Procesos Regenerativos y de Renovación: Revisión

Carlos E. Martínez-Rodríguez

Julio 2024

Índice

Parte I
Introducción a Procesos Regenerativos

1. Procesos Estocásticos

Definición 1.1. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 1.2. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 1.3. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1.4. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.5. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1.6. *[TSP, Ash [1]]Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.7. *[TSP, Ash [1]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.8. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.9. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que esun Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{1.1}$$

Nota 1.1. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (1.1) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{1.2}$$

Teorema 1.1. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots,\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{1.3}$$

en $\{T < \infty\}$.

1.1. Cadenas de Markov

Definición 1.10. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y* $\mathbf{E}$ *un conjunto no vacío, finito o numerable. Una sucesión de variables aleatorias* $\{X_n : \Omega \to \mathbf{E}, n \geq 0\}$ *se le llama Cadena de Markov con espacio de estados* $\mathbf{E}$ *si satisface la condición de Markov, esto es, si para todo* $n \geq 1$ *y toda sucesión* $x_0, x_1, \ldots, x_n, x, y \in \mathbf{E}$ *se cumple que*

$$P\{X_n = y | X_{n-1} = x, \ldots, X_0 = x_0\} = P\{X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}\} \tag{1.4}$$

La distribución de X_0 *se llama distribución inicial y se denotará por* π.

Las probabilidades condicionales $P\{X_n = y | X_{n-1} = x\}$ se les llama *probabilidades condicionales*
En este trabajo se considerarán solamente aquellas cadenas de Markov con probabilidades de transición estacionarias, es decir, aquellas que no dependen del valor de n (se dice que es una cadena homogénea), es decir, cuando se diga $X_n, n \geq 0$ es cadena de Markov, se entiende que es una sucesión de variables aleatorias que satisfacen la propiedad de Markov y que tienen probabilidades de transición estacionarias.

Nota 1.2. *Para una cadena de Markov Homogénea se tiene la siguiente denotación*

$$P\{X_n = y | X_{n-1} = x\} = P_{x,y} \tag{1.5}$$

Nota 1.3. *Para* $m \geq 1$ *se denotará por* $P_{x,y}^{(m)}$ *a* $P\{X_{n+m} = y | X_n = x\}$, *que significa la probabilidad de ir en* m *pasos o unidades de tiempo de* x *a* y, *y se le llama probabilidad de transición en* m *pasos.*

Nota 1.4. *Para* $x, y \in \mathbf{E}$ *se define a* $P_{x,y}^{(0)}$ *como* $\delta_{x,y}$, *donde* $\delta_{x,y}$ *es la delta de Kronecker, es decir, vale 1 si* $x = y$ *y 0 en otro caso.*

Nota 1.5. *En el caso de que* $\mathbf{E}$ *sea finito, se considera la matriz* $P = (P_{x,y})_{x,y \in \mathbf{E}}$ *y se le llama matriz de transición.*

Nota 1.6. *Si la distribución inicial* π *es igual al vector* $(\delta_{x,y})_{y \in \mathbf{E}}$, *es decir*

$$P(X_0 = x) = 1) \ \ y \ P(X_0 \neq x) = 0,$$

entonces se toma la notación

$$P_x(A) = P(A | X_0 = x), A \in \mathcal{F}, \tag{1.6}$$

y se dice que la cadena empieza en A. *Se puede demostrar que* P_x *es una nueva medida de probabilidad en el espacio* $(\Omega, \mathcal{F})$.

Nota 1.7. *La suma de las entradas de los renglones de la matriz de transición es igual a uno, es decir, para todo* $x \in \mathbf{E}$ *se tiene* $\sum_{y \in \mathbf{E}} P_{x,y} = 1$.

Para poder obtener uno de los resultados más importantes en cadenas de Markov, la *ecuación de Chapman-kolmogorov* se requieren los siguientes resultados:

Lema 1.1. *Sean* $x, y, z \in \mathbf{E}$ *y* $0 \leq m \leq n-1$, *entonces se cumple que*

$$P(X_{n+1} = y | X_n = z, X_m = x) = P_{z,y}. \tag{1.7}$$

Proposición 1.1. *Si* $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{E}$ *y* $\pi(x_0) = P(X_0 = x_0)$, *entonces*

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n, X_0 = x_0) = \pi(x_0) P_{x_0,x_1} \cdot P_{x_1,x_2} \cdots P_{x_{n-1},x_n} \tag{1.8}$$

De la proposición anterior se tiene

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n | X_0 = x_0) = P_{x_0,x_1} \cdot P_{x_1,x_2} \cdots P_{x_{n-1},x_n}. \tag{1.9}$$

finalmente tenemos la siguiente proposición

Proposición 1.2. *Sean $n,k\in\mathbb{N}$ fijos y $x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots,x_{n+k}\in\mathbf{E}$, entonces*

$$\begin{aligned}&P\left(X_{n+1}=x_{n+1},\ldots,X_{n+k}=x_{n+k}|X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\right)\\=\;&P\left(X_1=x_{n+1},X_2=x_{n+2},\cdots,X_k=x_{n+k}|X_0=x_n\right)\end{aligned}$$

Ejemplo 1.1. *Sea X_n una variable aleatoria al tiempo n tal que*

$$P\left(X_{n+1}=1|X_n=0\right) = p \quad (1.10)$$
$$P\left(X_{n+1}=0|X_n=1\right) = q=1-p \quad (1.11)$$
$$P\left(X_0=0\right) = \pi_0\left(0\right). \quad (1.12)$$

Se puede demostrar que

$$P\left(X_n=0\right) = \frac{q}{p+q} \quad (1.13)$$
$$P\left(X_n=1\right) = \frac{p}{p+q} \quad (1.14)$$

Ejemplo 1.2. *El problema de la Caminata Aleatoria.*

Ejemplo 1.3. *El problema de la ruina del jugador.*

Ejemplo 1.4. *Sea $\{Y_i\}_{i=0}^{\infty}$ sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas, definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y que toman valores enteros, se tiene que la sucesión $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ definida por $X_j\sum i=0^jY_j$ es una cadena de Markov en el conjunto de los números enteros.*

Proposición 1.3. *Para una cadena de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con espacio de estados $\mathbf{E}$ y para todo $n,m\in\mathbb{N}$ y toda pareja $x,y\in\mathbf{E}$ se cumple*

$$P\left(X_{n+m}=y|X_0=x\right)=\sum_{z\in\mathbf{E}}P_{x,z}^{(m)}P_{z,y}^{(n)}=P_{x,y}^{(n+m)} \quad (1.15)$$

Nota 1.8. *Para una cadena de Markov con un número finito de estados, se puede pensar a P^n como la n-ésima potencia de la matriz P. Sea π_0 distribución inicial de la cadena de Markov, como*

$$P\left(X_n=y\right)=\sum_x P\left(X_0=x,X_n=y\right)=\sum_x P\left(X_0=x\right)P\left(X_n=y|X_0=x\right) \quad (1.16)$$

se puede comprobar que

$$P\left(X_n=y\right)=\sum_x \pi_0\left(X\right)P^n\left(x,y\right). \quad (1.17)$$

Con lo anterior es posible calcular la distribuición de X_n en términos de la distribución inicial π_0 y la función de transición de n-pasos P^n,

$$P\left(X_{n+1}=y\right)=\sum_x P\left(X_n=x\right)P\left(x,y\right). \quad (1.18)$$

Nota 1.9. *Si se conoce la distribución de X_0 se puede conocer la distribución de X_1.*

1.2. Procesos de Estados de Markov

Teorema 1.2. *Sea $(X_n,\mathcal{F}_n,n=0,1,\ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0,χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m,n=0,1,\ldots,$ $m<n$, que por notación se escribirá como $p\left(m,n,x,B\right)\rightarrow p_{mn}\left(x,B\right)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T:\Omega\rightarrow\{0,1,\ldots,\}$. Supóngase que $T\geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B\in\chi_0$, entonces*

$$P\left\{X\left(T\right)\in B,T<\infty|\mathcal{F}\left(S\right)\right\}=p\left(S,T,X\left(s\right),B\right) \quad (1.19)$$

en $\{T<\infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{ \bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v \right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{1.20}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{1.21}$$

donde ∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.22}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{1.23}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 1.1 (Supuesto 3.1, Davis [99]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0,t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[N_t\right] < \infty \text{ para toda } t. \tag{1.24}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[1] se cumple para cualquier tiempo de paro.

1.3. Clasificación de Estados

Definición 1.11. *Para A conjunto en el espacio de estados, se define un tiempo de paro T_A de A como*

$$T_A = min_{n>0}\left(X_n \in A\right) \tag{1.25}$$

Nota 1.10. *Si $X_n \notin A$ para toda $n > 0$, $T_A = \infty$, es decir, T_A es el primer tiempo positivo que la cadena de Markov está en A.*

Una vez que se tiene la definición anterior se puede demostrar la siguiente igualdad:

Proposición 1.4. $P^n\left(x,y\right) = \sum_{m=1}^{n} P_x\left(T_y = m\right) P^{n.m}\left(y,x\right), n \geq 1$

Definición 1.12. *En una cadena de Markov $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ con espacio de estados $\mathbf{E}$, matriz de transición $\left(P_{x,y}\right)_{x,y\in\mathbf{E}}$ y para $x, y \in \mathbf{E}$, se dice que*

a) *De x se accede a y si existe $n \geq 0$ tal que $P_{x,y}^{(n)} > 0$ y se denota por $(x \to y)$*

b) *x y y se comunican entre sí, lo que se denota por $(x \leftrightarrow y)$, si se cumplen $(x \to y)$ y $(y \to x)$.*

c) *Un estado $x \in \mathbf{E}$ es estado recurrente si*

$$P\left(X_n = x \text{ para algún } n \in \mathbb{N} | X_0 = x\right) \equiv 1.$$

d) *Un estado $x \in \mathbf{E}$ es estado transitorio si*

$$P\left(X_n = x \text{ para algún } n \in \mathbb{N} | X_0 = x\right) < 1.$$

e) *Un estado $x \in \mathbf{E}$ se llama absorbente si $P_{x,x} \equiv 1$.*

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.5. *$x \leftrightarrow y$ es una relación de equivalencia y da lugar a una partición del espacio de estados $\mathbf{E}$*

Definición 1.13. *Para E espacio de estados*

a) *Se dice que $C \subset \mathbf{E}$ es una clase de comunicación si cualesquiera dos estados de C se comunicán entre sí.*

b) *Dado $x \in \mathbf{E}$, su clase de comunicación se denota por: $C(x) = \{y \in \mathbf{E} : x \leftrightarrow y\}$.*

c) *Se dice que un conjunto de estados $C \subset \mathbf{E}$ es cerrado si ningún estado de $\mathbf{E} - C$ puede ser accedido desde un estado de C.*

Definición 1.14. *Se dice que la cadena es irreducible si cualquiera de las siguientes condiciones, equivalentes entre sí, se cumplen*

a) *Desde cualquier estado de $\mathbf{E}$ se puede acceder a cualquier otro.*

[1]Revisar página 362, y 364 de Davis [99].

b) *Todos los estados se comunican entre sí.*

c) $C(x) = \mathbf{E}$ *para algún* $x \in \mathbf{E}$.

d) $C(x) = \mathbf{E}$ *para todo* $x \in \mathbf{E}$.

e) *El único conjunto cerrado es el total.*

Por lo tanto tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.6. *a)* *Un estado* $x \in \mathbf{E}$ *es recurrente si y sólo si* $P(T_x < \infty | x_0 = x) = 1$.

b) *Un estado* $x \in \mathbf{E}$ *es transitorio si y sólo si* $P(T_x < \infty | x_0 = x) < 1$.

c) *Un estado* $x \in \mathbf{E}$ *es absorbente si y sólo si* $P(T_x = 1 | x_0 = x) = 1$.

1.4. Procesos de Markov

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.15. *Una medida finita,* λ *en la* σ*-álgebra de Borel de un espacio metrizable* E *se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{1.26}$$

Definición 1.16. E *es un espacio de Radón si cada medida finita en* $(E, \mathcal{B}(E))$ *es regular interior o cerrada.* tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.3. *Sea* E *espacio separable metrizable. Entonces* E *es de Radón si y sólo sí cada medida finita en* $(E, \mathcal{B}(E))$ *es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[2], $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.17. *Una familia* $(P_{s,t})$ *de kernels de Markov en* $(E, \mathcal{E})$ *indexada por pares* $s, t \in I$*, con* $s \leq t$ *es una función de transición en* $(E, \mathcal{E})$*, si para todo* $r \leq s < t$ *en* I *y todo* $x \in E$*,* $B \in \mathcal{E}$

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{3}. \tag{1.27}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[4] (1.28) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.29}$$

Definición 1.18. *Una familia* $(P_t)_{t \geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E, \mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \; t, s \geq 0, \; x \in E \; f \in b\mathcal{E}^5.$$

Nota 1.11. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

[2] qué se quiere decir con el término: más general?

