + \ldots +\\
&= (z-1)\left\{T^{'}(1) + \frac{T^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{T^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \ldots +\right\}\\
&= (z-1)R_2(z)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
T^{(1)}(1) &= -\mathbb{E}[X(t)] = -\mu,\\
T^{(2)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)] = -\mathbb{E}\left[X^2\right] + \mathbb{E}[X] = -\mathbb{E}\left[X^2\right] + \mu,\\
T^{(3)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)] = -\mathbb{E}\left[X^3\right] + 3\mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}[X]\\
&= -\mathbb{E}\left[X^3\right] + 3\mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mu.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $R_2(1) \neq 0$, pues

$$R_2(1) = 1 - \mathbb{E}[X] = 1 - \mu \tag{1.8.323}$$

entonces

$$R_2(z) = T^{'}(1) + \frac{T^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{T^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \frac{T^{(iv)}(1)}{4!}(z-1)^3 + \ldots + \tag{1.8.324}$$

Calculando las derivadas y evaluando en $z = 1$

$$\begin{aligned}
R_2(1) &= T^{(1)}(1) = 1 - \mu && (1.8.325)\\
R_2^{(1)}(1) &= \frac{1}{2}T^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right] + \frac{1}{2}\mu && (1.8.326)\\
R_2^{(2)}(1) &= \frac{2}{3!}T^{(3)}(1) = -\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[X^3\right] + \mathbb{E}\left[X^2\right] - \frac{2}{3}\mu && (1.8.327)
\end{aligned}$$

Finalmente para de manera análoga se puede ver que para $U(z) = 1 - P(z)$ se puede encontrar una expanción alrededor de $z = 1$

$$\begin{aligned} U(z) &= U(1) + \frac{U^{'}(1)}{1!}(z-1) + \frac{U^{''}(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{U^{'''}(1)}{3!}(z-1)^3 + \ldots + \\ &= (z-1)\left\{U^{'}(1) + \frac{U^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{U^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \ldots + \right\} \\ &= (z-1)R_3(z) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} U^{(1)}(1) &= -\mathbb{E}[X(t)] = -\mu, \\ U^{(2)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)] = -\mathbb{E}\left[X^2\right] + \mathbb{E}[X] = -\mathbb{E}\left[X^2\right] + \mu, \\ U^{(3)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)] = -\mathbb{E}\left[X^3\right] + 3\mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}[X] \\ &= -\mathbb{E}\left[X^3\right] + 3\mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mu. \end{aligned}$$

Por lo tanto $R_3(1) \neq 0$, pues

$$R_3(1) = -\mathbb{E}[X] = -\mu \tag{1.8.328}$$

entonces

$$R_3(z) = U^{'}(1) + \frac{U^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{U^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \frac{U^{(iv)}(1)}{4!}(z-1)^3 + \ldots + \tag{1.8.329}$$

Calculando las derivadas y evaluando en $z = 1$

$$R_3(1) = U^{(1)}(1) = -\mu \tag{1.8.330}$$

$$R_3^{(1)}(1) = \frac{1}{2}U^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right] + \frac{1}{2}\mu \tag{1.8.331}$$

$$R_3^{(2)}(1) = \frac{2}{3!}U^{(3)}(1) = -\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[X^3\right] + \mathbb{E}\left[X^2\right] - \frac{2}{3}\mu \tag{1.8.332}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}[C_i]\,Q(z) = \frac{(z-1)(z-1)R_1(z)P(z)}{(z-1)R_2(z)(z-1)R_3(z)} = \frac{R_1(z)P(z)}{R_2(z)R_3(z)} \equiv \frac{R_1P}{R_2R_3} \tag{1.8.333}$$

Entonces

$$\left[\frac{R_1(z)P(z)}{R_2(z)R_3(z)}\right]^{'} = \frac{PR_2R_3R_1^{'} + R_1R_2R_3P^{'} - R_3R_1PR_2 - R_2R_1PR_3^{'}}{(R_2R_3)^2} \tag{1.8.334}$$

Evaluando en $z=1$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R_2(1)R_3(1)R_1^{(1)}(1)+R_1(1)R_2(1)R_3(1)P^{'}(1)-R_3(1)R_1(1)R_2(1)^{(1)}-R_2(1)R_1(1)R_3^{'}(1)}{\left(R_2(1)R_3(1)\right)^2}\\
&= \frac{1}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}L\right)\left(1-\mu\right)\left(-\mu\right)+\left(-\mathbb{E}L\right)\left(1-\mu\right)\left(-\mu\right)\mu\right.\\
&\left.-\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\right)\left(-\mu\right)\left(-\mathbb{E}L\right)-\left(1-\mu\right)\left(-\mathbb{E}L\right)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}L\right)\left(\mu^2-\mu\right)+\left(\mu^2-\mu^3\right)\mathbb{E}L\right.\\
&\left.-\mu\mathbb{E}L\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\right)+\left(\mathbb{E}L-\mu\mathbb{E}L\right)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\left\{-\frac{1}{2}\mu^2\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mu\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mu^2\mathbb{E}L-\mu^3\mathbb{E}L+\mu\mathbb{E}L\mathbb{E}X^2-\frac{1}{2}\mathbb{E}L\mathbb{E}X^2\right\}\\
&= \frac{1}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\left\{\frac{1}{2}\mu\mathbb{E}L^2\left(1-\mu\right)+\mathbb{E}L\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\left(\mu^2-\mathbb{E}X^2\right)\right\}\\
&= \frac{1}{2\mu\left(1-\mu\right)}\mathbb{E}L^2-\frac{\frac{1}{2}-\mu}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\sigma^2\mathbb{E}L
\end{aligned}$$

por lo tanto (para Takagi)

$$Q^{(1)}=\frac{1}{\mathbb{E}C}\left\{\frac{1}{2\mu\left(1-\mu\right)}\mathbb{E}L^2-\frac{\frac{1}{2}-\mu}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\sigma^2\mathbb{E}L\right\}$$

donde

$$\mathbb{E}C=\frac{\mathbb{E}L}{\mu\left(1-\mu\right)}$$

entonces

$$\begin{aligned}
Q^{(1)} &= \frac{1}{2}\frac{\mathbb{E}L^2}{\mathbb{E}L}-\frac{\frac{1}{2}-\mu}{\left(1-\mu\right)\mu}\sigma^2=\frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}L}-\frac{\sigma^2}{2}\left\{\frac{2\mu-1}{\left(1-\mu\right)\mu}\right\}\\
&= \frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}L}+\frac{\sigma^2}{2}\left\{\frac{1}{1-\mu}+\frac{1}{\mu}\right\}
\end{aligned}$$

Mientras que para nosotros

$$Q^{(1)}=\frac{1}{\mu\left(1-\mu\right)}\frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}C}-\sigma^2\frac{\mathbb{E}L}{2\mathbb{E}C}\cdot\frac{1-2\mu}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}$$

Retomando la ecuación (**??**)

$$\left[\frac{R_1\left(z\right)P\left(z\right)}{R_2\left(z\right)R_3\left(z\right)}\right]^{'}=\frac{PR_2R_3R_1^{'}+R_1R_2R_3P^{'}-R_3R_1PR_2-R_2R_1PR_3^{'}}{\left(R_2R_3\right)^2}=\frac{F\left(z\right)}{G\left(z\right)}$$

donde

$$\begin{aligned}
F\left(z\right) &= PR_2R_3R_1^{'}+R_1R_2R_3P^{'}-R_3R_1PR_2^{'}-R_2R_1PR_3^{'}\\
G\left(z\right) &= R_2^2R_3^2\\
G^2\left(z\right) &= R_2^4R_3^4=\left(1-\mu\right)^4\mu^4
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
G^{'}(z) &= 2R_2R_3\left[R_2^{'}R_3+R_2R_3^{'}\right]\\
G^{'}(1) &= -2(1-\mu)\mu\left[\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right]+\frac{1}{2}\mu\right)(-\mu)+(1-\mu)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right]+\frac{1}{2}\mu\right)\right]
\end{aligned}$$

$$F^{'}(z) = \left[(R_2R_3)R_1^{''}-(R_1R_3)R_2^{''}-(R_1R_2)R_3^{''}-2\left(R_2^{'}R_3^{'}\right)R_1\right]P+2(R_2R_3)R_1^{'}P^{'}+(R_1R_2R_3)P^{''}$$

Por lo tanto, encontremos $F^{'}(z)G(z)+F(z)G^{'}(z)$:

$$\begin{aligned}
&F^{'}(z)G(z)+F(z)G^{'}(z)=\left\{\left[(R_2R_3)R_1^{''}-(R_1R_3)R_2^{''}-(R_1R_2)R_3^{''}-2\left(R_2^{'}R_3^{'}\right)R_1\right]P\right.\\
&\left.+2(R_2R_3)R_1^{'}P^{'}+(R_1R_2R_3)P^{''}\right\}R_2^2R_3^2-\left\{\left[PR_2R_3R_1^{'}+R_1R_2R_3P^{'}-R_3R_1PR_2^{'}\right.\right.\\
&\left.\left.-R_2R_1PR_3^{'}\right]\left[2R_2R_3\left(R_2^{'}R_3+R_2R_3^{'}\right)\right]\right\}
\end{aligned}$$

Evaluando en $z=1$

$$\begin{aligned}
&= (1+R_3)^3R_3^3R_1^{''}-(1+R_3)^2R_1R_3^3R_3^{''}-(1+R_3)^3R_3^2R_1R_3^{''}-2(1+R_3)^2R_3^2\left(R_3^{'}\right)^2\\
&+ 2(1+R_3)^3R_3^3R_1^{'}P^{'}+(1+R_3)^3R_3^3R_1P^{''}-2(1+R_3)^2R_3^2(1+2R_3)R_3^{'}R_1^{'}\\
&- 2(1+R_3)^2R_3^2R_1R_3^{'}(1+2R_3)P^{'}+2(1+R_3)(1+2R_3)R_3^3R_1\left(R_3^{'}\right)^2\\
&+ 2(1+R_3)^2(1+2R_3)R_1R_3R_3^{'}\\
&= -(1-\mu)^3\mu^3R_1^{''}-(1-\mu)^2\mu^2R_1(1-2\mu)R_3^{''}-(1-\mu)^3\mu^3R_1P^{''}\\
&+ 2(1-\mu)\mu^2\left[(1-2\mu)R_1-(1-\mu)\right]\left(R_3^{'}\right)^2-2(1-\mu)^2\mu R_1(1-2\mu)R_3^{'}\\
&- 2(1-\mu)^3\mu^4R_1^{'}-2\mu(1-\mu)(1-2\mu)R_3^{'}R_1^{'}-2\mu^3(1-\mu)^2(1-2\mu)R_1R_1^{'}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\left[\frac{F(z)}{G(z)}\right]^{'} &= \frac{1}{\mu^3(1-\mu)^3}\left\{-(1-\mu)^2\mu^2R_1^{''}-\mu(1-\mu)(1-2\mu)R_1R_3^{''}-\mu^2(1-\mu)^2R_1P^{''}\right.\\
&+2\mu\left[(1-2\mu)R_1-(1-\mu)\right]\left(R_3^{'}\right)^2-2(1-\mu)(1-2\mu)R_1R_3^{'}-2\mu^3(1-\mu)^2R_1^{'}\\
&\left.-2(1-2\mu)R_3^{'}R_1^{'}-2\mu^2(1-\mu)(1-2\mu)R_1R_1^{'}\right\}
\end{aligned}$$

recordemos que

$$\begin{aligned}
R_1 &= -\mathbb{E}L\\
R_3 &= -\mu\\
R_1^{'} &= -\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}L\\
R_3^{'} &= -\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\\
R_1^{''} &= -\frac{1}{3}\mathbb{E}L^3+\mathbb{E}L^2-\frac{2}{3}\mathbb{E}L\\
R_3^{''} &= -\frac{1}{3}\mathbb{E}X^3+\mathbb{E}X^2-\frac{2}{3}\mu\\
R_1R_3^{'} &= \frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L-\frac{1}{2}\mathbb{E}X\mathbb{E}L\\
R_1R_1^{'} &= \frac{1}{2}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}L+\frac{1}{2}\mathbb{E}^2L\\
R_3^{'}R_1^{'} &= \frac{1}{4}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L^2-\frac{1}{4}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L-\frac{1}{4}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}X+\frac{1}{4}\mathbb{E}X\mathbb{E}L\\
R_1R_3^{''} &= \frac{1}{6}\mathbb{E}X^3\mathbb{E}L^2-\frac{1}{6}\mathbb{E}X^3\mathbb{E}L-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L+\frac{1}{3}\mathbb{E}X\mathbb{E}L^2-\frac{1}{3}\mathbb{E}X\mathbb{E}L\\
R_1P^{''} &= -\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L\\
\left(R_3^{'}\right)^2 &= \frac{1}{4}\mathbb{E}^2X^2-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}X+\frac{1}{4}\mathbb{E}^2X
\end{aligned}$$

Definición 1.8.351. *Let L_i^* be the number of users at queue Q_i when it is polled, then*

$$\mathbb{E}\left[L_i^*\right]=f_i\left(i\right),\quad Var\left[L_i^*\right]=f_i\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. \tag{1.8.335}$$

Definición 1.8.352. *The cycle time C_i for the queue Q_i is the period beginning at the time when it is polled in a cycle and ending at the time when it is polled in the next cycle; it's duration is given by $\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)$, equivalently $\overline{\tau}_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$ under steady state assumption.*

Definición 1.8.353. *The intervisit time I_i is defined as the period beginning at the time of its service completion in a cycle and ending at the time when it is polled in the next cycle; its duration is given by $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$.*

The intervisit time duration $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)$ given the number of users found at queue Q_i at time $t=\tau_i\left(m+1\right)$ is equal to the number of arrivals during the preceding intervisit time $\left[\overline{\tau}\left(m\right),\tau_i\left(m+1\right)\right]$.

So we have

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z_i\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

if $I_i\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$ we have $F_i\left(z\right)=I_i\left[P_i\left(z\right)\right]$ for $i=1,2$. Futhermore can be proved that

$$\begin{array}{ll}
\mathbb{E}\left[L_i\right]=\mu_i\mathbb{E}\left[I_i\right], & \mathbb{E}\left[C_i\right]=\frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)},\\
\mathbb{E}\left[S_i\right]=\mu_i\mathbb{E}\left[C_i\right], & \mathbb{E}\left[I_i\right]=\left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right],\\
Var\left[L_i\right]=\mu_i^2Var\left[I_i\right]+\sigma^2\mathbb{E}\left[I_i\right], & Var\left[C_i\right]=\frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2},\\
Var\left[S_i\right]=\frac{Var\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^3}, & Var\left[I_i\right]=\frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2}-\frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2}f_i\left(i\right).
\end{array} \tag{1.8.336}$$

Let consider the points when the process $\left[L_1\left(1\right),L_2\left(1\right),L_3\left(1\right),L_4\left(1\right)\right]$ becomes zero at the same time, this points, $T_1,T_2,\ldots$ will be denoted as regeneration points, then we have that

Definición 1.8.354. *the interval between two such succesive regeneration points will be called regenerative cycle.*

Definición 1.8.355. *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 1.8.356. *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)}. \tag{1.8.337}$$

Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t. Entonces, determinando el primer momento es posible ver que

M_i is an stopping time for the regenerative process with $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, from Wald's lemma follows that:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\, \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\, \mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]
\end{aligned}$$

therefore

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

Doing the following substitutions en (**??**): $n \rightarrow t - \tau_i(m)$, $T \rightarrow \overline{\tau}_i(m) - \tau_i(m)$, $L_n \rightarrow L_i(t)$ and $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right] \rightarrow F_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i \tau_i(m)}\right]$, we obtain

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] = z \frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} \tag{1.8.338}$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t - \overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1 - \mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)}\right]}{1 - P_i(z)} \\
&= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} + \sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)} + \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}
\end{aligned}
$$

es decir

$$
\begin{array}{ll}
S^{'}(z) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}, & S^{(1)}(1) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k = -\mathbb{E}\left[L(t)\right],\\
S^{''}(z) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k z^{k-2}, & S^{(2)}(1) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k = \mathbb{E}\left[L(L-1)\right],\\
S^{'''}(z) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2) a_k z^{k-3}, & S^{(3)}(1) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2) a_k\\
 & = -\mathbb{E}\left[L(L-1)(L-2)\right]\\
 & = -\mathbb{E}\left[L^3\right] + 3 - \mathbb{E}\left[L^2\right] - 2 - \mathbb{E}\left[L\right];
\end{array}
\tag{1.8.339}
$$

1.8.64 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [?]

Definición 1.8.357 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.244. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [?].*

Nota 1.8.245. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 1.8.358. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$
\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,
\end{aligned}
$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.246. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 1.8.247. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 1.8.248. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 1.8.249.

a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

1.8.65 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.359. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.360. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.361. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.238. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^*(0)\right] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Corolario 1.8.113. *Sea* $\{V(t), t \geq 0\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E} < \infty$*,* F *es no-aritmética, y para todo* $x \geq 0$*,* $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $[0, \tau]$*, entonces* $V(t)$ *converge en distribución cuando* $t \to \infty$ *y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\,ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V(t)$ *cuando* $t \to \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

1.8.66 Procesos de Renovación

Definición 1.8.362. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.340}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.363. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, para* $n \geq 1$*, son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F*, donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$*. Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 1.8.250. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F*, con* $F(0) = 0$*, para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F*. Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$*, donde* $T_n \to \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Nota 1.8.251. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 1.8.239 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 1.8.169. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.364. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.170. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 1.8.240 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]$.

1.8.67 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.171. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.252. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.241. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (1.8.341)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.342) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.114 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.343}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.365. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.242. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (1.8.344)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.345) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.115. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.346}$$

1.8.68 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \;\; t \;\; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ P\{N(t)\leq n\} &= 1-F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.172. *Para cada $t\geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right]<\infty$, para $m\geq 1$.*

Nota 1.8.253. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n\geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G\star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.243. *Para una constante $\mu\leq\infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n &= \mu,\ c.s. &(1.8.347)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N(t) &= 1/\mu,\ c.s. &(1.8.348)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.116 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu\leq\infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t)\rightarrow 1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \tag{1.8.349}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t):t\geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.366. *Para el proceso $\{Z(t):t\geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1},T_n]$:*

$$M_n=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_n}|Z(t)-Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.244. *Supóngase que $n^{-1}T_n\rightarrow\mu$ c.s. cuando $n\rightarrow\infty$, donde $\mu\leq\infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a,\ c.s. &(1.8.350)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu,\ c.s. &(1.8.351)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n=0$ c.s.

Corolario 1.8.117. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n)-Z(T_{n-1}),M_n)$, para $n\geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t)\rightarrow\frac{\mathbb{E}[Z(T_1)-Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]},\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \tag{1.8.352}$$

1.8.69 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.173. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.254. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.245. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \; c.s. \tag{1.8.353}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \; c.s. \tag{1.8.354}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N\,/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.118 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \; c.s. \; cuando \; t \to \infty. \tag{1.8.355}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.367. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.246. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} & (1.8.356)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (1.8.357)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.119. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (1.8.358)$$

1.8.70 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 1.8.174. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.255. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 1.8.247. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (1.8.359)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (1.8.360)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.120 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.361}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.368. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.248. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (1.8.362)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (1.8.363)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.121. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.364}$$

1.8.71 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.175. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.256. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.249. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \; c.s. & (1.8.365)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \; c.s. & (1.8.366)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.122 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \; c.s. \; cuando \; t \rightarrow \infty. \tag{1.8.367}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.369. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.250. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \; c.s. & (1.8.368)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \; c.s. & (1.8.369)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.123. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z(T_1) - Z(T_0)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \; c.s. \; cuando \; t \rightarrow \infty. \tag{1.8.370}$$

1.8.72 Función de Renovación

Definición 1.8.370. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \; t \geq 0, \tag{1.8.371}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.176. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.251 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \; cuando \; t \rightarrow \infty.$$

1.8.73 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.371. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.177. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 1.8.372. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.178. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.257. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.252. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.124 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

1.8.74 Procesos de Renovación

Definición 1.8.373. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \qquad (1.8.372)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.374. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.258. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Definición 1.8.375. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.373}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.376. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.259. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.179. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 1.8.11 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 1.8.260. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.253. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.374}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.375}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.125 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.376}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.377. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.254. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.377}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.378}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.126. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.379}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.378. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.180. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 1.8.379. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.181. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.261. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.255. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.127 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 1.8.380. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \ t \geq 0, \tag{1.8.380}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.182. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (??).*

Teorema 1.8.256 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.381. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.183. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1.8.382. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.184. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.262. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.257. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.128 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 1.8.383. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{1.8.381}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.185. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (??).*

Teorema 1.8.258 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 1.8.263. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 1.8.259 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 1.8.186. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.384. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.187. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 1.8.260 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 1.8.264. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 1.8.261 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 1.8.188. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.385. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \; para \; t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.189. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \; donde \; h(t) = \mathbb{E}\left[X(t) \mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 1.8.262 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t) \mathbb{1}(T > t)\right]$.

Definición 1.8.386. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.265. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.8.266. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 1.8.267. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.387. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.268. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 1.8.263 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 1.8.388 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- *$A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*

- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t, *residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t.
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t.

Nota 1.8.269. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n, *y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$. *Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{1.8.382}$$

Ejemplo 1.8.12 (Tiempos de recurrencia Poisson). *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ, *entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 1.8.270. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 1.8.389. *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 1.8.271. *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 1.8.190. *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 1.8.264. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación* N *es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante* $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 1.8.272. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 1.8.129. *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

1.8.75 Procesos Regenerativos

Nota 1.8.273. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \to S$.

Nota 1.8.274. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.390 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que* *i)* $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 1.8.391. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.275. *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$, *donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_{∞}

1.8.76 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.392. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, *sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 1.8.276. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 1.8.277. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.393 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.278. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.394. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.279. *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$, *donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_∞

1.8.77 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.395. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$, *para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 1.8.396. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1.8.397. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t,w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 1.8.265. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

1.8.78 Existencia de Tiempos de Regeneración

1.8.79 Procesos Regenerativos: Thorisson

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.398. *Un elemento aleatorio en un espacio medible* $(E, \mathcal{E})$ *en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *a* $(E, \mathcal{E})$*, es decir, para* $A \in \mathcal{E}$*, se tiene que* $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$*, donde* $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$*.*

Nota 1.8.280. *También se dice que* Y *está soportado por el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y que* Y *es un mapeo medible de* Ω *en* E*, es decir, es* $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ *medible.*

Definición 1.8.399. *Para cada* $i \in \mathbb{I}$ *sea* P_i *una medida de probabilidad en un espacio medible* $(E_i, \mathcal{E}_i)$*. Se define el espacio producto* $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$*, donde* $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ *es el producto cartesiano de los* E_i*'s, y* $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ *es la* σ*-álgebra producto, es decir, es la* σ*-álgebra más pequeña en* $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ *que hace al i-ésimo mapeo proyección en* E_i *medible para toda* $i \in \mathbb{I}$ *es la* σ*-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma\left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 1.8.400. *Un espacio de probabilidad* $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ *es una extensión de otro espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *si* $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ *soporta un elemento aleatorio* $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ *que tienen a* $\mathbb{P}$ *como distribución.*

Teorema 1.8.266. *Sea* $\mathbb{I}$ *un conjunto de índices arbitrario. Para cada* $i \in \mathbb{I}$ *sea* P_i *una medida de probabilidad en un espacio medible* $(E_i, \mathcal{E}_i)$*. Entonces existe una única medida de probabilidad* $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ *en* $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i)$ *tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$*, toda* $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ *y todo* $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 1.8.401. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 1.8.402. *Dos espacios medibles $(E,\mathcal{E})$ y $(G,\mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f:E\rightarrow G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 1.8.403. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G,\mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0,1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 1.8.281. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 1.8.404. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ es una familia $Z=\left(\mathbb{Z}_{s}\right)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_{s}$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E,\mathcal{E})$.*

Definición 1.8.405. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}=[0,\infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right):=\otimes_{s\in\mathbb{I}}\left(E,\mathcal{E}\right)$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z\left(w\right)=\left(Z_{s}\left(w\right)\right)_{s\in\mathbb{I}}$ y $w\in\Omega$.

Nota 1.8.282. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 1.8.283. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E,\mathcal{E})=(\mathbb{R},\mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_{1}}\leq x_{1},\ldots,Z_{t_{n}}\leq x_{n}\right),x_{1},\ldots,x_{n}\in\mathbb{R},t_{1},\ldots,t_{n}\in\mathbb{I},n\geq1. \tag{1.8.383}$$

Nota 1.8.284. *Para espacios polacos $(E,\mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 1.8.406. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z\left(w\right)$ para $w\in\Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 1.8.285. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $\left(H,\mathcal{H}\right)$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z\in H$ a $z_{t}\in E$ para $t\in\mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H}:=E^{\mathbb{I}}\cap H:=\left\{A\cap H:A\in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{1.8.384}$$

Nota 1.8.286. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_{t} es un mapeo medible de $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ a $\left(H,\mathcal{H}\right)$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $\left(H,\mathcal{H}\right)$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 1.8.287. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $\left(H,\mathcal{H}\right)$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(H,\mathcal{H}\right)$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 1.8.407. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $\left(E,\mathcal{E}\right)$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0,\infty)$. Por Z_{T} se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_{T}\left(w\right):=Z_{T\left(w\right)}\left(w\right).w\in\Omega.$$

Definición 1.8.408. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible (**CM**) si el mapeo que toma $\left(w,t\right)\in\Omega\times\left[0,\infty\right)$ a $Z_{t}\left(w\right)\in E$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}\left[0,\infty\right)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 1.8.288. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 1.8.409. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H, \mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible (**CCM**) si el mapeo $(z,t)\in H\times[0,\infty)$ en $Z_t\in E$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 1.8.289. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega\times[0,\infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w,t) en $(Z(w),t)$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w),t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 1.8.410. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante (**ISI**) si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s\in[0,\infty)} : z\in H\right\} = H,\ t\in[0,\infty).$$

Definición 1.8.411. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t\in[0,\infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s\in[0,\infty)},\ z\in H.$$

Definición 1.8.412. *Se dice que un proceso Z es shift-medible (**SM**) si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t)\in H\times[0,\infty)$ en $\theta_t z\in H$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ medible.*

Nota 1.8.290. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 1.8.291.

- *Dado el espacio polaco $(E,\mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0,\infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 1.8.292. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 1.8.267. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 1.8.413. *Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z=(Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S=(S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0\leq S_0<S_1<\cdots\to\infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L,\mathcal{L})$, donde*

$$L=\left\{(s_k)_0^\infty\in[0,\infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0<s_1<\cdots\to\infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L}=L\cap\mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.

Así el par (Z,S) es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ en $(H\times L,\mathcal{H}\otimes\mathcal{L})$. El par $\mathcal{H}\otimes\mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H\times L,\mathcal{H}\otimes\mathcal{L})$ en $([0,\infty),\mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 1.8.414. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H\times L$ en $H\times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z,(s_k)_0^\infty\right)=\theta_t\left(z,\left(s_{n_{t-}+k}-t\right)_0^\infty\right)$$

donde $n_{t-}=inf\{n\geq 1 : s_n\geq t\}$.

Nota 1.8.293. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t)\in H\times[0,\infty)$ en $z_t\in E$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 1.8.415. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0, S_n), S_0, \ldots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 1.8.294. *Si el par (Z,S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 1.8.268. *Supóngase que el par (Z,S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z,S) con periodo d.*

Definición 1.8.416. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx > 0$ con $X_2, X_3, \ldots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\, dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 1.8.417. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 1.8.295.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 1.8.296. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 1.8.269. *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 1.8.270. *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0, S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*, S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 1.8.271. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{1.8.385}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n} (Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{1.8.386}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{1.8.387}$$

Definición 1.8.418. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.*

Nota 1.8.297. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 1.8.419. *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma \left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 1.8.420. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 1.8.272. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i \left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 1.8.421. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 1.8.422. *Dos espacios medibles $(E, \mathcal{E})$ y $(G, \mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \to G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 1.8.423. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G, \mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 1.8.298. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 1.8.424. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ es una familia $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E, \mathcal{E})$.*

Definición 1.8.425. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right):=\otimes_{s\in\mathbb{I}}\left(E,\mathcal{E}\right)$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z\left(w\right)=\left(Z_{s}\left(w\right)\right)_{s\in\mathbb{I}}$ y $w\in\Omega$.

Nota 1.8.299. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 1.8.300. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $\left(E,\mathcal{E}\right)=\left(\mathbb{R},\mathcal{B}\right)$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_{1}}\leq x_{1},\dots,Z_{t_{n}}\leq x_{n}\right),x_{1},\dots,x_{n}\in\mathbb{R},t_{1},\dots,t_{n}\in\mathbb{I},n\geq1. \tag{1.8.388}$$

Nota 1.8.301. *Para espacios polacos $\left(E,\mathcal{E}\right)$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 1.8.426. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z\left(w\right)$ para $w\in\Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 1.8.302. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $\left(H,\mathcal{H}\right)$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z\in H$ a $z_{t}\in E$ para $t\in\mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H}:=E^{\mathbb{I}}\cap H:=\left\{A\cap H:A\in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{1.8.389}$$

Nota 1.8.303. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_{t} es un mapeo medible de $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ a $\left(H,\mathcal{H}\right)$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $\left(H,\mathcal{H}\right)$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 1.8.304. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $\left(H,\mathcal{H}\right)$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(H,\mathcal{H}\right)$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 1.8.427. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $\left(E,\mathcal{E}\right)$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0,\infty)$. Por Z_{T} se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_{T}\left(w\right):=Z_{T\left(w\right)}\left(w\right).w\in\Omega.$$

Definición 1.8.428. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible (**CM**) si el mapeo que toma $\left(w,t\right)\in\Omega\times[0,\infty)$ a $Z_{t}\left(w\right)\in E$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 1.8.305. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_{T} es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $\left(w,T\left(w\right)\right)$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)$ medible, mientras que el segundo toma $\left(w,T\left(w\right)\right)$ en $Z_{T\left(w\right)}\left(w\right)$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 1.8.429. *Un PEOSCT con espacio de estados $\left(H,\mathcal{H}\right)$ es canónicamente conjuntamente medible (**CCM**) si el mapeo $\left(z,t\right)\in H\times[0,\infty)$ en $Z_{t}\in E$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 1.8.306. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega\times[0,\infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma $\left(w,t\right)$ en $\left(Z\left(w\right),t\right)$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)$ medible, y el segundo que toma $\left(Z\left(w\right),t\right)$ en $Z_{t}\left(w\right)$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 1.8.430. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante (**ISI**) si*

$$\left\{\left(z_{t+s}\right)_{s\in[0,\infty)}:z\in H\right\}=H,\ t\in[0,\infty).$$

Definición 1.8.431. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0, \infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s \in [0,\infty)}\,, \; z \in H.$$

Definición 1.8.432. *Se dice que un proceso Z es shift-medible* **(SM)** *si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)/\mathcal{H}$ medible.*

Nota 1.8.307. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 1.8.308.

- *Dado el espacio polaco $(E, \mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0, \infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 1.8.309. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 1.8.273. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 1.8.433. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s \in [0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L, \mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{ (s_k)_0^\infty \in [0, \infty)^{\{0,1,\ldots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty \right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\ldots\}}$.

Así el par (Z, S) es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0, \infty), \mathcal{B}[0, \infty))$.

Definición 1.8.434. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t \left(z, (s_k)_0^\infty\right) = \theta_t \left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^\infty\right)$$

donde $n_{t-} = inf\{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 1.8.310. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 1.8.435. *Dado un proceso* ***PEOSSM*** *(Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0, S_n), S_0, \ldots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z, S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 1.8.311. *Si el par (Z, S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 1.8.274. *Supóngase que el par (Z, S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z, S) con periodo d.*

Definición 1.8.436. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx > 0$ con $X_2, X_3, \ldots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}\left(X_1 + \cdots + X_n \in B\right) \geq \int_B f(x)\,dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 1.8.437. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 1.8.312.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 1.8.313. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 1.8.275. *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 1.8.276. *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0, S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*, S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}\left[f\left(Z^*, S^*\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 1.8.277. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{1.8.390}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{1.8.391}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{1.8.392}$$

Definición 1.8.438. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.*

Nota 1.8.314. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 1.8.439. *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma\left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 1.8.440. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 1.8.278. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \dots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \dots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 1.8.441. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 1.8.442. *Dos espacios medibles $(E, \mathcal{E})$ y $(G, \mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \to G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 1.8.443. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G, \mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 1.8.315. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 1.8.444. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ es una familia $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E, \mathcal{E})$.*

Definición 1.8.445. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}} (E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 1.8.316. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 1.8.317. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}(Z_{t_1} \leq x_1, \dots, Z_{t_n} \leq x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{1.8.393}$$

Nota 1.8.318. *Para espacios polacos $(E, \mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 1.8.446. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 1.8.319. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H, \mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{1.8.394}$$

Nota 1.8.320. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ a $(H, \mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H, \mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 1.8.321. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H, \mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 1.8.447. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0, \infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) . w \in \Omega.$$

Definición 1.8.448. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible **(CM)** si el mapeo que toma $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 1.8.322. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 1.8.449. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H, \mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible **(CCM)** si el mapeo $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 1.8.323. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0, \infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w, t) en $(Z(w), t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w), t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 1.8.450. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s \in [0, \infty)} : z \in H\right\} = H,\ t \in [0, \infty).$$

Definición 1.8.451. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0, \infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)},\ z \in H.$$

Definición 1.8.452. *Se dice que un proceso Z es shift-medible **(SM)** si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H}$ medible.*

Nota 1.8.324. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 1.8.325.

- *Dado el espacio polaco $(E, \mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0, \infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 1.8.326. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 1.8.279. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 1.8.453. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^{\infty}$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \rightarrow \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L, \mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^{\infty} \in [0, \infty)^{\{0,1,\ldots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \rightarrow \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\ldots\}}$.

Así el par (Z, S) es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0, \infty), \mathcal{B}[0, \infty))$.