[3] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[4]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.28}$$

[5] Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (1.29) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_{t+s}\right)|\mathcal{G}_t\right\} = P_s f\left(X_t\right)\ t, s \geq 0,\ f \in b\mathcal{E}. \tag{1.30}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t). En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (1.30) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

2. Procesos de Renovación y Regenerativos

Definición 2.1. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\left(T_n \leq t\right), \tag{2.1}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 2.2. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 2.1. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\left(T_n \leq t\right)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

2.1. Procesos Regenerativos Estacionarios

Definición 2.3. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\}, \tag{2.2}$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\left\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\right\}$ =número de renovaciones que ocurren en $[0, t]$.

Definición 2.4. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A\right\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\left\{V(t + x) \in A | X > x\right\} (1 - F(x))\, dx, \tag{2.3}$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 2.5. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 2.1. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 2.1. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\,ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

2.2. Teorema Principal de Renovación

Nota 2.2. *Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 2.2 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds. \tag{2.4}$$

Proposición 2.1. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t) \tag{2.5}$$

Definición 2.6. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0, \tag{2.6}$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 2.2. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]. \tag{2.7}$$

Teorema 2.3 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds, \tag{2.8}$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 2.7. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 2.3. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 2.4. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 2.5. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

2.3. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 2.3. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 2.1 (**Proceso Poisson**)**.** *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 2.6. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 2.4. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (2.9)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (2.10) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 2.2 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{2.11}$$

Consideremos el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 2.8. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 2.5. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (2.12)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (2.13) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 2.3. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{2.14}$$

2.4. Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 2.9. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0, \tag{2.15}$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 2.4. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-1)\} = 0, \; t \geq 0. \tag{2.16}$$

Definición 2.10. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}. \tag{2.17}$$

Proposición 2.5. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 2.7. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 2.6. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0, \tag{2.18}$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0, \tag{2.19}$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 2.4 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0, \tag{2.20}$$

Definición 2.11. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \; t \geq 0, \tag{2.21}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 2.6. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 2.7 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \; \textit{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Parte II
Procesos Regenerativos según autores

3. Procesos Regenerativos: Sigman[82]

Definición 3.1 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 3.1. *La existencia de un primer tiempo de regeneración,* R_1*, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos* $R_1, R_2 \ldots,$ *que satisfacen la propiedad deseada [128].*

Nota 3.2. *Para la cola* $GI/GI/1$ *los usuarios arriban con tiempos* t_n *y son atendidos con tiempos de servicio* S_n*, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)*$T_n = t_n - t_{n-1}$*, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que* $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.

Definición 3.2. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\overline{X} = lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\,du \tag{3.1}$$

$$\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) = lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\,du, \tag{3.2}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]}, \tag{3.3}$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 3.3. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si* $X(t)$ *es regenerativo y se define el proceso* $Y(t)$ *por* $Y(t) = f(X(t))$ *para alguna función Borel medible* $f(\cdot)$*. Además* Y *es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que* X*.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k *de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de* $X(t)$*.*

Nota 3.4. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 3.5. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 3.6. *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_{∞}

3.1. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[123]

Definición 3.3 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t*.*

- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*

- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 3.7. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de Markov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{3.4}$$

Ejemplo 3.1 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (15.43) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 3.8. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 3.4. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 3.9. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 3.1. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 3.1. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación N es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 3.10. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 3.1. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renovación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

4. EN REVISIÓN

4.1. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 4.1. *Un elemento aleatorio en un espacio medible* $(E, \mathcal{E})$ *en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *a* $(E, \mathcal{E})$*, es decir, para* $A \in \mathcal{E}$*, se tiene que* $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$*, donde* $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.

Nota 4.1. *También se dice que* Y *está soportado por el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y que* Y *es un mapeo medible de* Ω *en* E*, es decir, es* $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ *medible.*

Definición 4.2. *Para cada* $i \in \mathbb{I}$ *sea* P_i *una medida de probabilidad en un espacio medible* $(E_i, \mathcal{E}_i)$*. Se define el espacio producto* $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$*, donde* $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ *es el producto cartesiano de los* E_i*'s, y* $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ *es la* σ*-álgebra producto, es decir, es la* σ*-álgebra más pequeña en* $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ *que hace al i-ésimo mapeo proyección en* E_i *medible para toda* $i \in \mathbb{I}$ *es la* σ*-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma\left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}. \tag{4.1}$$

Definición 4.3. *Un espacio de probabilidad* $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ *es una extensión de otro espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *si* $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ *soporta un elemento aleatorio* $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ *que tienen a* $\mathbb{P}$ *como distribución.*

Teorema 4.1. *Sea* $\mathbb{I}$ *un conjunto de índices arbitrario. Para cada* $i \in \mathbb{I}$ *sea* P_i *una medida de probabilidad en un espacio medible* $(E_i, \mathcal{E}_i)$*. Entonces existe una única medida de probabilidad* $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ *en* $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ *tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \dots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n}) \tag{4.2}$$

para todos los enteros $n > 0$*, toda* $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{I}$ *y todo* $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \dots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 4.4. *Un espacio medible* $(E, \mathcal{E})$ *es Polaco si existe una métrica en* E *tal que* E *es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en* E*, y separable,* E *tienen un subconjunto denso numerable, y tal que* $\mathcal{E}$ *es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 4.5. *Dos espacios medibles* $(E, \mathcal{E})$ *y* $(G, \mathcal{G})$ *son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección* $f : E \to G$ *tal que* f *es* $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ *medible y su inversa* f^{-1} *es* $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ *medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 4.6. *Un espacio medible* $(E, \mathcal{E})$ *es un espacio estándar si es Borel equivalente a* $(G, \mathcal{G})$*, donde* G *es un subconjunto de Borel de* $[0, 1]$ *y* $\mathcal{G}$ *son los subconjuntos de Borel de* G*.*

Nota 4.2. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 4.7. *Un proceso estocástico con conjunto de índices* $\mathbb{I}$ *y espacio de estados* $(E, \mathcal{E})$ *es una familia* $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ *donde* $\mathbb{Z}_s$ *son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y todos toman valores en* $(E, \mathcal{E})$*.*

Definición 4.8. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices* $\mathbb{I} = [0, \infty)$*.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}} (E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 4.3. *La distribución de un proceso estocástico* Z *es la distribución de* Z *como un elemento aleatorio en* $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$*. La distribución de* Z *esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 4.4. *En particular cuando* Z *toma valores reales, es decir,* $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}(Z_{t_1} \leq x_1, \dots, Z_{t_n} \leq x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{4.3}$$

Nota 4.5. *Para espacios polacos $(E, \mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 4.9. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 4.6. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H, \mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{4.4}$$

Nota 4.7. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ a $(H, \mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H, \mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 4.8. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H, \mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 4.10. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0, \infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) . w \in \Omega.$$

Definición 4.11. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible (**CM**) si el mapeo que toma $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 4.9. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 4.12. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H, \mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible (**CCM**) si el mapeo $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 4.10. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0, \infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w, t) en $(Z(w), t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w), t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 4.13. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante (**ISI**) si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s \in [0, \infty)} : z \in H\right\} = H,\ t \in [0, \infty).$$

Definición 4.14. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0, \infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)},\ z \in H.$$

Definición 4.15. *Se dice que un proceso Z es shift-medible (**SM**) si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H}$ medible.*

Nota 4.11. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 4.12.
- *Dado el espacio polaco $(E, \mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0, \infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 4.13. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 4.2. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 4.16. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^{\infty}$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L, \mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^{\infty} \in [0,\infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.

Así el par (Z, S) es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^{+}$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 4.17. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z, (s_k)_0^{\infty}\right) = \theta_t\left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^{\infty}\right)$$

donde $n_{t-} = inf\{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 4.14. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 4.18. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0, S_n), S_0, \dots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z, S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 4.15. *Si el par (Z, S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \dots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 4.3. *Supóngase que el par (Z, S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z, S) con periodo d.*

Definición 4.19. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^{+}$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx > 0$ con $X_2, X_3, \dots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\, dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 4.20. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \dots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z, S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 4.16.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z, S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 4.17. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 4.4. *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 4.5. *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0,S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega,\mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^*=\frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]}d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*,S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0,S^0\right)\in\cdot\right)$. Entonces $(Z*,S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*,S^*)]=\mathbb{E}\left[\int_0^{X_1}f\left(\theta_s\left(Z^0,S^0\right)\right)ds\right]/\mathbb{E}[X_1]$$

$f\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x):=\frac{\mathbb{E}[X_1]\wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x\geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1>x]/\mathbb{E}[X_1]$, con $x\geq 0$.

Teorema 4.6. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0\leq S_0<S_1$ y*

$$\theta_{S_1}Z=\theta_{S_0}Z \text{ en distribución.} \tag{4.5}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z,S)=\left(Z^0,S^0\right),n\geq 0,\ \text{en distribución,} \tag{4.6}$$

$$(Z,S_0,S_1)\ \text{depende de}\ (X_2,X_3,\ldots)\ \text{solamente a traves de}\ \theta_{S_1}Z. \tag{4.7}$$

4.2. Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [82]

Definición 4.21 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X=\{X(t):t\geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1>0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1):t\geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t):t<R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1):t\geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t):t>0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k\equiv R_1+R_2+\cdots+R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 4.18. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1,R_2\ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [128].*

Nota 4.19. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n=t_n-t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n<\mathbb{E}T_n<\infty$.*

Definición 4.22. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 4.20. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 4.21. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 4.22. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 4.23.
a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 4.23. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 4.24. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 4.25. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 4.7. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 4.1. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\,ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 4.26. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{4.8}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 4.27. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 4.24. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 4.25. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 4.8 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+}h(s)\,ds.$$

Proposición 4.1. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 4.28. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 4.2. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}\,(T>t)\right].$$

Teorema 4.9 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}\,(T>t)\right]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t)\geq n\} & = & \{T_n\leq t\}\\ T_{N(t)}\leq & t & <T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n)=n$, y

$$N(t)=\max\{n:T_n\leq t\}=\min\{n:T_{n+1}>t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n\leq t\}=F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t)\geq n\} & = & \{T_n\leq t\}\\ P\{N(t)\leq n\} & = & 1-F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N(t)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)$$

Proposición 4.3. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 4.26. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 4.10. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (4.9)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (4.10)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 4.2 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{4.11}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 4.29. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 4.11. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (4.12)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (4.13)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 4.3. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z(T_1) - Z(T_0)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{4.14}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\
T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$
\begin{array}{rcl}
\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\
P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t)
\end{array}
$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$
\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)
$$

Proposición 4.4. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 4.27. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 4.12. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{array}{rcl}
lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n & = & \mu, \; c.s. \\
lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) & = & 1/\mu, \; c.s.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
(4.15) \\
(4.16)
\end{array}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 4.4 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$
t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \; c.s. \; cuando \; t \to \infty. \tag{4.17}
$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 4.30. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$
M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|
$$

Teorema 4.13. *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{array}{rcl}
lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) & = & a, \; c.s. \\
lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) & = & a/\mu, \; c.s.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
(4.18) \\
(4.19)
\end{array}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 4.5. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \; c.s. \; cuando \; t \to \infty. \tag{4.20}
$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 4.5. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 4.28. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 4.14. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{4.21}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{4.22}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 4.6 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{4.23}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 4.31. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 4.15. *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} & (4.24) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (4.25) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 4.7. *Si* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación, y* $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (4.26)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\} \\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 4.6. *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Nota 4.29. *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N\left(t\right)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$

Teorema 4.16. *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (4.27) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (4.28) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N\,/t)$ la cumple.

Corolario 4.8 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{4.29}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 4.32. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 4.17. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{4.30}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{4.31}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 4.9. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1}Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{4.32}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 4.7. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 4.30. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 4.18. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \ c.s. && (4.33)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \ c.s. && (4.34)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 4.10 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \tag{4.35}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 4.33. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 4.19. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \ c.s. && (4.36)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \ c.s. && (4.37)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 4.11. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \tag{4.38}$$

Definición 4.34. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \ t \geq 0, \tag{4.39}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 4.8. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 4.20 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \ cuando \ t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 4.35. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 4.9. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 4.36. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 4.10. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 4.31. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 4.21. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 4.12 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \, t \geq 0,$$

Definición 4.37. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{4.40}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 4.38. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 4.32. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 4.39. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{4.41}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 4.40. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 4.33. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\
P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)
\end{aligned}
$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$
\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)
$$

Proposición 4.11. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 4.1 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 4.34. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 4.22. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (4.42) \\
lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (4.43)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 4.13 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$
t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{4.44}
$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 4.41. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$
M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|
$$

Teorema 4.23. *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (4.45) \\
lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (4.46)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 4.14. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{4.47}
$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 4.42. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 4.12. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 4.43. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 4.13. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 4.35. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 4.24. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 4.15 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \, t \geq 0,$$

Definición 4.44. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \, t \geq 0, \tag{4.48}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 4.14. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 4.25 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 4.45. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 4.15. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 4.46. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 4.16. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 4.36. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 4.26. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 4.16 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \, t \geq 0,$$

Definición 4.47. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t - s) \, dF(s), \ t \geq 0, \tag{4.49}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 4.17. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 4.27 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \textit{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 4.37. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 4.28 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 4.18. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \textit{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 4.48. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \textit{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 4.19. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \textit{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 4.29 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 4.38. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 4.30 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 4.20. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \textit{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 4.49. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \; para \; t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 4.21. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \; donde \; h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 4.31 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\left\{|X(t)| : t \leq T\right\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Definición 4.50. *Para el proceso $\left\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\right\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = \left(\xi_n, \left\{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\right\}\right)$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 4.39. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 4.40. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 4.41. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\left\{X(t) : t \geq 0\right\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\left\{X(t) : t \geq 0\right\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 4.51. *Para el proceso $\left\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\right\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = \left(\xi_n, \left\{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\right\}\right)$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 4.42. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 4.32 (Procesos Regenerativos). *Suponga que el proceso*

Definición 4.52 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- *$A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- *$B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*

- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t.

Nota 4.43. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n, *y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$. *Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{4.50}$$

Ejemplo 4.2 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ, *entonces de la expresión (15.43) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 4.44. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 4.53. *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 4.45. *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 4.22. *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 4.33. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación* N *es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante* $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 4.46. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 4.17. *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 4.47. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 4.48. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 4.54 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 4.55. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 4.49. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 4.56. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 4.50. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 4.51. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 4.57 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 4.52. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 4.58. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 4.53. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 4.59. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 4.60. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 4.61. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 4.34. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \text{máx}\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 4.62. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 4.63. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 4.64. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 4.35. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$[6], se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\ \mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (??): $n \rightarrow t-\tau_i(m)$, $T \rightarrow \overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)$, $L_n \rightarrow L_i(t)$ y $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right] \rightarrow F_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i\tau_i(m)}\right]$, se puede ver que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)} \tag{4.51}$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{1-I_i[P_i(z)]}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Por lo tanto

[6] En Stidham[129] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N}\mu_k < 1$.

$$
\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right]+\mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}+\frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}\right\}
\end{aligned}
$$

es decir

$$
Q_i(z)=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)\,P_i(z)}{1-P_i(z)} \tag{4.52}
$$

Teorema 4.36. *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t, $A_j(t)=\{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\}$ para algún tiempo $t \geq 0$ y Q_j la cola j-ésima en la RSVC, para $j=1,2,3,4$. Existe un intervalo $I \neq \emptyset$ tal que para $T^* \in I$, tal que $\mathbb{P}\left\{A_1(T^*), A_2(Tt^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I\right\} > 0$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.

Sea $n>0$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j(\overline{\tau}_1(n))=0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1(n)>0$, entonces tenemos que $\tau_2(n)=\overline{\tau}_1(n)+r_1(n)$.

Definamos el intervalo $I_1 \equiv \left[\overline{\tau}_1(n), \tau_2(n)\right]$ de longitud $\xi_1=r_1(n)$. Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1=\mu_1+\hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$
\mathbb{P}\left\{A_1(t) | t \in I_1(n)\right\}=e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)}. \tag{4.53}
$$

Por otra parte, para la cola Q_2, el tiempo $\overline{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\overline{\tau}_2(n-1))=0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n. Entonces tenemos un sgundo intervalo $I_2 \equiv \left[\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)\right]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$
\mathbb{P}\left\{A_2(t) | t \in I_2(n)\right\}=e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)}, \tag{4.54}
$$

donde $\xi_2(n)=\tau_2(n)-\overline{\tau}_2(n-1)$.

Entonces, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\right\} &= \mathbb{P}\left\{A_1(t) | t \in I_1(n)\right\}\mathbb{P}\left\{A_2(t) | t \in I_1(n)\right\}\\
&\geq \mathbb{P}\left\{A_1(t) | t \in I_1(n)\right\}\mathbb{P}\left\{A_2(t) | t \in I_2(n)\right\}\\
&= e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)}=e^{-\left[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)+\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)\right]}.
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
\mathbb{P}\left\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\right\}=e^{-\left[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)+\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)\right]}>0. \tag{4.55}
$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC, se afirma que existe $m>0$ tal que $\overline{\tau}_3(m)<\tau_2(n)<\tau_4(m)$.

Para Q_3 sea $I_3=\left[\overline{\tau}_3(m), \tau_4(m)\right]$ con longitud $\xi_3(m)=r_3(m)$, entonces

$$
\mathbb{P}\left\{A_3(t) | t \in I_3(n)\right\}=e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(n)}. \tag{4.56}
$$

Análogamente que como se hizo para Q_2, tenemos que para Q_4 se tiene el intervalo $I_4 = [\overline{\tau}_4 (m-1), \tau_4 (m)]$ con longitud $\xi_4 (m) = \tau_4 (m) - \overline{\tau}_4 (m-1)$, entonces

$$\mathbb{P}\left\{A_4 (t) | t \in I_4 (m)\right\} = e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4 (n)}. \tag{4.57}$$

Al igual que para el primer sistema, dado que $I_3 (m) \subset I_4 (m)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\xi_3 (m) \leq \xi_4 (m) &\Leftrightarrow -\xi_3 (m) \geq -\xi_4 (m) \\
-\tilde{\mu}_4 \xi_3 (m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4 (m) &\Leftrightarrow e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_3 (m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4 (m)} \\
\mathbb{P}\left\{A_4 (t) | t \in I_3 (m)\right\} &\geq \mathbb{P}\left\{A_4 (t) | t \in I_4 (m)\right\}
\end{aligned}$$

Entonces, dado que los eventos A_3 y A_4 son independientes, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{A_3 (t), A_4 (t) | t \in I_3 (m)\right\} &= \mathbb{P}\left\{A_3 (t) | t \in I_3 (m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4 (t) | t \in I_3 (m)\right\} \\
&\geq \mathbb{P}\left\{A_3 (t) | t \in I_3 (n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4 (t) | t \in I_4 (n)\right\} \\
&= e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3 (m)} e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4 (m)} = e^{-[\tilde{\mu}_3 \xi_3 (m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4 (m)]}.
\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_3 (t), A_4 (t) | t \in I_3 (m)\right\} = e^{-[\tilde{\mu}_3 \xi_3 (m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4 (m)]} > 0. \tag{4.58}$$

Por construcción se tiene que $I (n, m) \equiv I_1 (n) \cap I_3 (m) \neq \emptyset$,entonces en particular se tienen las contenciones $I (n, m) \subseteq I_1 (n)$ y $I (n, m) \subseteq I_3 (m)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m} \equiv \ell (I (n, m))$ tenemos que

$$\xi_{n,m} \leq \xi_1 (n) \text{ y } \xi_{n,m} \leq \xi_3 (m) \text{ entonces } -\xi_{n,m} \geq -\xi_1 (n) \text{ y } -\xi_{n,m} \leq -\xi_3 (m)$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{array}{ll}
-\tilde{\mu}_1 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_1 \xi_1 (n), & -\tilde{\mu}_2 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_1 (n) \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_2 (n), \\
-\tilde{\mu}_3 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_3 \xi_3 (m), & -\tilde{\mu}_4 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_3 (m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4 (m).
\end{array}$$

Sea $T^* \in I_{n,m}$, entonces dado que en particular $T^* \in I_1 (n)$ se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2, en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4, es decir, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$, $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I_{n,m}$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4, por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{A_1 (T^*), A_2 (T^*), A_3 (T^*), A_4 (T^*) | T^* \in I_{n,m}\right\} = \prod_{j=1}^{4} \mathbb{P}\left\{A_j (T^*) | T^* \in I_{n,m}\right\} \\
&\geq \mathbb{P}\left\{A_1 (T^*) | T^* \in I_1 (n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_2 (T^*) | T^* \in I_2 (n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_3 (T^*) | T^* \in I_3 (m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4 (T^*) | T^* \in I_4 (m)\right\} \\
&= e^{-\mu_1 \xi_1 (n)} e^{-\mu_2 \xi_2 (n)} e^{-\mu_3 \xi_3 (m)} e^{-\mu_4 \xi_4 (m)} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1 (n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2 (n) + \tilde{\mu}_3 \xi_3 (m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4 (m)]} > 0.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

□

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [101] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.

- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 4.37. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu\left(\mu+\theta\right)^{-1}\left[\delta\theta-\mu\left(1-\delta\right)\alpha\left(\theta\right)\right]\left[\theta-\mu\left(1-\delta\right)^{-1}\right]\\ \alpha\left(\theta\right) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right]\\ var\left(D_n\right) &= var\left(T_0\right)-\left(\tau^{-1}-\delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}\left(S_0\right)\right)^2\left(1-\delta\right)^{-1}.\end{aligned}$$

  Teorema 4.38. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 4.39. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

En Sigman, Thorison y Wolff [128] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 4.23. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1}X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k\left(X, R\right) =_D \left(X, R\right).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k}X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 4.40. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*
  b) *$L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;*
  c) *$L = 1$ y $G = D$;*
  d) *$L = \infty$ y $G = M$.*

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;
  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;
  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.

- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de inter-partida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 4.41. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$
  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.
  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$
  d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 4.42. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [101] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 4.43. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu + \theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1 - \delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1 - \delta)^{-1}\right] \\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2(1 - \delta)^{-1}.
\end{aligned}$$

  Teorema 4.44. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 4.45. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

Sean Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 en una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC). Supongamos que cada una de las colas es del tipo $M/M/1$ con tasa de arribo μ_i y que la transferencia de usuarios entre los dos sistemas ocurre entre $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$ con respectiva tasa de arribo igual a la tasa de salida $\hat{\mu}_i = \mu_i$, esto se sabe por lo desarrollado en la sección anterior.

Consideremos, sin pérdida de generalidad como base del análisis, la cola Q_1 además supongamos al servidor lo comenzamos a observar una vez que termina de atender a la misma para desplazarse y llegar a Q_2, es decir al tiempo τ_2.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, ciclo del servidor en que regresa a Q_1 para dar servicio y atender conforme a la política exhaustiva, entonces se tiene que $\overline{\tau}_1(n)$ es el tiempo del servidor en el sistema 1 en que termina de dar servicio a todos los usuarios presentes en la cola, por lo tanto se cumple que $L_1(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, entonces el servidor para llegar a Q_2 incurre en un tiempo de traslado r_1 y por tanto se cumple que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1$. Dado que los tiempos entre arribos son exponenciales se cumple que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n) + r_1\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_1 r_1},\\ \mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n) + r_1\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_2 r_1}.\end{aligned}$$

El evento que nos interesa consiste en que no haya arribos desde que el servidor abandonó Q_2 y regresa nuevamente para dar servicio, es decir en el intervalo de tiempo $\left[\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)\right]$. Entonces, si hacemos

$$\begin{aligned}\varphi_1(n) &\equiv \overline{\tau}_1(n) + r_1 = \overline{\tau}_2(n-1) + r_1 + r_2 + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n)\\ &= \overline{\tau}_2(n-1) + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r,,\end{aligned}$$

y longitud del intervalo

$$\begin{aligned}\xi &\equiv \overline{\tau}_1(n) + r_1 - \overline{\tau}_2(n-1) = \overline{\tau}_2(n-1) + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r - \overline{\tau}_2(n-1)\\ &= \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r.\end{aligned}$$

Entonces, determinemos la probabilidad del evento no arribos a Q_2 en $\left[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)\right]$:

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi}. \tag{4.60}$$

De manera análoga, tenemos que la probabilidad de no arribos a Q_1 en $\left[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)\right]$ esta dada por

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi}, \tag{4.61}$$

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi}. \tag{4.62}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ y } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)\right]\right\}\\ &= \mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)\right]\right\}\\ &\times \mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi} = e^{-\tilde{\mu} \xi}.\end{aligned} \tag{4.63}$$

Para el segundo sistema, consideremos nuevamente $\overline{\tau}_1(n) + r_1$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $m > 0$ tal que $\overline{\tau}_3(m) < \overline{\tau}_1 + r_1 < \tau_4(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_3(m), \overline{\tau}_1(n) + r_1\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3}, \tag{4.64}$$

donde

$$\xi_3 = \overline{\tau}_1(n) + r_1 - \overline{\tau}_3(m) = \overline{\tau}_1(n) - \overline{\tau}_3(m) + r_1, \tag{4.65}$$

mientras que para Q_4 al igual que con Q_2 escribiremos $\tau_4(m)$ en términos de $\overline{\tau}_4(m-1)$:
$\varphi_2 \equiv \tau_4(m) = \overline{\tau}_4(m-1) + r_4 + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) + r_3 = \overline{\tau}_4(m-1) + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) + \hat{r}$, además,
$\xi_2 \equiv \varphi_2(m) - \overline{\tau}_1 - r_1 = \overline{\tau}_4(m-1) + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) - \overline{\tau}_1(n) + \hat{r} - r_1$.
Entonces

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_4 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1\left(n\right)+r_1,\varphi_2\left(m\right)\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_4\xi_2}, \tag{4.66}$$

mientras que para Q_3 se tiene que

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1\left(n\right)+r_1,\varphi_2\left(m\right)\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_3\xi_2} \tag{4.67}$$

Por tanto

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3 \wedge Q_4 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1\left(n\right)+r_1,\varphi_2\left(m\right)\right]\right\} = e^{-\hat{\mu}\xi_2} \tag{4.68}$$

donde $\hat{\mu} = \tilde{\mu}_3 + \tilde{\mu}_4$.