Definición 1.8.454. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z, (s_k)_0^{\infty}\right) = \theta_t\left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^{\infty}\right)$$

donde $n_{t-} = inf\{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 1.8.327. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 1.8.455. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0, S_n), S_0, \ldots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z, S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 1.8.328. *Si el par (Z, S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 1.8.280. *Supóngase que el par (Z, S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z, S) con periodo d.*

Definición 1.8.456. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx > 0$ con $X_2, X_3, \ldots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\, dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 1.8.457. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z, S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 1.8.329.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z, S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 1.8.330. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $\left(\theta_s Z\right)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 1.8.281. *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}\left[X_1\right]<\infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 1.8.282. *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}\left[X_1\right]<\infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0,S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega,\mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^*=\frac{X_1}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*,S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0,S^0\right)\in\cdot\right)$. Entonces $(Z*,S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}\left[f\left(Z^*,S^*\right)\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^{X_1}f\left(\theta_s\left(Z^0,S^0\right)\right)ds\right]/\mathbb{E}\left[X_1\right]$$

$f\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty\left(x\right):=\frac{\mathbb{E}\left[X_1\right]\wedge x}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}$$

para $x\geq0$ y densidad $\mathbb{P}\left[X_1>x\right]/\mathbb{E}\left[X_1\right]$, con $x\geq0$.

Teorema 1.8.283. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0\leq S_0<S_1$ y*

$$\theta_{S_1}Z=\theta_{S_0}Z \text{ en distribución.} \tag{1.8.395}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}\left(Z,S\right)=\left(Z^0,S^0\right),n\geq0, \text{ en distribución,} \tag{1.8.396}$$

$$\left(Z,S_0,S_1\right) \text{ depende de } \left(X_2,X_3,\ldots\right) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1}Z. \tag{1.8.397}$$

Definición 1.8.458. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ a $(E,\mathcal{E})$, es decir, para $A\in\mathcal{E}$, se tiene que $\{Y\in A\}\in\mathcal{F}$, donde $\{Y\in A\}:=\{w\in\Omega:Y(w)\in A\}=:Y^{-1}A$.*

Nota 1.8.331. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 1.8.459. *Para cada $i\in\mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i,\mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\left(E_i,\mathcal{E}_i\right):=\left(\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i\in\mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i:=\sigma\left\{\{y:y_i\in A\}:i\in\mathbb{I} \text{ y } A\in\mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 1.8.460. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi\in(\Omega,\mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 1.8.284. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i\in\mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i,\mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\left(E_i,\mathcal{E}_i\right)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y\in\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i:y_i\in A_{i_1},\ldots,y_n\in A_{i_n}\right)=P_{i_1}\left(A_{i_n}\right)\cdots P_{i_n}\left(A_{i_n}\right)$$

para todos los enteros $n>0$, toda $i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{I}$ y todo $A_{i_1}\in\mathcal{E}_{i_1},\ldots,A_{i_n}\in\mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\left(E_i,\mathcal{E}_i,P_i\right):=\left(\prod_{i\in\mathbb{I}},E_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 1.8.461. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 1.8.462. *Dos espacios medibles $(E,\mathcal{E})$ y $(G,\mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f:E\rightarrow G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 1.8.463. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G,\mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0,1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 1.8.332. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 1.8.464. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ es una familia $Z=(\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E,\mathcal{E})$.*

Definición 1.8.465. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}=[0,\infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right):=\otimes_{s\in\mathbb{I}}(E,\mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w)=\left(Z_s(w)\right)_{s\in\mathbb{I}}$ y $w\in\Omega$.

Nota 1.8.333. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 1.8.334. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E,\mathcal{E})=(\mathbb{R},\mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_1}\leq x_1,\dots,Z_{t_n}\leq x_n\right),x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R},t_1,\dots,t_n\in\mathbb{I},n\geq 1. \tag{1.8.398}$$

Nota 1.8.335. *Para espacios polacos $(E,\mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 1.8.466. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w\in\Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 1.8.336. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H,\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z\in H$ a $z_t\in E$ para $t\in\mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H}:=E^{\mathbb{I}}\cap H:=\left\{A\cap H:A\in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{1.8.399}$$

Nota 1.8.337. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ a $(H,\mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H,\mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 1.8.338. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H,\mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 1.8.467. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0,\infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w):=Z_{T(w)}(w).w\in\Omega.$$

Definición 1.8.468. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible **(CM)** si el mapeo que toma $(w,t) \in \Omega \times [0,\infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 1.8.339. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 1.8.469. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H,\mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible **(CCM)** si el mapeo $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 1.8.340. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0,\infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w,t) en $(Z(w),t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w),t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 1.8.470. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s\in[0,\infty)} : z \in H\right\} = H,\ t \in [0,\infty).$$

Definición 1.8.471. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0,\infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s\in[0,\infty)},\ z \in H.$$

Definición 1.8.472. *Se dice que un proceso Z es shift-medible **(SM)** si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ medible.*

Nota 1.8.341. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 1.8.342.

- *Dado el espacio polaco $(E,\mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0,\infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 1.8.343. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 1.8.285. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 1.8.473. *Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \le S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L,\mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^\infty \in [0,\infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.

Así el par (Z,S) es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 1.8.474. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z, (s_k)_0^\infty\right) = \theta_t\left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^\infty\right)$$

donde $n_{t-} = inf\{n \ge 1 : s_n \ge t\}$.

Nota 1.8.344. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 1.8.475. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0,S_n), S_0, \ldots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 1.8.345. *Si el par (Z,S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 1.8.286. *Supóngase que el par (Z,S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z,S) con periodo d.*

Definición 1.8.476. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx > 0$ con $X_2, X_3, \ldots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\,dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 1.8.477. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 1.8.346.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 1.8.347. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 1.8.287. *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 1.8.288. *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0, S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*, S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 1.8.289. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{1.8.400}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{1.8.401}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{1.8.402}$$

1.8.80 Procesos Regenerativos

1.8.81 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [?]

Definición 1.8.478 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.348. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [?].*

Nota 1.8.349. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 1.8.479. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.350. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 1.8.351. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 1.8.352. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 1.8.353. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

1.8.82 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.480. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.481. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.482. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.290. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 1.8.130. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

1.8.83 Procesos de Renovación

Definición 1.8.483. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.403}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.484. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.354. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

1.8.84 Teorema Principal de Renovación

Nota 1.8.355. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.291 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \to \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) \, ds.$$

Proposición 1.8.191. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.485. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.192. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 1.8.292 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

1.8.85 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &=& 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.193. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.356. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.293. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.404}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.405}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.131 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.406}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.486. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.294. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.407}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.408}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.132. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.409}$$

1.8.86 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \;\; t \;\; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.194. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.357. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.295. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_{n} &= \mu, \; c.s. & (1.8.410)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu, \; c.s. & (1.8.411) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.133 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N\left(t\right)\rightarrow 1/\mu, \; c.s. \; cuando \; t\rightarrow\infty. \tag{1.8.412}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.487. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_{n}=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_{n}}|Z\left(t\right)-Z\left(T_{n-1}\right)|$$

Teorema 1.8.296. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_{n}\right) &= a, \; c.s. & (1.8.413)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \; c.s. & (1.8.414) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.134. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right)\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_{1}\right)-Z\left(T_{0}\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_{1}\right]}, \; c.s. \; cuando \; t\rightarrow\infty. \tag{1.8.415}$$

1.8.87 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right)\geq n\right\} &= \left\{T_{n}\leq t\right\}\\ T_{N\left(t\right)}\leq & \; t \; <T_{N\left(t\right)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N\left(t\right)=\max\left\{n:T_{n}\leq t\right\}=\min\left\{n:T_{n+1}>t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_{n}\leq t\right\}=F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right)\geq n\right\} &= \left\{T_{n}\leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right)\leq n\right\} &= 1-F^{\left(n+1\right)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{N\left(t\right)\geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 1.8.195. *Para cada $t\geq0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^{m}\right]<\infty$, para $m\geq1$.*

Nota 1.8.358. *Si el primer tiempo de renovación ξ_{1} no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_{n}, para $n\geq2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_{n} de la n-ésima renovación tiene distribución $G\star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 1.8.297. *Para una constante $\mu\leq\infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_{n} &= \mu,\ c.s. && (1.8.416)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu,\ c.s. && (1.8.417)\end{aligned}$$

Es decir, T_{n} satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.135 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu\leq\infty$, entonces*

$$t^{-1}N\left(t\right)\rightarrow1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \qquad (1.8.418)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\left\{Z\left(t\right):t\geq0\right\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N\left(t\right)$

Definición 1.8.488. *Para el proceso $\left\{Z\left(t\right):t\geq0\right\}$ se define la fluctuación máxima de $Z\left(t\right)$ en el intervalo $\left(T_{n-1},T_{n}\right]$:*

$$M_{n}=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_{n}}|Z\left(t\right)-Z\left(T_{n-1}\right)|$$

Teorema 1.8.298. *Supóngase que $n^{-1}T_{n}\rightarrow\mu$ c.s. cuando $n\rightarrow\infty$, donde $\mu\leq\infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_{n}\right) &= a,\ c.s. && (1.8.419)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu,\ c.s. && (1.8.420)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_{n}=0$ c.s.

Corolario 1.8.136. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_{n}\right)-Z\left(T_{n-1}\right),M_{n}\right)$, para $n\geq1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right)\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_{1}\right)-Z\left(T_{0}\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_{1}\right]},\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \qquad (1.8.421)$$

1.8.88 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_{n} están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned}\left\{N\left(t\right)\geq n\right\} &= \left\{T_{n}\leq t\right\}\\ T_{N(t)}\leq &\ \ t\ \ <T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.196. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.359. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.299. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.422}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.423}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.137 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.424}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.489. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.300. *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.425}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.426}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.138. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.427}$$

1.8.89 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \ t \ < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.197. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.360. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.301. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{1.8.428}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{1.8.429}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 1.8.139 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \tag{1.8.430}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.490. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.302. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (1.8.431)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.432)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.140. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.8.433)$$

1.8.90 Función de Renovación

Definición 1.8.491. *Sea $h\left(t\right)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h\left(t\right)$ y la distribución F es*

$$H\left(t\right) = h\left(t\right) + \int_{[0,t]} H\left(t-s\right)dF\left(s\right), \; t \geq 0, \quad (1.8.434)$$

donde $H\left(t\right)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H\left(t\right)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.198. *La función $U \star h\left(t\right)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.303 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

1.8.91 Función de Renovación

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.492. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N\left(t\right)$, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = \mathbb{1}\left(t \geq 0\right)$.

Proposición 1.8.199. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U\left(t\right)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1.8.493. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t}dF\left(t\right), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 1.8.200. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.361. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.304. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.141 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

1.8.92 Procesos de Renovación

Definición 1.8.494. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.435}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.495. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.362. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

1.8.93 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 1.8.496. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.436}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 1.8.497. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.363. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.201. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 1.8.13 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 1.8.364. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.305. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.437}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.438}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.142 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.439}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.498. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.306. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.440}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.441}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.143. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.442}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.499. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.202. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1.8.500. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.203. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.365. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.307. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.144 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1], \; t \geq 0,$$

Definición 1.8.501. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{1.8.443}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.204. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.308 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu, \; \textit{cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.502. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.205. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1.8.503. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.206. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.366. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.309. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.145 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 1.8.504. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \ t \geq 0, \tag{1.8.444}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.207. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.310 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 1.8.367. *Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 1.8.311 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 1.8.208. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right), \textit{ donde } h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 1.8.505. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right], \textit{ para } t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.209. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right), \textit{ donde } h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 1.8.312 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Nota 1.8.368. *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t)\geq0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 1.8.313 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 1.8.210. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right), \textit{ donde } h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 1.8.506. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right], \textit{ para } t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.211. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right), \textit{ donde } h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 1.8.314 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Definición 1.8.507. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.369. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.8.370. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 1.8.371. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_{+}$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.508. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.372. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 1.8.315 (Procesos Regenerativos). *Suponga que el proceso*

Definición 1.8.509 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 1.8.373. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_{+}$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{1.8.445}$$

Ejemplo 1.8.14 (Tiempos de recurrencia Poisson). *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (??) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 1.8.510. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 1.8.374. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 1.8.212. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 1.8.316. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 1.8.375. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 1.8.146. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

1.8.94 Procesos Regenerativos

Nota 1.8.376. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.8.377. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.511 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 1.8.512. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.378. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.513. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.379. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.8.380. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.514 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.381. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.515. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.382. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.516. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.517. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.518. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.317. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t}V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$*.*

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\left\{X_{1},X_{2},\ldots\right\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right)\in A|X_{1}+X_{2}+\cdots+X_{R(t)}=s,\left\{V\left(\tau\right),\tau<s\right\}\right\}=\mathbb{P}\left\{V\left(t-s\right)\in A|X_{1}>t-s\right\},$$

para todo $0\leq s\leq t$, donde $R\left(t\right)=\max\left\{X_{1}+X_{2}+\cdots+X_{j}\leq t\right\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0,X_{1})$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$, $[X_{1},X_{1}+X_{2})$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X=X_{1}$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.519. *Se define el proceso estacionario,* $\left\{V^{*}\left(t\right),t\geq0\right\}$*, para* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ *por*

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right)\in A\right\}=\frac{1}{\mathbb{E}\left[X\right]}\int_{0}^{\infty}\mathbb{P}\left\{V\left(t+x\right)\in A|X>x\right\}\left(1-F\left(x\right)\right)dx,$$

para todo $t\geq0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 1.8.520. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0,\lambda,2\lambda,\ldots$ *para alguna* $\lambda>0$ *entera.*

Definición 1.8.521. *Una modificación medible de un proceso* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$*, es una versión de este,* $\left\{V\left(t,w\right)\right\}$ *conjuntamente medible para* $t\geq0$ *y para* $w\in S$*,* S *espacio de estados para* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$*.*

Teorema 1.8.318. *Sea* $\left\{V\left(t\right),t\geq\right\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}\left[X\right]<\infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t}V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$*.*

Para $\left\{X\left(t\right):t\geq0\right\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N\left(t\right)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_{+}$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X\left(t\right)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_{n}=T_{n}-T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

1.8.95 Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por
$$\left\{T_1^i, T_2^i, \ldots, T_k^i, \ldots\right\},$$
entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,
$$\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$
se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_i$. Además se sabe que para
$$T^* = \min\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$
T^* se distribuye de manera exponencial con parámetro
$$\mu^* = \sum_{i=1}^{4} \mu_i.$$

Ahora, dado que
$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad \text{y} \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que
$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$
entonces si tomamos
$$r^* = \min\left\{\tilde{r}, \hat{r}\right\},$$
se tiene que para
$$t^* \in (0, r^*)$$
se cumple que
$$\tau_1(1) = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \overline{\tau}_1 = 0,$$
entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que
$$\tau_2 = \overline{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$
y por tanto se tiene que
$$\overline{\tau}_2 = \tau_2.$$
Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo
$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$
Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,
$$L_i(t^*) = 0$$
para $i = 1, 2, 3, 4$.

1.8.96 Resultados para Procesos de Salida

1.8.97 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.522. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Observación 1.8.13. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Observación 1.8.14. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.523 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.383. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.524. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.384. *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_∞

1.8.98 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 1.8.525. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.446}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.526. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 1.8.385. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.213. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.386. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.319. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \; c.s. \tag{1.8.447}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \; c.s. \tag{1.8.448}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.147 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \; c.s. \; cuando \; t \rightarrow \infty. \tag{1.8.449}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.527. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.320. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \; c.s. \tag{1.8.450}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \; c.s. \tag{1.8.451}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.148. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \; c.s. \; cuando \; t \rightarrow \infty. \tag{1.8.452}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.528. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.214. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1.8.529. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.215. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.387. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.321. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.149 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1], \; t \geq 0,$$

Definición 1.8.530. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{1.8.453}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.216. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.322 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.531. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.217. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1.8.532. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.218. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.388. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.323. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.150 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1], \ t \geq 0,$$

Definición 1.8.533. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \ t \geq 0, \tag{1.8.454}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.219. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.324 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 1.8.389. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.325 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 1.8.220. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\textit{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 1.8.534. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\textit{ para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.221. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\textit{ donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 1.8.326 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Nota 1.8.390. *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)|\leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 1.8.327 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 1.8.222. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\textit{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 1.8.535. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\textit{ para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.223. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\textit{ donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 1.8.328 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

1.8.99 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.536. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 1.8.15. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 1.8.16. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.537 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.391. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.538. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.392. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

1.8.100 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.539. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamenennte distribuidos.

Observación 1.8.17. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 1.8.18. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.540 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.393. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.541. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.394. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

1.8.101 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.542. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t + x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.543. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.544. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.329. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

1.8.102 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.545. *Se define el proceso estacionario,* $\left\{V^{*}\left(t\right),t\geq0\right\}$*, para* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ *por*

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right)\in A\right\}=\frac{1}{\mathbb{E}\left[X\right]}\int_{0}^{\infty}\mathbb{P}\left\{V\left(t+x\right)\in A|X>x\right\}\left(1-F\left(x\right)\right)dx,$$

para todo $t\geq0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 1.8.546. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0,\lambda,2\lambda,\ldots$ *para alguna* $\lambda>0$ *entera.*

Definición 1.8.547. *Una modificación medible de un proceso* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$*, es una versión de este,* $\left\{V\left(t,w\right)\right\}$ *conjuntamente medible para* $t\geq0$ *y para* $w\in S$*,* S *espacio de estados para* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$*.*

Teorema 1.8.330. *Sea* $\left\{V\left(t\right),t\geq\right\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}\left[X\right]<\infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t}V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$*.*

1.8.103 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned}\left\{N\left(t\right)\geq n\right\}&=\left\{T_n\leq t\right\}\\T_{N\left(t\right)}\leq&\ t\ <T_{N\left(t\right)+1},\end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right)=n$, y

$$N\left(t\right)=\max\left\{n:T_n\leq t\right\}=\min\left\{n:T_{n+1}>t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n\leq t\right\}=F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\left\{N\left(t\right)\geq n\right\}&=\left\{T_n\leq t\right\}\\P\left\{N\left(t\right)\leq n\right\}&=1-F^{\left(n+1\right)\star}\left(t\right)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{N\left(t\right)\geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 1.8.224. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.395. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.331. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (1.8.455)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.456)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.151 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$
t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.457}
$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.548. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$
M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|
$$

Teorema 1.8.332. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (1.8.458)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.459)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.152. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z(T_1) - Z(T_0)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.460}
$$

1.8.104 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\
T_{N(t)} \leq &\quad t \quad < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N(T_n) = n$, y

$$
N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}
$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.225. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.396. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.333. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.461}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.462}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.153 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.463}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.549. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.334. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.464}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.465}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.154. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.466}$$

1.8.105 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.226. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.397. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.335. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \; c.s. \tag{1.8.467}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \; c.s. \tag{1.8.468}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.155 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \; c.s. \; cuando \; t \rightarrow \infty. \tag{1.8.469}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.550. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.336. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \; c.s. && (1.8.470)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \; c.s. && (1.8.471)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.156. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \; c.s. \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.8.472)$$

1.8.106 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq &\; t \; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 1.8.227. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.398. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 1.8.337. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \; c.s. && (1.8.473)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu, \; c.s. && (1.8.474)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 1.8.157 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.475}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.551. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.338. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty}n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.476}$$
$$lim_{t\to\infty}t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.477}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.158. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty}t^{-1}Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.478}$$

1.8.107 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.552. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.553. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.554. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.339. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t}V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$*.*

1.8.108 Procesos de Renovación

Definición 1.8.555. *Sean* $0\leq T_1\leq T_2\leq\dots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0,t)$ *es*

$$N\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\left(T_n\leq t\right), \tag{1.8.479}$$

para $t\geq0$*.*

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_{+}$, y $N\left(t\right)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N\left(t\right):t\geq0\}$, denotado por $N\left(t\right)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_{+}$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N\left(t\right)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0<T_1<T_2<\dots$ casi seguramente.

Definición 1.8.556. *Un proceso puntual* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n=T_n-T_{n-1}$*, para* $n\geq1$*, son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F*, donde* $F\left(0\right)=0$ *y* $T_0=0$*. Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N\left(t\right)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0,t)$

Nota 1.8.399. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F*, con* $F\left(0\right)=0$*, para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1,\xi_2,\dots$ *definidas en este con distribución* F*. Entonces las otras cantidades son* $T_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ *y* $N\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\left(T_n\leq t\right)$*, donde* $T_n\rightarrow\infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

1.8.109 Teorema Principal de Renovación

Nota 1.8.400. *Una función* $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h\left(t\right)\geq0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h\left(t\right)|\leq b\left(t\right)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 1.8.340 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h\left(t\right)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 1.8.228. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 1.8.557. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.229. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 1.8.341 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

1.8.110 Función de Renovación

Definición 1.8.558. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t)=h(t)+\int_{[0,t]}H(t-s)\,dF(s)\,,\ t\geq 0,\tag{1.8.480}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 1.8.230. *La función $U\star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.342 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t)\rightarrow 1/\mu,\ cuando\ t\rightarrow\infty.$$

1.8.111 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t)\geq n\} & = & \{T_n\leq t\}\\ T_{N(t)}\leq & t & <T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n)=n$, y

$$N(t)=\max\{n:T_n\leq t\}=\min\{n:T_{n+1}>t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n\leq t\}=F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ P\{N(t)\leq n\} &= 1-F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.231. *Para cada $t\geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m]<\infty$, para $m\geq 1$.*

Nota 1.8.401. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n\geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G\star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.343. *Para una constante $\mu\leq\infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n = \mu,\ c.s. \tag{1.8.481}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N(t) = 1/\mu,\ c.s. \tag{1.8.482}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.159 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu\leq\infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t)\rightarrow 1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \tag{1.8.483}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t):t\geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.559. *Para el proceso $\{Z(t):t\geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1},T_n]$:*

$$M_n=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_n}|Z(t)-Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.344. *Supóngase que $n^{-1}T_n\rightarrow\mu$ c.s. cuando $n\rightarrow\infty$, donde $\mu\leq\infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) = a,\ c.s. \tag{1.8.484}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) = a/\mu,\ c.s. \tag{1.8.485}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n=0$ c.s.

Corolario 1.8.160. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n)-Z(T_{n-1}),M_n)$, para $n\geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t)\rightarrow\frac{\mathbb{E}[Z(T_1)-Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]},\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \tag{1.8.486}$$

1.8.112 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.560. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.232. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1.8.561. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.233. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.402. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.345. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.161 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

1.8.113 Procesos de Renovación

Definición 1.8.562. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.487}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.563. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.403. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

1.8.114 Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\left\{T_1^i, T_2^i, \ldots, T_k^i, \ldots\right\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_i$. Además se sabe que para

$$T^* = \min\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

T^* se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{4} \mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad \text{y} \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min\{\tilde{r}, \hat{r}\},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \overline{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \overline{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\overline{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

1.8.115 Resultados para Procesos de Salida

En [?] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 1.8.234. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 1.8.346. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) Los tiempos de servicio son identicamente cero;
  b) $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;
  c) $L = 1$ y $G = D$;
  d) $L = \infty$ y $G = M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;
  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;
  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.

- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 1.8.347. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.

  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$

  d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 1.8.348. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [?] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 1.8.349. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right) 2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2 (1-\delta)^{-1}.
\end{aligned}$$

  Teorema 1.8.350. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 1.8.351. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

1.8.116 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.564. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 1.8.19. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 1.8.20. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.565 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.404. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.566. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.405. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

1.8.117 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 1.8.567. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.488}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.568. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.406. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.235. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.407. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.352. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{1.8.489}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{1.8.490}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.162 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.491}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.569. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.353. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} &(1.8.492)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} &(1.8.493)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.163. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.494}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.570. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.236. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 1.8.571. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.237. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.408. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.354. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.164 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 1.8.572. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{1.8.495}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.238. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.355 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.573. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.239. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1.8.574. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.240. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.409. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.356. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.165 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 1.8.575. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{1.8.496}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.241. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.357 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \to \infty.$$

Nota 1.8.410. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 1.8.358 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.8.242. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ \textit{donde}\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.576. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.243. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 1.8.359 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Nota 1.8.411. *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.360 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 1.8.244. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 1.8.577. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.245. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 1.8.361 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

1.8.118 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.578. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 1.8.21. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 1.8.22. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.579 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.412. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.580. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.413. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

1.8.119 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.581. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 1.8.23. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 1.8.24. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.582 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.414. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.583. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.415. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

1.8.120 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.246. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.416. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.362. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{1.8.497}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{1.8.498}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 1.8.166 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \tag{1.8.499}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.584. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.363. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (1.8.500)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.501)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.167. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.8.502)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 1.8.247. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.417. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 1.8.364. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (1.8.503)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.504)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.168 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.505}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.585. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.365. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (1.8.506)\\ lim_{t\to\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (1.8.507)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.169. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1}Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.508}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.248. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.418. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.366. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} \quad (1.8.509)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (1.8.510)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.170 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$
t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.8.511)
$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.586. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$
M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|
$$

Teorema 1.8.367. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \quad (1.8.512)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (1.8.513)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.171. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.8.514)
$$

1.8.121 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\
T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N(T_n) = n$, y

$$
N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}
$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$
P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)
$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.249. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.419. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.368. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.515}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.516}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.172 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.517}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.587. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.369. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.518}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.519}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.173. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.520}$$

1.8.122 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.588. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t + x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.589. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.590. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.370. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

1.8.123 Procesos de Renovación

Definición 1.8.591. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.521}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.592. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.420. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

1.8.124 Teorema Principal de Renovación

Nota 1.8.421. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 1.8.371 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.8.250. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,, \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.593. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T + t) | T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.251. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t)\,, \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 1.8.372 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right]$.

1.8.125 Función de Renovación

Definición 1.8.594. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{1.8.522}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.252. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (??).*

Teorema 1.8.373 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

1.8.126 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.253. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.422. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.374. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.523}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.524}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.174 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.525}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.595. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.375. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.526}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.527}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.175. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.528}$$

1.8.127 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.596. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.254. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 1.8.597. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.255. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.423. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.376. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.176 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t)+1]\,,\ t \geq 0,$$

1.8.128 Procesos de Renovación

Definición 1.8.598. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)\,, \tag{1.8.529}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.599. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 1.8.424. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

1.8.129 Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\left\{T_1^i, T_2^i, \ldots, T_k^i, \ldots\right\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_i$. Además se sabe que para

$$T^* = \min\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

T^* se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{4} \mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad \text{y} \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min\left\{\tilde{r}, \hat{r}\right\},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \overline{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \overline{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\overline{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

1.8.130 Resultados para Procesos de Salida

En [?] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 1.8.256. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1}X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k}X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.

- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 1.8.377. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) Los tiempos de servicio son identicamente cero;

  b) $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;

  c) $L = 1$ y $G = D$;

  d) $L = \infty$ y $G = M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\left\{T_{n+1} - T_n \leq t\right\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;

  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;

  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;

  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 1.8.378. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.

  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$

  d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 1.8.379. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [?] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.

- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 1.8.380. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right]\\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right]\\ var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1}-\delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2(1-\delta)^{-1}.\end{aligned}$$

  Teorema 1.8.381. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 1.8.382. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

1.8.131 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [?]

Definición 1.8.600 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.425. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [**?**].*

Nota 1.8.426. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 1.8.601. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.427. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 1.8.428. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 1.8.429. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 1.8.430.

a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.602. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.603. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.604. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.383. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 1.8.177. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \to \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \to \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 1.8.605. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.530}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.606. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.431. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 1.8.432. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.384 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \to \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.8.257. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.607. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T + t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.258. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 1.8.385 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.259. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.433. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.386. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.531}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.532}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.178 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.533}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.608. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.387. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \ c.s. && (1.8.534)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \ c.s. && (1.8.535) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.179. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \ c.s. \ cuando\ t \rightarrow \infty. \tag{1.8.536}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq &\ \ t \ < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.260. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.434. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.388. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{eqnarray}
lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_{n} &=& \mu, \ c.s. \tag{1.8.537}\\
lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) &=& 1/\mu, \ c.s. \tag{1.8.538}
\end{eqnarray}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.180 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t\rightarrow\infty. \tag{1.8.539}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\left\{Z\left(t\right):t\geq0\right\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N\left(t\right)$

Definición 1.8.609. *Para el proceso $\left\{Z\left(t\right):t\geq0\right\}$ se define la fluctuación máxima de $Z\left(t\right)$ en el intervalo $\left(T_{n-1},T_{n}\right]$:*

$$M_{n}=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_{n}}|Z\left(t\right)-Z\left(T_{n-1}\right)|$$

Teorema 1.8.389. *Supóngase que $n^{-1}T_{n}\rightarrow\mu$ c.s. cuando $n\rightarrow\infty$, donde $\mu\leq\infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{eqnarray}
lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_{n}\right) &=& a, \ c.s. \tag{1.8.540}\\
lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &=& a/\mu, \ c.s. \tag{1.8.541}
\end{eqnarray}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_{n}=0$ c.s.

Corolario 1.8.181. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_{n}\right)-Z\left(T_{n-1}\right),M_{n}\right)$, para $n\geq1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right)\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_{1}\right)-Z\left(T_{0}\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_{1}\right]}, \ c.s. \ cuando \ t\rightarrow\infty. \tag{1.8.542}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{eqnarray*}
\left\{N\left(t\right)\geq n\right\} &=& \left\{T_{n}\leq t\right\}\\
T_{N\left(t\right)}\leq &t& < T_{N\left(t\right)+1},
\end{eqnarray*}$$

además $N\left(T_{n}\right)=n$, y

$$N\left(t\right)=\max\left\{n:T_{n}\leq t\right\}=\min\left\{n:T_{n+1}>t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_{n}\leq t\right\}=F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{eqnarray*}
\left\{N\left(t\right)\geq n\right\} &=& \left\{T_{n}\leq t\right\}\\
P\left\{N\left(t\right)\leq n\right\} &=& 1-F^{\left(n+1\right)\star}\left(t\right)
\end{eqnarray*}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{N\left(t\right)\geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 1.8.261. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.435. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.390. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (1.8.543)$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (1.8.544)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.182 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.8.545)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.610. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.391. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (1.8.546)$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (1.8.547)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.183. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z(T_1) - Z(T_0)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.8.548)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.262. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.436. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.392. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.549}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.550}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.184 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.551}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.611. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.393. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.552}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.553}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.185. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.554}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.263. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.437. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.394. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.555}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.556}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.186 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.557}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.612. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.395. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.558}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.559}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.187. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.560}$$

Definición 1.8.613. *Sea $h\left(t\right)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h\left(t\right)$ y la distribución F es*

$$H\left(t\right) = h\left(t\right) + \int_{[0,t]} H\left(t-s\right)dF\left(s\right), \, t \geq 0, \tag{1.8.561}$$

donde $H\left(t\right)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H\left(t\right)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.264. *La función $U \star h\left(t\right)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.396 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.614. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N\left(t\right)$, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = \mathbb{1}\left(t \geq 0\right)$.

Proposición 1.8.265. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U\left(t\right)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 1.8.615. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t}dF\left(t\right), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 1.8.266. *La Transformada de Laplace $\hat{U}\left(\alpha\right)$ y $\hat{F}\left(\alpha\right)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}\left(\alpha\right) = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$.*

Nota 1.8.438. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.397. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.188 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1]\,,\ t \geq 0,$$

Definición 1.8.616. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)\,, \tag{1.8.562}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.617. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.439. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 1.8.618. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)\,, \tag{1.8.563}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.619. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.440. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.267. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 1.8.15 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 1.8.441. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.398. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \; c.s. \tag{1.8.564}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \; c.s. \tag{1.8.565}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.189 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.566}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.620. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.399. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.567}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.568}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.190. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.569}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.621. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.268. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1.8.622. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.269. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.442. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.400. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.191 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t)+1],\ t \geq 0,$$

Definición 1.8.623. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{1.8.570}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.270. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.401 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.624. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.271. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 1.8.625. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.272. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.443. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.402. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.192 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1]\,,\ t \geq 0,$$

Definición 1.8.626. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s)\,,\ t \geq 0, \tag{1.8.571}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.273. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.403 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \to \infty.$$

Nota 1.8.444. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.404 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.8.274. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ \textit{donde}\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.627. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.275. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 1.8.405 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\left\{|X\left(t\right)|:t\leq T\right\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right]$.

Nota 1.8.445. *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h\left(t\right)\geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h\left(t\right)|\leq b\left(t\right)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.406 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 1.8.276. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 1.8.628. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.277. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 1.8.407 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\left\{|X\left(t\right)|:t\leq T\right\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right]$.

Definición 1.8.629. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 1.8.446. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 1.8.447. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 1.8.448. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.630. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 1.8.449. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 1.8.408 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 1.8.631 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t*.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t*, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t*.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$*, la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t*.*

Nota 1.8.450. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n*, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$*. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t + y) - N((t - x)) = 0\} \tag{1.8.572}$$

Ejemplo 1.8.16 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*, entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$*.*

Nota 1.8.451. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 1.8.632. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 1.8.452. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 1.8.278. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 1.8.409. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 1.8.453. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 1.8.193. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 1.8.454. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.8.455. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.633 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 1.8.634. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.456. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.635. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.457. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.8.458. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.636 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.459. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.637. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.460. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.638. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.639. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.640. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.410. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.641. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.642. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.643. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.411. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$[61], se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i\left(z\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (**??**): $n\rightarrow t-\tau_i\left(m\right)$, $T\rightarrow\overline{\tau}_i\left(m\right)-\tau_i\left(m\right)$, $L_n\rightarrow L_i\left(t\right)$ y $F\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{L_0}\right]\rightarrow F_i\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{L_i\tau_i(m)}\right]$, se puede ver que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right]=z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)} \tag{1.8.573}$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i\left(t\right)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i\left(z\right)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right]=\frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i\left(z\right)}\\
&= \frac{1-I_i\left[P_i\left(z\right)\right]}{1-P_i\left(z\right)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Q_i\left(z\right) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right]+\mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\left\{z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)}+\frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}\right\}
\end{aligned}$$

[61] En Stidham[**?**] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]<\infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$, además, como $M_i>0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}\left[C_i\right]<\infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N}\mu_k<1$.

es decir

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1-z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \tag{1.8.574}$$

Teorema 1.8.412. *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t, $A_j(t) = \{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\}$ para algún tiempo $t \geq 0$ y Q_j la cola j-ésima en la RSVC, para $j = 1,2,3,4$. Existe un intervalo $I \neq \emptyset$ tal que para $T^* \in I$, tal que $\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(Tt^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I\} > 0$.*

Proof. Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.

Sea $n > 0$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1(n) > 0$, entonces tenemos que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1(n)$.

Definamos el intervalo $I_1 \equiv [\overline{\tau}_1(n), \tau_2(n)]$ de longitud $\xi_1 = r_1(n)$. Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$\mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)}. \tag{1.8.575}$$

Por otra parte, para la cola Q_2, el tiempo $\overline{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\overline{\tau}_2(n-1)) = 0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n. Entonces tenemos un sgundo intervalo $I_2 \equiv [\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)}, \tag{1.8.576}$$

donde $\xi_2(n) = \tau_2(n) - \overline{\tau}_2(n-1)$.