Ahora, definamos los intervalos $\mathcal{I}_1 = \left[\overline{\tau}_1\left(n\right)+r_1,\varphi_1\left(n\right)\right]$ y $\mathcal{I}_2 = \left[\overline{\tau}_1\left(n\right)+r_1,\varphi_2\left(m\right)\right]$, entonces, sea $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ el intervalo donde cada una de las colas se encuentran vacías, es decir, si tomamos $T^* \in \mathcal{I}$, entonces $L_1\left(T^*\right) = L_2\left(T^*\right) = L_3\left(T^*\right) = L_4\left(T^*\right) = 0$.

Ahora, dado que por construcción $\mathcal{I} \neq \emptyset$ y que para $T^* \in \mathcal{I}$ en ninguna de las colas han llegado usuarios, se tiene que no hay transferencia entre las colas, por lo tanto, el sistema 1 y el sistema 2 son condicionalmente independientes en $\mathcal{I}$, es decir

$$\mathbb{P}\left\{L_1\left(T^*\right), L_2\left(T^*\right), L_3\left(T^*\right), L_4\left(T^*\right) | T^* \in \mathcal{I}\right\} = \prod_{j=1}^{4} \mathbb{P}\left\{L_j\left(T^*\right)\right\}, \tag{4.69}$$

para $T^* \in \mathcal{I}$.

Definición 4.65 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \left\{X\left(t\right) : t \geq 0\right\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\left\{X\left(t+R_1\right) : t \geq 0\right\}$ *es independiente de* $\left\{\left\{X\left(t\right) : t < R_1\right\},\right\}$

ii) $\left\{X\left(t+R_1\right) : t \geq 0\right\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\left\{X\left(t\right) : t > 0\right\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\left\{X\left(t+R_1\right)\right\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\left\{R_n\right\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 4.54. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots$, que satisfacen la propiedad deseada [128].*

Nota 4.55. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 4.66. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x\left(t\right) = 1$ si $X\left(t\right) \leq x$, $I_x\left(t\right) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X\left(u\right) du \\
\mathbb{P}\left(X_{\infty} \leq x\right) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x\left(u\right) du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 4.56. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 4.57. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 4.58. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 4.59. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 4.67. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_{0}^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 4.68. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 4.69. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 4.46. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t}V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$.

Corolario 4.18. *Sea* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E}<\infty$*,* F *es no-aritmética, y para todo* $x\geq0$*,* $P\left\{V\left(t\right)\leq x,C>x\right\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $\left[0,\tau\right]$*, entonces* $V\left(t\right)$ *converge en distribución cuando* $t\rightarrow\infty$ *y*

$$\mathbb{E}V=\frac{\mathbb{E}\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V\left(t\right)$ *cuando* $t\rightarrow\infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 4.70. *Sean* $0\leq T_{1}\leq T_{2}\leq\ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_{n} *en el intervalo* $\left[0,t\right)$ *es*

$$N\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\left(T_{n}\leq t\right), \tag{4.70}$$

para $t\geq0$.

Si se consideran los puntos T_{n} como elementos de $\mathbb{R}_{+}$, y $N\left(t\right)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\left\{N\left(t\right):t\geq0\right\}$, denotado por $N\left(t\right)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_{+}$. Los T_{n} son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N\left(t\right)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0<T_{1}<T_{2}<\ldots$ casi seguramente.

Definición 4.71. *Un proceso puntual* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_{n}=T_{n}-T_{n-1}$*, para* $n\geq1$*, son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F*, donde* $F\left(0\right)=0$ *y* $T_{0}=0$*. Los* T_{n} *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_{n} *son los tiempos de inter-renovación, y* $N\left(t\right)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $\left[0,t\right)$

Nota 4.60. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F*, con* $F\left(0\right)=0$*, para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_{1},\xi_{2},\ldots$ *definidas en este con distribución* F*. Entonces las otras cantidades son* $T_{n}=\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}$ *y* $N\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\left(T_{n}\leq t\right)$*, donde* $T_{n}\rightarrow\infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes N*$\tilde{A}^{o}$*meros.*

Nota 4.61. *Una función* $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h\left(t\right)\geq0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h\left(t\right)|\leq b\left(t\right)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 4.47 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h\left(t\right)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 4.24. *Cualquier función* $H\left(t\right)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t<0$ *puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\text{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 4.72. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \textit{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 4.25. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \textit{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 4.48 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 4.26. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 4.62. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 4.49. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \textit{ c.s.} \tag{4.71}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \textit{ c.s.} \tag{4.72}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 4.19 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{4.73}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 4.73. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 4.50. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (4.74)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (4.75)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 4.20. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{4.76}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq \quad & t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 4.27. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 4.63. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 4.51. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \qquad (4.77) \\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \qquad (4.78)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 4.21 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (4.79)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 4.74. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 4.52. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \qquad (4.80) \\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \qquad (4.81)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 4.22. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (4.82)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\
T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 4.28. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 4.64. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 4.53. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{4.83}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{4.84}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 4.23 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \to \infty. \tag{4.85}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 4.75. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 4.54. *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \ c.s. \tag{4.86}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \ c.s. \tag{4.87}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 4.24. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \ c.s. \ cuando \ t \to \infty. \tag{4.88}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 4.29. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 4.65. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 4.55. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{4.89}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{4.90}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 4.25 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{4.91}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 4.76. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 4.56. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \ c.s. &(4.92)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \ c.s. &(4.93)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 4.26. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \ c.s. \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \tag{4.94}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq &\ t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 4.30. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 4.66. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 4.57. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n &= \mu, \ c.s. &(4.95)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu, \ c.s. &(4.96)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N /t) la cumple.

Corolario 4.27 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{4.97}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 4.77. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 4.58. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \quad (4.98) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (4.99) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 4.28. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{4.100}$$

Definición 4.78. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{4.101}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 4.31. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 4.59 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 4.79. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 4.32. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 4.80. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 4.33. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 4.67. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 4.60. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 4.29 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 4.81. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{4.102}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 4.82. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 4.68. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 4.83. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{4.103}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 4.84. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 4.69. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 4.34. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 4.3 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 4.70. *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la* n*-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 4.61. *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \; c.s. & (4.104)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \; c.s. & (4.105)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 4.30 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$
t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \; c.s. \; cuando \; t \rightarrow \infty. \tag{4.106}
$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 4.85. *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$
M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|
$$

Teorema 4.62. *Supóngase que* $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \; c.s. & (4.107)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \; c.s. & (4.108)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 4.31. *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \; c.s. \; cuando \; t \rightarrow \infty. \tag{4.109}
$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 4.86. *La función de renovación asociada con la distribución* F*, del proceso* $N(t)$*, es*

$$
U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,
$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$*.*

Proposición 4.35. *Supóngase que la distribución de inter-renovación* F *tiene densidad* f*. Entonces* $U(t)$ *también tiene densidad, para* $t > 0$*, y es* $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$*. Además*

$$
\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.
$$

Definición 4.87. *La Transformada de Laplace-Stieljes de* F *está dada por*

$$
\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.
$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 4.36. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 4.71. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 4.63. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 4.32 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 4.88. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{4.110}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 4.37. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 4.64 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 4.89. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 4.38. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 4.90. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 4.39. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 4.72. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 4.65. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 4.33 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 4.91. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \; t \geq 0, \tag{4.111}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 4.40. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 4.66 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu, \; \textit{cuando } t \to \infty.$$

Nota 4.73. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 4.67 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 4.41. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\textit{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 4.92. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\textit{ para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 4.42. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\textit{ donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 4.68 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Nota 4.74. *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t)\geq0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 4.69 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 4.43. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\textit{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 4.93. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\textit{ para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 4.44. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\textit{ donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 4.70 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Definición 4.94. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 4.75. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 4.76. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 4.77. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_{+}$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 4.95. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 4.78. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 4.71 (Procesos Regenerativos). *Suponga que el proceso*

Definición 4.96 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- *$A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*

- *$B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*

- *$L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 4.79. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_{+}$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t + y) - N((t - x)) = 0\} \tag{4.112}$$

Ejemplo 4.4 (Tiempos de recurrencia Poisson). *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (15.43) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 4.80. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 4.97. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 4.81. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 4.45. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 4.72. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 4.82. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 4.34. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 4.83. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 4.84. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 4.98 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 4.99. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 4.85. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 4.100. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 4.86. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 4.87. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 4.101 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 4.88. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 4.102. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 4.89. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 4.103. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 4.104. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 4.105. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 4.73. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

5. Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [82]

Definición 5.1 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 5.1. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [128].*

Nota 5.2. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 5.2. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 5.3. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 5.4. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 5.5. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 5.6.

a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Definición 5.3 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 5.7. *La existencia de un primer tiempo de regeneración,* R_1*, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos* $R_1, R_2 \ldots,$ *que satisfacen la propiedad deseada [128].*

Nota 5.8. *Para la cola* $GI/GI/1$ *los usuarios arriban con tiempos* t_n *y son atendidos con tiempos de servicio* S_n*, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)*$T_n = t_n - t_{n-1}$*, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que* $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$*.*

Definición 5.4. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 5.9. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si* $X(t)$ *es regenerativo y se define el proceso* $Y(t)$ *por* $Y(t) = f(X(t))$ *para alguna función Borel medible* $f(\cdot)$*. Además* Y *es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que* X*.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k *de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de* $X(t)$*.*

Nota 5.10. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 5.11. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 5.12. *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_∞

Definición 5.5 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 5.13. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [128].*

Nota 5.14. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 5.6. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 5.15. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 5.16. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 5.17. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 5.18. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [82]

Definición 5.7 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 5.19. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [128].*

Nota 5.20. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 5.8. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$
\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\, du,
\end{aligned}
$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$
\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},
$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 5.21. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 5.22. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 5.23. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 5.24.

a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [82]

Definición 5.9 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 5.25. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [128].*

Nota 5.26. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 5.10. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 5.27. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 5.28. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 5.29. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 5.30.
a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 5.11. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$, *para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 5.12. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 5.13. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$, *es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$, S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 5.1. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$. *Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t, *además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] \quad = \quad \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$,*entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 5.1. *Sea* $\{V(t), t \geq 0\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E} < \infty$, F *es no-aritmética, y para todo* $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $[0, \tau]$, *entonces* $V(t)$ *converge en distribución cuando* $t \rightarrow \infty$ *y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V(t)$ *cuando* $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 5.14. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{5.1}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 5.15. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, *para* $n \geq 1$, *son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F, *donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$. *Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 5.31. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 5.32. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 5.2 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 5.1. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 5.16. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)\,|T] = \mathbb{E}[X(t)]\,,\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 5.2. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]\,.$$

Teorema 5.3 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 5.3. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 5.33. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 5.4. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{5.2}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{5.3}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 5.2 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{5.4}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 5.17. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 5.5. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{5.5}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{5.6}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 5.3. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{5.7}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 5.4. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 5.34. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 5.6. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{5.8}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{5.9}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 5.4 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{5.10}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 5.18. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 5.7. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (5.11)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (5.12)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 5.5. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (5.13)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 5.5. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 5.35. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 5.8. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (5.14)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (5.15)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N /t) la cumple.

Corolario 5.6 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{5.16}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 5.19. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 5.9. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{5.17}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{5.18}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 5.7. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1}Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{5.19}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\ t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \text{máx}\{n : T_n \leq t\} = \text{mín}\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 5.6. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 5.36. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 5.10. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (5.20)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (5.21)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 5.8 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{5.22}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 5.20. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 5.11. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (5.23)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (5.24)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 5.9. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{5.25}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\
T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \text{máx}\{n : T_n \leq t\} = \text{mín}\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 5.7. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 5.37. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 5.12. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{5.26}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{5.27}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 5.10 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{5.28}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 5.21. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 5.13. *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{5.29}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{5.30}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 5.11. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{5.31}$$

Definición 5.22. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{5.32}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 5.8. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 5.14 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 5.23. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 5.9. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 5.24. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 5.10. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 5.38. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 5.15. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 5.12 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 5.25. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{5.33}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 5.26. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 5.39. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 5.27. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{5.34}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 5.28. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 5.40. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\
P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)
\end{aligned}
$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$
\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)
$$

Proposición 5.11. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 5.1 (**Proceso Poisson**). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 5.41. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 5.16. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (5.35) \\
lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (5.36)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 5.13 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$
t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{5.37}
$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 5.29. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$
M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|
$$

Teorema 5.17. *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (5.38) \\
lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (5.39)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 5.14. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{5.40}
$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 5.30. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 5.12. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 5.31. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 5.13. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 5.42. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 5.18. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 5.15 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \, t \geq 0,$$

Definición 5.32. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \, t \geq 0, \tag{5.41}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 5.14. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 5.19 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 5.33. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 5.15. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 5.34. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 5.16. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 5.43. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 5.20. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 5.16 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 5.35. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{5.42}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 5.17. *La función* $U \star h(t)$ *es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 5.21 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 5.44. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 5.22 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 5.18. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 5.36. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 5.19. *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T, *que tiene distribución* F. *Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 5.23 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T, *y defínase* $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. *Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 5.45. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 5.24 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 5.20. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 5.37. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 5.21. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 5.25 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\left\{|X(t)| : t \leq T\right\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Definición 5.38. *Para el proceso $\left\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\right\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $\left[T_{n-1}, T_n\right)$ están descritas por*

$$\zeta_n = \left(\xi_n, \left\{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\right\}\right)$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 5.46. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 5.47. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 5.48. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\left\{X(t) : t \geq 0\right\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\left\{X(t) : t \geq 0\right\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 5.39. *Para el proceso $\left\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\right\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $\left[T_{n-1}, T_n\right)$ están descritas por*

$$\zeta_n = \left(\xi_n, \left\{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\right\}\right)$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 5.49. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 5.26 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 5.40 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*

- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t.

Nota 5.50. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n*, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$*. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{5.43}$$

Ejemplo 5.2 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*, entonces de la expresión (15.43) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 5.51. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 5.41. *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 5.52. *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 5.22. *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$*, entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 5.27. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación* N *es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante* $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\,ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 5.53. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 5.17. *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 5.54. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 5.55. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 5.42 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 5.43. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 5.56. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 5.44. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 5.57. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 5.58. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 5.45 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 5.59. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 5.46. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 5.60. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 5.47. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 5.48. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 5.49. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 5.28. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^*(0)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t}\to\frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\to\infty$*.*

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t),t\geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1,X_2,\ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t)\in A|X_1+X_2+\cdots+X_{R(t)}=s,\{V(\tau),\tau<s\}\right\}=\mathbb{P}\left\{V(t-s)\in A|X_1>t-s\right\},$$

para todo $0\leq s\leq t$, donde $R(t)=\max\{X_1+X_2+\cdots+X_j\leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0,X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t),t\geq 0\}$, $[X_1,X_1+X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X=X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 5.50. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t),t\geq 0\}$*, para* $\{V(t),t\geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\left\{V(t)\in A\right\}=\frac{1}{\mathbb{E}\left[X\right]}\int_0^\infty\mathbb{P}\left\{V(t+x)\in A|X>x\right\}(1-F(x))\,dx,$$

para todo $t\geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 5.51. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0,\lambda,2\lambda,\ldots$ *para alguna* $\lambda>0$ *entera.*

Definición 5.52. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t),t\geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t,w)\}$ *conjuntamente medible para* $t\geq 0$ *y para* $w\in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t),t\geq 0\}$*.*

Teorema 5.29. *Sea* $\{V(t),t\geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}\left[X\right]<\infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^*(0)\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^*(0)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t}\to\frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\to\infty$*.*

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces

Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t. Entonces, determinando el primer momento es posible ver que

Definición 5.53. *El tiempo de Ciclo* C_i *es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola* i *es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por* $\tau_i(m+1)-\tau_i(m)$*, o equivalentemente* $\overline{\tau}_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$ *bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 5.54. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.*

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si $I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$ se tiene que $F_i(z) = I_i[P_i(z)]$ para $i = 1, 2$.

Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (13.71), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 5.55. *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 5.56. *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 5.57. *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

[7]

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 5.58. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.*

Nota 5.61. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 5.59. *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma\left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 5.60. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 5.30. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

[7] In Stidham and Heyman [129] shows that is sufficient for the regenerative process to be stationary that the mean regenerative cycle time is finite: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$,

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1$.

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y\in\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i : y_i\in A_{i_1},\dots,y_n\in A_{i_n}\right)=P_{i_1}\left(A_{i_n}\right)\cdots P_{i_n}\left(A_{i_n}\right)$$

para todos los enteros $n>0$, toda $i_1,\dots,i_n\in\mathbb{I}$ y todo $A_{i_1}\in\mathcal{E}_{i_1},\dots,A_{i_n}\in\mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\left(E_i,\mathcal{E}_i,P_i\right):=\left(\prod_{i\in\mathbb{I}},E_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 5.61. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 5.62. *Dos espacios medibles $(E,\mathcal{E})$ y $(G,\mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f:E\rightarrow G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 5.63. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G,\mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0,1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 5.62. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 5.64. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ es una familia $Z=\left(\mathbb{Z}_s\right)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E,\mathcal{E})$.*

Definición 5.65. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}=[0,\infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right):=\otimes_{s\in\mathbb{I}}(E,\mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w)=\left(Z_s(w)\right)_{s\in\mathbb{I}}$ y $w\in\Omega$.

Nota 5.63. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 5.64. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E,\mathcal{E})=(\mathbb{R},\mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_1}\leq x_1,\dots,Z_{t_n}\leq x_n\right),x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R},t_1,\dots,t_n\in\mathbb{I},n\geq 1. \tag{5.44}$$

Nota 5.65. *Para espacios polacos $(E,\mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 5.66. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w\in\Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 5.66. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H,\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z\in H$ a $z_t\in E$ para $t\in\mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H}:=E^{\mathbb{I}}\cap H:=\left\{A\cap H:A\in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{5.45}$$

Nota 5.67. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ a $(H,\mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H,\mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 5.68. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H, \mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 5.67. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0, \infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) .w \in \Omega.$$

Definición 5.68. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible **(CM)** si el mapeo que toma $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 5.69. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 5.69. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H, \mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible **(CCM)** si el mapeo $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 5.70. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0, \infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w, t) en $(Z(w), t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w), t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 5.70. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s \in [0, \infty)} : z \in H\right\} = H, \, t \in [0, \infty).$$

Definición 5.71. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0, \infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)}, \, z \in H.$$

Definición 5.72. *Se dice que un proceso Z es shift-medible **(SM)** si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H}$ medible.*

Nota 5.71. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 5.72.

- *Dado el espacio polaco $(E, \mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0, \infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 5.73. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 5.31. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 5.73. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s \in [0, \infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L, \mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^\infty \in [0, \infty)^{\{0, 1, \ldots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0, 1, \ldots\}}$.

Así el par (Z, S) es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0, \infty), \mathcal{B}[0, \infty))$.

Definición 5.74. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t \left(z, (s_k)_0^{\infty}\right) = \theta_t \left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^{\infty}\right)$$

donde $n_{t-} = inf \{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 5.74. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 5.75. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0, S_n), S_0, \ldots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 5.75. *Si el par (Z,S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 5.32. *Supóngase que el par (Z,S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z,S) con periodo d.*

Definición 5.76. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx > 0$ con $X_2, X_3, \ldots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\, dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 5.77. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 5.76.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 5.77. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 5.33. *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 5.34. *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0, S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*, S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 5.35. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{5.46}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{5.47}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{5.48}$$

Also the intervisit time I_i is defined as the period beginning at the time of its service completion in a cycle and ending at the time when it is polled in the next cycle; its duration is given by $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.

So we the following are still true

$$\begin{array}{ll}
\mathbb{E}[L_i] = \mu_i \mathbb{E}[I_i], & \mathbb{E}[C_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)}, \\
\mathbb{E}[S_i] = \mu_i \mathbb{E}[C_i], & \mathbb{E}[I_i] = (1-\mu_i)\mathbb{E}[C_i], \\
Var[L_i] = \mu_i^2 Var[I_i] + \sigma^2 \mathbb{E}[I_i], & Var[C_i] = \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}, \\
Var[S_i] = \frac{Var[L_i^*]}{(1-\mu_i)^2} + \frac{\sigma^2 \mathbb{E}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^3}, & Var[I_i] = \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).
\end{array} \tag{5.49}$$

Definición 5.78. *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 5.79. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.*

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si $I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$ se tiene que $F_i(z) = I_i[P_i(z)]$ para $i = 1, 2$.

Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (13.71), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 5.80. *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 5.81. *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 5.82. *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) \quad = \quad \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$[8], se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i\left(z\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (**??**): $n \rightarrow t-\tau_i\left(m\right)$, $T \rightarrow \overline{\tau}_i\left(m\right)-\tau_i\left(m\right)$, $L_n \rightarrow L_i\left(t\right)$ y $F\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{L_0}\right] \rightarrow F_i\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{L_i\tau_i(m)}\right]$, se puede ver que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)} \tag{5.50}$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i\left(t\right)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i\left(z\right)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i\left(z\right)}\\
&= \frac{1-I_i\left[P_i\left(z\right)\right]}{1-P_i\left(z\right)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}$$

Por lo tanto

[8]En Stidham[129] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N}\mu_k < 1$.

$$
\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} + \sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)} + \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}
\end{aligned}
$$

es decir

$$
Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \tag{5.51}
$$

Si hacemos:

$$
S(z) = 1-F(z) \tag{5.52}
$$

$$
T(z) = z-P(z) \tag{5.53}
$$

$$
U(z) = 1-P(z) \tag{5.54}
$$

entonces

$$
\mathbb{E}\left[C_i\right]Q(z) = \frac{(z-1)S(z)P(z)}{T(z)U(z)} \tag{5.55}
$$

A saber, si $a_k = P\{L(t)=k\}$

$$
S(z) = 1-F(z) = 1-\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k
$$

entonces

$S^{'}(z) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}$, por tanto $S^{(1)}(1) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k = -\mathbb{E}\left[L(t)\right]$, luego $S^{''}(z) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k z^{k-2}$ y $S^{(2)}(1) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k = \mathbb{E}\left[L(L-1)\right]$; de la misma manera $S^{'''}(z) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)a_k z^{k-3}$ y $S^{(3)}(1) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)a_k = -\mathbb{E}\left[L(L-1)(L-2)\right] = -\mathbb{E}\left[L^3\right]+3-\mathbb{E}\left[L^2\right]-2-\mathbb{E}\left[L\right]$.

Es decir

$$
\begin{aligned}
S^{(1)}(1) &= -\mathbb{E}\left[L(t)\right],\\
S^{(2)}(1) &= -\mathbb{E}\left[L(L-1)\right] = -\mathbb{E}\left[L^2\right]+\mathbb{E}\left[L\right],\\
S^{(3)}(1) &= -\mathbb{E}\left[L(L-1)(L-2)\right] = -\mathbb{E}\left[L^3\right]+3\mathbb{E}\left[L^2\right]-2\mathbb{E}\left[L\right].
\end{aligned}
$$

Expandiendo alrededor de $z=1$

$$
\begin{aligned}
S(z) &= S(1)+\frac{S^{'}(1)}{1!}(z-1)+\frac{S^{''}(1)}{2!}(z-1)^2+\frac{S^{'''}(1)}{3!}(z-1)^3+\ldots+\\
&= (z-1)\left\{S^{'}(1)+\frac{S^{''}(1)}{2!}(z-1)+\frac{S^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2+\ldots+\right\}\\
&= (z-1)R_1(z)
\end{aligned}
$$

con $R_1(z) \neq 0$, pues

$$R_1(z) = -\mathbb{E}[L] \tag{5.56}$$

entonces

$$R_1(z) = S^{'}(1) + \frac{S^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{S^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \frac{S^{iv}(1)}{4!}(z-1)^3 + \ldots + \tag{5.57}$$

Calculando las derivadas y evaluando en $z = 1$

$$\begin{aligned} R_1(1) &= S^{(1)}(1) = -\mathbb{E}[L] && (5.58)\\ R_1^{(1)}(1) &= \frac{1}{2}S^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[L^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[L] && (5.59)\\ R_1^{(2)}(1) &= \frac{2}{3!}S^{(3)}(1) = -\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[L^3\right] + \mathbb{E}\left[L^2\right] - \frac{2}{3}\mathbb{E}[L] && (5.60) \end{aligned}$$

De manera análoga se puede ver que para $T(z) = z - P(z)$ se puede encontrar una expanción alrededor de $z = 1$