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} &= \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\} \\
&\geq \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} \\
&= e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]}.
\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]} > 0. \tag{1.8.577}$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC, se afirma que existe $m > 0$ tal que $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$.

Para Q_3 sea $I_3 = [\overline{\tau}_3(m), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_3(m) = r_3(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(n)}. \tag{1.8.578}$$

Análogamente que como se hizo para Q_2, tenemos que para Q_4 se tiene el intervalo $I_4 = [\overline{\tau}_4(m-1), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_4(m) = \tau_4(m) - \overline{\tau}_4(m-1)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} = e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(n)}. \tag{1.8.579}$$

Al igual que para el primer sistema, dado que $I_3(m) \subset I_4(m)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\xi_3(m) \leq \xi_4(m) &\Leftrightarrow -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\
-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m) &\Leftrightarrow e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} \\
\mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} &\geq \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\}
\end{aligned}$$

Entonces, dado que los eventos A_3 y A_4 son independientes, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t) \mid t \in I_3(m)\right\} &= \mathbb{P}\left\{A_3(t) \mid t \in I_3(m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(t) \mid t \in I_3(m)\right\} \\ &\geq \mathbb{P}\left\{A_3(t) \mid t \in I_3(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(t) \mid t \in I_4(n)\right\} \\ &= e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)} e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} = e^{-\left[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)+\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)\right]}.\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t) \mid t \in I_3(m)\right\} = e^{-\left[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)+\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)\right]} > 0. \tag{1.8.580}$$

Por construcción se tiene que $I(n,m) \equiv I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$,entonces en particular se tienen las contenciones $I(n,m) \subseteq I_1(n)$ y $I(n,m) \subseteq I_3(m)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m} \equiv \ell(I(n,m))$ tenemos que

$$\xi_{n,m} \leq \xi_1(n) \text{ y } \xi_{n,m} \leq \xi_3(m) \text{ entonces } -\xi_{n,m} \geq -\xi_1(n) \text{ y } -\xi_{n,m} \leq -\xi_3(m)$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{array}{ll}-\tilde{\mu}_1 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_1 \xi_1(n), & -\tilde{\mu}_2 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_2(n), \\ -\tilde{\mu}_3 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_3 \xi_3(m), & -\tilde{\mu}_4 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m).\end{array}$$

Sea $T^* \in I_{n,m}$, entonces dado que en particular $T^* \in I_1(n)$ se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2, en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4, es decir, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$, $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I_{n,m}$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4, por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left\{A_1(T^*), A_2(T^*), A_3(T^*), A_4(T^*) \mid T^* \in I_{n,m}\right\} = \prod_{j=1}^4 \mathbb{P}\left\{A_j(T^*) \mid T^* \in I_{n,m}\right\} \\ &\geq \mathbb{P}\left\{A_1(T^*) \mid T^* \in I_1(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_2(T^*) \mid T^* \in I_2(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_3(T^*) \mid T^* \in I_3(m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(T^*) \mid T^* \in I_4(m)\right\} \\ &= e^{-\mu_1 \xi_1(n)} e^{-\mu_2 \xi_2(n)} e^{-\mu_3 \xi_3(m)} e^{-\mu_4 \xi_4(m)} = e^{-\left[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)+\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)+\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)+\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)\right]} > 0.\end{aligned} \tag{1.8.581}$$

□

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [?] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 1.8.413. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\ var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right) 2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2 (1-\delta)^{-1}.\end{aligned}$$

  Teorema 1.8.414. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 1.8.415. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

En Sigman, Thorison y Wolff [?] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 1.8.279. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1}X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k (X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 1.8.416. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*
  b) *$L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;*
  c) *$L = 1$ y $G = D$;*
  d) *$L = \infty$ y $G = M$.*

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;
  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;
  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 1.8.417. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

a) $s = \infty$

b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*

c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para* $L < \infty$

d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 1.8.418. *En cualquier sistema de colas* $GI/G/1/L$ *con* $1 \leq L < \infty$ *y distribución de interarribos* A *y distribución de los tiempos de servicio* B*, tal que* $A(0) = 0$*,* $A(t)(1 - B(t)) > 0$ *para alguna* $t > 0$ *y* $B(t)$ *para toda* $t > 0$*, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [?] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 1.8.419. *En un sistema estacionario* $GI/M/1$ *los intervalos de interpartida tienen*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right) 2\delta \left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2 (1-\delta)^{-1}.
\end{aligned}
$$

  Teorema 1.8.420. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario* $GI/M/1$ *es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 1.8.421. *Los intervalos de interpartida* $\{D_n\}$ *de un sistema* $M/G/1$ *estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo* $M/M/1$.

Sean Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 en una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC). Supongamos que cada una de las colas es del tipo $M/M/1$ con tasa de arribo μ_i y que la transferencia de usuarios entre los dos sistemas ocurre entre $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$ con respectiva tasa de arribo igual a la tasa de salida $\hat{\mu}_i = \mu_i$, esto se sabe por lo desarrollado en la sección anterior.

Consideremos, sin pérdida de generalidad como base del análisis, la cola Q_1 además supongamos al servidor lo comenzamos a observar una vez que termina de atender a la misma para desplazarse y llegar a Q_2, es decir al tiempo τ_2.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, ciclo del servidor en que regresa a Q_1 para dar servicio y atender conforme a la política exhaustiva, entonces se tiene que $\overline{\tau}_1(n)$ es el tiempo del servidor en el sistema 1 en que termina de dar servicio a todos los usuarios presentes en la cola, por lo tanto se cumple que $L_1(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, entonces el servidor para llegar a Q_2 incurre en un tiempo de traslado r_1 y por tanto se cumple que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1$. Dado que los tiempos entre arribos son exponenciales se cumple que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n) + r_1]\} &= e^{-\tilde{\mu}_1 r_1}, \\
\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n) + r_1]\} &= e^{-\tilde{\mu}_2 r_1}.
\end{aligned}
$$

El evento que nos interesa consiste en que no haya arribos desde que el servidor abandonó Q_2 y regresa nuevamente para dar servicio, es decir en el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Entonces, si hacemos

$$\begin{aligned}\varphi_1(n) &\equiv \overline{\tau}_1(n)+r_1=\overline{\tau}_2(n-1)+r_1+r_2+\overline{\tau}_1(n)-\tau_1(n)\\ &= \overline{\tau}_2(n-1)+\overline{\tau}_1(n)-\tau_1(n)+r,,\end{aligned}$$

y longitud del intervalo

$$\begin{aligned}\xi &\equiv \overline{\tau}_1(n)+r_1-\overline{\tau}_2(n-1)=\overline{\tau}_2(n-1)+\overline{\tau}_1(n)-\tau_1(n)+r-\overline{\tau}_2(n-1)\\ &= \overline{\tau}_1(n)-\tau_1(n)+r.\end{aligned}$$

Entonces, determinemos la probabilidad del evento no arribos a Q_2 en $[\overline{\tau}_2(n-1),\varphi_1(n)]$:

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1),\varphi_1(n)]\right\}=e^{-\tilde{\mu}_2\xi}. \tag{1.8.582}$$

De manera análoga, tenemos que la probabilidad de no arribos a Q_1 en $[\overline{\tau}_2(n-1),\varphi_1(n)]$ esta dada por

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1),\varphi_1(n)]\right\}=e^{-\tilde{\mu}_1\xi}, \tag{1.8.583}$$

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1),\varphi_1(n)]\right\}=e^{-\tilde{\mu}_2\xi}. \tag{1.8.584}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ y } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1),\varphi_1(n)]\right\}\\ &=\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1),\varphi_1(n)]\right\}\\ &\times\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1),\varphi_1(n)]\right\}=e^{-\tilde{\mu}_1\xi}e^{-\tilde{\mu}_2\xi}=e^{-\tilde{\mu}\xi}.\end{aligned} \tag{1.8.585}$$

Para el segundo sistema, consideremos nuevamente $\overline{\tau}_1(n)+r_1$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $m>0$ tal que $\overline{\tau}_3(m)<\overline{\tau}_1+r_1<\tau_4(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_3(m),\overline{\tau}_1(n)+r_1]\right\}=e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3}, \tag{1.8.586}$$

donde

$$\xi_3=\overline{\tau}_1(n)+r_1-\overline{\tau}_3(m)=\overline{\tau}_1(n)-\overline{\tau}_3(m)+r_1, \tag{1.8.587}$$

mientras que para Q_4 al igual que con Q_2 escribiremos $\tau_4(m)$ en términos de $\overline{\tau}_4(m-1)$:
$\varphi_2\equiv\tau_4(m)=\overline{\tau}_4(m-1)+r_4+\overline{\tau}_3(m)-\tau_3(m)+r_3=\overline{\tau}_4(m-1)+\overline{\tau}_3(m)-\tau_3(m)+\hat{r}$, además,
$\xi_2\equiv\varphi_2(m)-\overline{\tau}_1-r_1=\overline{\tau}_4(m-1)+\overline{\tau}_3(m)-\tau_3(m)-\overline{\tau}_1(n)+\hat{r}-r_1$.
Entonces

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_4 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n)+r_1,\varphi_2(m)]\right\}=e^{-\tilde{\mu}_4\xi_2}, \tag{1.8.588}$$

mientras que para Q_3 se tiene que

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n)+r_1,\varphi_2(m)]\right\}=e^{-\tilde{\mu}_3\xi_2} \tag{1.8.589}$$

Por tanto

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3\wedge Q_4 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n)+r_1,\varphi_2(m)]\right\}=e^{-\hat{\mu}\xi_2} \tag{1.8.590}$$

donde $\hat{\mu} = \tilde{\mu}_3 + \tilde{\mu}_4$.

Ahora, definamos los intervalos $\mathcal{I}_1 = \left[\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_1(n)\right]$ y $\mathcal{I}_2 = \left[\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)\right]$, entonces, sea $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ el intervalo donde cada una de las colas se encuentran vacías, es decir, si tomamos $T^* \in \mathcal{I}$, entonces $L_1(T^*) = L_2(T^*) = L_3(T^*) = L_4(T^*) = 0$.

Ahora, dado que por construcción $\mathcal{I} \neq \emptyset$ y que para $T^* \in \mathcal{I}$ en ninguna de las colas han llegado usuarios, se tiene que no hay transferencia entre las colas, por lo tanto, el sistema 1 y el sistema 2 son condicionalmente independientes en $\mathcal{I}$, es decir

$$\mathbb{P}\left\{L_1(T^*), L_2(T^*), L_3(T^*), L_4(T^*) | T^* \in \mathcal{I}\right\} = \prod_{j=1}^{4} \mathbb{P}\left\{L_j(T^*)\right\}, \tag{1.8.591}$$

para $T^* \in \mathcal{I}$.

Definición 1.8.644 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.461. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [**?**].*

Nota 1.8.462. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 1.8.645. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.463. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 1.8.464. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 1.8.465. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 1.8.466. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.646. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.647. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.648. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.422. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Corolario 1.8.194. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \to \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \to \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 1.8.649. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.592}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.650. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 1.8.467. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 1.8.468. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.423 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.8.280. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.651. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.281. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 1.8.424 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &=& 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.282. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.469. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.425. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.593}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.594}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.195 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.595}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.652. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.426. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (1.8.596)$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (1.8.597)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.196. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.8.598)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.283. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.470. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.427. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (1.8.599)$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (1.8.600)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.197 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.601}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.653. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.428. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (1.8.602)\\ lim_{t\to\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.603)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.198. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty}t^{-1}Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.604}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \;\; t \;\; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.284. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.471. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.429. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \; c.s. && (1.8.605)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \; c.s. && (1.8.606)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.199 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \; c.s. \; cuando \; t \rightarrow \infty. \tag{1.8.607}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.654. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.430. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \; c.s. && (1.8.608)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \; c.s. && (1.8.609)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.200. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z(T_1) - Z(T_0)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \; c.s. \; cuando \; t \rightarrow \infty. \tag{1.8.610}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\
T_{N(t)} \leq & \;\; t \;\; < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.285. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.472. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.431. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.611}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.612}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 1.8.201 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.613}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.655. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.432. *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.614}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.615}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.202. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.616}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.286. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.473. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.433. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.617}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.618}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.203 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.619}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.656. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.434. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) = a, \ c.s. \tag{1.8.620}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) = a/\mu, \ c.s. \tag{1.8.621}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.204. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \tag{1.8.622}$$

Definición 1.8.657. *Sea $h\left(t\right)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h\left(t\right)$ y la distribución F es*

$$H\left(t\right) = h\left(t\right) + \int_{\left[0,t\right]} H\left(t-s\right) dF\left(s\right), \ t \geq 0, \tag{1.8.623}$$

donde $H\left(t\right)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H\left(t\right)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.287. *La función $U \star h\left(t\right)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.435 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \ cuando \ t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.658. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N\left(t\right)$, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = \mathbb{1}\left(t \geq 0\right)$.

Proposición 1.8.288. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U\left(t\right)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 1.8.659. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF\left(t\right), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 1.8.289. *La Transformada de Laplace $\hat{U}\left(\alpha\right)$ y $\hat{F}\left(\alpha\right)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}\left(\alpha\right) = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$.*

Nota 1.8.474. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.436. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.205 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 1.8.660. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.624}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.661. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.475. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 1.8.662. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.625}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.663. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 1.8.476. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.290. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 1.8.17 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 1.8.477. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.437. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.626}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.627}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.206 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \tag{1.8.628}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.664. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.438. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) = a, \ c.s. \tag{1.8.629}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) = a/\mu, \ c.s. \tag{1.8.630}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.207. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \tag{1.8.631}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.665. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.291. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 1.8.666. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.292. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.478. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.439. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.208 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 1.8.667. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{1.8.632}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.293. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.440 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.668. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.294. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 1.8.669. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.295. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha)=\frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.479. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)]=\lambda t$, para $t\geq 0$.*

Teorema 1.8.441. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t)=\mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f:\mathbb{R}_+\rightarrow\mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()}f(T_n)\right]=\int_{(0,t]}f(s)\,d\eta(s)\,,\ t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1,X_2,\ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n|T_n=s]=f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)}X_n\right]=\int_{(0,t]}f(s)\,d\eta(s)\,,\ t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.209 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right]=\mu\mathbb{E}[N(t)+1]\,,\ t\geq 0,$$

Definición 1.8.670. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t)=h(t)+\int_{[0,t]}H(t-s)\,dF(s)\,,\ t\geq 0,\tag{1.8.633}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 1.8.296. *La función $U\star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.442 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t)\rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t\rightarrow\infty.$$

Nota 1.8.480. *Una función $h:\mathbb{R}_+\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t)\geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 1.8.443 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+}h(s)\,ds.$$

Proposición 1.8.297. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t)\,,\ \textit{donde}\ h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 1.8.671. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.298. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 1.8.444 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 1.8.481. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.445 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 1.8.299. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.672. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.300. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 1.8.446 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Definición 1.8.673. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 1.8.482. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 1.8.483. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 1.8.484. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.674. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 1.8.485. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 1.8.447 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 1.8.675 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t*.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t*, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t*.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$*, la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t*.*

Nota 1.8.486. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n*, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$*. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t + y) - N((t - x)) = 0\} \tag{1.8.634}$$

Ejemplo 1.8.18 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*, entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$*.*

Nota 1.8.487. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 1.8.676. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 1.8.488. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 1.8.301. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 1.8.448. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 1.8.489. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 1.8.210. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 1.8.490. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Nota 1.8.491. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.677 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 1.8.678. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.492. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.679. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.493. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.8.494. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.680 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.495. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.681. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.496. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.682. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.683. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.684. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.449. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.685. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.686. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.687. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.450. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces

Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t. Entonces, determinando el primer momento es posible ver que

Definición 1.8.688. *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 1.8.689. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.*

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si $I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$ se tiene que $F_i(z) = I_i[P_i(z)]$ para $i = 1, 2$.

Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (**??**), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 1.8.690. *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 1.8.691. *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 1.8.692. *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

[62]

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.693. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.*

Nota 1.8.497. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 1.8.694. *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma\left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 1.8.695. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 1.8.451. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

[62]In Stidham and Heyman [**?**] shows that is sufficient for the regenerative process to be stationary that the mean regenerative cycle time is finite: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$,

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1$.

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i,P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 1.8.696. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 1.8.697. *Dos espacios medibles $(E,\mathcal{E})$ y $(G,\mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f: E \to G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 1.8.698. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G,\mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0,1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 1.8.498. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 1.8.699. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ es una familia $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E,\mathcal{E})$.*

Definición 1.8.700. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0,\infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}}(E,\mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w\in\Omega$.

Nota 1.8.499. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 1.8.500. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E,\mathcal{E}) = (\mathbb{R},\mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_1} \leq x_1, \ldots, Z_{t_n} \leq x_n\right), x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{1.8.635}$$

Nota 1.8.501. *Para espacios polacos $(E,\mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 1.8.701. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w\in\Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 1.8.502. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H,\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z\in H$ a $z_t\in E$ para $t\in\mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{1.8.636}$$

Nota 1.8.503. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ a $(H,\mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H,\mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 1.8.504. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H,\mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 1.8.702. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0,\infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w).w\in\Omega.$$

Definición 1.8.703. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible **(CM)** si el mapeo que toma $(w,t) \in \Omega \times [0,\infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 1.8.505. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w,T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w,T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 1.8.704. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H,\mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible **(CCM)** si el mapeo $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 1.8.506. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0,\infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w,t) en $(Z(w),t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w),t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 1.8.705. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s\in[0,\infty)} : z \in H\right\} = H,\ t \in [0,\infty).$$

Definición 1.8.706. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0,\infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s\in[0,\infty)},\ z \in H.$$

Definición 1.8.707. *Se dice que un proceso Z es shift-medible **(SM)** si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ medible.*

Nota 1.8.507. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 1.8.508.
- *Dado el espacio polaco $(E,\mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0,\infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 1.8.509. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 1.8.452. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 1.8.708. *Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^{\infty}$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L,\mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^{\infty} \in [0,\infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.

Así el par (Z,S) es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^{+}$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 1.8.709. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z,(s_k)_0^{\infty}\right) = \theta_t\left(z,\left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^{\infty}\right)$$

donde $n_{t-} = inf\left\{n \geq 1 : s_n \geq t\right\}$.

Nota 1.8.510. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 1.8.710. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0,S_n), S_0, \ldots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 1.8.511. *Si el par (Z,S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 1.8.453. *Supóngase que el par (Z,S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z,S) con periodo d.*

Definición 1.8.711. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx > 0$ con $X_2, X_3, \ldots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\,dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 1.8.712. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 1.8.512.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 1.8.513. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 1.8.454. *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 1.8.455. *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0, S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*, S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 1.8.456. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{1.8.637}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{1.8.638}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{1.8.639}$$

1.8.132 Output Process and Regenerative Processes

En Sigman, Thorison y Wolff [?] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 1.8.302. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k (X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 1.8.457. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*
  b) *$L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;*
  c) *$L = 1$ y $G = D$;*
  d) *$L = \infty$ y $G = M$.*

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;
  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;
  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.

- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.

- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 1.8.458. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.

  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$

  d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 1.8.459. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Definición 1.8.713 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.514. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [**?**].*

Nota 1.8.515. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 1.8.714. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$
\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\, du,
\end{aligned}
$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$
\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},
$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.516. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 1.8.517. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 1.8.518. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 1.8.519.

a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.715. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.716. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.717. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.460. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Corolario 1.8.211. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\,ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 1.8.718. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.640}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.719. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.520. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 1.8.521. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.461 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 1.8.303. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,, \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.720. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T + t)\,|T] = \mathbb{E}[X(t)]\,, \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.304. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 1.8.462 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.305. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.522. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.463. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.641}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.642}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.212 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.643}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.721. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.464. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (1.8.644)$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (1.8.645)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.213. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \quad (1.8.646)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.306. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.523. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.465. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (1.8.647)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.648)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.214 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.649}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.722. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.466. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (1.8.650)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.651)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.215. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.652}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq &\quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.307. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.524. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.467. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.653}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.654}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.216 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.655}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.723. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.468. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.656}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.657}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.217. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.658}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq \quad & t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.308. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.525. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.469. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.659}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.660}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.218 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.661}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.724. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.470. *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.662}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.663}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.219. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.8.664}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.309. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.526. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.471. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{1.8.665}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{1.8.666}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.220 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \ c.s. \ cuando\ t \rightarrow \infty. \tag{1.8.667}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.725. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.472. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n\rightarrow\infty$, donde $\mu\leq\infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a,\ c.s. &(1.8.668)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu,\ c.s. &(1.8.669)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n=0$ c.s.

Corolario 1.8.221. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right)-Z\left(T_{n-1}\right),M_n\right)$, para $n\geq1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right)\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right)-Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]},\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \quad (1.8.670)$$

Definición 1.8.726. *Sea $h\left(t\right)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h\left(t\right)$ y la distribución F es*

$$H\left(t\right)=h\left(t\right)+\int_{\left[0,t\right]}H\left(t-s\right)dF\left(s\right),\ t\geq0, \quad (1.8.671)$$

donde $H\left(t\right)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H\left(t\right)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 1.8.310. *La función $U\star h\left(t\right)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.473 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U\left(t\right)\rightarrow1/\mu,\ cuando\ t\rightarrow\infty.$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.727. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N\left(t\right)$, es*

$$U\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}\left(t\right),\ t\geq0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right)=\mathbb{1}\left(t\geq0\right)$.

Proposición 1.8.311. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U\left(t\right)$ también tiene densidad, para $t>0$, y es $U^{'}\left(t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{n\star}\left(t\right)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right)>N\left(t-\right)\right\}=0,\ t\geq0.$$

Definición 1.8.728. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right)=\int_{\mathbb{R}_{+}}e^{-\alpha t}dF\left(t\right),\ \alpha\geq0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F}\left(\alpha\right)^{n}=\frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 1.8.312. *La Transformada de Laplace $\hat{U}\left(\alpha\right)$ y $\hat{F}\left(\alpha\right)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}\left(\alpha\right)=\frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$.*

Nota 1.8.527. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.474. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.222 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1]\,,\ t \geq 0,$$

Definición 1.8.729. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)\,, \tag{1.8.672}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.730. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.528. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 1.8.731. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)\,, \tag{1.8.673}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.732. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.529. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.313. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 1.8.19 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 1.8.530. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.475. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.674}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.675}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.223 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \tag{1.8.676}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.733. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.476. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a, \ c.s. & (1.8.677)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \ c.s. & (1.8.678)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.224. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \tag{1.8.679}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.734. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.314. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 1.8.735. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.315. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.531. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.477. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.225 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 1.8.736. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t - s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{1.8.680}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.316. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.478 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.737. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.317. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 1.8.738. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.318. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.532. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.479. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.226 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 1.8.739. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{1.8.681}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.319. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.480 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 1.8.533. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.481 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \to \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.8.320. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.740. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right], \text{ para } t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.321. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right), \text{ donde } h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 1.8.482 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\left\{|X\left(t\right)|:t\leq T\right\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right]$.

Nota 1.8.534. *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h\left(t\right)\geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h\left(t\right)|\leq b\left(t\right)$, donde b es DRI.*

Teorema 1.8.483 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 1.8.322. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right), \text{ donde } h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 1.8.741. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right], \text{ para } t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.323. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right), \text{ donde } h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 1.8.484 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\left\{|X\left(t\right)|:t\leq T\right\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right]$.

Definición 1.8.742. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.535. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.8.536. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 1.8.537. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.743. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.538. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 1.8.485 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 1.8.744 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 1.8.539. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{1.8.682}$$

Ejemplo 1.8.20 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 1.8.540. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 1.8.745. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 1.8.541. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 1.8.324. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 1.8.486. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\,ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 1.8.542. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 1.8.227. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 1.8.543. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Nota 1.8.544. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.746 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 1.8.747. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.545. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.748. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.546. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.8.547. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.749 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.548. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.750. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.549. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.751. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.752. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.753. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.487. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.754. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.755. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.8.756. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.8.488. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

1.8.133 Procesos Regenerativos

1.8.134 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [?]

Definición 1.8.757 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.550. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [?].*

Nota 1.8.551. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 1.8.758. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.552. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 1.8.553. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 1.8.554. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 1.8.555.

a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.759. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 1.8.760. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1.8.761. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t,w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 1.8.489. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Corolario 1.8.228. *Sea* $\{V(t), t \geq 0\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E} < \infty$*,* F *es no-aritmética, y para todo* $x \geq 0$*,* $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $[0, \tau]$*, entonces* $V(t)$ *converge en distribución cuando* $t \rightarrow \infty$ *y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) \, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V(t)$ *cuando* $t \rightarrow \infty$*.*

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 1.8.762. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.683}$$

para $t \geq 0$*.*

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.763. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, para* $n \geq 1$*, son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F*, donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$*. Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 1.8.556. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 1.8.557. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.490 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.8.325. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.764. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.326. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t),\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 1.8.491 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ P\{N(t)\leq n\} &= 1-F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.327. *Para cada $t\geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m]<\infty$, para $m\geq 1$.*

Nota 1.8.558. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n\geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G\star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.492. *Para una constante $\mu\leq\infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n &= \mu,\ c.s. &(1.8.684)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N(t) &= 1/\mu,\ c.s. &(1.8.685)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.229 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu\leq\infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t)\rightarrow 1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \tag{1.8.686}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t):t\geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.765. *Para el proceso $\{Z(t):t\geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1},T_n]$:*

$$M_n=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_n}|Z(t)-Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.493. *Supóngase que $n^{-1}T_n\rightarrow\mu$ c.s. cuando $n\rightarrow\infty$, donde $\mu\leq\infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a,\ c.s. &(1.8.687)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu,\ c.s. &(1.8.688)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n=0$ c.s.

Corolario 1.8.230. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n)-Z(T_{n-1}),M_n)$, para $n\geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t)\rightarrow\frac{\mathbb{E}[Z(T_1)-Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]},\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \tag{1.8.689}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.328. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.559. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.494. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.690}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.691}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.231 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.692}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.766. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.495. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} & (1.8.693)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (1.8.694) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.232. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (1.8.695)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 1.8.329. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.560. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 1.8.496. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (1.8.696)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (1.8.697) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.233 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.698}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.767. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.497. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (1.8.699)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (1.8.700) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.234. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.701}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq &\; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.330. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.561. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.498. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.702}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.703}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.235 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.704}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.768. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.499. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.705}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.706}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.236. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.707}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.331. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.8.562. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.500. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.708}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.709}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.237 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.710}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.769. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.501. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.711}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.712}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.238. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.713}$$

Definición 1.8.770. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \ t \geq 0, \tag{1.8.714}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.332. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.502 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.771. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.333. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1.8.772. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.334. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.563. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.503. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.239 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 1.8.773. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.8.715}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.774. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.564. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

1.8.135 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 1.8.775. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \qquad (1.8.716)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.8.776. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.8.565. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.8.335. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 1.8.21 (**Proceso Poisson**)**.** *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 1.8.566. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.8.504. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.717}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.718}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.8.240 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.719}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.8.777. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.8.505. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.8.720}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.8.721}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.8.241. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.8.722}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.778. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.336. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 1.8.779. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.337. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.567. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.506. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.242 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 1.8.780. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{1.8.723}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.8.338. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.507 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.8.781. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 1.8.339. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1.8.782. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.8.340. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.8.568. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 1.8.508. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.8.243 (Identidad de Wald para Renovaciones). *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right], \; t \geq 0,$$

Definición 1.8.783. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{1.8.724}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 1.8.341. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.8.509 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 1.8.569. *Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.8.510 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.8.342. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.8.784. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.343. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 1.8.511 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Nota 1.8.570. *Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$*, donde b es DRI.*

Teorema 1.8.512 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds.$$

Proposición 1.8.344. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 1.8.785. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.8.345. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 1.8.513 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\left\{|X(t)|:t\leq T\right\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Definición 1.8.786. *Para el proceso $\left\{(N(t),X(t)):t\geq 0\right\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1},T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n=\left(\xi_n,\left\{X(T_{n-1}+t):0\leq t<\xi_n\right\}\right)$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.571. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t)=f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f:\tilde{S}\rightarrow S$.*

Nota 1.8.572. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 1.8.573. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\left\{X(t):t\geq 0\right\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\left\{X(t):t\geq 0\right\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_{+}$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n=T_n-T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.787. *Para el proceso $\left\{(N(t),X(t)):t\geq 0\right\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1},T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n=\left(\xi_n,\left\{X(T_{n-1}+t):0\leq t<\xi_n\right\}\right)$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.574. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 1.8.514 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 1.8.788 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 1.8.575. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{1.8.725}$$

Ejemplo 1.8.22 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 1.8.576. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 1.8.789. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 1.8.577. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 1.8.346. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 1.8.515. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación N es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 1.8.578. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 1.8.244. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 1.8.579. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.8.580. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.790 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 1.8.791. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.581. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.8.792. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.8.582. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.8.583. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.8.793 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.8.584. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.8.794. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.8.585. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.8.795. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t + x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.8.796. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1.8.797. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 1.8.516. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

1.9 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [?]

Definición 1.9.1 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.9.1. *La existencia de un primer tiempo de regeneración,* R_1*, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos* $R_1, R_2 \ldots,$ *que satisfacen la propiedad deseada [**?**].*

Nota 1.9.2. *Para la cola* $GI/GI/1$ *los usuarios arriban con tiempos* t_n *y son atendidos con tiempos de servicio* S_n*, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (***i.i.d.***)*$T_n = t_n - t_{n-1}$*, además los tiempos de servicio son* ***i.i.d.*** *e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que* $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$*.*

Definición 1.9.2. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.9.3. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 1.9.4. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 1.9.5. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 1.9.6.
a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Definición 1.9.3. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.9.1}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1.9.4. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.9.7. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

1.9.1 Teorema Principal de Renovación

Nota 1.9.8. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 1.9.1 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U\star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds.$$

Proposición 1.9.1. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U\star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F\star H(t)$$

Definición 1.9.5. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.9.2. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U\star h(t)\,,\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 1.9.2 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

1.9.2 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t)\geq n\} &=& \{T_n\leq t\}\\ T_{N(t)}\leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n\leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n\leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t)\geq n\} &=& \{T_n\leq t\}\\ P\{N(t)\leq n\} &=& 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t)\geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.9.3. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 1.9.9. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.9.3. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.9.2}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.9.3}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.9.1 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.9.4}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.9.6. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.9.4. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{1.9.5}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.9.6}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 1.9.2. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z(T_1) - Z(T_0)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{1.9.7}$$

1.9.3 Función de Renovación

Definición 1.9.7. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{1.9.8}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.9.4. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.9.5 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

1.9.4 Procesos de Renovación

Definición 1.9.8. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.9.9}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 1.9.9. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.9.10. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

1.9.5 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 1.9.10. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{1.9.10}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 1.9.11. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 1.9.11. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 1.9.5. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 1.9.1 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 1.9.12. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 1.9.6. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{1.9.11}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{1.9.12}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 1.9.3 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{1.9.13}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1.9.12. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 1.9.7. *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a,\ c.s. && (1.9.14)\\
lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu,\ c.s. && (1.9.15)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 1.9.4. *Si* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación, y* $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]},\ c.s.\ cuando\ t \rightarrow \infty. \qquad (1.9.16)
$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.9.13. *La función de renovación asociada con la distribución* F*, del proceso* $N\left(t\right)$*, es*

$$
U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right),\ t \geq 0,
$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = \mathbb{1}\left(t \geq 0\right)$*.*

Proposición 1.9.6. *Supóngase que la distribución de inter-renovación* F *tiene densidad* f*. Entonces* $U\left(t\right)$ *también tiene densidad, para* $t > 0$*, y es* $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$*. Además*

$$
\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0,\ t \geq 0.
$$

Definición 1.9.14. *La Transformada de Laplace-Stieljes de* F *está dada por*

$$
\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t}dF\left(t\right),\ \alpha \geq 0.
$$

Entonces

$$
\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}\left(\alpha\right)}.
$$

Proposición 1.9.7. *La Transformada de Laplace* $\hat{U}\left(\alpha\right)$ *y* $\hat{F}\left(\alpha\right)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}\left(\alpha\right) = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$*.*

Nota 1.9.13. *Un proceso de renovación* $N\left(t\right)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}\left[U\left(t\right)\right] = \lambda t$*, para* $t \geq 0$*.*

Teorema 1.9.8. *Sea* $N\left(t\right)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta\left(t\right) = \mathbb{E}\left[N\left(\right)\right]$ *es finita para cada* t*. Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$*,*

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N\left(\right)} f\left(T_n\right)\right] = \int_{\left(0,t\right]} f\left(s\right)d\eta\left(s\right),\ t \geq 0,
$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N\left(t\right)$ *tal que* $\mathbb{E}\left[X_n|T_n = s\right] = f\left(s\right)$*, independiente de* n*. Entonces*

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N\left(t\right)} X_n\right] = \int_{\left(0,t\right]} f\left(s\right)d\eta\left(s\right),\ t \geq 0,
$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.9.5 (Identidad de Wald para Renovaciones). *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right]=\mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right],\; t\geq 0,$$

Definición 1.9.15. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t)=h(t)+\int_{[0,t]}H(t-s)\,dF(s)\,,\; t\geq 0, \tag{1.9.17}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 1.9.8. *La función $U\star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 1.9.9 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t)\rightarrow 1/\mu,\;\textit{cuando } t\rightarrow\infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1.9.16. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)\,,\;\; t\geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t)=\mathbb{1}(t\geq 0)$.