Expandiendo alrededor de $z = 1$

$$\begin{aligned} T(z) &= T(1) + \frac{T^{'}(1)}{1!}(z-1) + \frac{T^{''}(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{T^{'''}(1)}{3!}(z-1)^3 + \ldots + \\ &= (z-1)\left\{T^{'}(1) + \frac{T^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{T^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \ldots + \right\} \\ &= (z-1)R_2(z) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} T^{(1)}(1) &= -\mathbb{E}[X(t)] = -\mu, \\ T^{(2)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)] = -\mathbb{E}\left[X^2\right] + \mathbb{E}[X] = -\mathbb{E}\left[X^2\right] + \mu, \\ T^{(3)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)] = -\mathbb{E}\left[X^3\right] + 3\mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}[X] \\ &= -\mathbb{E}\left[X^3\right] + 3\mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mu. \end{aligned}$$

Por lo tanto $R_2(1) \neq 0$, pues

$$R_2(1) = 1 - \mathbb{E}[X] = 1 - \mu \tag{5.61}$$

entonces

$$R_2(z) = T^{'}(1) + \frac{T^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{T^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \frac{T^{(iv)}(1)}{4!}(z-1)^3 + \ldots + \tag{5.62}$$

Calculando las derivadas y evaluando en $z = 1$

$$\begin{aligned} R_2(1) &= T^{(1)}(1) = 1 - \mu && (5.63)\\ R_2^{(1)}(1) &= \frac{1}{2}T^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right] + \frac{1}{2}\mu && (5.64)\\ R_2^{(2)}(1) &= \frac{2}{3!}T^{(3)}(1) = -\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[X^3\right] + \mathbb{E}\left[X^2\right] - \frac{2}{3}\mu && (5.65) \end{aligned}$$

Finalmente para de manera análoga se puede ver que para $U(z)=1-P(z)$ se puede encontrar una expanción alrededor de $z=1$

$$\begin{aligned}
U(z) &= U(1)+\frac{U^{'}(1)}{1!}(z-1)+\frac{U^{''}(1)}{2!}(z-1)^2+\frac{U^{'''}(1)}{3!}(z-1)^3+\ldots+\\
&= (z-1)\left\{U^{'}(1)+\frac{U^{''}(1)}{2!}(z-1)+\frac{U^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2+\ldots+\right\}\\
&= (z-1)R_3(z)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
U^{(1)}(1) &= -\mathbb{E}[X(t)]=-\mu,\\
U^{(2)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)]=-\mathbb{E}\left[X^2\right]+\mathbb{E}[X]=-\mathbb{E}\left[X^2\right]+\mu,\\
U^{(3)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)]=-\mathbb{E}\left[X^3\right]+3\mathbb{E}\left[X^2\right]-2\mathbb{E}[X]\\
&= -\mathbb{E}\left[X^3\right]+3\mathbb{E}\left[X^2\right]-2\mu.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $R_3(1)\neq 0$, pues

$$R_3(1)=-\mathbb{E}[X]=-\mu \tag{5.66}$$

entonces

$$R_3(z) = U^{'}(1)+\frac{U^{''}(1)}{2!}(z-1)+\frac{U^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2+\frac{U^{(iv)}(1)}{4!}(z-1)^3+\ldots+ \tag{5.67}$$

Calculando las derivadas y evaluando en $z=1$

$$R_3(1) = U^{(1)}(1)=-\mu \tag{5.68}$$

$$R_3^{(1)}(1) = \frac{1}{2}U^{(2)}(1)=-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right]+\frac{1}{2}\mu \tag{5.69}$$

$$R_3^{(2)}(1) = \frac{2}{3!}U^{(3)}(1)=-\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[X^3\right]+\mathbb{E}\left[X^2\right]-\frac{2}{3}\mu \tag{5.70}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}[C_i]Q(z) = \frac{(z-1)(z-1)R_1(z)P(z)}{(z-1)R_2(z)(z-1)R_3(z)}=\frac{R_1(z)P(z)}{R_2(z)R_3(z)}\equiv\frac{R_1P}{R_2R_3} \tag{5.71}$$

Entonces

$$\left[\frac{R_1(z)P(z)}{R_2(z)R_3(z)}\right]^{'} = \frac{PR_2R_3R_1^{'}+R_1R_2R_3P^{'}-R_3R_1PR_2-R_2R_1PR_3^{'}}{(R_2R_3)^2} \tag{5.72}$$

Evaluando en $z=1$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{R_2(1)R_3(1)R_1^{(1)}(1)+R_1(1)R_2(1)R_3(1)P^{'}(1)-R_3(1)R_1(1)R_2(1)^{(1)}-R_2(1)R_1(1)R_3^{'}(1)}{\left(R_2(1)R_3(1)\right)^2}\\
&= \frac{1}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}L\right)\left(1-\mu\right)\left(-\mu\right)+\left(-\mathbb{E}L\right)\left(1-\mu\right)\left(-\mu\right)\mu\right.\\
&\quad\left.-\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\right)\left(-\mu\right)\left(-\mathbb{E}L\right)-\left(1-\mu\right)\left(-\mathbb{E}L\right)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}L\right)\left(\mu^2-\mu\right)+\left(\mu^2-\mu^3\right)\mathbb{E}L\right.\\
&\quad\left.-\mu\mathbb{E}L\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\right)+\left(\mathbb{E}L-\mu\mathbb{E}L\right)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\left\{-\frac{1}{2}\mu^2\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mu\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mu^2\mathbb{E}L-\mu^3\mathbb{E}L+\mu\mathbb{E}L\mathbb{E}X^2-\frac{1}{2}\mathbb{E}L\mathbb{E}X^2\right\}\\
&= \frac{1}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\left\{\frac{1}{2}\mu\mathbb{E}L^2\left(1-\mu\right)+\mathbb{E}L\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\left(\mu^2-\mathbb{E}X^2\right)\right\}\\
&= \frac{1}{2\mu\left(1-\mu\right)}\mathbb{E}L^2-\frac{\frac{1}{2}-\mu}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\sigma^2\mathbb{E}L
\end{aligned}
$$

por lo tanto (para Takagi)

$$Q^{(1)}=\frac{1}{\mathbb{E}C}\left\{\frac{1}{2\mu\left(1-\mu\right)}\mathbb{E}L^2-\frac{\frac{1}{2}-\mu}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\sigma^2\mathbb{E}L\right\}$$

donde

$$\mathbb{E}C=\frac{\mathbb{E}L}{\mu\left(1-\mu\right)}$$

entonces

$$
\begin{aligned}
Q^{(1)} &= \frac{1}{2}\frac{\mathbb{E}L^2}{\mathbb{E}L}-\frac{\frac{1}{2}-\mu}{\left(1-\mu\right)\mu}\sigma^2=\frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}L}-\frac{\sigma^2}{2}\left\{\frac{2\mu-1}{\left(1-\mu\right)\mu}\right\}\\
&= \frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}L}+\frac{\sigma^2}{2}\left\{\frac{1}{1-\mu}+\frac{1}{\mu}\right\}
\end{aligned}
$$

Mientras que para nosotros

$$Q^{(1)}=\frac{1}{\mu\left(1-\mu\right)}\frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}C}-\sigma^2\frac{\mathbb{E}L}{2\mathbb{E}C}\cdot\frac{1-2\mu}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}$$

Retomando la ecuación (5.72)

$$\left[\frac{R_1\left(z\right)P\left(z\right)}{R_2\left(z\right)R_3\left(z\right)}\right]^{'}=\frac{PR_2R_3R_1^{'}+R_1R_2R_3P^{'}-R_3R_1PR_2-R_2R_1PR_3^{'}}{\left(R_2R_3\right)^2}=\frac{F\left(z\right)}{G\left(z\right)}$$

donde

$$
\begin{aligned}
F\left(z\right) &= PR_2R_3R_1^{'}+R_1R_2R_3P^{'}-R_3R_1PR_2^{'}-R_2R_1PR_3^{'}\\
G\left(z\right) &= R_2^2R_3^2\\
G^2\left(z\right) &= R_2^4R_3^4=\left(1-\mu\right)^4\mu^4
\end{aligned}
$$

y por tanto

$$
\begin{aligned}
G^{'}(z) &= 2R_2R_3\left[R_2^{'}R_3+R_2R_3^{'}\right]\\
G^{'}(1) &= -2(1-\mu)\mu\left[\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right]+\frac{1}{2}\mu\right)(-\mu)+(1-\mu)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right]+\frac{1}{2}\mu\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
F^{'}(z) = \left[(R_2R_3)R_1^{''}-(R_1R_3)R_2^{''}-(R_1R_2)R_3^{''}-2\left(R_2^{'}R_3^{'}\right)R_1\right]P+2(R_2R_3)R_1^{'}P^{'}+(R_1R_2R_3)P^{''}
$$

Por lo tanto, encontremos $F^{'}(z)G(z)+F(z)G^{'}(z)$:

$$
\begin{aligned}
&F^{'}(z)G(z)+F(z)G^{'}(z)=\left\{\left[(R_2R_3)R_1^{''}-(R_1R_3)R_2^{''}-(R_1R_2)R_3^{''}-2\left(R_2^{'}R_3^{'}\right)R_1\right]P\right.\\
&\left.+2(R_2R_3)R_1^{'}P^{'}+(R_1R_2R_3)P^{''}\right\}R_2^2R_3^2-\left\{\left[PR_2R_3R_1^{'}+R_1R_2R_3P^{'}-R_3R_1PR_2^{'}\right.\right.\\
&\left.\left.-R_2R_1PR_3^{'}\right]\left[2R_2R_3\left(R_2^{'}R_3+R_2R_3^{'}\right)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Evaluando en $z=1$

$$
\begin{aligned}
&= (1+R_3)^3R_3^3R_1^{''}-(1+R_3)^2R_1R_3^3R_3^{''}-(1+R_3)^3R_3^2R_1R_3^{''}-2(1+R_3)^2R_3^2\left(R_3^{'}\right)^2\\
&+ 2(1+R_3)^3R_3^3R_1^{'}P^{'}+(1+R_3)^3R_3^3R_1P^{''}-2(1+R_3)^2R_3^2(1+2R_3)R_3^{'}R_1^{'}\\
&- 2(1+R_3)^2R_3^2R_1R_3^{'}(1+2R_3)P^{'}+2(1+R_3)(1+2R_3)R_3^3R_1\left(R_3^{'}\right)^2\\
&+ 2(1+R_3)^2(1+2R_3)R_1R_3R_3^{'}\\
&= -(1-\mu)^3\mu^3R_1^{''}-(1-\mu)^2\mu^2R_1(1-2\mu)R_3^{''}-(1-\mu)^3\mu^3R_1P^{''}\\
&+ 2(1-\mu)\mu^2\left[(1-2\mu)R_1-(1-\mu)\right]\left(R_3^{'}\right)^2-2(1-\mu)^2\mu R_1(1-2\mu)R_3^{'}\\
&- 2(1-\mu)^3\mu^4R_1^{'}-2\mu(1-\mu)(1-2\mu)R_3^{'}R_1^{'}-2\mu^3(1-\mu)^2(1-2\mu)R_1R_1^{'}
\end{aligned}
$$

por tanto

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{F(z)}{G(z)}\right]^{'} &= \frac{1}{\mu^3(1-\mu)^3}\left\{-(1-\mu)^2\mu^2R_1^{''}-\mu(1-\mu)(1-2\mu)R_1R_3^{''}-\mu^2(1-\mu)^2R_1P^{''}\right.\\
&+2\mu\left[(1-2\mu)R_1-(1-\mu)\right]\left(R_3^{'}\right)^2-2(1-\mu)(1-2\mu)R_1R_3^{'}-2\mu^3(1-\mu)^2R_1^{'}\\
&\left.-2(1-2\mu)R_3^{'}R_1^{'}-2\mu^2(1-\mu)(1-2\mu)R_1R_1^{'}\right\}
\end{aligned}
$$

recordemos que

$$
\begin{aligned}
R_1 &= -\mathbb{E}L\\
R_3 &= -\mu\\
R_1^{'} &= -\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}L\\
R_3^{'} &= -\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\\
R_1^{''} &= -\frac{1}{3}\mathbb{E}L^3+\mathbb{E}L^2-\frac{2}{3}\mathbb{E}L\\
R_3^{''} &= -\frac{1}{3}\mathbb{E}X^3+\mathbb{E}X^2-\frac{2}{3}\mu\\
R_1R_3^{'} &= \frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L-\frac{1}{2}\mathbb{E}X\mathbb{E}L\\
R_1R_1^{'} &= \frac{1}{2}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}L+\frac{1}{2}\mathbb{E}^2L\\
R_3^{'}R_1^{'} &= \frac{1}{4}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L^2-\frac{1}{4}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L-\frac{1}{4}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}X+\frac{1}{4}\mathbb{E}X\mathbb{E}L\\
R_1R_3^{''} &= \frac{1}{6}\mathbb{E}X^3\mathbb{E}L^2-\frac{1}{6}\mathbb{E}X^3\mathbb{E}L-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L+\frac{1}{3}\mathbb{E}X\mathbb{E}L^2-\frac{1}{3}\mathbb{E}X\mathbb{E}L\\
R_1P^{''} &= -\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L\\
\left(R_3^{'}\right)^2 &= \frac{1}{4}\mathbb{E}^2X^2-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}X+\frac{1}{4}\mathbb{E}^2X
\end{aligned}
$$

Definición 5.83. *Let L_i^* be the number of users at queue Q_i when it is polled, then*

$$\mathbb{E}\left[L_i^*\right]=f_i\left(i\right),\quad Var\left[L_i^*\right]=f_i\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. \tag{5.73}$$

Definición 5.84. *The cycle time C_i for the queue Q_i is the period beginning at the time when it is polled in a cycle and ending at the time when it is polled in the next cycle; it's duration is given by $\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)$, equivalently $\overline{\tau}_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$ under steady state assumption.*

Definición 5.85. *The intervisit time I_i is defined as the period beginning at the time of its service completion in a cycle and ending at the time when it is polled in the next cycle; its duration is given by $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$.*

The intervisit time duration $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)$ given the number of users found at queue Q_i at time $t=\tau_i\left(m+1\right)$ is equal to the number of arrivals during the preceding intervisit time $\left[\overline{\tau}\left(m\right),\tau_i\left(m+1\right)\right]$.