Proposición 1.9.9. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t>0$, y es $U^{'}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t)>N(t-)\right\}=0,\; t\geq 0.$$

Definición 1.9.17. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha)=\int_{\mathbb{R}_{+}}e^{-\alpha t}dF(t)\,,\;\alpha\geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F^{n\star}}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F}(\alpha)^{n}=\frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 1.9.10. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha)=\frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 1.9.14. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right]=\lambda t$, para $t\geq 0$.*

Teorema 1.9.10. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t)=\mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()}f(T_n)\right]=\int_{(0,t]}f(s)\,d\eta(s)\,,\; t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1,X_2,\ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n|T_n=s\right]=f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)}X_n\right]=\int_{(0,t]}f(s)\,d\eta(s)\,,\; t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 1.9.6 (Identidad de Wald para Renovaciones). *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right], \; t \geq 0,$$

Definición 1.9.18. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{1.9.18}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 1.9.11. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (??).*

Teorema 1.9.11 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 1.9.15. *Una función $h : \mathbb{R}_{+} \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 1.9.12 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\, ds.$$

Proposición 1.9.12. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1.9.19. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.9.13. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 1.9.13 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 1.9.16. *Una función $h : \mathbb{R}_{+} \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 1.9.14 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+}h(s)\,ds.$$

Proposición 1.9.14. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 1.9.20. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 1.9.15. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 1.9.15 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Definición 1.9.21. *Para el proceso $\{(N(t),X(t)):t\geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1},T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n=(\xi_n,\{X(T_{n-1}+t):0\leq t<\xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.9.17. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t)=f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f:\tilde{S}\rightarrow S$.*

Nota 1.9.18. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 1.9.19. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t):t\geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t):t\geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n=T_n-T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.9.22. *Para el proceso $\{(N(t),X(t)):t\geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1},T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n=(\xi_n,\{X(T_{n-1}+t):0\leq t<\xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.9.20. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 1.9.16 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 1.9.23 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 1.9.21. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{1.9.19}$$

Ejemplo 1.9.2 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 1.9.22. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 1.9.24. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 1.9.23. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 1.9.16. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 1.9.17. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación N es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\,ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 1.9.24. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 1.9.7. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

1.9.6 Procesos Regenerativos

Nota 1.9.25. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 1.9.26. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.9.25 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 1.9.26. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.9.27. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

1.9.7 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1.9.27. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 1.9.28. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 1.9.29. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1.9.28 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.9.30. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1.9.29. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.9.31. *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_{∞}

1.9.8 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t - s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.9.30. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 1.9.31. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1.9.32. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 1.9.18. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

1.9.9 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.9.33. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 1.9.34. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1.9.35. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 1.9.19. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]<\infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]<\infty$,entonces

$$\frac{\int_{0}^{t}V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$.

Para $\left\{X\left(t\right):t\geq0\right\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N\left(t\right)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_{+}$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X\left(t\right)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_{n}=T_{n}-T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

1.9.10 Procesos Regenerativos

1.9.11 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [?]

Definición 1.9.36 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X=\left\{X\left(t\right):t\geq0\right\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_{1}>0$ tal que*

i) $\left\{X\left(t+R_{1}\right):t\geq0\right\}$ es independiente de $\left\{\left\{X\left(t\right):t<R_{1}\right\},\right\}$

ii) $\left\{X\left(t+R_{1}\right):t\geq0\right\}$ es estocásticamente equivalente a $\left\{X\left(t\right):t>0\right\}$

Llamamos a R_{1} tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\left\{X\left(t+R_{1}\right)\right\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_{2}, independiente de R_{1} pero con la misma distribución que R_{1}. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\left\{R_{n}\right\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_{k}\equiv R_{1}+R_{2}+\cdots+R_{k}$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 1.9.32. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_{1}, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_{1},R_{2}\ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [?].*

Nota 1.9.33. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_{n} y son atendidos con tiempos de servicio S_{n}, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_{n}=t_{n}-t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_{n}<\mathbb{E}T_{n}<\infty$.*

Definición 1.9.37. *Para x fijo y para cada $t\geq0$, sea $I_{x}\left(t\right)=1$ si $X\left(t\right)\leq x$, $I_{x}\left(t\right)=0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{\infty}X\left(u\right)du\\ \mathbb{P}\left(X_{\infty}\leq x\right) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{\infty}I_{x}\left(u\right)du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{R_{1}}X\left(t\right)dt\right]}{\mathbb{E}\left[R_{1}\right]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 1.9.34. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 1.9.35. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 1.9.36. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 1.9.37. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

1.9.12 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.9.38. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.9.39. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.9.40. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.9.20. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 1.9.8. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \to \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\,ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \to \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

1.9.13 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1.9.41. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t + x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1.9.42. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1.9.43. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 1.9.21. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Corolario 1.9.9. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \to \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\,ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \to \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

1.9.14 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathrm{X}$, sea $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.9.20}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{1.9.21}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.9.22}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.9.23}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$,

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.9.24}$$

De acuerdo a Dai [?], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (**??**)-(**??**), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 1.9.44 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en (**??**) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, *se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.9.22 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \tag{1.9.25}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.9.45 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t)=0$, con $t\geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)|=1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 1.9.1 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por ??-?? es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0>0$ tal que $\overline{Q}(t)=0$ para cualquier $t\geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}(0)|+|\overline{A}(0)|+|\overline{B}(0)|\leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.9.23 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x\in X$

$$limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds\leq\kappa_p, \tag{1.9.26}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right]=\mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right]\leq\kappa_r, \tag{1.9.27}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]=0. \tag{1.9.28}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds=\mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{1.9.29}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.9.24 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^K\rho_k+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{1.9.30}$$

i) Si $\rho<1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema ??.

ii) Si $\rho<1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema ??

Teorema 1.9.25. *Sea $(X_n,\mathcal{F}_n,n=0,1,\ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0,χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m,n=0,1,\ldots,$ $m<n$, que por notación se escribirá como $p(m,n,x,B)\rightarrow p_{mn}(x,B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T:\Omega\rightarrow\{0,1,\ldots,\}$. Supóngase que $T\geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B\in\chi_0$, entonces*

$$P\left\{X(T)\in B,T<\infty|\mathcal{F}(S)\right\}=p(S,T,X(s),B) \tag{1.9.31}$$

en $\{T<\infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v\in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v\in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v\in K} \partial^* M_v. \tag{1.9.32}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{1.9.33}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.9.34}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{1.9.35}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[63]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

[63] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

Supuestos 1.9.1 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{1.9.36}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.9.46. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1.9.47. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.9.48. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{1.9.37}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.9.26. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.9.49. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*[64]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B). \tag{1.9.38}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[65] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.9.40}$$

Definición 1.9.50. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.9.38. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.9.41}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

[64] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[65]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.9.39}$$

Definición 1.9.51. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t\rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E*.*

Definición 1.9.52 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}^*$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *tal que* $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ*.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 1.9.53. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E,\mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t,s\geq0$*,*

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s} \text{ y } X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{1.9.42}$$

iii) Para cualquier $x\in E$*,*$\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}=1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$*.*

Definición 1.9.54 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha>0$ *y cualquier* $f\in S^\alpha$*, el proceso* $t\rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.9.55. *Un sistema* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t)*.*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a* $\mathcal{G}_t$*.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 1.9.1 (Lema 4.2, Dai[**?**])**.** *Sea* $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ *con* $|x_n|\rightarrow\infty$*, conforme* $n\rightarrow\infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0)=\overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n\rightarrow\infty$*, casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t])\rightarrow P_k^{'}t, \text{ u.o.c.}, \tag{1.9.43}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.9.44}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.9.45}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k=1/m_k=1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$*.*

Lema 1.9.2 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^{+}, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{1.9.46}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j\in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.9.47}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$

$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = \left(S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t))\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^{x}(t)=Q^{x}(0)+E^{x}(t)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}(t)\right)\right)-S^{x}\left(T^{x}(t)\right), \tag{1.9.48}$$

$$Q^{x}(t)\geq 0, \tag{1.9.49}$$

$$T^{x}(0)=0,\ \text{y } \overline{T}^{x}(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.9.50}$$

$$I^{x}(t)=et-CT^{x}(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.9.51}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(CQ^{x}(t)\right)dI_{i}^{x}(t)=0, \tag{1.9.52}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^{x}(\cdot),\overline{T}^{x}(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{1.9.53}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\begin{cases}1, & S(k)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.9.27 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0),U^{x_{n_j}}(0),V^{x_{n_j}}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(0),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{1.9.54}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)\ \ u.o.c. \tag{1.9.55}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t)=Q(0)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-(I-P)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}(t)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{1.9.56}$$

$$\overline{Q}(t)\geq 0, \tag{1.9.57}$$

$$\overline{T}(t)\ \ \textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{1.9.58}$$

$$\overline{I}(t)=et-C\overline{T}(t)\ \ \textit{es no decreciente}, \tag{1.9.59}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right)d\overline{I}(t)=0, \tag{1.9.60}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{1.9.61}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.9.17. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}(0),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}(0),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}(0),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}(0),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) *Los vectores de tiempo ocupado* $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) *Para todo* $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) *Para todo* k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 1.9.3 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 1.9.28 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$, *para toda* $t \geq t_0$.

Lema 1.9.4 (Lema 5.2 [?]). *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{1.9.62}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) *Para cualquier* $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) *Las variables aleatorias* $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.9.29 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 1.9.18 (Proposición 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.9.63}$$

Proposición 1.9.19 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.9.64}$$

Proposición 1.9.20 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{1.9.65}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1.9.30 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{1.9.66}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \tag{1.9.67}$$

Teorema 1.9.31 (Teorema 6.2 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 1.9.32 (Teorema 6.3 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)} |\mathbb{E}_x [Q_t] - \mathbb{E}_\pi [Q_0]| = 0.$$

Proposición 1.9.21 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0 \tag{1.9.68}$$

Lema 1.9.2 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \tag{1.9.69}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.9.33 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.9.70}$$

para $t > 0$ *y* $x \in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.9.34 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{1.9.71}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 1.9.35 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con* $f(x) = f_1(x)$ *se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f} = 0. \tag{1.9.72}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0.$$

Teorema 1.9.36 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea* ν *cualquier distribución de probabilidad en* $(X, \mathcal{B}_X)$, *y* π *la distribución estacionaria de* X.

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{1.9.73}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *con* $\pi(|f|) < \infty$, *la ecuación anterior se cumple.*

Teorema 1.9.37 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.9.74}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, *con* $|Q(0)| = 1$. *Entonces para cualquier* $0 < q \leq 1$, *existe* $B < 0$ *tal que para cualquier* $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\} \geq q. \tag{1.9.75}$$

Definición 1.9.56. *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{F}$ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* X, *la pareja* $(X, \mathcal{F})$ *es llamado espacio medible. Un subconjunto* A *de* X *es llamado medible, o medible con respecto a* $\mathcal{F}$, *si* $A \in \mathcal{F}$.

Definición 1.9.57. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *espacio de medida. Se dice que la medida* μ *es* σ*-finita si se puede escribir* $X = \bigcup_{n\geq 1}X_n$ *con* $X_n \in \mathcal{F}$ *y* $\mu(X_n) < \infty$.

Definición 1.9.58. *Sea X el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b)\in\mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.9.59. *Una función $f:X\rightarrow\mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x\in X:f(x)>\alpha\}$$

pertenece a $\mathcal{F}$. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha,\infty))=\{x\in X:f(x)>\alpha\}\in\mathcal{F}.$$

Definición 1.9.60. *Sean $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$, $i=1,2,\ldots,$ espacios medibles y $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1,\omega_2,\ldots,)$ tales que $\omega_i\in\Omega_i$, $i=1,2,\ldots,$. Si $B^n\subset\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$, definimos $B_n=\{\omega\in\Omega:(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_i$.*

Definición 1.9.61. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t),t\geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t\geq 0$, si para $s<t$ implica que $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s),s\leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s\leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.9.62. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t),t\geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s)\subset\mathcal{F}(t)$ para $s\leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T:\Omega\rightarrow[0,\infty]$ tal que $\{T\leq t\}\in\mathcal{F}(t)$ para cada $t\geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t),t\geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t)=\mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.9.63. *Sea $X(t),t\geq 0$ proceso estocástico, con (S,χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s,t\in I$, I conjunto de índices, $s<t$, se tiene que $\mathcal{F}(s)\subset\mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.9.64. *Sea $X(t),t\geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t),\mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B\in\chi$, y $s,t\in I$, $s<t$ se cumple que*

$$P\{X(t)\in B|\mathcal{F}(s)\}=P\{X(t)\in B|X(s)\}. \tag{1.9.76}$$

Nota 1.9.39. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t)=\mathcal{F}_0(t)=\mathcal{F}(X(r),r\leq t),$$

entonces la ecuación (??) se puede escribir como

$$P\{X(t)\in B|X(r),r\leq s\}=P\{X(t)\in B|X(s)\} \tag{1.9.77}$$

1.9.15 Procesos de Estados de Markov

Teorema 1.9.38. *Sea $(X_n,\mathcal{F}_n,n=0,1,\ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0,χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m,n=0,1,\ldots,$ $m<n$, que por notación se escribirá como $p(m,n,x,B)\rightarrow p_{mn}(x,B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T:\Omega\rightarrow\{0,1,\ldots,\}$. Supóngase que $T\geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B\in\chi_0$, entonces*

$$P\{X(T)\in B,T<\infty|\mathcal{F}(S)\}=p(S,T,X(s),B) \tag{1.9.78}$$

en $\{T<\infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d:K\rightarrow\mathbb{N}$ función. Para $v\in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E=\bigcup_{v\in K}M_v=\{(v,\zeta):v\in K,\zeta\in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E}=\left\{\bigcup_{v\in K}A_v:A_v\in\mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{1.9.79}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{1.9.80}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.9.81}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \left\{ \begin{array}{ll} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{array} \right. \tag{1.9.82}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \left\{ \begin{array}{ll} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{array} \right.$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 1.9.2 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{1.9.83}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[66] se cumple para cualquier tiempo de paro.

[66] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

1.9.16 Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.9.65. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{1.9.84}$$

Definición 1.9.66. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.9.39. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

1.9.17 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[67], $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.9.67. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B)\,^{68}. \tag{1.9.85}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[69] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f(X_t)|\mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t}f(X_t) \;\; s \leq t \in I,\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.9.87}$$

Definición 1.9.68. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x),\; t, s \geq 0,\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}^{70}.$$

Nota 1.9.40. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\right\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0,\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.9.88}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

[67] qué se quiere decir con el término: más general?

[68] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[69]

$$\mathbb{P}\left\{H|\mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H|X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.9.86}$$

[70] Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

1.9.18 Primer Condición de Regularidad

Definición 1.9.69. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t\rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1.9.70 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ tal que $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0=x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 1.9.71. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E,\mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t,s\geq0$,*

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s} \text{ y } X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{1.9.89}$$

*iii) Para cualquier $x\in E$,$\mathbf{P}^x\{X_0=x\}=1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.*

Definición 1.9.72 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha>0$ y cualquier $f\in S^\alpha$, el proceso $t\rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.9.73. *Un sistema $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de (P_t).*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

1.9.19 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 1.9.5 (Lema 4.2, Dai[?])**.** *Sea $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ con $|x_n|\rightarrow\infty$, conforme $n\rightarrow\infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0)=\overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n\rightarrow\infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t])\rightarrow P_k^{'}t, \text{ u.o.c.,} \tag{1.9.90}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{1.9.91}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{1.9.92}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k=1/m_k=1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 1.9.6 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k\left(0\right)=\overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k\left(0\right)=\overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+}, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_k\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_k\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S^x_l\left(t\right)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T^x_l\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S^x_l\left(T^x_l\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi^x_k\left(S^x_l\left(T^x_l\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q^x_k\left(t\right)=Q^x_k\left(0\right)+E^x_k\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l_k\left(S^x_l\left(T^x_l\left(t\right)\right)\right)-S^x_k\left(T^x_k\left(t\right)\right) \tag{1.9.93}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I^x_i\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T^x_k\left(t\right).$$

Entonces $I^x_i\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_{0}^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q^x_k\left(t\right)\right)dI^x_i\left(t\right)=0, \tag{1.9.94}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right)=\left(T^x_1\left(t\right),\ldots,T^x_K\left(t\right)\right)^{'},$$

$$I^x\left(t\right)=\left(I^x_1\left(t\right),\ldots,I^x_K\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right)=\left(S^x_1\left(T^x_1\left(t\right)\right),\ldots,S^x_K\left(T^x_K\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^{x}\left(t\right)=Q^{x}\left(0\right)+E^{x}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)-S^{x}\left(T^{x}\left(t\right)\right), \tag{1.9.95}$$

$$Q^{x}\left(t\right)\geq 0, \tag{1.9.96}$$

$$T^{x}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}^{x}\left(t\right) \text{ es no decreciente,} \tag{1.9.97}$$

$$I^{x}\left(t\right)=et-CT^{x}\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{1.9.98}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(CQ^{x}\left(t\right)\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0, \tag{1.9.99}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^{x}\left(\cdot\right),\overline{T}^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.9.100}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{cc} 1, & S\left(k\right)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.} \end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.9.40 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\left\{x_{n}\right\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_{n}|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_{j}}\right\}$ con $|x_{n_{j}}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_{j}}|}\left(Q^{x_{n_{j}}}\left(0\right),U^{x_{n_{j}}}\left(0\right),V^{x_{n_{j}}}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(0\right),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{1.9.101}$$

$$\frac{1}{|x_{n_{j}}|}\left(Q^{x_{n_{j}}}\left(|x_{n_{j}}|t\right),T^{x_{n_{j}}}\left(|x_{n_{j}}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right) \;\; u.o.c. \tag{1.9.102}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{1.9.103}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0, \tag{1.9.104}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \textit{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{1.9.105}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right) \textit{ es no decreciente,} \tag{1.9.106}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0, \tag{1.9.107}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{1.9.108}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.9.22. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) *Los vectores de tiempo ocupado* $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) *Para todo* $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) *Para todo* k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Teorema 1.9.41 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 1.9.23 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X(t)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.9.109}$$

Proposición 1.9.24 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{1.9.110}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

1.9.20 Estabilidad

Definición 1.9.74 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??**, *junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P^{'}\right) M\left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{1.9.111}$$

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 1.9.75 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}\left(t\right) \tag{1.9.112}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{1.9.113}$$

$$\overline{T}_{k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente}, \tag{1.9.114}$$

$$\overline{I}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{k\in C_{i}}\overline{T}_{k}\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{1.9.115}$$

$$\overline{I}_{i}\left(\cdot\right) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0 \tag{1.9.116}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{1.9.117}$$

Lema 1.9.7 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.9.42 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* (α,μ,T,U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$*, para toda* $t\geq t_{0}$.

Proposición 1.9.25 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_{0}>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{1.9.118}$$

Lema 1.9.3 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea* $\left\{\zeta\left(k\right):k\in \digamma\right\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $\left(0,\infty\right)$*, y sea* $E\left(t\right)=max\left(n\geq 1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$*. Si* $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$*, entonces para cualquier entero* $r\geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{1.9.119}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.9.43 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_{p} *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.9.120}$$

para $t>0$ *y* $x\in X$*. En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 1.9.44 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{1.9.121}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 1.9.45 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} \left\| P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot) \right\|_f = 0. \tag{1.9.122}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 1.9.46 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_o^t f(X(s))\, ds = \pi(f) := \int f(x)\, \pi(dx) \tag{1.9.123}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.9.47 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.9.124}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{1.9.125}$$

Definición 1.9.76. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 1.9.77. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 1.9.78. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.9.79. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha,\infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.9.80. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1.9.81. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.9.82. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0,\infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.9.83. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.9.84. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{1.9.126}$$

Nota 1.9.41. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{1.9.127}$$

Teorema 1.9.48. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.9.128}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{1.9.129}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{1.9.130}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.9.131}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{1.9.132}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[71]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 1.9.3 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{1.9.133}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.9.85. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1.9.86. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1.9.87. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.9.88. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \textit{ es compacto en } E\}. \tag{1.9.134}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.9.49. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

1.9.21 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.9.89. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B)^{72}. \tag{1.9.135}$$

[71] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].
[72] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[73] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_t\right)|\mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t}f\left(X_t\right) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.9.137}$$

Definición 1.9.90. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f\left(x\right) = P_t\left(P_s f\right)\left(x\right), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.9.42. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_{t+s}\right)|\mathcal{G}_t\right\} = P_s f\left(X_t\right) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.9.138}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

1.9.22 Primer Condición de Regularidad

Definición 1.9.91. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1.9.92 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1.9.93. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \;\; y \;\; X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{1.9.139}$$

*iii) Para cualquier $x \in E$,$\mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.*

Definición 1.9.94 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.9.95. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

[73]
$$\mathbb{P}\left\{H|\mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H|X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.9.136}$$

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 1.9.8 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^{k}\left(\left[|x_n|t\right]\right)\rightarrow P_{k}^{'}t,\ u.o.c., \tag{1.9.140}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)\rightarrow \alpha_{k}\left(t-\overline{U}_{k}\right)^{+},\ u.o.c., \tag{1.9.141}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)\rightarrow \mu_{k}\left(t-\overline{V}_{k}\right)^{+},\ u.o.c., \tag{1.9.142}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_{k}=1/m_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$.

Lema 1.9.9 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_{k}-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_{k}-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_k\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_k\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_{l}^{x}\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_{l}^{x}\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_{l}^{x}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{1.9.143}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.9.144}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{1.9.145}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.9.146}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \tag{1.9.147}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.9.148}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.9.149}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.9.150}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.9.50 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.9.151}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right) \;\; u.o.c. \tag{1.9.152}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}\left(t\right) = Q\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - \left(I - P\right)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{1.9.153}$$

$$\overline{Q}\left(t\right) \geq 0, \tag{1.9.154}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \;\; \textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{1.9.155}$$

$$\overline{I}\left(t\right) = et - C\overline{T}\left(t\right) \;\; \textit{es no decreciente}, \tag{1.9.156}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right) d\overline{I}\left(t\right) = 0, \tag{1.9.157}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{1.9.158}$$

Definición 1.9.96 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$*.*

Teorema 1.9.51 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{1.9.159}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.9.97 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$*.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 1.9.4 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$*.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.9.26. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$*.*

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$*.*

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$*.*

Lema 1.9.10 (Lema 3.1 [?])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.9.52 (Teorema 5.2 [?])**.** *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1.9.53 (Teorema 5.1 [?])**.** *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$*, para toda* $t\geq t_{0}$*.*

Lema 1.9.11 (Lema 5.2 [?])**.** *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$*, y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$*, entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r}\qquad(1.9.160)$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$*,* $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.9.54 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?])**.** *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$*. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$*.*

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 1.9.27 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.9.161}$$

Proposición 1.9.28 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.9.162}$$

Proposición 1.9.29 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{1.9.163}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 1.9.55 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.9.164}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{1.9.165}$$

Teorema 1.9.56 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1.9.57 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 1.9.30 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{1.9.166}$$

Lema 1.9.5 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{1.9.167}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.9.58 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.9.168}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.9.59 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x \in X. \tag{1.9.169}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x[|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 1.9.60 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{1.9.170}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 1.9.61 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{1.9.171}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.9.62 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.9.172}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\} \geq q. \tag{1.9.173}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\left\{\xi_k\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)\right]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$,
- también se define $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.

1.9.23 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X = \left\{X\left(t\right), t\geq0\right\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [?].

Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [?]

.

1.9.24 Procesos Harris Recurrentes Positivos

Sea el proceso de Markov $X = \left\{X\left(t\right), t\geq0\right\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] y Meyn y Down [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

1.9.25 Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X\left(t\right) = \left(Q\left(t\right), U\left(t\right), V\left(t\right)\right), \tag{1.9.174}$$

donde $Q\left(t\right)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U\left(t\right)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V\left(t\right)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U\left(t\right)$ como $V\left(t\right)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = \left(Q\left(0\right), U\left(0\right), V\left(0\right)\right) = \left(q, a, b\right)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l\in\mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \ldots, K$ se define

$$\begin{aligned} E_l^x\left(t\right) &= max\left\{r : U_l\left(0\right) + \xi_l\left(1\right) + \cdots + \xi_l\left(r-1\right) \leq t\right\} \;\; t\geq0,\\ S_k^x\left(t\right) &= max\left\{r : V_k\left(0\right) + \eta_k\left(1\right) + \cdots + \eta_k\left(r-1\right) \leq t\right\} \;\; t\geq0.\end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k\left(n\right) := \sum_{i=1}^{n}\phi^k\left(i\right).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s-éima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \left\{\phi^k(n), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \ldots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 1.9.12 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{1.9.175}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.9.176}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.9.177}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 1.9.13 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{1.9.178}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.9.179}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{1.9.180}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.9.181}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.9.182}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.9.183}$$

$$\int_0^{\infty} \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.9.184}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.9.185}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso}. \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.9.63 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.9.186}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \ u.o.c. \tag{1.9.187}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{1.9.188}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.9.189}$$

$$\overline{T}(t) \ \textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{1.9.190}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \ \textit{es no decreciente}, \tag{1.9.191}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.9.192}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{1.9.193}$$

Definición 1.9.98 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 1.9.64 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{1.9.194}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.9.99 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ y $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$*

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk}\mu_l \overline{T}_l(t) \tag{1.9.195}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \ \textit{para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.9.196}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \ \textit{y } \overline{T}_k(\cdot) \ \textit{es no decreciente}, \tag{1.9.197}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k\in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.9.198}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{1.9.199}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{1.9.200}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.9.100 (Definición 3.2, Dai y Meyn [**?**]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??**, *junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{1.9.201}$$

Definición 1.9.101 (Definición 3.3, Dai y Meyn [**?**]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [**?**].

Lema 1.9.6 (Lema 3.1, Dai y Meyn [**?**]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

1.9.26 Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad

1.9.27 Teorema 2.1

El resultado principal de Down [**?**] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 1.9.65 (Teorema 2.1, Down [**?**]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, *y para cada condición inicial* $x \in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \sup \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{1.9.202}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{1.9.203}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$. *Donde* π *es la probabilidad invariante para* $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right] = 0. \tag{1.9.204}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right], \; \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{1.9.205}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

Proposición 1.9.31 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{1.9.206}$$

Lema 1.9.7 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta\left(k\right):k\in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq 1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{1.9.207}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r:t\geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.9.66 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.9.208}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 1.9.67 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{1.9.209}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q\left(0\right)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 1.9.68 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_f=0. \tag{1.9.210}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 1.9.69 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{1.9.211}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

1.9.28 Teorema 2.2

Teorema 1.9.70 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.9.212}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{1.9.213}$$

1.9.29 Teorema 2.3

Teorema 1.9.71 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{1.9.214}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema **??**.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema **??**

1.9.30 Definiciones Básicas

Definición 1.9.102. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 1.9.103. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 1.9.104. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.9.105. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.9.106. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1.9.107. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.9.108. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.9.109. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.9.110. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{1.9.215}$$

Nota 1.9.43. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{1.9.216}$$

Teorema 1.9.72. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \to p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \to \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.9.217}$$

en $\{T < \infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.9.32. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 1.9.14 (Lema 3.1 [**?**])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.9.73 (Teorema 5.2 [**?**])**.** *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1.9.74 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 1.9.15 (Lema 5.2 [?]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{1.9.218}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.9.75 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 1.9.33 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.9.219}$$

Proposición 1.9.34 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.9.220}$$

Proposición 1.9.35 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{1.9.221}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1.9.76 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.9.222}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p \tag{1.9.223}$$

Teorema 1.9.77 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^{t}\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_{p}}\rightarrow 0$$

para $t\rightarrow\infty$ y $x\in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q_{t}|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q_{0}|^{p}\right]<\infty$$

Teorema 1.9.78 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^{t}(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_{f}=0},$$

para $x\in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_{x}[Q_{t}]-\mathbb{E}_{\pi}[Q_{0}]|=0}.$$

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_{s}\left(x\right)=N\left(x\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]=\overline{N}>0. \tag{1.9.224}$$

(S2.)
$$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]\leq\overline{N}, \tag{1.9.225}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]\geq 0$.
- Se define
$$\delta^{*}:=\sum_{j,j+1}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]. \tag{1.9.226}$$
- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$
- también se define $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde es necesario que $\rho<1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $\left(X\left(t\right)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t\geq 0$ está dado por

$$X\left(t\right)=\left(Q\left(t\right),A\left(t\right),H\left(t\right),B\left(t\right),B^{0}\left(t\right),C\left(t\right)\right) \tag{1.9.227}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X}=\mathbb{Z}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}^{K}, \tag{1.9.228}$$

- $Q\left(t\right)=\left(Q_{k}\left(t\right),1\leq k\leq K\right)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.

- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([**?**])

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

1.9.31 Preliminares

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0$
2) $\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}$para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m} = r_{j,j^{'}}$
- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.
- Finalmente, se define
$$\delta^{*} := \sum_{j,j^{'}} p_j r_{j,j^{'}} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(i)\right]. \tag{1.9.229}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m, se denota por $B_m(t)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t; $B_m^0(t)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t, finalmente sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{1.9.230}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{1.9.231}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx, \; 0 \leq a < b. \tag{1.9.232}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto $A2)$ para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [**?**] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

1.9.32 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [**?**], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (**??**), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([**?**], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [**?**]

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x \{X(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la σ-algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D)$$

Definición 1.9.111. *Una medida no cero π en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ es* **invariante** *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbf{X}} P^t(x, D) \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.9.112. *El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = inf \{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 1.9.44. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama Proceso Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot) \pi(dx)$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente.

Definición 1.9.113. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 1.9.16 (Lema 3.1, Dai[?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x [\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{1.9.233}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf \{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris Recurrente Positivo.

Lema 1.9.17 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{|x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1.9.79 (Teorema 3.1, Dai[?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^{x}\left(|x|\delta\right)| = 0, \tag{1.9.234}$$

entonces la ecuación (??) se cumple para $B = \{|x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.

Nota 1.9.45. *En Meyn and Tweedie [?] muestran que si $P_{x}\left\{\tau_{D} < \infty\right\} \equiv 1$ incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.9.33 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathrm{X}$, sea $Q_{k}^{x}\left(t\right)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^{x}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x,0}\left(|x|t\right)\right) \tag{1.9.235}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}_{m}\left(t\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(t\right)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right) = \overline{Q}_{k}\left(0\right) + \lambda_{k}t - \sum_{m=1}^{M}\mu_{k}\overline{T}_{m,k}\left(t\right) \tag{1.9.236}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.9.237}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente,} \tag{1.9.238}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$,

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^{0}\left(t\right) + \overline{T}_{m,k}\left(t\right) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.9.239}$$

De acuerdo a Dai [?], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (??)-(??), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 1.9.114 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.*

Al conjunto de ecuaciones dadas en ??-?? se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.9.80 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{1.9.240}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.9.115 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}\left(t\right) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 1.9.8 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por ??-?? es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.9.81 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds \leq \kappa_p, \tag{1.9.241}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right] = \mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right] \leq \kappa_r, \tag{1.9.242}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)\right] = 0. \tag{1.9.243}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds = \mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right], \ \mathbb{P}_{x}\text{-c.s.} \tag{1.9.244}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.9.82 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{1.9.245}$$

*i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema **??**.*

*ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema **??***

Teorema 1.9.83. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.9.246}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{1.9.247}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{1.9.248}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.9.249}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{1.9.250}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[74]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 1.9.4 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{1.9.251}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.9.116. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1.9.117. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.9.118. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{1.9.252}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.9.84. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.9.119. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*[75]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B). \tag{1.9.253}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[76] (??) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.9.255}$$

[74] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

[75] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[76]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.9.254}$$

Definición 1.9.120. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x)=P_t(P_sf)(x),\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.9.46. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t}=P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\right\}=P_sf(X_t)\ t,s\geq 0,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{1.9.256}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 1.9.121. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t\rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 1.9.122 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}^*$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso E-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *tal que* $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 1.9.123. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E,\mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso E-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t,s\geq 0$,

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s}\ y\ X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{1.9.257}$$

iii) Para cualquier $x\in E,\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}=1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.

Definición 1.9.124 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha>0$ *y cualquier* $f\in S^\alpha$*, el proceso* $t\rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.9.125. *Un sistema* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 1.9.18 (Lema 4.2, Dai[**?**])**.** *Sea* $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ *con* $|x_n|\rightarrow\infty$*, conforme* $n\rightarrow\infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0)=\overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n\rightarrow\infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^{k}\left(\left[|x_n|t\right]\right)\rightarrow P_{k}^{'}t,\ u.o.c.,\tag{1.9.258}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow\alpha_{k}\left(t-\overline{U}_{k}\right)^{+},\ u.o.c.,\tag{1.9.259}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow\mu_{k}\left(t-\overline{V}_{k}\right)^{+},\ u.o.c.,\tag{1.9.260}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_{k}=1/m_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$.

Lema 1.9.19 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ con $|x_n|\rightarrow\infty$, conforme $n\rightarrow\infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}_{k}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}_{k}.$$

a) Conforme $n\rightarrow\infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_{k}-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_{k}-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t\geq0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_{l}^{x}\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_{l}^{x}\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_{l}^{x}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_{k}^{x}\left(t\right)=_{k}^{x}\left(0\right)+E_{k}^{x}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_{k}^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)-S_{k}^{x}\left(T_{k}^{x}\left(t\right)\right)\tag{1.9.261}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_{i}^{x}\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_{i}}T_{k}^{x}\left(t\right).$$

Entonces $I_{i}^{x}\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k\in C_i} Q_k^x\left(t\right)\right) dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{1.9.262}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right)=\left(T_1^x\left(t\right),\ldots,T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$
$$I^x\left(t\right)=\left(I_1^x\left(t\right),\ldots,I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right),\ldots,S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x\left(t\right)=Q^x\left(0\right)+E^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S^x\left(T^x\left(t\right)\right), \tag{1.9.263}$$

$$Q^x\left(t\right)\geq 0, \tag{1.9.264}$$

$$T^x\left(0\right)=0,\text{ y }\overline{T}^x\left(t\right)\text{ es no decreciente}, \tag{1.9.265}$$

$$I^x\left(t\right)=et-CT^x\left(t\right)\text{ es no decreciente} \tag{1.9.266}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{1.9.267}$$

$$\text{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}^x\left(\cdot\right),\overline{T}^x\left(\cdot\right)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{1.9.268}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{cc} 1, & S\left(k\right)=i,\\ 0, & \text{en otro caso}.\end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.9.85 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset \mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right),U^{x_{n_j}}\left(0\right),V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(0\right),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{1.9.269}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)\text{ u.o.c.} \tag{1.9.270}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{1.9.271}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0, \tag{1.9.272}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\text{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{1.9.273}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \ \ es \ no \ decreciente, \tag{1.9.274}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.9.275}$$

$$Condiciones \ adicionales \ en \ \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \ especficas \ de \ la \ disciplina \ de \ la \ cola, \tag{1.9.276}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.9.36. *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x \rightarrow \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K} \left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 1.9.20 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 1.9.86 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$, *para toda* $t \geq t_0$.

Lema 1.9.21 (Lema 5.2 [?]). *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{1.9.277}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t \geq \delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.9.87 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 1.9.37 (Proposición 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.9.278}$$

Proposición 1.9.38 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.9.279}$$

Proposición 1.9.39 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{1.9.280}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 1.9.88 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.9.281}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{1.9.282}$$

Teorema 1.9.89 (Teorema 6.2 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1.9.90 (Teorema 6.3 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_x\left[Q_t\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_0\right]\right| = 0.$$

Proposición 1.9.40 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [**?**]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{1.9.283}$$

Lema 1.9.9 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [**?**]). *Sea $\{\zeta\left(k\right):k\in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{1.9.284}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r:t\geq1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.9.91 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [**?**]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.9.285}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 1.9.92 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [**?**]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{1.9.286}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q\left(0\right)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 1.9.93 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [**?**]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_f=0. \tag{1.9.287}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 1.9.94 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [**?**]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_X\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{1.9.288}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.9.95 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.9.289}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{1.9.290}$$

Definición 1.9.126. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 1.9.127. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 1.9.128. *Sea X el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.9.129. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\left\{x \in X : f(x) > \alpha\right\}$$

pertenece a $\mathcal{F}$. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}\left((\alpha, \infty)\right) = \left\{x \in X : f(x) > \alpha\right\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.9.130. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \left\{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\right\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1.9.131. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.9.132. *[TSP, Ash [?]] Sea $\left\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\right\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\left\{T \leq t\right\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.9.133. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\left\{\mathcal{F}(t)\right\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.9.134. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\left\{X(t), \mathcal{F}(t)\right\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\left\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\right\} = P\left\{X(t) \in B | X(s)\right\}. \tag{1.9.291}$$

Nota 1.9.47. *Si se dice que $\left\{X(t)\right\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\left\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\right\} = P\left\{X(t) \in B | X(s)\right\} \tag{1.9.292}$$

1.9.34 Procesos de Estados de Markov

Teorema 1.9.96. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.9.293}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{ \bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v \right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{1.9.294}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{1.9.295}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.9.296}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{1.9.297}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 1.9.5 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{1.9.298}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[77] se cumple para cualquier tiempo de paro.

1.9.35 Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.9.135. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \textit{ es compacto en } E\}. \tag{1.9.299}$$

Definición 1.9.136. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.9.97. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

1.9.36 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[78], $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.9.137. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)\,^{79}. \tag{1.9.300}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[80] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.9.302}$$

[77] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

[78] qué se quiere decir con el término: más general?

[79] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[80]
$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.9.301}$$

Definición 1.9.138. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x), \; t,s \geq 0, \; x \in E \; f \in b\mathcal{E}^{81}.$$

Nota 1.9.48. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \; t,s \geq 0, \; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.9.303}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

1.9.37 Primer Condición de Regularidad

Definición 1.9.139. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 1.9.140 (HD1). *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1.9.141. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E,\mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t,s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{1.9.304}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 1.9.142 (HD2). *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^{\alpha}$*, el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.9.143. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

[81] Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

1.9.38 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 1.9.22 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^{k}\left(\left[|x_n|t\right]\right) \rightarrow P_{k}^{'}t, \ u.o.c., \tag{1.9.305}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \alpha_{k}\left(t - \overline{U}_{k}\right)^{+}, \ u.o.c., \tag{1.9.306}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \mu_{k}\left(t - \overline{V}_{k}\right)^{+}, \ u.o.c., \tag{1.9.307}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$.

Lema 1.9.23 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k\left(0\right) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k\left(0\right) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{U}_{k} - t\right)^{+}, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{V}_{k} - t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_{l}^{x}\left(t\right)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_{l}^{x}\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_{k}^{x}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_{k}^{x}\left(t\right) = Q_{k}^{x}\left(0\right) + E_{k}^{x}\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_{k}^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right) - S_{k}^{x}\left(T_{k}^{x}\left(t\right)\right) \tag{1.9.308}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.9.309}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = \left(S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t))\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x(T^x(t)), \tag{1.9.310}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.9.311}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.9.312}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.9.313}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.9.314}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.9.315}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.9.98 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.9.316}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \; u.o.c. \tag{1.9.317}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{1.9.318}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.9.319}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{1.9.320}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{1.9.321}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.9.322}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{1.9.323}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.9.41. *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x \rightarrow \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^{0}(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^{0}(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^{0}(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Teorema 1.9.99 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?])**.** *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$*. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$*, cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$*..*

Proposición 1.9.42 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.9.324}$$

Proposición 1.9.43 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) \, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s)) \, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{1.9.325}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

1.9.39 Estabilidad

Definición 1.9.144 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??**, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P'\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{1.9.326}$$

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 1.9.145 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)'$ y $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)'$*

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk} \mu_l \overline{T}_l(t) \tag{1.9.327}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.9.328}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{1.9.329}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.9.330}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \, dI_i^x(t) = 0 \tag{1.9.331}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{1.9.332}$$

Lema 1.9.24 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.9.100 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Proposición 1.9.44 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0 \tag{1.9.333}$$

Lema 1.9.10 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{1.9.334}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.9.101 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.9.335}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.9.102 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{1.9.336}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 1.9.103 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{1.9.337}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 1.9.104 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{1.9.338}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.9.105 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.9.339}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{1.9.340}$$

Definición 1.9.146. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 1.9.147. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 1.9.148. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.9.149. *Una función $f : X \to \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.9.150. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1.9.151. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.9.152. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.9.153. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.9.154. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{1.9.341}$$

Nota 1.9.49. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{1.9.342}$$

Teorema 1.9.106. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \to p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \to \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.9.343}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v\in K} M_v = \left\{(v,\zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\right\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{\cup_{v\in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E,\mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0,1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v\in K} \partial^* M_v. \tag{1.9.344}$$

y

$$\partial^* M_v = \left\{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t},\zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t,\zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\right\}. \tag{1.9.345}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t,\zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.9.346}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t,\mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v,\zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf\left\{t > 0 : \phi_v(t,\zeta) \in \partial^* M_v\right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v,\zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s,\zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0,\epsilon)$. La medida de transición $Q(A;\mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E,\mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n,\mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s,\mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{1.9.347}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N,Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1,\mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[82]

$$\mathbf{x}_t = (v_t,\zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t,\mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N,\mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

[82]Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

Supuestos 1.9.6 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea* $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ *el número de saltos en* $[0,t]$. *Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{1.9.348}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.9.155. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1.9.156. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1.9.157. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.9.158. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{1.9.349}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.9.107. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

1.9.40 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.9.159. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)\,^{83}. \tag{1.9.350}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[84] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.9.352}$$

Definición 1.9.160. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \; t, s \geq 0, \; x \in E \; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.9.50. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.9.353}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

[83]Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[84]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.9.351}$$

1.9.41 Primer Condición de Regularidad

Definición 1.9.161. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t\rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 1.9.162 (HD1). *Un semigrupo de Markov* $/P_t)$ *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E, *existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$, *y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *tal que* $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0=x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 1.9.163. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E,\mathcal{E})$. *La colección* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$;

ii) $(\theta_t)_{t\geq0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X, *es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t,s\geq0$,

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s} \text{ y } X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{1.9.354}$$

iii) Para cualquier $x\in E$,$\mathbf{P}^x\{X_0=x\}=1$, *y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.

Definición 1.9.164 (HD2). *Para cualquier* $\alpha>0$ *y cualquier* $f\in S^\alpha$, *el proceso* $t\rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.9.165. *Un sistema* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 1.9.25 (Lema 4.2, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ *con* $|x_n|\rightarrow\infty$, *conforme* $n\rightarrow\infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0)=\overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n\rightarrow\infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t])\rightarrow P_k^{'}t, \text{ u.o.c.}, \tag{1.9.355}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.9.356}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.9.357}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k=1/m_k=1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 1.9.26 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_k\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_k\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S^x_l\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T^x_l\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S^x_l\left(T^x_l\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi^x_l\left(S^x_l\left(T^x_l\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q^x_k\left(t\right)=^x_k\left(0\right)+E^x_k\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l_k\left(S^x_l\left(T^x_l\left(t\right)\right)\right)-S^x_k\left(T^x_k\left(t\right)\right) \tag{1.9.358}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I^x_i\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T^x_k\left(t\right).$$

Entonces $I^x_i\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_{0}^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q^x_k\left(t\right)\right)dI^x_i\left(t\right)=0, \tag{1.9.359}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right)=\left(T^x_1\left(t\right),\ldots,T^x_K\left(t\right)\right)^{'},$$

$$I^x\left(t\right)=\left(I^x_1\left(t\right),\ldots,I^x_K\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right)=\left(S^x_1\left(T^x_1\left(t\right)\right),\ldots,S^x_K\left(T^x_K\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^{x}(t)=Q^{x}(0)+E^{x}(t)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}(t)\right)\right)-S^{x}\left(T^{x}(t)\right), \tag{1.9.360}$$

$$Q^{x}(t)\geq 0, \tag{1.9.361}$$

$$T^{x}(0)=0,\ \text{y } \overline{T}^{x}(t)\ \text{ es no decreciente}, \tag{1.9.362}$$

$$I^{x}(t)=et-CT^{x}(t)\ \text{ es no decreciente} \tag{1.9.363}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(CQ^{x}(t)\right)dI_{i}^{x}(t)=0, \tag{1.9.364}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^{x}(\cdot),\overline{T}^{x}(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.9.365}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\begin{cases}1, & S(k)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.9.108 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0),U^{x_{n_j}}(0),V^{x_{n_j}}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(0),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{1.9.366}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)\ \ u.o.c. \tag{1.9.367}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t)=Q(0)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-(I-P)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}(t)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{1.9.368}$$

$$\overline{Q}(t)\geq 0, \tag{1.9.369}$$

$$\overline{T}(t)\ \textit{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{1.9.370}$$

$$\overline{I}(t)=et-C\overline{T}(t)\ \textit{ es no decreciente}, \tag{1.9.371}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right)d\overline{I}(t)=0, \tag{1.9.372}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{1.9.373}$$

Definición 1.9.166 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}(\cdot)\right)$ en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta>0$ que depende de μ,α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot+\delta)\equiv 0$.*

Teorema 1.9.109 (Teorema 4.2, Dai[**?**]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{\left|x\right|}Q^{x}\left(\left|x\right|t\right) \tag{1.9.374}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.9.167 (Definición 3.3, Dai y Meyn [**?**]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_{0} tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$, con $t\geq t_{0}$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [**?**].

Lema 1.9.11 (Lema 3.1, Dai y Meyn [**?**]). *Si el modelo de flujo definido por **??**-**??** es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_{0}>0$ tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$ para cualquier $t\geq t_{0}$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.9.45. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{\left|x\right|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{\left|x\right|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{\left|x\right|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{\left|x\right|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ y $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 1.9.27 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.9.110 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1.9.111 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 1.9.28 (Lema 5.2 [?]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{1.9.375}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.9.112 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 1.9.46 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.9.376}$$

Proposición 1.9.47 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.9.377}$$

Proposición 1.9.48 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{1.9.378}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1.9.113 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.9.379}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{1.9.380}$$

Teorema 1.9.114 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right]<\infty$$

Teorema 1.9.115 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 1.9.49 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{1.9.381}$$

Lema 1.9.12 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta\left(k\right):k\in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq 1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{1.9.382}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t\geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.9.116 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.9.383}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.9.117 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\| P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{1.9.384}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 1.9.118 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\| P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{1.9.385}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 1.9.119 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_{X}\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{1.9.386}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.9.120 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$|Q\left(T\right)|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ T\geq0, \tag{1.9.387}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{1.9.388}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$,
- también se define $\rho_{k}:=\lambda_{k}/\mu_{k}$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho<1$ para cuestiones de estabilidad.

1.9.42 Procesos de Estados Markoviano para el Sistema

1.9.43 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X=\left\{X\left(t\right),t\geq0\right\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [?].

Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [?]

.

1.9.44 Procesos Harris Recurrentes Positivos

Sea el proceso de Markov $X = \{X(t), t \geq 0\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] y Meyn y Down [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

1.9.45 Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X(t) = (Q(t), U(t), V(t)), \tag{1.9.389}$$

donde $Q(t)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U(t)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V(t)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U(t)$ como $V(t)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = (Q(0), U(0), V(0)) = (q, a, b)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \ldots, K$ se define

$$\begin{aligned} E_l^x(t) &= max\{r : U_l(0) + \xi_l(1) + \cdots + \xi_l(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0, \\ S_k^x(t) &= max\{r : V_k(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0. \end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s-éima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \left\{\phi^k(n), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \ldots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 1.9.29 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \rightarrow P_k^{'} t, \; u.o.c., \tag{1.9.390}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{1.9.391}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{1.9.392}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$.

Lema 1.9.30 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x(t)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{1.9.393}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j\in C_i}T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x(t)\right)dI_i^x(t) = 0, \tag{1.9.394}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{1.9.395}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.9.396}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.9.397}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.9.398}$$

$$\int_0^{\infty} \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.9.399}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{1.9.400}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.9.121 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.9.401}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \; u.o.c. \tag{1.9.402}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I - P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{1.9.403}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.9.404}$$

$$\overline{T}(t) \; \textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{1.9.405}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \; \textit{es no decreciente}, \tag{1.9.406}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.9.407}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \; \textit{especficas de la disciplina de la cola}, \tag{1.9.408}$$

Definición 1.9.168 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (*??*)-(*??*) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta>0$ *que depende de* μ,α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv 0$.

Teorema 1.9.122 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{1.9.409}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.9.169 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}\left(t\right) \tag{1.9.410}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{1.9.411}$$

$$\overline{T}_{k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente}, \tag{1.9.412}$$

$$\overline{I}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{k\in C_{i}}\overline{T}_{k}\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{1.9.413}$$

$$\overline{I}_{i}\left(\cdot\right) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0 \tag{1.9.414}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{1.9.415}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.9.170 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}\left(0\right),\overline{B}\left(0\right)\right)\in\mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??***, junto con la condición:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=\overline{Q}\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{A}\left(0\right)\right)^{+}-\left(I-P^{'}\right)M\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{B}\left(0\right)\right)^{+} \tag{1.9.416}$$

Definición 1.9.171 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$*, con* $t\geq t_{0}$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 1.9.13 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_{0}>0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$ *para cualquier* $t\geq t_{0}$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq 1$.

1.9.46 Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad

1.9.47 Teorema 2.1

El resultado principal de Down [?] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 1.9.123 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \sup \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p, \tag{1.9.417}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{1.9.418}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right] = 0. \tag{1.9.419}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right)ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{1.9.420}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

Proposición 1.9.50 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{1.9.421}$$

Lema 1.9.14 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta\left(k\right) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E\left(t\right) = max\left(n \geq 1 : \zeta\left(1\right) + \cdots + \zeta\left(n-1\right) \leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{1.9.422}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.9.124 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.9.423}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.9.125 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{1.9.424}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[\left|Q\left(t\right)\right|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[\left|Q\left(0\right)\right|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 1.9.126 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{1.9.425}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]\right|=0.$$

Teorema 1.9.127 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_{X}\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{1.9.426}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

1.9.48 Teorema 2.2

Teorema 1.9.128 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$\left|Q\left(T\right)\right|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ T\geq0, \tag{1.9.427}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $\left|Q\left(0\right)\right|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{1.9.428}$$

1.9.49 Teorema 2.3

Teorema 1.9.129 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_{j}}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_{s}}\right)\delta^{*} \tag{1.9.429}$$

i) Si $\rho<1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema **??**.

ii) Si $\rho<1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema **??**

1.9.50 Definiciones Básicas

Definición 1.9.172. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 1.9.173. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 1.9.174. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.9.175. *Una función $f : X \to \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.9.176. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1.9.177. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.9.178. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.9.179. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.9.180. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B|\mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B|X(s)\}. \tag{1.9.430}$$

Nota 1.9.51. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B|X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B|X(s)\} \tag{1.9.431}$$

Teorema 1.9.130. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots, m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \to p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \to \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty|\mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.9.432}$$

en $\{T < \infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.9.51. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$*.*

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$*.*

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$*.*

Lema 1.9.31 (Lema 3.1 [**?**])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.9.131 (Teorema 5.2 [**?**])**.** *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1.9.132 (Teorema 5.1 [**?**])**.** *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α,μ,T,U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$*, para toda* $t\geq t_{0}$*.*

Lema 1.9.32 (Lema 5.2 [**?**])**.** *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$*, y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$*, entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r} \quad (1.9.433)$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$*,* $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.9.133 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [**?**])**.** *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$*. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$*.*

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 1.9.52 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.9.434}$$

Proposición 1.9.53 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.9.435}$$

Proposición 1.9.54 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{1.9.436}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 1.9.134 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.9.437}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{1.9.438}$$

Teorema 1.9.135 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1.9.136 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

1.9.51 Proceso de Estados Markoviano para el Sistema

Sean $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ el tiempo residual de arribos a la cola k, para cada servidor m, sea $H_m(t)$ par ordenado que consiste en la cola que está siendo atendida y la política de servicio que se está utilizando. $B_m(t)$ los tiempos de servicio residuales, $B_m^0(t)$ el tiempo residual de traslado, $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H_m(t)$.

El proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{1.9.439}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{1.9.440}$$
$$P(\xi_k(1) + \ldots \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\, dx0 \text{ y} \tag{1.9.441}$$
$$\int_0^\infty q_k(x)\, dx > 0 \tag{1.9.442}$$

1.9.52 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho, Sharpe [?], en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$.

Se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable.

Definición 1.9.181. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1.9.182. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1.9.183. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.9.184. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{1.9.443}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.9.137. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

1.9.53 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.9.185. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{85}. \tag{1.9.444}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov [86] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.9.446}$$

Definición 1.9.186. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.9.52. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.9.447}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

1.9.54 Primer Condición de Regularidad

Definición 1.9.187. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1.9.188 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1.9.189. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;

[85] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[86]
$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.9.445}$$

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{1.9.448}$$

iii) *Para cualquier* $x \in E, \mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 1.9.190 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.9.191. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Definición 1.9.192. *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{F}$ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* X*, la pareja* $(X, \mathcal{F})$ *es llamado espacio medible. Un subconjunto* A *de* X *es llamado medible, o medible con respecto a* $\mathcal{F}$*, si* $A \in \mathcal{F}$.

Definición 1.9.193. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *espacio de medida. Se dice que la medida* μ *es* σ*-finita si se puede escribir* $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ *con* $X_n \in \mathcal{F}$ *y* $\mu(X_n) < \infty$.

Definición 1.9.194. *Sea* X *el conjunto de los úmeros reales* $\mathbb{R}$*. El álgebra de Borel es la* σ*-álgebra* B *generada por los intervalos abiertos* $(a, b) \in \mathbb{R}$*. Cualquier conjunto en* B *es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.9.195. *Una función* $f : X \rightarrow \mathbb{R}$*, es medible si para cualquier número real* α *el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X*. Equivalentemente, se dice que* f *es medible si*

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.9.196. *Sean* $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$*,* $i = 1, 2, \ldots,$ *espacios medibles y* $\Omega = \prod_{i=1}^\infty \Omega_i$ *el conjunto de todas las sucesiones* $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ *tales que* $\omega_i \in \Omega_i$*,* $i = 1, 2, \ldots,$*. Si* $B^n \subset \prod_{i=1}^\infty \Omega_i$*, definimos* $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$*. Al conjunto* B_n *se le llama* cilindro *con base* B^n*, el cilindro es llamado medible si* $B^n \in \prod_{i=1}^\infty \mathcal{F}_i$.

Definición 1.9.197. *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de* σ*-álgebras* $\mathcal{F}_t$*, para* $t \geq 0$*, si para* $s < t$ *implica que* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$*, y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}_t$*-medible para cada* t*. Si no se especifica* $\mathcal{F}_t$ *entonces se toma* $\mathcal{F}_t$ *como* $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$*, la más pequeña* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω *que hace que cada* $X(s)$*, con* $s \leq t$ *sea Borel medible.*

Definición 1.9.198. *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ *familia creciente de sub* σ*-álgebras. es decir,* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *para* $s \leq t$*. Un tiempo de paro para* $\mathcal{F}(t)$ *es una función* $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ *tal que* $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ *para cada* $t \geq 0$*. Un tiempo de paro para el proceso estocástico* $X(t), t \geq 0$ *es un tiempo de paro para las* σ*-álgebras* $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.

Definición 1.9.199. *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, con* (S, χ) *espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a* $\{\mathcal{F}(t)\}$*, es decir, si para cualquier* $s, t \in I$*,* I *conjunto de índices,* $s < t$*, se tiene que* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}(t)$*-medible,*

Definición 1.9.200. *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a* $\mathcal{F}(t)$ *o que* $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ *es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto* $B \in \chi$*, y* $s, t \in I$*,* $s < t$ *se cumple que*

$$P\{X(t) \in B|\mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B|X(s)\}. \tag{1.9.449}$$

Nota 1.9.53. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{1.9.450}$$

Teorema 1.9.138. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots, m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.9.451}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{1.9.452}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{1.9.453}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.9.454}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \left\{ \begin{array}{ll} exp\left(-\int_0^t \lambda\left(n, \phi_n\left(s, \mathbf{z}\right)\right) ds\right), & t < t^*\left(\mathbf{x}\right), \\ 0, & t \geq t^*\left(\mathbf{x}\right) \end{array} \right. \tag{1.9.455}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}\left[T_1 > t\right] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q\left(\cdot; \phi_n\left(T_1, \mathbf{z}\right)\right)$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[87]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \left\{ \begin{array}{ll} \left(n, \phi_n\left(t, \mathbf{z}\right)\right), & t < T_1, \\ \left(N, \mathbf{Z}\right), & t = t_1. \end{array} \right.$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 1.9.7 (Supuesto 3.1, Davis [**?**]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[N_t\right] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{1.9.456}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.9.201. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1.9.202. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1.9.203. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.9.204. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \textit{ es compacto en } E\right\}. \tag{1.9.457}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.9.139. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

1.9.55 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f\left(X_r\right) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.9.205. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B)^{88}. \tag{1.9.458}$$

[87]Revisar página 362, y 364 de Davis [**?**].
[88]Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[89] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_t\right)|\mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t}f\left(X_t\right) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.9.460}$$

Definición 1.9.206. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E, \mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f\left(x\right) = P_t\left(P_s f\right)\left(x\right), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.9.54. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_{t+s}\right)|\mathcal{G}_t\right\} = P_s f\left(X_t\right) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.9.461}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

1.9.56 Primer Condición de Regularidad

Definición 1.9.207. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 1.9.208 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* $/P_t)$ *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1.9.209. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E, \mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \;\; y \;\; X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{1.9.462}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 1.9.210 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.9.211. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

[89]
$$\mathbb{P}\left\{H|\mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H|X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.9.459}$$

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 1.9.33 (Lema 4.2, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'}t, \text{ u.o.c.}, \tag{1.9.463}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k\left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.9.464}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k\left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.9.465}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 1.9.34 (Lema 4.3, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{1.9.466}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.9.467}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{1.9.468}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.9.469}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.9.470}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.9.471}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.9.472}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.9.473}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.9.140 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.9.474}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)\ u.o.c. \tag{1.9.475}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{1.9.476}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0, \tag{1.9.477}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\ \textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{1.9.478}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right)\ \textit{es no decreciente}, \tag{1.9.479}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0, \tag{1.9.480}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)\textit{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{1.9.481}$$

Definición 1.9.212 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ en **??** es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta>0$ que depende de μ,α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv 0$.*

Teorema 1.9.141 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{1.9.482}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.9.213 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$, con $t\geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 1.9.15 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por **??**-**??** es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0>0$ tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$ para cualquier $t\geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq 1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.9.55. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 1.9.35 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.9.142 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1.9.143 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$, *para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 1.9.36 (Lema 5.2 [?]). *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r} \qquad (1.9.483)$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.9.144 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$..

Proposición 1.9.56 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0. \tag{1.9.484}$$

Proposición 1.9.57 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1}<\infty$, $\delta>0$ *y un conjunto compacto* $C\subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1+|X\left(t\right)|^p\right)dt\right]\leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right) \tag{1.9.485}$$

Proposición 1.9.58 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta>0$, *y un conjunto cerrado* $C\subset X$

$$V\left(x\right):=\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x\in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k<\infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right]+\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right]\leq\frac{1}{t}V\left(x\right)+k, \tag{1.9.486}$$

para $x\in X$ *y* $t>0$.

Teorema 1.9.145 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p<\infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.9.487}$$

para $t\geq0$, $x\in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq k_p \tag{1.9.488}$$

Teorema 1.9.146 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow0$$

para $t\rightarrow\infty$ *y* $x\in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right]<\infty$$

Teorema 1.9.147 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x\in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 1.9.59 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{1.9.489}$$

Lema 1.9.16 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^{r}. \tag{1.9.490}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.9.148 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.9.491}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.9.149 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{1.9.492}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 1.9.150 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}\left\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{1.9.493}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 1.9.151 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\, ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{1.9.494}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.9.152 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.9.495}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{1.9.496}$$

1.9.57 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N\left(\omega\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]=\overline{N}>0$;
2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(1\right)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}^{m}r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(i\right)\right]. \tag{1.9.497}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}<1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [?].

Si denotamos por

- $Q_{k}\left(t\right)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}\left(t\right)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}\left(t\right)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X\left(t\right)^{T}=\left(Q_{k}\left(t\right),A_{k}\left(t\right),B_{m}\left(t\right),B_{m}^{0}\left(t\right),C_{m}\left(t\right)\right), \tag{1.9.498}$$

para $k=1,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X}=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1,\ldots,\xi_K,\eta_1,\ldots,\eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p\geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_l\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l=1,\ldots,K \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k=1,\ldots,K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k=1,2,\ldots,K$ existe una función positiva $q_k\left(\cdot\right)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k\left(1\right)\geq x\right) > 0, \text{ para todo } x>0, \tag{1.9.499}$$

$$P\left\{a\leq\sum_{i=1}^{j_k}\xi_k\left(i\right)\leq b\right\} \geq \int_a^b q_k\left(x\right)dx,\ 0\leq a<b. \tag{1.9.500}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición ??.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

1.9.58 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X\left(t\right),\theta_t,P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X=\left\{X\left(t\right),t\geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t,t\geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x,x\in\mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x\in\mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right)=x\right\}=1,$$

y

$$E_x\left\{f\left(X\circ\theta_t\right)|\mathcal{F}_t\right\}=E_X\left(\tau\right)f\left(X\right),$$

en $\left\{\tau<\infty\right\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X\circ\theta_\tau\right)\left(w\right)=\left\{X\left(\tau\left(w\right)+t,w\right),t\geq 0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t\left(x,D\right)$, $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t\geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t\left(x,D\right)=P_x\left(X\left(t\right)\in D\right).$$

Definición 1.9.214. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D)=\int_{\mathbb{X}}P^{t}(x,D)\,\pi(dx),$$

para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t\geq 0$.

Definición 1.9.215. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D)>0$ y $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_{x}\left\{\tau_{D}<\infty\right\}\equiv 1,$$

cuando $\tau_{D}=inf\left\{t\geq 0:X_{t}\in D\right\}$.

Nota 1.9.55. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [**?**]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}(\cdot)=\int_{\mathbf{X}}P_{x}(\cdot)\,\pi(dx),$$

*y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [**?**].*

Definición 1.9.216. *Un conjunto $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t>0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta>0$ tal que*

$$P^{t}(x,A)\geq\delta\nu(A),$$

para $x\in D,A\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [**?**]:

Lema 1.9.37 (Lema 3.1, Dai [**?**])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_{x}(\tau_{B}<\infty)\equiv 1$ y que para algún $\delta>0$ se cumple que*

$$\sup\mathbb{E}_{x}\left[\tau_{B}(\delta)\right]<\infty,\tag{1.9.501}$$

donde $\tau_{B}(\delta)=inf\left\{t\geq\delta:X(t)\in B\right\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 1.9.38 (Lema 3.1, Dai [**?**])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B=\left\{x\in\mathbb{X}:|x|\leq k\right\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k>0$.*

Teorema 1.9.153 (Teorema 3.1, Dai [**?**])**.** *Si existe un $\delta>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^{x}(|x|\delta)|=0,\tag{1.9.502}$$

*donde X^{x} se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B=\left\{x\in\mathbb{X}:|x|\leq k\right\}$ con algún $k>0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1)$-$A3)$, lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.9.59 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.9.503}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{1.9.504}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{1.9.505}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.9.506}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.9.507}$$

Definición 1.9.217 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1.9.218. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, *se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.9.154 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{1.9.508}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.9.219 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 1.9.17 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.9.155 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{1.9.509}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x \left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{1.9.510}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x \left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{1.9.511}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s) ds = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{1.9.512}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.9.156 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{1.9.513}$$

*i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.*

*ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??***

Dado el proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ definido en (**??**) que describe la dinámica del sistema de visitas cíclicas, si $U(t)$ es el residual de los tiempos de llegada al tiempo t entre dos usuarios consecutivos y $V(t)$ es el residual de los tiempos de servicio al tiempo t para el usuario que estás siendo atendido por el servidor. Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados que puede tomar el proceso X.

Lema 1.9.39 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k,$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+}, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t\geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea e es un vector de unos, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\begin{cases}1, & S(k)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema (**??**):

Teorema 1.9.157 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset \mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0),U^{x_{n_j}}(0),V^{x_{n_j}}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(0),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{1.9.514}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{1.9.515}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t)=Q(0)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-(I-P)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}(t)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{1.9.516}$$

$$\overline{Q}(t)\geq 0, \tag{1.9.517}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{1.9.518}$$

$$\overline{I}(t)=et-C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{1.9.519}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right)d\overline{I}(t)=0, \tag{1.9.520}$$

$$\text{Condiciones en } \left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.9.521}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.9.60 (Proposición 4.2, Dai [?]). *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0),\frac{1}{|x|}A_k^x(0),\frac{1}{|x|}B_k^x(0),\frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_k(0),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. El flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) *Los vectores de tiempo ocupado* $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) *Para todo* $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K} \left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t.$$

iii) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t).$$

iv) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \rho_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) *Para todo* k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t).$$

vi) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t),$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 1.9.40 (Lema 3.1, Chen [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Lema 1.9.41 (Lema 5.2, Gut [?]). *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r, \tag{1.9.522}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) *Para cualquier* $t > 0$, $sup_{t\geq\delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$.

b) *Las variables aleatorias* $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.9.158 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo, Gut [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \to \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \to \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \to \infty$ *para todo* $r > 0$.

Proposición 1.9.61 (Proposición 5.1, Dai y Sean [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.9.523}$$

Proposición 1.9.62 (Proposición 5.3, Dai y Sean [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p)\, dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right). \tag{1.9.524}$$

Proposición 1.9.63 (Proposición 5.4, Dai y Sean [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right],$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{1.9.525}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1.9.159 (Teorema 5.5, Dai y Sean [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\}, \tag{1.9.526}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p. \tag{1.9.527}$$

Teorema 1.9.160 (Teorema 6.2 Dai y Sean [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \to 0,$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x[|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q_0|^p] < \infty,$$

donde

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_f = sup_{|g \leq f|} | \int \pi(dy)\, g(y) - \int P^t(x,dy)\, g(y) |,$$

para $x \in \mathbb{X}$.

Teorema 1.9.161 (Teorema 6.3, Dai y Sean [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)} \left| P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \right|_f = 0,$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)} |\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]| = 0.$$

Proposición 1.9.64 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0. \tag{1.9.528}$$

Teorema 1.9.162 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\}, \tag{1.9.529}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.9.163 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right)\pi\left(dx\right), \tag{1.9.530}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.9.164 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \; T \geq 0, \tag{1.9.531}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{1.9.532}$$

Demostración 1.9.1 (Teorema ??). *La demostración de este teorema se da a continuación:*

i) Utilizando la proposición ?? se tiene que la proposición ?? es cierta para $f\left(x\right) = 1 + |x|^p$.

i) es consecuencia directa del Teorema ??.

iii) ver la demostración dada en Dai y Sean [?] páginas 1901-1902.

iv) ver Dai y Sean [?] páginas 1902-1903 ó [?].

Modelo de Flujo y Estabilidad

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k\left(n\right) := \sum_{i=1}^n \phi^k\left(i\right). \tag{1.9.533}$$

suponiendo que el estado inicial de la red es $x = (q, a, b) \in X$, entonces para cada k

$$E_k^x\left(t\right) := \max\left\{n \geq 0 : A_k^x\left(0\right) + \psi_k\left(1\right) + \cdots + \psi_k\left(n-1\right) \leq t\right\} \tag{1.9.534}$$

$$S_k^x\left(t\right) := \max\left\{n \geq 0 : B_k^x\left(0\right) + \eta_k\left(1\right) + \cdots + \eta_k\left(n-1\right) \leq t\right\} \tag{1.9.535}$$

Sea $T_k^x\left(t\right)$ el tiempo acumulado que el servidor $s\left(k\right)$ ha utilizado en los usuarios de la clase k en el intervalo $[0, t]$. Entonces se tienen las siguientes ecuaciones:

$$Q_k^x\left(t\right) = Q_k^x\left(0\right) + E_k^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^k \Phi_k^l S_l^x\left(T_l^x\right) - S_k^x\left(T_k^x\right) \tag{1.9.536}$$

$$Q^x\left(t\right) = \left(Q_1^x\left(t\right), \ldots, Q_K^x\left(t\right)\right)^{'} \geq 0, \tag{1.9.537}$$

$$T^x\left(t\right) = \left(T_1^x\left(t\right), \ldots, T_K^x\left(t\right)\right)^{'} \geq 0, \text{ es no decreciente} \tag{1.9.538}$$

$$I_i^x\left(t\right) = t - \sum_{k\in C_i} T_k^x\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{1.9.539}$$

$$\int_0^\infty \sum_{k\in C_i} Q_k^x\left(t\right)dI_i^x\left(t\right) = 0 \tag{1.9.540}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x\left(\cdot\right), T^x\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{1.9.541}$$

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{1.9.542}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola. Si se hace $|q| \to \infty$ y se mantienen las componentes restantes fijas, de la condición inicial x, cualquier punto límite del proceso normalizado $\overline{Q}^{x}$ es una solución del siguiente modelo de flujo, ver [**?**].

Definición 1.9.220. *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $(Q^{x}(\cdot), T^{x}(\cdot))$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk}\mu_l \overline{T}_l(t) \tag{1.9.543}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \ \textit{para} \ k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.9.544}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \ \textit{y} \ \overline{T}_k(\cdot) \ \textit{es no decreciente}, \tag{1.9.545}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \ \textit{es no decreciente} \tag{1.9.546}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \ \textit{se incrementa al tiempot cuando} \ \sum_{k \in C_i} Q_k^{x}(t)\, dI_i^{x}(t) = 0 \tag{1.9.547}$$

$$\textit{condiciones adicionales sobre} \ (Q^{x}(\cdot), T^{x}(\cdot)) \ \textit{referentes a la disciplina de servicio} \tag{1.9.548}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.9.221. *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??**, *junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^{+} - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^{+} \tag{1.9.549}$$

Definición 1.9.222. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en [**?**].