So we have

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z_i\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

if $I_i\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$ we have $F_i\left(z\right)=I_i\left[P_i\left(z\right)\right]$ for $i=1,2$. Futhermore can be proved that

$$
\begin{array}{ll}
\mathbb{E}\left[L_i\right]=\mu_i\mathbb{E}\left[I_i\right], & \mathbb{E}\left[C_i\right]=\frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)},\\
\mathbb{E}\left[S_i\right]=\mu_i\mathbb{E}\left[C_i\right], & \mathbb{E}\left[I_i\right]=\left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right],\\
Var\left[L_i\right]=\mu_i^2Var\left[I_i\right]+\sigma^2\mathbb{E}\left[I_i\right], & Var\left[C_i\right]=\frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2},\\
Var\left[S_i\right]=\frac{Var\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^3}, & Var\left[I_i\right]=\frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2}-\frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2}f_i\left(i\right).
\end{array} \tag{5.74}
$$

Let consider the points when the process $\left[L_1\left(1\right),L_2\left(1\right),L_3\left(1\right),L_4\left(1\right)\right]$ becomes zero at the same time, this points, $T_1,T_2,\ldots$ will be denoted as regeneration points, then we have that

Definición 5.86. *the interval between two such succesive regeneration points will be called regenerative cycle.*

Definición 5.87. *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 5.88. *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)}. \tag{5.75}$$

Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t. Entonces, determinando el primer momento es posible ver que

M_i is an stopping time for the regenerative process with $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, from Wald's lemma follows that:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\, \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\, \mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]
\end{aligned}$$

therefore

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

Doing the following substitutions en (**??**): $n \to t - \tau_i(m)$, $T \to \overline{\tau}_i(m) - \tau_i(m)$, $L_n \to L_i(t)$ and $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right] \to F_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i \tau_i(m)}\right]$, we obtain

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] = z \frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} \tag{5.76}$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t - \overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1 - \mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)}\right]}{1 - P_i(z)} \\
&= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} + \sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)} + \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}\right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}
\end{aligned}
$$

es decir

$$
\begin{array}{ll}
S^{'}(z) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}, & S^{(1)}(1) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k = -\mathbb{E}\left[L(t)\right], \\
S^{''}(z) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k z^{k-2}, & S^{(2)}(1) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k = \mathbb{E}\left[L(L-1)\right], \\
S^{'''}(z) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2) a_k z^{k-3}, & S^{(3)}(1) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2) a_k \\
 & = -\mathbb{E}\left[L(L-1)(L-2)\right] \\
 & = -\mathbb{E}\left[L^3\right] + 3 - \mathbb{E}\left[L^2\right] - 2 - \mathbb{E}\left[L\right];
\end{array}
\tag{5.77}
$$

5.1. Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [82]

Definición 5.89 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 5.78. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [128].*

Nota 5.79. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 5.90. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$
\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,
\end{aligned}
$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 5.80. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 5.81. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 5.82. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 5.83. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

5.2. Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [82]

Definición 5.91 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 5.84. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [128].*

Nota 5.85. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 5.92. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 5.86. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 5.87. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 5.88. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 5.89. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Definición 5.93. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{5.78}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 5.94. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 5.90. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

5.3. Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [82]

Definición 5.95 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 5.91. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [128].*

Nota 5.92. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 5.96. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 5.93. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 5.94. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 5.95. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 5.96. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

5.3.1. Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [82]

Definición 5.97 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 5.97. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [128].*

Nota 5.98. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 5.98. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 5.99. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 5.100. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 5.101. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 5.102.
a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

5.4. Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [82]

Definición 5.99 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 5.103. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots$, que satisfacen la propiedad deseada [128].*

Nota 5.104. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 5.100. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 5.105. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 5.106. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 5.107. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 5.108. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 5.101. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 5.102. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 5.103. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 5.36. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Corolario 5.18. *Sea* $\{V(t), t \geq 0\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E} < \infty$*,* F *es no-aritmética, y para todo* $x \geq 0$*,* $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $[0, \tau]$*, entonces* $V(t)$ *converge en distribución cuando* $t \to \infty$ *y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) \, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V(t)$ *cuando* $t \to \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 5.104. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{5.79}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 5.105. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, para* $n \geq 1$*, son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F*, donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$*. Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 5.109. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 5.110. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 5.37 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 5.23. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 5.106. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 5.24. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 5.38 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 5.25. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 5.111. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 5.39. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{5.80}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{5.81}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 5.19 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{5.82}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 5.107. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 5.40. *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{5.83}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{5.84}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 5.20. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{5.85}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \ t < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 5.26. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 5.112. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 5.41. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{5.86}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{5.87}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 5.21 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \to \infty. \tag{5.88}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 5.108. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 5.42. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \; c.s. && (5.89)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \; c.s. && (5.90)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 5.22. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right)-Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right)-Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \; c.s. \text{ cuando } t\rightarrow\infty. \qquad (5.91)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right)\geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right)\geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right)\leq n\right\} &= 1-F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right)\geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 5.27. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 5.113. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 5.43. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \; c.s. && (5.92)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu, \; c.s. && (5.93)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 5.23 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \; c.s. \; cuando \; t \rightarrow \infty. \tag{5.94}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 5.109. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 5.44. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \; c.s. \quad (5.95) \\ lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \; c.s. \quad (5.96) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 5.24. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \; c.s. \; cuando \; t \rightarrow \infty. \tag{5.97}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \;\; t \; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 5.28. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 5.114. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 5.45. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \; c.s. && (5.98)\\ lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \; c.s. && (5.99)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 5.25 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \; c.s. \; cuando \; t \to \infty. \tag{5.100}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 5.110. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 5.46. *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \; c.s. && (5.101)\\ lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \; c.s. && (5.102)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 5.26. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \; c.s. \; cuando \; t \to \infty. \tag{5.103}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ P\{N(t)\leq n\} &= 1-F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)$$

Proposición 5.29. *Para cada $t\geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right]<\infty$, para $m\geq 1$.*

Nota 5.115. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n\geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G\star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 5.47. *Para una constante $\mu\leq\infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty}n^{-1}T_n = \mu,\ c.s. \tag{5.104}$$
$$lim_{t\to\infty}t^{-1}N(t) = 1/\mu,\ c.s. \tag{5.105}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 5.27 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu\leq\infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t)\to 1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t\to\infty. \tag{5.106}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t):t\geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 5.111. *Para el proceso $\{Z(t):t\geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1},T_n]$:*

$$M_n=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_n}|Z(t)-Z(T_{n-1})|$$

Teorema 5.48. *Supóngase que $n^{-1}T_n\to\mu$ c.s. cuando $n\to\infty$, donde $\mu\leq\infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty}n^{-1}Z(T_n) = a,\ c.s. \tag{5.107}$$
$$lim_{t\to\infty}t^{-1}Z(t) = a/\mu,\ c.s. \tag{5.108}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty}n^{-1}M_n=0$ c.s.

Corolario 5.28. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n)-Z(T_{n-1}),M_n)$, para $n\geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty}t^{-1}Z(t)\to\frac{\mathbb{E}[Z(T_1)-Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]},\ c.s.\ cuando\ t\to\infty. \tag{5.109}$$

Definición 5.112. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t)=h(t)+\int_{[0,t]}H(t-s)\,dF(s)\,,\ t\geq 0, \tag{5.110}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 5.30. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 5.49 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 5.113. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 5.31. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 5.114. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 5.32. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 5.116. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 5.50. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 5.29 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 5.115. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{5.111}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 5.116. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 5.117. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

6. Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [128]

Definición 6.1 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 6.1. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \dots$, que satisfacen la propiedad deseada [128].*

Nota 6.2. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 6.2. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 6.3. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 6.4. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 6.5. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 6.6. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

6.1. Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [128]

Definición 6.3 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 6.7. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [128].*

Nota 6.8. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 6.4. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 6.9. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 6.10. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 6.11. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 6.12. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

6.2. Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [128]

Definición 6.5 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 6.13. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [128].*

Nota 6.14. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 6.6. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 6.15. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 6.16. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 6.17. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 6.18.

a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

6.3. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[123]

Definición 6.7. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{6.1}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 6.8. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 6.19. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 6.1. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 6.1 (**Proceso Poisson**). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 6.20. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 6.1. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} &\quad (6.2) \\ lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} &\quad (6.3) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 6.1 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \quad (6.4)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 6.9. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 6.2. *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} &\quad (6.5) \\ lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} &\quad (6.6) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 6.2. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \quad (6.7)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 6.10. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 6.2. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 6.11. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 6.3. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 6.21. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 6.3. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 6.3 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \, t \geq 0,$$

Definición 6.12. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \, t \geq 0, \tag{6.8}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 6.4. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 6.4 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 6.13. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 6.5. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 6.14. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_{+}} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^{n} = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 6.6. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 6.22. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 6.5. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 6.4 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 6.15. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{6.9}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 6.7. *La función* $U \star h(t)$ *es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 6.6 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 6.23. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 6.7 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 6.8. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 6.16. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 6.9. *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 6.8 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$*.*

Nota 6.24. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 6.9 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 6.10. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 6.17. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 6.11. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 6.10 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right]$.

Definición 6.18. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 6.25. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Nota 6.26. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 6.27. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 6.19. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 6.28. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 6.11 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 6.20 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*

- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*

- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t.

Nota 6.29. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n, *y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$. *Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{6.10}$$

Ejemplo 6.2 (Tiempos de recurrencia Poisson). *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ, *entonces de la expresión (15.43) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 6.30. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 6.21. *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 6.31. *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 6.12. *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 6.12. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N *es estacionario.*

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 6.32. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 6.5. *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[123]

Definición 6.22. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{6.11}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 6.23. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 6.33. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\
T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\
P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)
\end{aligned}
$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 6.13. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 6.3 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 6.34. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 6.13. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \ \ c.s. && (6.12) \\
lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \ \ c.s. && (6.13)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 6.6 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{6.14}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 6.24. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 6.14. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{6.15}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{6.16}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 6.7. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{6.17}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 6.25. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 6.14. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 6.26. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 6.15. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 6.35. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 6.15. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 6.8 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1],\ t \geq 0,$$

Definición 6.27. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{6.18}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 6.16. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 6.16 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 6.28. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 6.17. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 6.29. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 6.18. *La Transformada de Laplace* $\hat{U}(\alpha)$ *y* $\hat{F}(\alpha)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.

Nota 6.36. *Un proceso de renovación* $N(t)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$*, para* $t \geq 0$.

Teorema 6.17. *Sea* $N(t)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ *es finita para cada* t*. Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N(t)$ *tal que* $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$*, independiente de* n*. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 6.9 (Identidad de Wald para Renovaciones). *Para el proceso de renovación* $N(t)$,

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 6.30. *Sea* $h(t)$ *función de valores reales en* $\mathbb{R}$ *acotada en intervalos finitos e igual a cero para* $t < 0$ *La ecuación de renovación para* $h(t)$ *y la distribución* F *es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{6.19}$$

donde $H(t)$ *es una función de valores reales. Esto es* $H = h + F \star H$*. Decimos que* $H(t)$ *es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para* $t < 0$.

Proposición 6.19. *La función* $U \star h(t)$ *es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 6.18 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 6.37. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 6.19 (Teorema Principal de Renovación). *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 6.20. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 6.31. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 6.21. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 6.20 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\left\{|X(t)|:t\leq T\right\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right]$.