Lema 1.9.18. *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|overlinex| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Resultados principales

Supuestos necesarios sobre la red

Supuestos 1.9.8. *A1)* $\psi_1, \ldots, \psi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ *son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\psi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \ \textit{para} \ l \in \mathcal{A} \ \textit{y}$$

$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \ \textit{para} \ k = 1, \ldots, K.$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\psi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{1.9.550}$$

$$P(\psi_k(1) + \dots \psi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\, dx0 \text{ y} \tag{1.9.551}$$

$$\int_0^\infty q_k(x)\, dx > 0 \tag{1.9.552}$$

El argumento dado en [?] en el lema **??** se puede aplicar para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños.Entonces la condición $A3$) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 1.9.165. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] ds \leq \kappa_p \tag{1.9.553}$$

donde p es el entero dado por A2). Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r \tag{1.9.554}$$

para $r = 1, \dots, p$ y $k = 1, \dots, K$.

iii) EL primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\to\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0. \tag{1.9.555}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \tag{1.9.556}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r = 1, \dots, p$ y $k = 1, \dots, K$.

Demostración 1.9.2. *La demostración de este resultado se da aplicando los teoremas* **??**, **??**, **??** *y* **??**

Definiciones Generales

Definimos un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada. Bajo cualquier *preemptive buffer priority* disciplina de servicio, el estado $\mathbb{X}(t)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}(t) = (Q_k(t), A_l(t), B_k(t) : k = 1, 2, \dots, K, l \in \mathcal{A}) \tag{1.9.557}$$

donde $Q_k(t)$ es la longitud de la cola para los usuarios de la clase k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k(t)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio. Los tiempos de arribo residuales, que son iguales al tiempo que queda hasta que el próximo usuario de la clase k llega, se denotan por $A_k(t)$. Tanto $B_k(t)$ como $A_k(t)$ se suponen continuos por la derecha.

Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x = (q, a, b)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = (q, a, b) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x\| = |q| + |a| + |b|$. En [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho en el espacio de estadio medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, est definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y est adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; $\{P_x, x \in X\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in X$

$$P_x \{\mathbb{X}(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{\mathbb{X}(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la sigma algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(\mathbb{X}(t) \in D)$$

Definición 1.9.223. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_X P^t(x, D) \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.9.224. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

- Si X es Harris recurrente, entonces una única medida invariante π existe ([**?**]).
- Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama *Harris recurrente positiva*.
- Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) [= \int_X P_x(\cdot) \pi(dx)$$

  y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, as, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π

Definición 1.9.225. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.[90]

[90] En [**?**] muestran que si $P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ solamente para uno conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris recurrente

Definiciones y Descripción del Modelo

El modelo está compuesto por c colas de capacidad infinita, etiquetadas de 1 a c las cuales son atendidas por s servidores. Los servidores atienden de acuerdo a una cadena de Markov independiente $\left(X_n^i\right)_n$ con $1 \leq i \leq s$ y $n \in \{1, 2, \ldots, c\}$ con la misma matriz de transición $r_{k,l}$ y única medida invariante (p_k). Cada servidor permanece atendiendo en la cola un periodo llamado de visita y determinada por la política de servicio asignada a la cola.

Los usuarios llegan a la cola k con una tasa λ_k y son atendidos a una razón μ_k. Las sucesiones de tiempos de interarribo $(\tau_k(n))_n$, la de tiempos de servicio $\left(\sigma_k^i(n)\right)_n$ y la de tiempos de cambio $\left(\sigma_{k,l}^{0,i}(n)\right)_n$ requeridas en la cola k para el servidor i son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas con distribución general independiente de i, con media $\sigma_k = \frac{1}{\mu_k}$, respectivamente $\sigma_{k,l}^0 = \frac{1}{\mu_{k,l}^0}$, e independiente de las cadenas de Markov $\left(X_n^i\right)_n$. Además se supone que los tiempos de interarribo se asume son acotados, para cada $\rho_k = \lambda_k \sigma_k < s$ para asegurar la estabilidad de la cola k cuando opera como una cola $M/GM/1$.

Políticas de Servicio

Una política de servicio determina el número de usuarios que serán atendidos sin interrupción en periodo de servicio por los servidores que atienden a la cola. Para un solo servidor esta se define a través de una función f donde $f(x, a)$ es el número de usuarios que son atendidos sin interrupción cuando el servidor llega a la cola y encuentra x usuarios esperando dado el tiempo transcurrido de interarribo a. Sea $v(x, a)$ la duración del periodo de servicio para una sola condición inicial (x, a).

Las políticas de servicio consideradas satisfacen las siguientes propiedades:

i) Hay conservación del trabajo, es decir

$$v(x, a) = \sum_{l=1}^{f(x,a)} \sigma(l)$$

con $f(0, a) = v(0, a) = 0$, donde $(\sigma(l))_l$ es una sucesión independiente e idénticamente distribuida de los tiempos de servicio solicitados.

ii) La selección de usuarios para se atendidos es independiente de sus correspondientes tiempos de servicio y del pasado hasta el inicio del periodo de servicio. Así las distribución (f, v) no depende del orden en el cuál son atendidos los usuarios.

iii) La política de servicio es monótona en el sentido de que para cada $a \geq 0$ los números $f(x, a)$ son monótonos en distribución en x y su límite en distribución cuando $x \to \infty$ es una variable aleatoria F^{*0} que no depende de a.

iv) El número de usuarios atendidos por cada servidor es acotado por $f^{min}(x)$ de la longitud de la cola x que además converge monótonamente en distribución a F^* cuando $x \to \infty$

Proceso de Estados

El sistema de colas se describe por medio del proceso de Markov $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$ como se define a continuación. El estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = (Q(t), P(t), A(t), R(t), C(t))$$

donde

- $Q(t) = (Q_k(t))_{k=1}^c$, número de usuarios en la cola k al tiempo t.
- $P(t) = \left(P^i(t)\right)_{i=1}^s$, es la posición del servidor i.
- $A(t) = (A_k(t))_{k=1}^c$, es el residual del tiempo de arribo en la cola k al tiempo t.
- $R(t) = \left(R_k^i(t), R_{k,l}^{0,i}(t)\right)_{k,l,i=1}^{c,c,s}$, el primero es el residual del tiempo de servicio del usuario atendido por servidor i en la cola k al tiempo t, la segunda componente es el residual del tiempo de cambio del servidor i de la cola k a la cola l al tiempo t.

- $C(t) = \left(C_k^i(t)\right)_{k,i=1}^{c,s}$, es la componente correspondiente a la cola k y al servidor i que está determinada por la política de servicio en la cola k y que hace al proceso $X(t)$ un proceso de Markov.

Todos los procesos definidos arriba se suponen continuos por la derecha.

El proceso X tiene la propiedad fuerte de Markov y su espacio de estados es el espacio producto

$$\mathcal{X} = \mathbb{N}^c \times E^s \times \mathbb{R}_+^c \times \mathbb{R}_+^{cs} \times \mathbb{R}_+^{c^2 s} \times \mathcal{C}$$

donde $E = \{1, 2, \ldots, c\}^2 \cup \{1, 2, \ldots, c\}$ y $\mathcal{C}$ depende de las políticas de servicio.

Introducción

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1. $$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0 \tag{1.9.558}$$

2. $$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N} \tag{1.9.559}$$

   para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j'}^m = r_{j,j'}$
- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define
$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right]. \tag{1.9.560}$$

Colas Cíclicas

El *token passing ring* es una estación de un solo servidor con K clases de usuarios. Cada clase tiene su propio regulador en la estación. Los usuarios llegan al regulador con razón α_k y son atendidos con taza μ_k.

La red se puede modelar como un Proceso de Markov con espacio de estados continuo, continuo en el tiempo:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t), B_k^0(t), C(t) : k = 1, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right) \tag{1.9.561}$$

donde $Q_k(t), B_k(t)$ y $A_k(t)$ se define como en **??**, $B_k^0(t)$ es el tiempo residual de cambio de la clase k a la clase $k+1\,(modK)$; $C(t)$ indica el número de servicios que han sido comenzados y/o completados durante la sesión activa del buffer.

Los parámetros cruciales son la carga nominal de la cola k: $\beta_k = \alpha_k/\mu_k$ y la carga total es $\rho_0 = \sum \beta_k$, la media total del tiempo de cambio en un ciclo del token está definido por

$$u^0 = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}\left[\eta_k^0(1)\right] = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\mu_k^0} \tag{1.9.562}$$

El proceso de la longitud de la cola $Q_k^x(t)$ y el proceso de acumulación del tiempo de servicio $T_k^x(t)$ para el buffer k y para el estado inicial x se definen como antes. Sea $T_k^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo

t que el token tarda en cambiar del buffer k al $k+1 \mod K$. Suponga que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T^{x,0}\left(|x|t\right)\right) \tag{1.9.563}$$

cuando $|x|\rightarrow\infty$. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right),\overline{T}^{0}\left(t\right)\right)$ es un flujo límite retrasado del token ring.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado

Proposición 1.9.65. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Resultados Previos

Lema 1.9.19. *El proceso estocástico* Φ *es un proceso de markov fuerte, temporalmente homogéneo, con trayectorias muestrales continuas por la derecha, cuyo espacio de estados* Y *es igual a* $X\times\mathbb{R}$

Proposición 1.9.66. *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{1.9.564}$$

Lema 1.9.20. *Sea* $\{\zeta\left(k\right):k\in F\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $(0,\infty)$, *y sea* $E\left(t\right)=max\left(n\geq1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. *Si* $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{1.9.565}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}: t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.9.166. *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.9.566}$$

para $t>0$ *y* $x \in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.9.167. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$||P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)||_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{1.9.567}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 1.9.168. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con* $f(x)=f_1(x)$ *se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}||P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)||_f=0. \tag{1.9.568}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 1.9.169. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea* ν *cualquier distribución de probabilidad en* $(X,\mathcal{B}_X)$, *y* π *la distribución estacionaria de* X.

i) Para cualquier $f: X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds=\pi(f):=\int f(x)\,\pi(dx) \tag{1.9.569}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f: X\leftarrow\mathbb{R}_+$ *con* $\pi(|f|)<\infty$, *la ecuación anterior se cumple.*

Teorema de Estabilidad: Descripción

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x)=N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1. $$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right]=\overline{N}>0 \tag{1.9.570}$$

2. $$\mathbb{E}\left[N(x)\right]\leq\overline{N} \tag{1.9.571}$$

   para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}=r_{j,j^{'}}$

- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right]. \tag{1.9.572}$$

1.9.60 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(\omega)\right] = \overline{N} > 0$;
2) $\mathbb{E}\left[N(\omega)\right] \leq \overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r^m_{j,j'}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta^m_{j,j'}(n)$, con $\delta^m_{j,j'}(n)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta^m_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\left\{p^m_j\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r^m_{j,j'}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p^m_j r^m_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta^m_{j,j'}(i)\right]. \tag{1.9.573}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^{K}\rho_k < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_k(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;

- $B_m(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_m^0(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right), \tag{1.9.574}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{1.9.575}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx, \; 0 \leq a < b. \tag{1.9.576}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

1.9.61 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y
$$E_x\left\{f\left(X\circ\theta_t\right)|\mathcal{F}_t\right\}=E_X\left(\tau\right)f\left(X\right),$$
en $\{\tau<\infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro
$$\left(X\circ\theta_\tau\right)(w)=\left\{X\left(\tau\left(w\right)+t,w\right),t\geq0\right\},$$
y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [**?**, **?**].

Sea $P^t\left(x,D\right)$, $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t\geq0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:
$$P^t\left(x,D\right)=P_x\left(X\left(t\right)\in D\right).$$

Definición 1.9.226. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*
$$\pi\left(D\right)=\int_{\mathbb{X}}P^t\left(x,D\right)\pi\left(dx\right),$$
para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t\geq0$.

Definición 1.9.227. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu\left(D\right)>0$ y $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*
$$P_x\left\{\tau_D<\infty\right\}\equiv1,$$
cuando $\tau_D=inf\left\{t\geq0:X_t\in D\right\}$.

Nota 1.9.56. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [**?**]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos
$$P_\pi\left(\cdot\right)=\int_{\mathbf{X}}P_x\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right),$$
*y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [**?**].*

Definición 1.9.228. *Un conjunto $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t>0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta>0$ tal que*
$$P^t\left(x,A\right)\geq\delta\nu\left(A\right),$$
para $x\in D,A\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [**?**]:

Lema 1.9.42 (Lema 3.1, Dai [**?**])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x\left(\tau_B<\infty\right)\equiv1$ y que para algún $\delta>0$ se cumple que*
$$\sup\mathbb{E}_x\left[\tau_B\left(\delta\right)\right]<\infty,\tag{1.9.577}$$
donde $\tau_B\left(\delta\right)=inf\left\{t\geq\delta:X\left(t\right)\in B\right\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 1.9.43 (Lema 3.1, Dai [**?**])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B=\left\{x\in\mathbb{X}:|x|\leq k\right\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k>0$.*

Teorema 1.9.170 (Teorema 3.1, Dai [**?**])**.** *Si existe un $\delta>0$ tal que*
$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x\left(|x|\delta\right)|=0,\tag{1.9.578}$$
*donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B=\left\{x\in\mathbb{X}:|x|\leq k\right\}$ con algún $k>0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.9.62 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.9.579}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{1.9.580}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{1.9.581}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.9.582}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.9.583}$$

Definición 1.9.229 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1.9.230. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, *se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.9.171 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{1.9.584}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.9.231 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 1.9.21 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.9.172 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{1.9.585}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x \left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{1.9.586}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x \left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{1.9.587}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{1.9.588}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.9.173 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js} \overline{N}_s}\right) \delta^* \tag{1.9.589}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema ??.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema ??

1.9.63 Modelo de Flujo

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Sea x el número de usuarios en la cola esperando por servicio y $N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política dada y fija mientras el servidor permanece dando servicio, entonces se asume que:

(S1.)
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]=\overline{N}>0. \tag{1.9.590}$$

(S2.)
$$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]\leq\overline{N}, \tag{1.9.591}$$

para cualquier valor de x.

El tiempo que tarda un servidor en volver a dar servicio después de abandonar la cola inmediata anterior y llegar a la próxima se llama tiempo de traslado o de cambio de cola, al momento de la n-ésima visita del servidor a la cola j se genera una sucesión de variables aleatorias $\delta_{j,j+1}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con la propiedad de que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]\geq0$.

Se define
$$\delta^{*}:=\sum_{j,j+1}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]. \tag{1.9.592}$$

Los tiempos entre arribos a la cola k, son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos. Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho<1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Para el caso más sencillo podemos definir un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada, el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}\left(t\right)=\left(Q_{k}\left(t\right),A_{l}\left(t\right),B_{k}\left(t\right):k=1,2,\ldots,K,l\in\mathcal{A}\right), \tag{1.9.593}$$

donde $Q_{k}\left(t\right)$ es la longitud de la cola k para los usuarios esperando servicio, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_{k}\left(t\right)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio.

Los tiempos entre arribos residuales, que son el tiempo que queda hasta que el próximo usuario llega a la cola para recibir servicio, se denotan por $A_{k}\left(t\right)$. Tanto $B_{k}\left(t\right)$ como $A_{k}\left(t\right)$ se suponen continuos por la derecha [?].

Sea $\mathcal{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$, y sea $x=\left(q,a,b\right)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $\left|q\right|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x=\left(q,a,b\right)\in\mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\left\|x\right\|=\left|q\right|+\left|a\right|+\left|b\right|$. En [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que
$$\left(\left(\Omega,\mathcal{F}\right),\mathcal{F}_{t},\mathbb{X}\left(t\right),\theta_{t},P_{x}\right)$$
es un proceso de *Borel Derecho* en el espacio de estados medible $\left(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}}\right)$.

Sea $P^{t}\left(x,D\right)$, $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t\geq0$ probabilidad de transición de X definida como
$$P^{t}\left(x,D\right)=P_{x}\left(\mathbb{X}\left(t\right)\in D\right).$$

Definición 1.9.232. *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*
$$\pi\left(D\right)=\int_{X}P^{t}\left(x,D\right)\pi\left(dx\right),$$
para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t\geq0$.

Definición 1.9.233. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf \{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

Definición 1.9.234. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

Nota 1.9.57. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π ([**?**]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso a la medida se le llama ***Harris recurrente positiva****.*

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria; se define

$$P_\pi(\cdot) = \int_X P_x(\cdot)\pi(dx).$$

Se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, así, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π.

*iv) En [**?**] se muestra que si $P_x \{\tau_D < \infty\} = 1$ incluso para solamente un conjunto pequeño, entonces el proceso de Harris es recurrente.*

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\right) \tag{1.9.594}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{1.9.595}$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([**?**]).

Dada una condición inicial $x \in \mathcal{X}$, $Q_k^x(t)$ es la longitud de la cola k al tiempo t y $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en atender a los usuarios de la cola k. De igual manera se define $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en cambiar de cola para volver a atender a los usuarios.

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|}Q^{x}(|x|t), \tag{1.9.596}$$

$$\overline{T}_{m}^{x}(t) = \frac{1}{|x|}T_{m}^{x}(|x|t), \tag{1.9.597}$$

$$\overline{T}_{m}^{x,0}(t) = \frac{1}{|x|}T_{m}^{x,0}(|x|t). \tag{1.9.598}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola, al conjunto de todos los posibles flujos límite se le llamará **modelo de flujo**, ([?]).

Definición 1.9.235. *Un flujo límite para un sistema de visitas bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{1.9.599}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.9.600}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{1.9.601}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^{0}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para} m = 1, 2, \ldots, M \tag{1.9.602}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en (**??**)-(**??**) se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Definición 1.9.236. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

1.9.64 Estabilidad de los Sistemas de Visitas Cíclicas

Es necesario realizar los siguientes supuestos, ver ([?]) y ([?]):

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{1.9.603}$$

$$P(\xi_k(1) + \ldots \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\,dx 0 \text{ y} \tag{1.9.604}$$

$$\int_0^{\infty} q_k(x)\,dx > 0 \tag{1.9.605}$$

En [?] ser da un argumento para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños. Entonces la condición A3) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 1.9.174. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(t)|^p \right] ds \leq \kappa_p \tag{1.9.606}$$

donde p es el entero dado por A2).

Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x \left[Q_k(t)^r \right] = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right] \leq \kappa_r \tag{1.9.607}$$

para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\to\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x \left[Q(t) \right] - \mathbb{E}_\pi \left[Q(0) \right]| = 0. \tag{1.9.608}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right] \tag{1.9.609}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

Teorema 1.9.175. *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \text{ con } T \geq 0, \tag{1.9.610}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \left\{ \mathbb{X} \to \infty \right\} \geq q. \tag{1.9.611}$$

1.9.65 Resultados principales

En el caso particular de un modelo con un solo servidor, $M = 1$, se tiene que si se define

Definición 1.9.237.

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + \max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\overline{N}} \right) \delta^*. \tag{1.9.612}$$

entonces

Teorema 1.9.176. *i) Si $\rho < 1$, entonces la red es estable, es decir el teorema (**??**) se cumple.*

*ii) De lo contrario, es decir, si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, el teorema (**??**).*

1.9.66 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega \to \infty} \mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right] = \overline{N} > 0$;

2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right] \leq \overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(1\right)\right] \geq 0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*} := \sum_{j,j^{'}} p_{j}^{m} r_{j,j^{'}}^{m} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(i\right)\right]. \tag{1.9.613}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k} = \lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_{k} < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_{k}\left(t\right)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}\left(t\right)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}\left(t\right)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X\left(t\right)^{T} = \left(Q_{k}\left(t\right), A_{k}\left(t\right), B_{m}\left(t\right), B_{m}^{0}\left(t\right), C_{m}\left(t\right)\right), \tag{1.9.614}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \left(\left\{1, 2, \ldots, K\right\} \times \left\{1, 2, \ldots, S\right\}\right)^{M} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_{1}, \ldots, \xi_{K}, \eta_{1}, \ldots, \eta_{K}$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_{l}\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \quad (1.9.615)$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \quad (1.9.616)$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición ??.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

1.9.67 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 1.9.238. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D)\, \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.9.239. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 1.9.58. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\,\pi(dx),$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 1.9.240. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 1.9.44 (Lema 3.1, Dai [?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{1.9.617}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 1.9.45 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1.9.177 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{1.9.618}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.9.68 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.9.619}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{1.9.620}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{1.9.621}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.9.622}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}^0_{m,k}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.9.623}$$

Definición 1.9.241 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1.9.242. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.9.178 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t). \tag{1.9.624}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.9.243 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 1.9.22 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.9.179 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{1.9.625}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) *Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right]=\mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right]\leq\kappa_r, \tag{1.9.626}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$. *Donde* π *es la probabilidad invariante para* X.

iii) *El primer momento converge con razón* t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)\right]|=0. \tag{1.9.627}$$

iv) *La* Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right)ds=\mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{1.9.628}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.9.180 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^K\rho_k+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{1.9.629}$$

i) *Si* $\rho<1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema* **??**.

ii) *Si* $\rho>1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema* **??**

1.9.69 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N\left(\omega\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]=\overline{N}>0$;

2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^m$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^m\left(n\right)$, con $\delta_{j,j^{'}}^m\left(n\right)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^m\left(1\right)\right]\geq0$.

- Sea $\left\{p_j^m\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}^m\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j^m r_{j,j'}^m \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}^m(i)\right]. \tag{1.9.630}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [?].

Si denotamos por

- $Q_k(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_m(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_m^0(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right), \tag{1.9.631}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\
\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k(1) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{1.9.632}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{1.9.633}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

1.9.70 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_{t},X\left(t\right),\theta_{t},P_{x}\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X=\left\{X\left(t\right),t\geq0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_{t},t\geq0\right\}$; la colección $\left\{P_{x},x\in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x\in\mathbb{X}$

$$P_{x}\left\{X\left(0\right)=x\right\}=1,$$

y

$$E_{x}\left\{f\left(X\circ\theta_{t}\right)|\mathcal{F}_{t}\right\}=E_{X}\left(\tau\right)f\left(X\right),$$

en $\left\{\tau<\infty\right\}$, P_{x}-c.s., con θ_{t} definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_{t}$-tiempo de paro

$$\left(X\circ\theta_{\tau}\right)\left(w\right)=\left\{X\left(\tau\left(w\right)+t,w\right),t\geq0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^{t}\left(x,D\right)$, $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t\geq0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^{t}\left(x,D\right)=P_{x}\left(X\left(t\right)\in D\right).$$

Definición 1.9.244. *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right)=\int_{\mathbb{X}}P^{t}\left(x,D\right)\pi\left(dx\right),$$

para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t\geq0$.

Definición 1.9.245. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$, tal que si $\nu\left(D\right)>0$ y $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_{x}\left\{\tau_{D}<\infty\right\}\equiv1,$$

cuando $\tau_{D}=inf\left\{t\geq0:X_{t}\in D\right\}$.

Nota 1.9.59. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}\left(\cdot\right)=\int_{\mathbf{X}}P_{x}\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right),$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 1.9.246. *Un conjunto $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t>0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta>0$ tal que*

$$P^{t}\left(x,A\right)\geq\delta\nu\left(A\right),$$

para $x\in D,A\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 1.9.46 (Lema 3.1, Dai [?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x [\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{1.9.634}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf \{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 1.9.47 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1.9.181 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{1.9.635}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.9.71 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.9.636}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{1.9.637}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{1.9.638}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.9.639}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.9.640}$$

Definición 1.9.247 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1.9.248. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta>0$ que depende de μ,λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv0$.*

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.9.182 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right). \tag{1.9.641}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.9.249 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_{0} tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$, con $t\geq t_{0}$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.*

Lema 1.9.23 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_{0}>0$ tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$ para cualquier $t\geq t_{0}$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.9.183 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_{p}, y para cada condición inicial $x\in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}, \tag{1.9.642}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right]\leq\kappa_{r}, \tag{1.9.643}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)\right]|=0. \tag{1.9.644}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-c.s.} \tag{1.9.645}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.9.184 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{1.9.646}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_l (1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k (1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{1.9.647}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\, dx,\ 0 \leq a < b. \tag{1.9.648}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

1.9.72 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está

adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x \{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [**?**, **?**].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 1.9.250. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D) \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.9.251. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 1.9.60. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [**?**]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot) \pi(dx),$$

*y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [**?**].*

Definición 1.9.252. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [**?**]:

Lema 1.9.48 (Lema 3.1, Dai [**?**])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x [\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{1.9.649}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 1.9.49 (Lema 3.1, Dai [**?**])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1.9.185 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^{x}\left(|x|\delta\right)| = 0, \tag{1.9.650}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.9.73 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_{k}^{x}\left(t\right)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^{x}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x,0}\left(|x|t\right)\right) \tag{1.9.651}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}_{m}\left(t\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(t\right)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right) = \overline{Q}_{k}\left(0\right) + \lambda_{k}t - \sum_{m=1}^{M}\mu_{k}\overline{T}_{m,k}\left(t\right), \tag{1.9.652}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{1.9.653}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente}, \tag{1.9.654}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^{0}\left(t\right) + \overline{T}_{m,k}\left(t\right) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.9.655}$$

Definición 1.9.253 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1.9.254. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.9.186 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t). \tag{1.9.656}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.9.255 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 1.9.24 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (**??**)-(**??**) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.9.187 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p \right] ds \leq \kappa_p, \tag{1.9.657}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x \left[Q_k(t)^r \right] = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right] \leq \kappa_r, \tag{1.9.658}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\to\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x \left[Q_k(t) \right] - \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0) \right]| = 0. \tag{1.9.659}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right], \; \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{1.9.660}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.9.188 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{1.9.661}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

1.9.74 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(\omega)] = \overline{N} > 0$;
2) $\mathbb{E}[N(\omega)] \leq \overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*} := \sum_{j,j^{'}} p_{j}^{m} r_{j,j^{'}}^{m} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(i)\right]. \tag{1.9.662}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}(n)\right\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}(n)\right\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k} = 1/\mathbb{E}[\xi_{k}(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k} = 1/\mathbb{E}[\eta_{k}(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k} = \lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_{k} < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_{k}(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^{T} = \left(Q_{k}(t), A_{k}(t), B_{m}(t), B_{m}^{0}(t), C_{m}(t)\right), \tag{1.9.663}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^{M} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{1.9.664}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\, dx,\ 0 \leq a < b. \tag{1.9.665}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición ??.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

1.9.75 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 1.9.256. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D)\, \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.9.257. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 1.9.61. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\, \pi(dx),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 1.9.258. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 1.9.50 (Lema 3.1, Dai [?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{1.9.666}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 1.9.51 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1.9.189 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{1.9.667}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.9.76 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.9.668}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{1.9.669}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{1.9.670}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{1.9.671}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.9.672}$$

Definición 1.9.259 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1.9.260. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.9.190 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{1.9.673}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.9.261 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 1.9.25 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.9.191 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{1.9.674}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{1.9.675}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{1.9.676}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{1.9.677}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.9.192 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{1.9.678}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

1.10 Preliminares: Modelos de Flujo

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]=\overline{N}>0$;

2) $\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(1)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}^{m}r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(i)\right]. \tag{1.10.1}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}(n)\right\}_{n\geq1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}(n)\right\}_{n\geq1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}<1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_{k}(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^{T}=\left(Q_{k}(t),A_{k}(t),B_{m}(t),B_{m}^{0}(t),C_{m}(t)\right), \tag{1.10.2}$$

para $k=1,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X}=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

1.10.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{1.10.3}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{1.10.4}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

1.10.2 Procesos Regenerativos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.
Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0. \tag{1.10.5}$$

(S2.)
$$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N}, \tag{1.10.6}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right] \geq 0$.
- Se define
$$\delta^* := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right]. \tag{1.10.7}$$
- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.

- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $\left(X\left(t\right)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X\left(t\right) = \left(Q\left(t\right), A\left(t\right), H\left(t\right), B\left(t\right), B^0\left(t\right), C\left(t\right)\right) \tag{1.10.8}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times \left(\{1,2,\ldots,K\} \times \{1,2,\ldots,S\}\right)^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{1.10.9}$$

- $Q\left(t\right) = \left(Q_k\left(t\right), 1 \leq k \leq K\right)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A\left(t\right) = \left(A_k\left(t\right), 1 \leq k \leq K\right)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H\left(t\right)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B\left(t\right)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0\left(t\right)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C\left(t\right)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H\left(t\right)$.

$A_k\left(t\right), B_m\left(t\right)$ y $B_m^0\left(t\right)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([**?**])

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_k\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

1.10.3 Preliminares

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s\left(x\right) = N\left(x\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right] = \overline{N} > 0$
2) $\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right] \leq \overline{N}$para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j'}^{m} = r_{j,j'}$
- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(i)\right]. \tag{1.10.10}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m, se denota por $B_m(t)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t; $B_m^0(t)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t, finalmente sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{1.10.11}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{1.10.12}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{1.10.13}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto $A2)$ para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

1.10.4 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [**?**], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (**??**), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([**?**], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [**?**]

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [**?**]) en el espacio de estados medible $\left(X, \mathcal{B}_X\right)$. El Proceso $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x, x \in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right)|\mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right)f\left(X\right)$$

en $\left\{\tau < \infty\right\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la σ-algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right)$$

Definición 1.10.1. *Una medida no cero π en $\left(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}}\right)$ es* **invariante** *para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right) = \int_{\mathbf{X}} P^t\left(x, D\right)\pi\left(dx\right)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.10.2. *El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $\left(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}}\right)$, tal que si $\nu\left(D\right) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*

$$P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = inf\left\{t \geq 0 : X_t \in D\right\}$.

Nota 1.10.1. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [**?**]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama Proceso Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi\left(\cdot\right) = \int_{\mathbf{X}} P_x\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right)$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente.

Definición 1.10.3. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 1.10.1 (Lema 3.1, Dai[?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{1.10.14}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris Recurrente Positivo.

Lema 1.10.2 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{|x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1.10.1 (Teorema 3.1, Dai[?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{1.10.15}$$

*entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B = \{|x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.*

Nota 1.10.2. *En Meyn and Tweedie [?] muestran que si $P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.11 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathrm{X}$, sea $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.11.1}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{1.11.2}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.11.3}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{1.11.4}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$,

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.11.5}$$

De acuerdo a Dai [?], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (??)-(??), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 1.11.1 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta>0$ que depende de μ,λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv0$.*

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??-??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.11.1 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{1.11.6}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.11.2 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_{0} tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$, con $t\geq t_{0}$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 1.11.1 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por **??-??** es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_{0}>0$ tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$ para cualquier $t\geq t_{0}$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.11.2 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_{p}, y para cada condición inicial $x\in X$

$$limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}, \tag{1.11.7}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right]\leq\kappa_{r}, \tag{1.11.8}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)\right]=0. \tag{1.11.9}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-}c.s. \tag{1.11.10}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.11.3 (Teorema 2.3, Down [**?**])**.** *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_{j}}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_{s}}\right)\delta^{*} \tag{1.11.11}$$

i) Si $\rho<1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema* **??**.

ii) Si $\rho<1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema* **??**

Teorema 1.11.4. *Sea* $(X_n,\mathcal{F}_n,n=0,1,\ldots,\}$ *Proceso de Markov con espacio de estados* (S_0,χ_0) *generado por una distribuición inicial* P_o *y probabilidad de transición* p_{mn}*, para* $m,n=0,1,\ldots,$ $m<n$*, que por notación se escribirá como* $p\left(m,n,x,B\right)\rightarrow p_{mn}\left(x,B\right)$*. Sea* S *tiempo de paro relativo a la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_n$*. Sea* T *función medible,* $T:\Omega\rightarrow\{0,1,\ldots,\}$*. Supóngase que* $T\geq S$*, entonces* T *es tiempo de paro. Si* $B\in\chi_0$*, entonces*

$$P\left\{X\left(T\right)\in B,T<\infty|\mathcal{F}\left(S\right)\right\}=p\left(S,T,X\left(s\right),B\right) \tag{1.11.12}$$

en $\{T<\infty\}$.

1.11.1 Teorá de Procesos Estocásticos y Medibilidad

Sea K conjunto numerable y sea $d:K\rightarrow\mathbb{N}$ función. Para $v\in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E=\cup_{v\in K}M_v=\left\{(v,\zeta):v\in K,\zeta\in M_v\right\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E}=\left\{\cup_{v\in K}A_v:A_v\in\mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E,\mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t=(v_t,\zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v,v\in K)$.

ii) Una función medible $\lambda:E\rightarrow\mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q:\mathcal{E}\times(E\cup\Gamma^*)\rightarrow[0,1]$ donde

$$\Gamma^*=\cup_{v\in K}\partial^*M_v. \tag{1.11.13}$$

y

$$\partial^*M_v=\left\{z\in\partial M_v:\phi_{\mathbf{v}}\left(\mathbf{t},\zeta\right)=\mathbf{z}\text{ para alguna }\left(t,\zeta\right)\in\mathbb{R}_+\times M_v\right\}. \tag{1.11.14}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t,\zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.11.15}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf\left\{t > 0 : \phi_v(t,\zeta) \in \partial^* M_v\right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v,\zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \to \lambda(v, \phi_v(s,\zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \\ exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{1.11.16}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[91]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 1.11.1 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{1.11.17}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.11.3. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1.11.4. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.11.5. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{1.11.18}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.11.5. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

[91] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X,\mathcal{G},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I\subset\mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r): r\in I, r\leq t, f\in\mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.11.6. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ indexada por pares $s,t\in I$, con $s\leq t$ es una función de transición en $(E,\mathcal{E})$, si para todo $r\leq s<t$ en I y todo $x\in E$, $B\in\mathcal{E}$*[92]

$$P_{r,t}(x,B)=\int_E P_{r,s}(x,dy)\,P_{s,t}(y,B)\,. \tag{1.11.19}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E,\mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[93] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t)|\mathcal{G}_s\}=P_{s,t}f(X_t)\;\; s\leq t\in I,\;\; f\in b\mathcal{E}. \tag{1.11.21}$$

Definición 1.11.7. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x)=P_t(P_sf)(x)\,,\;\; t,s\geq 0,\;\; x\in E\;\; f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.11.1. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t}=P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\}=P_sf(X_t)\;\; t,s\geq 0,\;\; f\in b\mathcal{E}. \tag{1.11.22}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 1.11.8. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t\rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1.11.9 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ tal que $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0=x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 1.11.10. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E,\mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t,s\geq 0$,*

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s}\;\; y\;\; X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{1.11.23}$$

[92]Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[93]
$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\}=\mathbb{P}\{H|X_t\}\;\; H\in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.11.20}$$

iii) *Para cualquier* $x \in E$,$\mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$, *y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 1.11.11 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$, *el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.11.12. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 1.11.1 (Lema 4.2, Dai[**?**])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k ([|x_n| t]) \rightarrow P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{1.11.24}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n} (|x_n| t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.11.25}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n} (|x_n| t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.11.26}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 1.11.2 (Lema 4.3, Dai[**?**])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) *Conforme* $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n} (|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n} (|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) *Para cada* $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n} (|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n} (|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x(T_l^x(t))\right) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{1.11.27}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.11.28}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))^{'},$$
$$I^x(t) = (I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t))^{'}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t)))^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x(T_l^x(t))\right) - S^x(T^x(t)), \tag{1.11.29}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.11.30}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.11.31}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.11.32}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{1.11.33}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.11.34}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso}. \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.11.6 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.11.35}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \;\; u.o.c. \tag{1.11.36}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{1.11.37}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.11.38}$$

$$\overline{T}(t) \;\; \textit{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{1.11.39}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \;\; \textit{es no decreciente,} \tag{1.11.40}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.11.41}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{1.11.42}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.11.1. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^{0}(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^{0}(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^{0}(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 1.11.3 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 1.11.7 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 1.11.4 (Lema 5.2 [?]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{1.11.43}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.11.8 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \to \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \to \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \to \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 1.11.2 (Proposición 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.11.44}$$

Proposición 1.11.3 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.11.45}$$

Proposición 1.11.4 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{1.11.46}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1.11.9 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.11.47}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p \tag{1.11.48}$$

Teorema 1.11.10 (Teorema 6.2 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^{t}\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_{p}}\rightarrow 0$$

para $t\rightarrow\infty$ *y* $x\in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q_{t}|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q_{0}|^{p}\right]<\infty$$

Teorema 1.11.11 (Teorema 6.3 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^{t}(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_{f}=0},$$

para $x\in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{t}\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{0}\right]\right|=0.$$

Proposición 1.11.5 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_{0}>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{1.11.49}$$

Lema 1.11.2 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [?]). *Sea* $\left\{\zeta\left(k\right):k\in F\right\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)=max\left(n\geq 1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. *Si* $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{1.11.50}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.11.12 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_{p} *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.11.51}$$

para $t>0$ *y* $x\in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 1.11.13 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{1.11.52}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 1.11.14 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con* $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ *se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{1.11.53}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 1.11.15 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{1.11.54}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.11.16 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.11.55}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{1.11.56}$$

1.11.2 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 1.11.5 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k\left(\left[|x_n|t\right]\right) \rightarrow P_k^{'}t,\ u.o.c., \tag{1.11.57}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \alpha_k\left(t - \overline{U}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{1.11.58}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \mu_k\left(t - \overline{V}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{1.11.59}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$.

Lema 1.11.6 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k\left(0\right) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k\left(0\right) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+,\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x(t)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_k^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{1.11.60}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.11.61}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{1.11.62}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.11.63}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.11.64}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.11.65}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.11.66}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^{x}(\cdot), \overline{T}^{x}(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.11.67}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.11.17 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.11.68}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{1.11.69}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{1.11.70}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.11.71}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{1.11.72}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{1.11.73}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.11.74}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{1.11.75}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.11.6. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^{0}(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^{0}(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^{0}(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) *Para todo* k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Teorema 1.11.18 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \to \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \to \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \to \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 1.11.7 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p)\, dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.11.76}$$

Proposición 1.11.8 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{1.11.77}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Definición 1.11.13. *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{F}$ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* X, *la pareja* $(X, \mathcal{F})$ *es llamado espacio medible. Un subconjunto* A *de* X *es llamado medible, o medible con respecto a* $\mathcal{F}$, *si* $A \in \mathcal{F}$.

Definición 1.11.14. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *espacio de medida. Se dice que la medida* μ *es* σ*-finita si se puede escribir* $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ *con* $X_n \in \mathcal{F}$ *y* $\mu(X_n) < \infty$.

Definición 1.11.15. *Sea* X *el conjunto de los úmeros reales* $\mathbb{R}$. *El álgebra de Borel es la* σ*-álgebra* B *generada por los intervalos abiertos* $(a, b) \in \mathbb{R}$. *Cualquier conjunto en* B *es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.11.16. *Una función* $f : X \to \mathbb{R}$, *es medible si para cualquier número real* α *el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. *Equivalentemente, se dice que* f *es medible si*

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.11.17. *Sean* $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ *espacios medibles y* $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ *el conjunto de todas las sucesiones* $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ *tales que* $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. *Si* $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, *definimos* $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. *Al conjunto* B_n *se le llama* cilindro *con base* B^n, *el cilindro es llamado medible si* $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.

Definición 1.11.18. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.11.19. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.11.20. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.11.21. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{1.11.78}$$

Nota 1.11.2. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{1.11.79}$$

Teorema 1.11.19. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.11.80}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{1.11.81}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{1.11.82}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t,\zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.11.83}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\left\{t > 0 : \phi_v(t,\zeta) \in \partial^* M_v\right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v,\zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s,\zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0,\epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s,\mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{1.11.84}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[94]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 1.11.2 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0,t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{1.11.85}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.11.22. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1.11.23. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1.11.24. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.11.25. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{1.11.86}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

[94] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

Teorema 1.11.20. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.11.26. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{95}. \tag{1.11.87}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[96] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.11.89}$$

Definición 1.11.27. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.11.3. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.11.90}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 1.11.28. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1.11.29 (HD1). *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1.11.30. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;

[95] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[96]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.11.88}$$

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X, *es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{1.11.91}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$, *y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 1.11.31 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$, *el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.11.32. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 1.11.7 (Lema 4.2, Dai[**?**])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \rightarrow P_k^{'} t, \text{ u.o.c.,} \tag{1.11.92}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{1.11.93}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{1.11.94}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 1.11.8 (Lema 4.3, Dai[**?**])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x(T_l^x(t))\right) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{1.11.95}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.11.96}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))',$$
$$I^x(t) = (I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t))'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x(T_l^x(t))\right) - S^x(T^x(t)), \tag{1.11.97}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.11.98}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \tag{1.11.99}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.11.100}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{1.11.101}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.11.102}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.11.21 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right), U^{x_{n_j}}\left(0\right), V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right) \to \left(\overline{Q}\left(0\right), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.11.103}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right) \ \ u.o.c. \tag{1.11.104}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right) = Q\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - \left(I - P\right)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{1.11.105}$$

$$\overline{Q}\left(t\right) \geq 0, \tag{1.11.106}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \ \ \textit{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{1.11.107}$$

$$\overline{I}\left(t\right) = et - C\overline{T}\left(t\right) \ \ \textit{es no decreciente,} \tag{1.11.108}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right) = 0, \tag{1.11.109}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{1.11.110}$$

Definición 1.11.33 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (*??*)-(*??*) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.*

Teorema 1.11.22 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{1.11.111}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??-??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.11.34 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}\left(t\right) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 1.11.3 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??-??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.11.9. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 1.11.9 (Lema 3.1 [**?**]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.11.23 (Teorema 5.2 [**?**]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1.11.24 (Teorema 5.1 [**?**]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$, *para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 1.11.10 (Lema 5.2 [**?**]). *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r}\tag{1.11.112}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.11.25 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [**?**]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 1.11.10 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X (t_0|x|) |^{p+1} \right] = 0. \tag{1.11.113}$$

Proposición 1.11.11 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X (t) |^p) \, dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.11.114}$$

Proposición 1.11.12 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V (x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f (X (t)) \, dt \right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V (x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f (X (s)) \, ds] \leq \frac{1}{t} V (x) + k, \tag{1.11.115}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 1.11.26 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q (s) |^p] \, ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{1.11.116}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q (s) |^p] \, ds \leq k_p \tag{1.11.117}$$

Teorema 1.11.27 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t (c, \cdot) - \pi (\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 1.11.28 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f (x) = f_1 (x)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f = 0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 1.11.13 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{1.11.118}$$

Lema 1.11.4 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta\left(k\right):k\in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{1.11.119}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r:t\geq1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.11.29 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.11.120}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 1.11.30 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{1.11.121}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q\left(0\right)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 1.11.31 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_f=0. \tag{1.11.122}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 1.11.32 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_X\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{1.11.123}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.11.33 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.11.124}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{1.11.125}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$,
- también se define $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X = \{X(t), t \geq 0\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [?].

Sea el proceso de Markov $X = \{X(t), t \geq 0\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] y Meyn y Down [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X(t) = (Q(t), U(t), V(t)), \tag{1.11.126}$$

donde $Q(t)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U(t)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V(t)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U(t)$ como $V(t)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = (Q(0), U(0), V(0)) = (q, a, b)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \ldots, K$ se define

$$\begin{aligned} E_l^x(t) &= max\{r : U_l(0) + \xi_l(1) + \cdots + \xi_l(r-1) \leq t\}\ \ t \geq 0, \\ S_k^x(t) &= max\{r : V_k(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(r-1) \leq t\}\ \ t \geq 0. \end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s-éima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^{k}(n) = \left\{\phi^{k}(n), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^{1}(n), \ldots, \phi^{K}(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 1.11.11 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^{k}([|x_n|t]) \rightarrow P_{k}^{'}t, \ u.o.c., \tag{1.11.127}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_{k}^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^{+}, \ u.o.c., \tag{1.11.128}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_{k}^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^{+}, \ u.o.c., \tag{1.11.129}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 1.11.12 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_{k}^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^{+}, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_{k}^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_{k}^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_{k}^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_{l}^{x}(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_{l}^{x}(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_{l}^{x}(T_{l}^{x}(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_{l}^{x}(S_{l}^{x}(T_{l}^{x}(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{1.11.130}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.11.131}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{1.11.132}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.11.133}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.11.134}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.11.135}$$

$$\int_0^{\infty} \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.11.136}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.11.137}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.11.34 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.11.138}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{1.11.139}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{1.11.140}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.11.141}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{1.11.142}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente}, \tag{1.11.143}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.11.144}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{1.11.145}$$

Definición 1.11.35 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Teorema 1.11.35 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \tag{1.11.146}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.11.36 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk}\mu_l \overline{T}_l(t) \tag{1.11.147}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.11.148}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{1.11.149}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.11.150}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{1.11.151}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{1.11.152}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.11.37 (Definición 3.2, Dai y Meyn [**?**]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}\left(0\right), \overline{B}\left(0\right)\right) \in \mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??**, *junto con la condición:*

$$\overline{Q}\left(t\right) = \overline{Q}\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{A}\left(0\right)\right)^{+} - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{B}\left(0\right)\right)^{+} \tag{1.11.153}$$

Definición 1.11.38 (Definición 3.3, Dai y Meyn [**?**]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [**?**].

Lema 1.11.5 (Lema 3.1, Dai y Meyn [**?**]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$.

El resultado principal de Down [**?**] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 1.11.36 (Teorema 2.1, Down [**?**]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, *y para cada condición inicial* $x \in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \sup \frac{1}{t} \int_{0}^{t} \mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right] ds \leq \kappa_p, \tag{1.11.154}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_{x}\left[Q_k\left(t\right)^{r}\right] = \mathbb{E}_{\pi}\left[Q_k\left(0\right)^{r}\right] \leq \kappa_r, \tag{1.11.155}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$. *Donde* π *es la probabilidad invariante para* $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_{x}\left[Q_k\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right] = 0. \tag{1.11.156}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_{0}^{t} Q_{k}^{r}\left(s\right) ds = \mathbb{E}_{\pi}\left[Q_k\left(0\right)^{r}\right], \ \mathbb{P}_{x}\text{-}c.s. \tag{1.11.157}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

Proposición 1.11.14 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [**?**]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{1.11.158}$$

Lema 1.11.6 (Lema 5.2, Dai y Meyn [**?**]). *Sea* $\{\zeta\left(k\right) : k \in \digamma\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $(0, \infty)$, *y sea* $E\left(t\right) = max\left(n \geq 1 : \zeta\left(1\right) + \cdots + \zeta\left(n-1\right) \leq t\right)$. *Si* $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^{r}. \tag{1.11.159}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.11.37 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^{p}\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.11.160}$$

para $t > 0$ *y* $x \in X$*. En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^{p}\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.11.38 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{1.11.161}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^{p}\right] = \mathbb{E}_{\pi}\left[|Q(0)|^{p}\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 1.11.39 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con* $f(x) = f_1(x)$ *se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f} = 0. \tag{1.11.162}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q(0)\right]| = 0.$$

Teorema 1.11.40 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea* ν *cualquier distribución de probabilidad en* $(X,\mathcal{B}_X)$*, y* π *la distribución estacionaria de* X*.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{1.11.163}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_{+}$ *con* $\pi(|f|) < \infty$*, la ecuación anterior se cumple.*

Teorema 1.11.41 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_0, c_0 \geq 0$*,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.11.164}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$*, con* $|Q(0)| = 1$*. Entonces para cualquier* $0 < q \leq 1$*, existe* $B < 0$ *tal que para cualquier* $|x| \geq B$*,*

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\} \geq q. \tag{1.11.165}$$

Teorema 1.11.42 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K}\rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^{*} \tag{1.11.166}$$

i) Si $\rho < 1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema* **??**.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema **??**

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i). \tag{1.11.167}$$

suponiendo que el estado inicial de la red es $x = (q, a, b) \in X$, entonces para cada k

$$E_k^x(t) := \max\{n \geq 0 : A_k^x(0) + \psi_k(1) + \cdots + \psi_k(n-1) \leq t\} \tag{1.11.168}$$
$$S_k^x(t) := \max\{n \geq 0 : B_k^x(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(n-1) \leq t\} \tag{1.11.169}$$

Sea $T_k^x(t)$ el tiempo acumulado que el servidor $s(k)$ ha utilizado en los usuarios de la clase k en el intervalo $[0, t]$. Entonces se tienen las siguientes ecuaciones:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{k} \Phi_k^l S_l^x(T_l^x) - S_k^x(T_k^x) \tag{1.11.170}$$

$$Q^x(t) = (Q_1^x(t), \ldots, Q_K^x(t))' \geq 0, \tag{1.11.171}$$

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))' \geq 0, \text{ es no decreciente} \tag{1.11.172}$$

$$I_i^x(t) = t - \sum_{k \in C_i} T_k^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.11.173}$$

$$\int_0^\infty \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{1.11.174}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } (Q^x(\cdot), T^x(\cdot)) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{1.11.175}$$

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \tag{1.11.176}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola. Si se hace $|q| \to \infty$ y se mantienen las componentes restantes fijas, de la condición inicial x, cualquier punto límite del proceso normalizado $\overline{Q}^x$ es una solución del siguiente modelo de flujo, ver [**?**].

Definición 1.11.39. *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $(Q^x(\cdot), T^x(\cdot))$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)'$ y $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)'$*

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk} \mu_l \overline{T}_l(t) \tag{1.11.177}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \textit{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.11.178}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \textit{ y } \overline{T}_k(\cdot) \textit{ es no decreciente,} \tag{1.11.179}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \textit{ es no decreciente} \tag{1.11.180}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \textit{ se incrementa al tiempot cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{1.11.181}$$

$$\textit{condiciones adicionales sobre } (Q^x(\cdot), T^x(\cdot)) \textit{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{1.11.182}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.11.40. *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}\left(0\right), \overline{B}\left(0\right)\right) \in \mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??**, *junto con la condición:*

$$\overline{Q}\left(t\right) = \overline{Q}\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{A}\left(0\right)\right)^{+} - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{B}\left(0\right)\right)^{+} \tag{1.11.183}$$

Definición 1.11.41. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en [**?**].

Lema 1.11.7. *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|overlinex| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$.

Supuestos necesarios sobre la red

Supuestos 1.11.3. *A1)* $\psi_1, \ldots, \psi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ *son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\psi_l\left(1\right)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ *es un singleton, y para cada* $k \in \mathcal{A}$, *existe una función positiva* $q_k\left(x\right)$ *definida en* $\mathbb{R}_{+}$, *y un entero* j_k, *tal que*

$$P\left(\psi_k\left(1\right) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{1.11.184}$$
$$P\left(\psi_k\left(1\right) + \ldots \psi_k\left(j_k\right) \in dx\right) \geq q_k\left(x\right) dx0 \text{ y} \tag{1.11.185}$$
$$\int_0^{\infty} q_k\left(x\right) dx > 0 \tag{1.11.186}$$

El argumento dado en [**?**] en el lema **??** se puede aplicar para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños.Entonces la condición $A3$) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 1.11.43. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, *y para cada condición inicial* $x \in X$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right] ds \leq \kappa_p \tag{1.11.187}$$

donde p es el entero dado por A2). Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \leq \kappa_r \tag{1.11.188}$$

para $r = 1, \ldots, p$ *y* $k = 1, \ldots, K$.

iii) EL primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]| = 0. \tag{1.11.189}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds = \mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right] \tag{1.11.190}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r=1,\ldots,p$ y $k=1,\ldots,K$.

Demostración 1.11.1. *La demostración de este resultado se da aplicando los teoremas* **??**, **??**, **??** *y* **??**

Definimos un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada. Bajo cualquier *preemptive buffer priority* disciplina de servicio, el estado $\mathbb{X}(t)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}\left(t\right)=\left(Q_{k}\left(t\right),A_{l}\left(t\right),B_{k}\left(t\right):k=1,2,\ldots,K,l\in\mathcal{A}\right) \tag{1.11.191}$$

donde $Q_k\left(t\right)$ es la longitud de la cola para los usuarios de la clase k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k\left(t\right)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio. Los tiempos de arribo residuales, que son iguales al tiempo que queda hasta que el próximo usuario de la clase k llega, se denotan por $A_k\left(t\right)$. Tanto $B_k\left(t\right)$ como $A_k\left(t\right)$ se suponen continuos por la derecha.

Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x=(q,a,b)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x=(q,a,b)\in\mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x|=|q|+|a|+|b|$. En [**?**] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$\left(\left(\Omega,\mathcal{F}\right),\mathcal{F}_{t},\mathbb{X}\left(t\right),\theta_{t},P_{x}\right)$$

es un proceso de Borel Derecho en el espacio de estadio medible $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X=\left\{\mathbb{X}\left(t\right),t\geq0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, est definida en $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ y est adaptado a $\left\{\mathcal{F}_{t},t\geq0\right\}$; $\left\{P_{x},x\in X\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x\in X$

$$P_{x}\left\{\mathbb{X}\left(0\right)=x\right\}=1$$

y

$$E_{x}\left\{f\left(X\circ\theta_{t}\right)|\mathcal{F}_{t}\right\}=E_{X}\left(\tau\right)f\left(X\right)$$

en $\left\{\tau<\infty\right\}$, P_{x}-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_{t}$-tiempo de paro

$$\left(X\circ\theta_{\tau}\right)\left(w\right)=\left\{\mathbb{X}\left(\tau\left(w\right)+t,w\right),t\geq0\right\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la sigma algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^{t}\left(x,D\right)$, $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t\geq0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^{t}\left(x,D\right)=P_{x}\left(\mathbb{X}\left(t\right)\in D\right)$$

Definición 1.11.42. *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right)=\int_{X}P^{t}\left(x,D\right)\pi\left(dx\right)$$

para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t\geq0$.

Definición 1.11.43. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$, tal que si $\nu\left(D\right)>0$ y $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_{x}\left\{\tau_{D}<\infty\right\}\equiv1$$

cuando $\tau_{D}=\inf\left\{t\geq0:\mathbb{X}_{t}\in D\right\}$.

- Si X es Harris recurrente, entonces una única medida invariante π existe ([?]).
- Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama *Harris recurrente positiva.*
- Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}\left(\cdot\right)[=\int_{X}P_{x}\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right)$$

  y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, as, el proceso $X=\left\{\mathbb{X}\left(t\right),t\geq 0\right\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_{π}

Definición 1.11.44. *Un conjunto $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t>0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta>0$ tal que*

$$P^{t}\left(x,A\right)\geq\delta\nu\left(A\right)$$

para $x\in D, A\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.[97]

El modelo está compuesto por c colas de capacidad infinita, etiquetadas de 1 a c las cuales son atendidas por s servidores. Los servidores atienden de acuerdo a una cadena de Markov independiente $\left(X_{n}^{i}\right)_{n}$ con $1\leq i\leq s$ y $n\in\left\{1,2,\ldots,c\right\}$ con la misma matriz de transición $r_{k,l}$ y única medida invariante $\left(p_{k}\right)$. Cada servidor permanece atendiendo en la cola un periodo llamado de visita y determinada por la política de servicio asignada a la cola.

Los usuarios llegan a la cola k con una tasa λ_{k} y son atendidos a una razón μ_{k}. Las sucesiones de tiempos de interarribo $\left(\tau_{k}\left(n\right)\right)_{n}$, la de tiempos de servicio $\left(\sigma_{k}^{i}\left(n\right)\right)_{n}$ y la de tiempos de cambio $\left(\sigma_{k,l}^{0,i}\left(n\right)\right)_{n}$ requeridas en la cola k para el servidor i son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas con distribución general independiente de i, con media $\sigma_{k}=\frac{1}{\mu_{k}}$, respectivamente $\sigma_{k,l}^{0}=\frac{1}{\mu_{k,l}^{0}}$, e independiente de las cadenas de Markov $\left(X_{n}^{i}\right)_{n}$. Además se supone que los tiempos de interarribo se asume son acotados, para cada $\rho_{k}=\lambda_{k}\sigma_{k}<s$ para asegurar la estabilidad de la cola k cuando opera como una cola $M/GM/1$. Una política de servicio determina el número de usuarios que serán atendidos sin interrupción en periodo de servicio por los servidores que atienden a la cola. Para un solo servidor esta se define a través de una función f donde $f\left(x,a\right)$ es el número de usuarios que son atendidos sin interrupción cuando el servidor llega a la cola y encuentra x usuarios esperando dado el tiempo transcurrido de interarribo a. Sea $v\left(x,a\right)$ la duración del periodo de servicio para una sola condición inicial $\left(x,a\right)$.

Las políticas de servicio consideradas satisfacen las siguientes propiedades:

i) Hay conservación del trabajo, es decir

$$v\left(x,a\right)=\sum_{l=1}^{f\left(x,a\right)}\sigma\left(l\right)$$

   con $f\left(0,a\right)=v\left(0,a\right)=0$, donde $\left(\sigma\left(l\right)\right)_{l}$ es una sucesión independiente e idénticamente distribuida de los tiempos de servicio solicitados.

ii) La selección de usuarios para se atendidos es independiente de sus correspondientes tiempos de servicio y del pasado hasta el inicio del periodo de servicio. Así las distribución $\left(f,v\right)$ no depende del orden en el cuál son atendidos los usuarios.

iii) La política de servicio es monótona en el sentido de que para cada $a\geq 0$ los números $f\left(x,a\right)$ son monótonos en distribución en x y su límite en distribución cuando $x\rightarrow\infty$ es una variable aleatoria F^{*0} que no depende de a.

iv) El número de usuarios atendidos por cada servidor es acotado por $f^{min}\left(x\right)$ de la longitud de la cola x que además converge monótonamente en distribución a F^{*} cuando $x\rightarrow\infty$

[97] En [?] muestran que si $P_{x}\left\{\tau_{D}<\infty\right\}\equiv 1$ solamente para uno conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris recurrente

El sistema de colas se describe por medio del proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ como se define a continuación. El estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = (Q(t), P(t), A(t), R(t), C(t))$$

donde

- $Q(t) = (Q_k(t))_{k=1}^{c}$, número de usuarios en la cola k al tiempo t.
- $P(t) = \left(P^i(t)\right)_{i=1}^{s}$, es la posición del servidor i.
- $A(t) = (A_k(t))_{k=1}^{c}$, es el residual del tiempo de arribo en la cola k al tiempo t.
- $R(t) = \left(R_k^i(t), R_{k,l}^{0,i}(t)\right)_{k,l,i=1}^{c,c,s}$, el primero es el residual del tiempo de servicio del usuario atendido por servidor i en la cola k al tiempo t, la segunda componente es el residual del tiempo de cambio del servidor i de la cola k a la cola l al tiempo t.
- $C(t) = \left(C_k^i(t)\right)_{k,i=1}^{c,s}$, es la componente correspondiente a la cola k y al servidor i que está determinada por la política de servicio en la cola k y que hace al proceso $X(t)$ un proceso de Markov.

Todos los procesos definidos arriba se suponen continuos por la derecha.

El proceso X tiene la propiedad fuerte de Markov y su espacio de estados es el espacio producto

$$\mathcal{X} = \mathbb{N}^c \times E^s \times \mathbb{R}_+^c \times \mathbb{R}_+^{cs} \times \mathbb{R}_+^{c^2 s} \times \mathcal{C}$$

donde $E = \{1, 2, \ldots, c\}^2 \cup \{1, 2, \ldots, c\}$ y $\mathcal{C}$ depende de las políticas de servicio.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1. $$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0 \tag{1.11.192}$$

2. $$\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N} \tag{1.11.193}$$

   para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j'}^{m} = r_{j,j'}$
- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define
$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right]. \tag{1.11.194}$$

El *token passing ring* es una estación de un solo servidor con K clases de usuarios. Cada clase tiene su propio regulador en la estación. Los usuarios llegan al regulador con razón α_k y son atendidos con taza μ_k.

La red se puede modelar como un Proceso de Markov con espacio de estados continuo, continuo en el tiempo:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t), B_k^0(t), C(t) : k = 1, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right) \tag{1.11.195}$$

donde $Q_k(t), B_k(t)$ y $A_k(t)$ se define como en **??**, $B_k^0(t)$ es el tiempo residual de cambio de la clase k a la clase $k+1\,(modK)$; $C(t)$ indica el número de servicios que han sido comenzados y/o completados durante la sesión activa del buffer.

Los parámetros cruciales son la carga nominal de la cola k: $\beta_k = \alpha_k/\mu_k$ y la carga total es $\rho_0 = \sum \beta_k$, la media total del tiempo de cambio en un ciclo del token está definido por

$$u^0 = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}\left[\eta_k^0(1)\right] = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\mu_k^0} \tag{1.11.196}$$

El proceso de la longitud de la cola $Q_k^x(t)$ y el proceso de acumulación del tiempo de servicio $T_k^x(t)$ para el buffer k y para el estado inicial x se definen como antes. Sea $T_k^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el token tarda en cambiar del buffer k al $k+1 \mod K$. Suponga que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.11.197}$$

cuando $|x| \to \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t), \overline{T}^0(t)\right)$ es un flujo límite retrasado del token ring.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado

Proposición 1.11.15. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 1.11.8. *El proceso estocástico Φ es un proceso de markov fuerte, temporalmente homogéneo, con trayectorias muestrales continuas por la derecha, cuyo espacio de estados Y es igual a $X \times \mathbb{R}$*

Proposición 1.11.16. *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{1.11.198}$$

Lema 1.11.9. *Sea* $\{\zeta(k) : k \in F\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $(0,\infty)$*, y sea* $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$*. Si* $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$*, entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{1.11.199}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.11.44. *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.11.200}$$

para $t > 0$ *y* $x \in X$*. En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1.11.45. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$||P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)||_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{1.11.201}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x[|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 1.11.46. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con* $f(x) = f_1(x)$ *se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}||P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)||_f = 0. \tag{1.11.202}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 1.11.47. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea* ν *cualquier distribución de probabilidad en* $(X, \mathcal{B}_X)$*, y* π *la distribución estacionaria de* X*.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\pi(dx) \tag{1.11.203}$$

$\mathbb{P}$*-c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *con* $\pi(|f|) < \infty$*, la ecuación anterior se cumple.*

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1.
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0 \tag{1.11.204}$$

2.
$$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right] \leq \overline{N} \tag{1.11.205}$$
para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j'}^{m} = r_{j,j'}$
- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}\left(1\right)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_{j}\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define
$$\delta^{*} := \sum_{j,j'} p_{j} r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}\left(1\right)\right]. \tag{1.11.206}$$

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Sea x el número de usuarios en la cola esperando por servicio y $N\left(x\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política dada y fija mientras el servidor permanece dando servicio, entonces se asume que:

(S1.)
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right] = \overline{N} > 0. \tag{1.11.207}$$

(S2.)
$$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right] \leq \overline{N}, \tag{1.11.208}$$

para cualquier valor de x.

El tiempo que tarda un servidor en volver a dar servicio después de abandonar la cola inmediata anterior y llegar a la próxima se llama tiempo de traslado o de cambio de cola, al momento de la n-ésima visita del servidor a la cola j se genera una sucesión de variables aleatorias $\delta_{j,j+1}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con la propiedad de que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right] \geq 0$.

Se define
$$\delta^{*} := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]. \tag{1.11.209}$$

Los tiempos entre arribos a la cola k, son de la forma $\{\xi_{k}\left(n\right)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos. Los tiempos de servicio $\{\eta_{k}\left(n\right)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k} = \lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Para el caso más sencillo podemos definir un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada, el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$ a cualquier tiempo t puede definirse como
$$\mathbb{X}\left(t\right) = \left(Q_{k}\left(t\right), A_{l}\left(t\right), B_{k}\left(t\right) : k = 1, 2, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right), \tag{1.11.210}$$

donde $Q_{k}\left(t\right)$ es la longitud de la cola k para los usuarios esperando servicio, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_{k}\left(t\right)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio.

Los tiempos entre arribos residuales, que son el tiempo que queda hasta que el próximo usuario llega a la cola para recibir servicio, se denotan por $A_k(t)$. Tanto $B_k(t)$ como $A_k(t)$ se suponen continuos por la derecha [?].

Sea $\mathcal{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x = (q, a, b)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = (q, a, b) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x\| = |q| + |a| + |b|$. En [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de *Borel Derecho* en el espacio de estados medible $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(\mathbb{X}(t) \in D).$$

Definición 1.11.45. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_X P^t(x, D)\, \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.11.46. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

Definición 1.11.47. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

Nota 1.11.4. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π ([?]).*

*ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso a la medida se le llama **Harris recurrente positiva**.*

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria; se define

$$P_\pi(\cdot) = \int_X P_x(\cdot)\, \pi(dx).$$

Se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, así, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π.

iv) En [?] se muestra que si $P_x\{\tau_D < \infty\} = 1$ incluso para solamente un conjunto pequeño, entonces el proceso de Harris es recurrente.

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\right) \tag{1.11.211}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{1.11.212}$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([?]).

Dada una condición inicial $x \in \mathcal{X}$, $Q_k^x(t)$ es la longitud de la cola k al tiempo t y $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en atender a los usuarios de la cola k. De igual manera se define $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en cambiar de cola para volver a atender a los usuarios.

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \tag{1.11.213}$$

$$\overline{T}_m^x(t) = \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \tag{1.11.214}$$

$$\overline{T}_m^{x,0}(t) = \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t). \tag{1.11.215}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola, al conjunto de todos los posibles flujos límite se le llamará **modelo de flujo**, ([?]).

Definición 1.11.48. *Un flujo límite para un sistema de visitas bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{1.11.216}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{1.11.217}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{1.11.218}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ param} = 1, 2, \ldots, M \tag{1.11.219}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en (**??**)-(**??**) se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Definición 1.11.49. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

Es necesario realizar los siguientes supuestos, ver ([?]) y ([?]):

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.\end{aligned}$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{1.11.220}$$

$$P(\xi_k(1) + \ldots \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\, dx0 \text{ y} \tag{1.11.221}$$

$$\int_0^\infty q_k(x)\, dx > 0 \tag{1.11.222}$$

En [?] ser da un argumento para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños. Entonces la condición A3) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 1.11.48. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] ds \leq \kappa_p \tag{1.11.223}$$

donde p es el entero dado por A2).

Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r \tag{1.11.224}$$

para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t \to \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0. \tag{1.11.225}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \tag{1.11.226}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

Teorema 1.11.49. *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \text{ con } T \geq 0, \tag{1.11.227}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \to \infty\} \geq q. \tag{1.11.228}$$

En el caso particular de un modelo con un solo servidor, $M = 1$, se tiene que si se define

Definición 1.11.50.

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}+\max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_{j}}{\overline{\overline{N}}}\right)\delta^{*}. \tag{1.11.229}$$

entonces

Teorema 1.11.50. *i) Si $\rho<1$, entonces la red es estable, es decir el teorema (**??**) se cumple.*

*ii) De lo contrario, es decir, si $\rho>1$ entonces la red es inestable, es decir, el teorema (**??**).*

Proposición 1.11.17. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ y $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 1.11.13 (Lema 3.1 [**?**]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.11.51 (Teorema 5.2 [**?**]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1.11.52 (Teorema 5.1 [**?**]). *La red de colas es estable si existe una constante t_{0} que depende de $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z\left(t\right)=0$, para toda $t\geq t_{0}$.*

Lema 1.11.14 (Lema 5.2 [**?**]). *Sea $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $\left(0,\infty\right)$, y sea $E\left(t\right)$ el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r} \tag{1.11.230}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.11.53 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$*. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \to \infty$*.*

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \to \frac{1}{\mu^r}$*, cuando* $t \to \infty$ *para todo* $r > 0$*..*

Proposición 1.11.18 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.11.231}$$

Proposición 1.11.19 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$*.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.11.232}$$

Proposición 1.11.20 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X*, sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$*, y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$*. Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C*, entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{1.11.233}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$*.*

Teorema 1.11.54 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.11.234}$$

para $t \geq 0$*,* $x \in X$*. En particular para cada condicin inicial*

$$Limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p \tag{1.11.235}$$

Teorema 1.11.55 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \to 0$$

para $t \to \infty$ *y* $x \in X$*. En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x[|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 1.11.56 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0. \tag{1.11.236}$$

(S2.)
$$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N}, \tag{1.11.237}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right] \geq 0$.
- Se define
$$\delta^* := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right]. \tag{1.11.238}$$
- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $\left(X(t)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\right) \tag{1.11.239}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times \left(\{1,2,\ldots,K\} \times \{1,2,\ldots,S\}\right)^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{1.11.240}$$

- $Q(t) = \left(Q_k(t), 1 \leq k \leq K\right)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = \left(A_k(t), 1 \leq k \leq K\right)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([?])

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.11.51. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{98}. \tag{1.11.241}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[99] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.11.243}$$

Definición 1.11.52. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.11.5. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.11.244}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 1.11.53. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1.11.54 (HD1). *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

[98]Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[99]
$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.11.242}$$

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x \{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1.11.55. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{1.11.245}$$

*iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.*

Definición 1.11.56 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.11.57. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 1.11.15 (Lema 4.2, Dai[**?**])**.** *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{1.11.246}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.11.247}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.11.248}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 1.11.16 (Lema 4.3, Dai[**?**])**.** *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right)=_k^x\left(0\right)+E_k^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{1.11.249}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_i^x\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{1.11.250}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right)=\left(T_1^x\left(t\right),\ldots,T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$

$$I^x\left(t\right)=\left(I_1^x\left(t\right),\ldots,I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right),\ldots,S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x\left(t\right)=Q^x\left(0\right)+E^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S^x\left(T^x\left(t\right)\right), \tag{1.11.251}$$

$$Q^x\left(t\right)\geq 0, \tag{1.11.252}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \tag{1.11.253}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.11.254}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{1.11.255}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.11.256}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.11.57 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.11.257}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{1.11.258}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I-P)' M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{1.11.259}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.11.260}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{1.11.261}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{1.11.262}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.11.263}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{1.11.264}$$

Definición 1.11.58 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 1.11.58 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|}Q^{x}(|x|t) \tag{1.11.265}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.11.59 (Definición 3.3, Dai y Meyn [**?**]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [**?**].

Lema 1.11.10 (Lema 3.1, Dai y Meyn [**?**]). *Si el modelo de flujo definido por **??**-**??** es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.11.21. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^{0}(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^{0}(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^{0}(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 1.11.17 (Lema 3.1 [**?**]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.11.59 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1.11.60 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 1.11.18 (Lema 5.2 [?]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{1.11.266}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) *Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$*

b) *Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.*

Teorema 1.11.61 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) *$\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.*

b) *$\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..*

Proposición 1.11.22 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.11.267}$$

Proposición 1.11.23 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.11.268}$$

Proposición 1.11.24 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{1.11.269}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1.11.62 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.11.270}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p \tag{1.11.271}$$

Teorema 1.11.63 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^{t}\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_{p}}\rightarrow 0$$

para $t\rightarrow\infty$ y $x\in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q_{t}|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q_{0}|^{p}\right]<\infty$$

Teorema 1.11.64 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^{t}(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_{f}=0},$$

para $x\in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_{x}[Q_{t}]-\mathbb{E}_{\pi}[Q_{0}]|=0}.$$

Proposición 1.11.25 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_{0}>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{1.11.272}$$

Lema 1.11.11 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\left\{\zeta\left(k\right):k\in F\right\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $\left(0,\infty\right)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq 1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{1.11.273}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.11.65 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_{p} tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.11.274}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 1.11.66 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{1.11.275}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 1.11.67 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{1.11.276}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 1.11.68 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_o^t f\left(X\left(s\right)\right) ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right) \pi\left(dx\right) \tag{1.11.277}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.11.69 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.11.278}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{1.11.279}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\left\{\xi_k\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)\right]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$,
- también se define $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.

Definición 1.11.60. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 1.11.61. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu\left(X_n\right) < \infty$.*

Definición 1.11.62. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.11.63. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\left\{x \in X : f\left(x\right) > \alpha\right\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}\left(\left(\alpha, \infty\right)\right) = \left\{x \in X : f\left(x\right) > \alpha\right\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.11.64. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \left\{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\right\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1.11.65. *[TSP, Ash [?]] Sea $X\left(t\right), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X\left(t\right)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}\left(X\left(s\right), s \leq t\right)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X\left(s\right)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.11.66. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.11.67. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.11.68. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{1.11.280}$$

Nota 1.11.6. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{1.11.281}$$

Teorema 1.11.70. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.11.282}$$

en $\{T < \infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.11.26. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k (t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0 (t)$$

para $\overline{Q}_k (t) > 0$.

Lema 1.11.19 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.11.71 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1.11.72 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 1.11.20 (Lema 5.2 [?]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max \{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t \to \infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{1.11.283}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t \geq \delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.11.73 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \to \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \to \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \to \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 1.11.27 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0 |x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.11.284}$$

Proposición 1.11.28 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p) \, dt\right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.11.285}$$

Proposición 1.11.29 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) \, dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s)) \, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{1.11.286}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1.11.74 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.11.287}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$Limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \tag{1.11.288}$$

Teorema 1.11.75 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1.11.76 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\to\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Sean $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ el tiempo residual de arribos a la cola k, para cada servidor m, sea $H_m(t)$ par ordenado que consiste en la cola que está siendo atendida y la política de servicio que se está utilizando. $B_m(t)$ los tiempos de servicio residuales, $B_m^0(t)$ el tiempo residual de traslado, $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H_m(t)$.

El proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{1.11.289}$$

para $k = 1,\ldots,K$ y $m = 1,2,\ldots,M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1,2,\ldots,K\} \times \{1,2,\ldots,S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1,\ldots,\xi_K,\eta_1,\ldots,\eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1,\ldots,K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1,2,\ldots,K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{1.11.290}$$
$$P(\xi_k(1) + \ldots \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\,dx0 \text{ y} \tag{1.11.291}$$
$$\int_0^\infty q_k(x)\,dx > 0 \tag{1.11.292}$$

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$\left(\left(\Omega,\mathcal{F}\right),\mathcal{F}_{t},X\left(t\right),\theta_{t},P_{x}\right)$$

es un proceso de Borel Derecho, Sharpe [?], en el espacio de estados medible $\left(X,\mathcal{B}_{X}\right)$.

Se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable.

Definición 1.11.69. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1.11.70. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1.11.71. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $\left(E,\mathcal{B}\left(E\right)\right)$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.11.72. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda\left(E\right)=sup\left\{\lambda\left(K\right):K\text{ es compacto en }E\right\}. \tag{1.11.293}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.11.77. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $\left(E,\mathcal{B}\left(E\right)\right)$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}\left(E\right)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $\left(X,\mathcal{G},\mathbb{P}\right)$ espacio de probabilidad, $I\subset\mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f\left(X_{r}\right):r\in I, r\leq t,f\in\mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $\left(\mathcal{G}_{t}\right)$ tal que $\left(X_{t}\right)$ sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.11.73. *Una familia $\left(P_{s,t}\right)$ de kernels de Markov en $\left(E,\mathcal{E}\right)$ indexada por pares $s,t\in I$, con $s\leq t$ es una función de transición en $\left(E,\mathcal{E}\right)$, si para todo $r\leq s< t$ en I y todo $x\in E$, $B\in\mathcal{E}$*

$$P_{r,t}\left(x,B\right)=\int_{E}P_{r,s}\left(x,dy\right)P_{s,t}\left(y,B\right)^{100}. \tag{1.11.294}$$

Se dice que la función de transición $\left(P_{s,t}\right)$ en $\left(E,\mathcal{E}\right)$ es la función de transición para un proceso $\left(X_{t}\right)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov [101] (**??**) relativa a $\left(\mathcal{G}_{t}\right)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_{t}\right)|\mathcal{G}_{s}\right\}=P_{s,t}f\left(X_{t}\right)\;\; s\leq t\in I,\;\; f\in b\mathcal{E}. \tag{1.11.296}$$

Definición 1.11.74. *Una familia $\left(P_{t}\right)_{t\geq0}$ de kernels de Markov en $\left(E,\mathcal{E}\right)$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f\left(x\right)=P_{t}\left(P_{s}f\right)\left(x\right),\;\; t,s\geq0,\;\; x\in E\;\; f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.11.7. *Si la función de transición $\left(P_{s,t}\right)$ es llamada homogénea si $P_{s,t}=P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea $\left(P_{t}\right)$ tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_{t+s}\right)|\mathcal{G}_{t}\right\}=P_{s}f\left(X_{t}\right)\;\; t,s\geq0,\;\; f\in b\mathcal{E}. \tag{1.11.297}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a $\left(P_{t}\right)$.

En este sentido el proceso $\left(X_{t}\right)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $\left(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_{t},\mathbb{P}\right)$ con semigrupo de transición $\left(P_{t}\right)$.

[100] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[101]

$$\mathbb{P}\left\{H|\mathcal{G}_{t}\right\}=\mathbb{P}\left\{H|X_{t}\right\}\;\; H\in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.11.295}$$

Definición 1.11.75. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t\rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 1.11.76 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* $/P_t)$ *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *tal que* $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0=x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 1.11.77. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E,\mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t,s\geq 0$,

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s} \text{ y } X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{1.11.298}$$

iii) Para cualquier $x\in E$,$\mathbf{P}^x\{X_0=x\}=1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.

Definición 1.11.78 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha>0$ *y cualquier* $f\in S^\alpha$*, el proceso* $t\rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.11.79. *Un sistema* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Definición 1.11.80. *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{F}$ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* X*, la pareja* $(X,\mathcal{F})$ *es llamado espacio medible. Un subconjunto* A *de* X *es llamado medible, o medible con respecto a* $\mathcal{F}$*, si* $A\in\mathcal{F}$.

Definición 1.11.81. *Sea* $(X,\mathcal{F},\mu)$ *espacio de medida. Se dice que la medida* μ *es* σ*-finita si se puede escribir* $X=\bigcup_{n\geq 1}X_n$ *con* $X_n\in\mathcal{F}$ *y* $\mu(X_n)<\infty$.

Definición 1.11.82. *Sea* X *el conjunto de los úmeros reales* $\mathbb{R}$*. El álgebra de Borel es la* σ*-álgebra* B *generada por los intervalos abiertos* $(a,b)\in\mathbb{R}$*. Cualquier conjunto en* B *es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.11.83. *Una función* $f:X\rightarrow\mathbb{R}$*, es medible si para cualquier número real* α *el conjunto*

$$\{x\in X:f(x)>\alpha\}$$

pertenece a X*. Equivalentemente, se dice que* f *es medible si*

$$f^{-1}((\alpha,\infty))=\{x\in X:f(x)>\alpha\}\in\mathcal{F}.$$

Definición 1.11.84. *Sean* $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$*,* $i=1,2,\ldots,$ *espacios medibles y* $\Omega=\prod_{i=1}^\infty\Omega_i$ *el conjunto de todas las sucesiones* $(\omega_1,\omega_2,\ldots,)$ *tales que* $\omega_i\in\Omega_i$*,* $i=1,2,\ldots,$*. Si* $B^n\subset\prod_{i=1}^\infty\Omega_i$*, definimos* $B_n=\{\omega\in\Omega:(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\in B^n\}$*. Al conjunto* B_n *se le llama* cilindro *con base* B^n*, el cilindro es llamado medible si* $B^n\in\prod_{i=1}^\infty\mathcal{F}_i$.

Definición 1.11.85. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.11.86. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.11.87. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.11.88. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{1.11.299}$$

Nota 1.11.8. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{1.11.300}$$

Teorema 1.11.78. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.11.301}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{1.11.302}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{1.11.303}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.11.304}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf \{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{1.11.305}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[102]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 1.11.4 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{1.11.306}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.11.89. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1.11.90. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1.11.91. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1.11.92. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \textit{ es compacto en } E\}. \tag{1.11.307}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

[102] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

Teorema 1.11.79. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.11.93. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B)\,^{103}. \tag{1.11.308}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[104] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I,\;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.11.310}$$

Definición 1.11.94. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x),\;\; t, s \geq 0,\;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.11.9. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0,\;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.11.311}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 1.11.95. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1.11.96 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1.11.97. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

[103] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[104]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.11.309}$$

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X, *es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{1.11.312}$$

iii) *Para cualquier* $x \in E, \mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$, *y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 1.11.98 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$, *el proceso* $t \to f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1.11.99. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 1.11.21 (Lema 4.2, Dai[?])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{1.11.313}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.11.314}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{1.11.315}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 1.11.22 (Lema 4.3, Dai[?])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) *Conforme* $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) *Para cada* $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x(T_l^x(t))\right) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{1.11.316}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{1.11.317}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))',$$
$$I^x(t) = (I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t))'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x(T_l^x(t))\right) - S^x(T^x(t)), \tag{1.11.318}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{1.11.319}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \tag{1.11.320}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{1.11.321}$$

$$\int_0^{\infty} (CQ^x(t)) \, dI_i^x(t) = 0, \tag{1.11.322}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{1.11.323}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1.11.80 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{1.11.324}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \;\; u.o.c. \tag{1.11.325}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{1.11.326}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{1.11.327}$$

$$\overline{T}(t) \;\; \textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{1.11.328}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \;\; \textit{es no decreciente}, \tag{1.11.329}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{1.11.330}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{1.11.331}$$

Definición 1.11.100 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 1.11.81 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \tag{1.11.332}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1.11.101 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 1.11.12 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por **??**-**??** es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1.11.30. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 1.11.23 (Lema 3.1 [**?**]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1.11.82 (Teorema 5.2 [**?**]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1.11.83 (Teorema 5.1 [**?**]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$, *para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 1.11.24 (Lema 5.2 [**?**]). *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r}\tag{1.11.333}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1.11.84 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [**?**]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 1.11.31 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{1.11.334}$$

Proposición 1.11.32 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{1.11.335}$$

Proposición 1.11.33 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{1.11.336}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 1.11.85 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{1.11.337}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{1.11.338}$$

Teorema 1.11.86 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1.11.87 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 1.11.34 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{1.11.339}$$

Lema 1.11.13 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k): k\in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t)=max\left(n\geq 1:\zeta(1)+\cdots+\zeta(n-1)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta(1)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{1.11.340}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r: t\geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1.11.88 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{1.11.341}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 1.11.89 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{1.11.342}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 1.11.90 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x)=f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_f=0. \tag{1.11.343}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 1.11.91 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f: X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds=\pi(f):=\int f(x)\,\pi(dx) \tag{1.11.344}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f: X\leftarrow\mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1.11.92 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{1.11.345}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{1.11.346}$$

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{1.11.347}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{1.11.348}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{1.11.349}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{1.11.350}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{1.11.351}$$

Definición 1.11.102 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1.11.103. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1.11.93 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t). \tag{1.11.352}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1.11.104 (Definición 3.3, Dai y Meyn [**?**]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 1.11.14 (Lema 3.1, Dai y Meyn [**?**]). *Si el modelo de flujo definido por (**??**)-(**??**) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1.11.94 (Teorema 2.1, Down [**?**]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{1.11.353}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{1.11.354}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{1.11.355}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{1.11.356}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1.11.95 (Teorema 2.3, Down [**?**]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{1.11.357}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [**?**], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [**?**], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [**?**], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [**?**]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x, x \in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1,$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right) | \mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right),$$

en $\left\{\tau < \infty\right\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [**?**, **?**].

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right).$$

Definición 1.11.105. *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right) = \int_{\mathbb{X}} P^t\left(x, D\right) \pi\left(dx\right),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1.11.106. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$, tal que si $\nu\left(D\right) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\left\{t \geq 0 : X_t \in D\right\}$.

Nota 1.11.10. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [**?**]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi\left(\cdot\right) = \int_{\mathbf{X}} P_x\left(\cdot\right) \pi\left(dx\right),$$

*y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [**?**].*

Definición 1.11.107. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t\left(x, A\right) \geq \delta \nu\left(A\right),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 1.11.25 (Lema 3.1, Dai [?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x\left[\tau_B(\delta)\right] < \infty, \tag{1.11.358}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 1.11.26 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1.11.96 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{1.11.359}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

Part II

BIBLIOGRAFIA

CAPÍTULO 2

Bibliografía

Bibliography

[1] Asmussen, S. (1987). *Applied Probability and Queues.* John Wiley and Sons.

[2] Bhat, N. (2008). *An Introduction to Queueing Theory: Modelling and Analysis in Applications.* Birkhauser.

[3] Boxma, J. O. (1987). Pseudoconservation Laws in Cyclic Service Systems. *Journal of Applied Probability*, 24, 949-964.

[4] Borovkov, A. A., and Schassberger, R. (1995). Ergodicity of a Polling Network. *Stochastic Processes and their Applications*, 50(2), 253-262.

[5] van den Bos, L., and Boon, M. (2013). *Networks of Polling Systems* (report). Eindhoven University of Technology.

[6] Boon, M. A. A., van der Mei, R. D., and Winands, E. M. M. (2011). Applications of Polling Systems. February 24, 2011.

[7] Ng, C. H., and Soong, B. H. (2008). *Queueing Modelling Fundamentals with Applications in Communications Networks.* John Wiley and Sons.

[8] Chen, H. (1995). Fluid Approximations and Stability of Multiclass Queueing Networks I: Work-conserving Disciplines. *Annals of Applied Probability.*

[9] Cooper, R. B. (1970). Queues Served in Cyclic Order: Waiting Times. *The Bell System Technical Journal*, 49, 399-413.

[10] Dai, J. G. (1995). On Positive Harris Recurrence of Multiclass Queueing Networks: A Unified Approach Via Fluid Limit Models. *The Annals of Applied Probability*, 5(1), 49-77.

[11] Dai, J. G., and Meyn, S. P. (1995). Stability and Convergence of Moments for Multiclass Queueing Networks Via Fluid Limit Models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(11), 1889-1904.

[12] Dai, J. G., and Weiss, G. (1996). Stability and Instability of Fluid Models for Reentrant Lines. *Mathematics of Operations Research*, 21(1), 115-134.

[13] Daley, D. J. (1968). The Correlation Structure of the Output Process of Some Single Server Queueing Systems. *The Annals of Mathematical Statistics*, 39(3), 1007-1019.

[14] Davis, M. H. A. (1984). Piecewise Deterministic Markov Processes: A General Class of Nondiffusion Stochastic Models. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 46(3), 353-388.

[15] Down, D. (1998). On the Stability of Polling Models with Multiple Servers. *Journal of Applied Probability*, 35(3), 925-935.

[16] Disney, R. L., Farrell, R. L., and Morais, P. R. (1973). A Characterization of $M/G/1$ Queues with Renewal Departure Processes. *Management Science*, 19(11), Theory Series, 1222-1228.

[17] Eisenberg, M. (1972). Queues with Periodic Service and Changeover Time. *Operations Research*, 20(2), 440-451.

[18] Fricker, C., and Jaïbi, M. R. (1994). Monotonicity and Stability of Periodic Polling Models. *Queueing Systems*, 15(1-4), 211-238.

[19] Getoor, R. K. (1979). Transience and Recurrence of Markov Processes. In J. Azema and M. Yor (Eds.), *Seminaire de Probabilités XIV* (pp. 397-409). New York: Springer-Verlag.

[20] Gut, A. (1995). *Stopped Random Walks: Limit Theorems and Applications.* Applied Probability.

[21] Kaspi, H., and Mandelbaum, A. (1992). Regenerative Closed Queueing Networks. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 39(4), 239-258.

[22] Kleinrock, L. (1975). *Queueing Systems: Theory, Volume 1.* Wiley-Interscience.

[23] Konheim, A. G., Levy, H., and Srinivasan, M. M. (1994). Descendant Set: An Efficient Approach for the Analysis of Polling Systems. *IEEE Transactions on Communications*, 42(2-4), 1245-1253.

[24] Lang, S. (1973). *Calculus of Several Variables.* Addison-Wesley Publishing Company.

[25] Levy, H., and Sidi, M. (1990). Polling Systems: Applications, Modeling, and Optimization. *IEEE Transactions on Communications*, 30(10), 1750-1760.

[26] Fricker, C., and Jaïbi, M. R. (1998). Stability of Multi-server Polling Models. Institute National de Recherche en Informatique et en Automatique.

[27] Meyn, S. P., and Tweedie, R. L. (1993). *Markov Chains and Stochastic Stability.* Springer-Verlag.

[28] Meyn, S. P., and Down, D. (1994). Stability of Generalized Jackson Networks. *The Annals of Applied Probability.*

[29] van der Mei, R. D., and Borst, S. C. (1997). Analysis of Multiple-server Polling Systems by Means of the Power-Series Algorithm. *Stochastic Models*, 13(2), 339-369.

[30] Meyn, S. P. (1995). Transience of Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models. *The Annals of Applied Probability*, 5(4), 946-957.

[31] Adan, I. J. B. F., van Leeuwaarden, J. S. H., and Winands, E. M. M. (2006). On the Application of Rouche's Theorem in Queueing Theory. *Operations Research Letters*, 34(3), 355-360.

[32] Roubos, A. (2007). *Polling Systems and their Applications.* Vrije Universiteit Amsterdam.

[33] Saavedra, B. P. (2011). Informe Técnico del Microsimulador. Departamento de Matemáticas.

[34] Vishnevskii, V. M., and Semenova, O. V. (2006). Mathematical Methods to Study the Polling Systems. *Automation and Remote Control*, 67(2), 173-220.

[35] Serfozo, R. (2009). *Basics of Applied Stochastic Processes.* Springer-Verlag.

[36] Sharpe, M. (1998). *General Theory of Markov Processes.* Academic.

[37] Sigman, K. (1990). The Stability of Open Queueing Networks. *Stochastic Processes and their Applications*, 35(1), 11-15.

[38] Sidi, M., and Levy, H. (1990). Customer Routing in Polling Systems. In P. King, I. Mitrani, and R. Pooley (Eds.), *Proceedings Performance '90.* North-Holland, Amsterdam.

[39] Sidi, M., and Levy, H. (1991). Polling Systems with Simultaneous Arrivals. *IEEE Transactions on Communications*, 39(6), 823-827.

[40] Sigman, K., Thorisson, H., and Wolff, R. W. (1994). A Note on the Existence of Regeneration Times. *Journal of Applied Probability*, 31, 1116-1122.

[41] Stidham, S. Jr. (1972). Regenerative Processes in the Theory of Queues, with Applications to the Alternating Priority Queue. *Advances in Applied Probability*, 4(3), 542-577.

[42] Takagi, H. (1986). *Analysis of Polling Systems.* Cambridge: MIT Press.

[43] Takagi, H., and Kleinrock. (1986). Analysis of Polling Systems. Cambridge: MIT Press.

[44] Takagi, H. (1988). Queueing Analysis of Polling Models. *ACM Computing Surveys*, 20(1), 5-28.

[45] Thorisson, H. (2000). *Coupling, Stationarity, and Regeneration.* Probability and its Applications. Springer-Verlag.

[46] Winands, E. M. M., Adan, I. J. B. F., and van Houtum, G. J. (2006). Mean Value Analysis for Polling Systems. *Queueing Systems*, 54, 35-44.

[47] James, G., Witten, D., Hastie, T., and Tibshirani, R. (2013). *An Introduction to Statistical Learning: with Applications in R.* Springer.

[48] Hosmer, D. W., Lemeshow, S., and Sturdivant, R. X. (2013). *Applied Logistic Regression* (3rd ed.). Wiley.

[49] Bishop, C. M. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning.* Springer.

[50] Harrell, F. E. (2015). *Regression Modeling Strategies: With Applications to Linear Models, Logistic and Ordinal Regression, and Survival Analysis.* Springer.

[51] R Documentation and Tutorials: `https://cran.r-project.org/manuals.html`

[52] Tutorials on R-bloggers: `https://www.r-bloggers.com/`

[53] Coursera: *Machine Learning* by Andrew Ng.

[54] edX: *Data Science and Machine Learning Essentials* by Microsoft.

[55] Ross, S. M. (2014). *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists.* Academic Press.

[56] DeGroot, M. H., and Schervish, M. J. (2012). *Probability and Statistics* (4th ed.). Pearson.

[57] Hogg, R. V., McKean, J., and Craig, A. T. (2019). *Introduction to Mathematical Statistics* (8th ed.). Pearson.

[58] Kleinbaum, D. G., and Klein, M. (2010). *Logistic Regression: A Self-Learning Text* (3rd ed.). Springer.

[59] Wasserman, L. (2004). *All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference.* Springer.

[60] Probability and Statistics Tutorials on Khan Academy: `https://www.khanacademy.org/math/statistics-probability`

[61] Online Statistics Education: `http://onlinestatbook.com/`

[62] Peng, C. Y. J., Lee, K. L., and Ingersoll, G. M. (2002). *An Introduction to Logistic Regression Analysis and Reporting.* The Journal of Educational Research.

[63] Agresti, A. (2007). *An Introduction to Categorical Data Analysis* (2nd ed.). Wiley.

[64] Han, J., Pei, J., and Kamber, M. (2011). *Data Mining: Concepts and Techniques.* Morgan Kaufmann.

[65] Data Cleaning and Preprocessing on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/data-cleaning-and-preprocessing`

[66] Molinaro, A. M., Simon, R., and Pfeiffer, R. M. (2005). *Prediction Error Estimation: A Comparison of Resampling Methods.* Bioinformatics.

[67] Evaluating Machine Learning Models on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/evaluating-machine-learning-models`

[68] Practical Guide to Logistic Regression in R on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/practical-guide-to-logistic-regression-in-r`

[69] Coursera: *Statistics with R* by Duke University.

[70] edX: *Data Science: Probability* by Harvard University.

[71] Coursera: *Logistic Regression* by Stanford University.

[72] edX: *Data Science: Inference and Modeling* by Harvard University.

[73] Coursera: *Data Science: Wrangling and Cleaning* by Johns Hopkins University.

[74] edX: *Data Science: R Basics* by Harvard University.

[75] Coursera: *Regression Models* by Johns Hopkins University.

[76] edX: *Data Science: Statistical Inference* by Harvard University.

[77] An Introduction to Survival Analysis on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/an-introduction-to-survival-analysis`

[78] Multinomial Logistic Regression on DataCamp: `https://www.datacamp.com/community/tutorials/multinomial-logistic-regression-R`

[79] Coursera: *Survival Analysis* by Johns Hopkins University.

[80] edX: *Data Science: Statistical Inference and Modeling for High-throughput Experiments* by Harvard University.

[81] Sigman, K., and Wolff, R. W. (1993). A Review of Regenerative Processes. *SIAM Review*, 38(2), 269-288.

[82] I.J.B.F. Adan, J.S.H. van Leeuwaarden, and E.M.M. Winands. On the application of Rouches theorem in queueing theory. Operations Research Letters, 34(3):355-360, 2006.

[83] Asmussen Soren, Applied Probability and Queues, John Wiley and Sons, 1987.

[84] Bhat Narayan, An Introduction to Queueing Theory Modelling and Analysis in Applications, Birkhauser, 2008.

[85] Boxma J. O., Analysis and Optimization of Polling Systems, Queueing, Performance and Control in ATM, pp. 173-183, 1991.

[86] Boxma J. O., Pseudoconservation Laws in Cyclic Service Systems, Journal of Applied Probability, vol. 24, 1987, pp. 949-964.

[87] Boon M.A.A., Van der Mei R.D. and Winands E.M.M., Applications of Polling Systems, 2011.

[88] Borovkov. A. A. and Schassberger R., Ergodicity of a Polling Network, Stochastic Processes and their Applications, vol. 50, no. 2, 1995, pp. 253-262.

[89] Laurent van den Bos and Marko Boon, Networks of Polling Systems (report), Eindhoven University of Technology, 2013.

[90] Chee-Hook Ng. y Boon-Hee Soong, Queueing Modelling Fundemantals with Applications in Communications Networks, John-Wiley and Sons, Ltd, 2008.

[91] Chen H., Fluid Approximations and Stability of Multiclass Queueing Networks I: Work-Conserving Disciplines, Annals Applied Probabability, vol. 5, no. 3, 1995, pp. 637-665.

[92] R.B. Cooper, G. Murray, Queues served in cyclic order (The Bell System Technical Journal, 48 (1969) 675-689).

[93] R.B. Cooper, Queues served in cyclic order: waiting times (The Bell System Technical Journal, 49 (1970) 399-413).

[94] Dai Jean G., On positive Harris Recurrence of Multiclass Queueing Networks: A Unified Approach Via Fluid Limit Models, The Annals of Applied Probability, vol. 5, No. 1, 1995, pp. 49-77.

[95] Dai Jim G. and Meyn Sean P., Stability and Convergence of Moments for Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models, IEEE transactions on Automatic Control, vol. 40, No. 11, 1995, pp. 1889-1904.

[96] Dai Jim G. and Weiss G., Stability and Inestability of Fluid Models for Reentrant Lines, Mathematics of Operation Research, vol. 21, no. 1, 1996, pp. 115-134.

[97] D.J. Daley, The correlation structure of the output process of some single server queueing systems, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 39. No. 3, pp. 1007-1019, 1968.

[98] Davis, M. H. A., Piecewise Deterministic Markov Processes: A General Class of Nondifussion Stochastic Models. Journal of Royal Statistics Society Serie B, vol. 46, no. 3, 1984, pp. 353-388.

[99] Down D., On the Stability of Polling Models with Multiple Servers, Journal of Applied Probability, vol. 35, no. 3, 1998, pp. 925-935.

[100] D.J. Daley, The correlation structure of the output process of some single server queueing systems, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 39. No. 3, pp. 1007-1019, 1968.

[101] Ralpjh L. Disney, Robert L. Farrell and Paulo Renato Morais, A Characterization of $M/G/1$ Queues with Renewal Departure Processes, Manage of Science, Vol. 19, No. 11, Theory Series, pp. 1222-1228, 1973.

[102] M. Eisenberg, Queues with periodic service and changeover time (Operations Research, 20 (2)(1972) 440-451).

[103] Fricker Christine and Jaïbi M.R., Monotonicity and Stability of Periodic Polling Models, Queueing Systems, vol. 15, no. 1-4, 1994, pp. 211-238.

[104] Fricker Christine and Jaïbi M.R., Stability of Multi-Server Polling Models, Institute National de Recherche en Informatique et en Automatique, Issue 3347, 1998.

[105] Getoor R. K., Transience and recurrence of Markov processes, Siminaire de Probabilitis XIV, J. Azema and M Yor, Eds. New York Springer-Verlag, 1979.

[106] Gut A., Stopped Random Walks: Limit Theorems and Applications, Applied Probability, 1995.

[107] Chee-Hook Ng. y Boon-Hee Soong, Queueing Modelling Fundemantals with Applications in Communications Networks, John-Wiley and Sons, Ltd, 2008.

[108] Kaspi H. and Mandelbaum A., Regenerative Closed Queueing Networks, Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, vol. 39, no. 4, 1992, pp. 239-258.

[109] A.G. Konheim, H. Levy, M.M. Srinivasan, Descendant set: an efficient approach for the analysis of polling systems (IEEE Transactions on Communications, 42 (2/3/4)(1994) 1245-1253).

[110] Leonard Kleinrock, Theory, Volume 1, Queueing Systems Wiley-Interscience, 1975,

[111] A. G. Konheim, h. Levy and M. M. Srinivasan. Descendant set: an efficient approach for the analysis of polling systems. IEEE Trabsanctions on Communications, 42(2-4): pp. 1245-1253, 1994.

[112] Serge Lang, Calculus of Several Variables, Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

[113] Levy Hanoch y Sidi Moshe , Polling Systems: Applications, Modeling, and Optimization, IEEE Transactions on Communications, vol. 30, no. 10, 1990, pp. 1750-1760.

[114] van der Mei, R.D. and Borst, S. C., Analysis of Multiple-Server Polling Systems by Means of the Power-Series Algorithm, Stochastic Models, vol. 13, no. 2, 1997, pp. 339-369.

[115] Meyn Sean P., Transience of Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models, The Annals of Applied Probability, vol. 5, no. 4, 1995, pp.946-957.

[116] Meyn S. P. and Tweedie R. L., Stability of Markovian Processes II:Continuous Time Processes and Sample Chains, Advanced Applied Pobability, vol. 25, 1993, pp. 487-517.

[117] Meyn S. P. and Tweedie R. L., Markov Chains and Stochastic Stability, 1993.

[118] Meyn, S.P. and Down, D., Stability of Generalized Jackson Networks, The Annals of Applied Probability, 1994.

[119] Roubos Alex, Polling Systems and their Applications, Vrije Universiteit Amsterdam, 2007.

[120] Saavedra B. P., Informe Técnico del Microsimulador, Departamento de Matemátias, 2011.

[121] Vishnevskii V.M. and Semenova O.V., Mathematical Methods to Study the Polling Systems, Automation and Remote Control, vol. 67, no. 2, 2006, pp. 173-220.

[122] Richard Serfozo, Basics of Applied Stochastic Processes, Springer-Verlag, 2009.

[123] Sharpe Michael , General Theory of Markov Processes. Boston, M.A. Academic, 1998.

[124] Sigman Karl, The Stability of Open Queueing Networks, Stochastic Processes and their Applications, vol. 35, no. 1, 1990, pp. 11-15.

[125] Sidi M. and Levy H., Customer Routing in Polling Systems, In: P. King, I. Mitrani, and R. Pooley (Eds.), Proceedings Performance '90, North-Holland, Amsterdam, 1990.

[126] Sidi M. and Levy H., Polling Systems with Simultaneus Arrivals. IEEE Transactions on Communications, vol. 39, no. 6, 1991, pp. 823-827.

[127] Karl Sigman, Hermann Thorisson and Ronald W. Wolff, A Note on the Existence of Regeneration Times, Journal of Applied Probability, vol. 31, pp. 1116-1122, 1994.

[128] Shaler Stidham, Jr., Regenerative Processes in the theory ow queues, with applications to the alternating priority queue, Advances in Applied Probability, Vol. 4, no. 3, 1972,pp. 542-577.

[129] Takagi H., Analysis of Polling Systems, Cambdrige: MIT Press, 1986

[130] Takagi H. and Kleinrock, Analysis of Polling Systems, Cambdrige: MIT Press, 1986

[131] Takagi Hideaki, Queueing Analysis of Polling Models, ACM computing Surveys, vol. 20, no. 1, 1988, pp. 5-28.

[132] Hermann Thorisson, Coupling, Stationarity, and Regeneration, Probability and its Applications, Springer-Verlag, 2000.

[133] E.M.M. Winands, I.J.B.F. Adan adn G.J. van Houtum, Mean value analysis for polling systems, Queueing Systems (2006), 54:35-44,

[134] Konheim, A.G. and Meister, B., Waiting Lines and Times in a System with Polling, J. ACM, 1974, vol. 21, n0. 3, pp. 470-490.

[135] Levy, H. and Kleinrock, L., Polling Systems with Zero Switch-over Periods: A General Method for Analysis the Expected DElay, Performance Evaluat., 1991, vol. 13, no. 2, pp. 97-107.

[136] Yechiali, U., Analysis and Control of Polling systems, in Performance Evaluation of Computer and Communications Systems, Donatiello, L. and Nelson R., Eds. Berlin: Springer Verlag, 1993, pp. 630-650.