Nota 6.38. *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t)\geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 6.21 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 6.22. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 6.32. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 6.23. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 6.22 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\left\{|X(t)|:t\leq T\right\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right]$.

Definición 6.33. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 6.39. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 6.40. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 6.41. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 6.34. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 6.42. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 6.23 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 6.35 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t*.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t*, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t*.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$*, la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t*.*

Nota 6.43. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n*, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$*. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t + y) - N((t - x)) = 0\} \tag{6.20}$$

Ejemplo 6.4 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*, entonces de la expresión (15.43) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$*.*

Nota 6.44. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 6.36. *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 6.45. *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 6.24. *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 6.24. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N *es estacionario.*

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 6.46. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 6.10. *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

7. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[123]

Definición 7.1. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{7.1}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 7.2. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, *para* $n \geq 1$, *son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F, *donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$. *Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 7.1. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F, *con* $F(0) = 0$, *para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F. *Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, *donde* $T_n \to \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 7.1. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 7.1 (**Proceso Poisson**)**.** *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 7.2. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 7.1. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{7.2}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{7.3}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 7.1 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{7.4}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 7.3. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 7.2. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \; c.s. && (7.5)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \; c.s. && (7.6)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 7.2. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \; c.s. \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \tag{7.7}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 7.4. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 7.2. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 7.5. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF\left(t\right), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 7.3. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 7.3. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 7.3. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f\left(T_n\right)\right] = \int_{(0,t]} f\left(s\right) d\eta\left(s\right), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f\left(s\right) d\eta\left(s\right), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 7.3 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right],\ t \geq 0,$$

Definición 7.6. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s),\ t \geq 0, \tag{7.8}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 7.4. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 7.4 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 7.7. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 7.5. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 7.8. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 7.6. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 7.4. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 7.5. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\,d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\,d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 7.4 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right], \; t \geq 0,$$

Definición 7.9. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s), \; t \geq 0, \tag{7.9}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 7.7. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 7.6 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 7.5. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 7.7 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 7.8. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 7.10. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 7.9. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 7.8 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 7.6. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 7.9 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds.$$

Proposición 7.10. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 7.11. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 7.11. *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 7.10 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$*.*

Definición 7.12. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 7.7. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 7.8. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 7.9. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_{+}$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 7.13. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 7.10. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 7.11 (Procesos Regenerativos). *Suponga que el proceso*

Definición 7.14 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 7.11. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{7.10}$$

Ejemplo 7.2 (Tiempos de recurrencia Poisson). *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (15.43) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 7.12. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 7.15. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 7.13. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 7.12. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 7.12. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación N es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 7.14. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 7.5. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

7.1. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[123]

Definición 7.16. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{7.11}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 7.17. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 7.15. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 7.13. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 7.3 (**Proceso Poisson**). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 7.16. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 7.13. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{7.12}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{7.13}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 7.6 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{7.14}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 7.18. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 7.14. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{7.15}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{7.16}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 7.7. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{7.17}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 7.19. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 7.14. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 7.20. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 7.15. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 7.17. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 7.15. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 7.8 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1], \ t \geq 0,$$

Definición 7.21. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \ t \geq 0, \tag{7.18}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 7.16. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 7.16 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu, \ \textit{cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 7.22. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 7.17. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 7.23. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_{+}} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^{n} = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 7.18. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 7.18. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 7.17. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 7.9 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}\left[N(t) + 1\right],\ t \geq 0,$$

Definición 7.24. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{7.19}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 7.19. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 7.18 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Nota 7.19. *Una función $h : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 7.19 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 7.20. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 7.25. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 7.21. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t),\ donde\ h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 7.20 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 7.20. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 7.21 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 7.22. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 7.26. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 7.23. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 7.22 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 7.27. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 7.21. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 7.22. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 7.23. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 7.28. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 7.24. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 7.23 (Procesos Regenerativos). *Suponga que el proceso*

Definición 7.29 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 7.25. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t + y) - N((t - x)) = 0\} \tag{7.20}$$

Ejemplo 7.4 (Tiempos de recurrencia Poisson). *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (15.43) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 7.26. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 7.30. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 7.27. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 7.24. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 7.24. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 7.28. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 7.10. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

7.2. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[123]

Definición 7.31. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{7.21}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 7.32. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 7.29. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0)=0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\ t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 7.25. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 7.30. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 7.25. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{7.22}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{7.23}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 7.11 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{7.24}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 7.33. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 7.26. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (7.25)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (7.26)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 7.12. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (7.27)$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 7.34. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N\left(t\right)$, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = \mathbb{1}\left(t \geq 0\right)$.

Proposición 7.26. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U\left(t\right)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 7.35. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF\left(t\right), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 7.27. *La Transformada de Laplace $\hat{U}\left(\alpha\right)$ y $\hat{F}\left(\alpha\right)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}\left(\alpha\right) = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$.*

Nota 7.31. *Un proceso de renovación $N\left(t\right)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U\left(t\right)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 7.27. *Sea $N\left(t\right)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta\left(t\right) = \mathbb{E}\left[N\left(\right)\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f\left(T_n\right)\right] = \int_{(0,t]} f\left(s\right) d\eta\left(s\right), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N\left(t\right)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f\left(s\right)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f\left(s\right) d\eta\left(s\right), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 7.13 (Identidad de Wald para Renovaciones). *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right],\ t \geq 0,$$

Definición 7.36. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s),\ t \geq 0, \tag{7.28}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 7.28. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 7.28 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 7.37. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 7.29. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t>0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 7.38. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t}dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 7.30. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 7.32. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 7.29. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\,d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\,d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 7.14 (Identidad de Wald para Renovaciones). *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right], \; t \geq 0,$$

Definición 7.39. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s), \; t \geq 0, \tag{7.29}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 7.31. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 7.30 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \; cuando \; t \to \infty.$$

Nota 7.33. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 7.31 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 7.32. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \; donde \; h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 7.40. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \; para \; t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 7.33. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \; donde \; h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 7.32 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 7.34. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 7.33 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 7.34. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 7.41. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 7.35. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 7.34 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

7.3. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[123]

Definición 7.42. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{7.30}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 7.43. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 7.35. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \text{máx}\{n : T_n \leq t\} = \text{mín}\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 7.36. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 7.5 (**Proceso Poisson**)**.** *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 7.36. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 7.35. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{7.31}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{7.32}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 7.15 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{7.33}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 7.44. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 7.36. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} \qquad (7.34)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} \qquad (7.35)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 7.16. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (7.36)
$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 7.45. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$
U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \; t \geq 0,
$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = \mathbb{1}\left(t \geq 0\right)$.

Proposición 7.37. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$. Además*

$$
\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \; t \geq 0.
$$

Definición 7.46. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$
\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF\left(t\right), \; \alpha \geq 0.
$$

Entonces

$$
\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}\left(\alpha\right)}.
$$

Proposición 7.38. *La Transformada de Laplace $\hat{U}\left(\alpha\right)$ y $\hat{F}\left(\alpha\right)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}\left(\alpha\right) = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$.*

Nota 7.37. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U\left(t\right)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 7.37. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta\left(t\right) = \mathbb{E}\left[N\left(\right)\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f\left(T_n\right)\right] = \int_{(0,t]} f\left(s\right) d\eta\left(s\right), \; t \geq 0,
$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f\left(s\right)$, independiente de n. Entonces

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f\left(s\right) d\eta\left(s\right), \; t \geq 0,
$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 7.17 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right],\ t \geq 0,$$

Definición 7.47. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{7.37}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 7.39. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 7.38 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 7.48. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 7.40. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 7.49. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 7.41. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 7.38. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 7.39. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 7.18 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right],\ t \geq 0,$$

Definición 7.50. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s),\ t \geq 0, \tag{7.38}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 7.42. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 7.40 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \to \infty.$$

Nota 7.39. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 7.41 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 7.43. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ \textit{donde}\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 7.51. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ \textit{para}\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 7.44. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t),\ \textit{donde}\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 7.42 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 7.40. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 7.43 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds.$$

Proposición 7.45. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U\star h(t),\ donde\ h(t) = H(t) - F\star H(t)$$

Definición 7.52. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 7.46. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U\star h(t),\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 7.44 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Definición 7.53. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t\geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0\leq t<\xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 7.41. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f:\tilde{S}\rightarrow S$.*

Nota 7.42. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 7.43. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t\geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t\geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_{+}$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 7.54. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t\geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0\leq t<\xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 7.44. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 7.45 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 7.55 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*

- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*

- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$*, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 7.45. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{7.39}$$

Ejemplo 7.6 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (15.43) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 7.56. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 7.46. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 7.47. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 7.46. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación N es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 7.47. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 7.19. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

7.4. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[123]

Definición 7.57. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{7.40}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 7.58. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 7.48. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 7.48. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 7.7 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 7.49. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 7.47. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} &(7.41)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} &(7.42)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 7.20 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{7.43}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 7.59. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 7.48. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} &(7.44)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} &(7.45)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 7.21. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{7.46}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 7.60. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 7.49. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 7.61. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 7.50. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 7.50. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 7.49. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 7.22 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1], \ t \geq 0,$$

Definición 7.62. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \ t \geq 0, \tag{7.47}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 7.51. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 7.50 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \ cuando\ t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 7.63. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 7.52. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 7.64. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_{+}} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^{n} = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 7.53. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 7.51. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 7.51. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 7.23 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 7.65. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{7.48}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 7.54. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 7.52 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 7.52. *Una función $h : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 7.53 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 7.55. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 7.66. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 7.56. *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 7.54 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right]$*.*

Nota 7.53. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 7.55 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 7.57. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 7.67. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 7.58. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t)\,, \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]\,.$$

Teorema 7.56 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 7.68. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 7.54. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 7.55. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 7.56. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 7.69. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 7.57. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 7.57 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 7.70 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*

- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*

- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 7.58. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t + y) - N((t - x)) = 0\} \tag{7.49}$$

Ejemplo 7.8 (Tiempos de recurrencia Poisson). *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (15.43) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 7.71. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 7.59. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 7.59. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 7.58. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación N es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 7.60. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 7.24. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

7.5. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[123]

Definición 7.72. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{7.50}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 7.73. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 7.61. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 7.60. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 7.9 (**Proceso Poisson**)**.** *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 7.62. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 7.59. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{7.51}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{7.52}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 7.25 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{7.53}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 7.74. *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 7.60. *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (7.54)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (7.55) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 7.26. *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{7.56}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 7.75. *La función de renovación asociada con la distribución* F*, del proceso* $N(t)$*, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 7.61. *Supóngase que la distribución de inter-renovación* F *tiene densidad* f*. Entonces* $U(t)$ *también tiene densidad, para* $t > 0$*, y es* $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$*. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 7.76. *La Transformada de Laplace-Stieljes de* F *está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 7.62. *La Transformada de Laplace* $\hat{U}(\alpha)$ *y* $\hat{F}(\alpha)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.

Nota 7.63. *Un proceso de renovación* $N(t)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$*, para* $t \geq 0$.

Teorema 7.61. *Sea* $N(t)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ *es finita para cada* t*. Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$*,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n|T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 7.27 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t)+1],\ t \geq 0,$$

Definición 7.77. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{7.57}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 7.63. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 7.62 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 7.78. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 7.64. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 7.79. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 7.65. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 7.64. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 7.63. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 7.28 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 7.80. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{7.58}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 7.66. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 7.64 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu, \; cuando \; t \to \infty.$$

Nota 7.65. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 7.65 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \to \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 7.67. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \; donde \; h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 7.81. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \; para \; t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 7.68. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 7.66 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 7.66. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 7.67 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 7.69. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 7.82. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 7.70. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 7.68 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 7.83. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 7.67. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \to S$.

Nota 7.68. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 7.69. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 7.84. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 7.70. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 7.69 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 7.85 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t.
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t*, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t.
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$*, la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t.

Nota 7.71. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n*, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$*. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{7.59}$$

Ejemplo 7.10 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*, entonces de la expresión (15.43) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 7.86. *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 7.72. *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$*,* $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 7.71. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 7.70. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 7.73. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 7.29. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

7.6. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[123]

Definición 7.87. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{7.60}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 7.88. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 7.74. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 7.72. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 7.11 (**Proceso Poisson**)**.** *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 7.75. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 7.71. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{7.61}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{7.62}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 7.30 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{7.63}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 7.89. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 7.72. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{7.64}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{7.65}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 7.31. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{7.66}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 7.90. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 7.73. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 7.91. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 7.74. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 7.76. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 7.73. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 7.32 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \, t \geq 0,$$

Definición 7.92. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{7.67}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 7.75. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 7.74 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 7.93. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 7.76. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t>0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 7.94. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 7.77. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 7.77. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 7.75. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 7.33 (Identidad de Wald para Renovaciones). *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right],\ t \geq 0,$$

Definición 7.95. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{7.68}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 7.78. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 7.76 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \to \infty.$$

Nota 7.78. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 7.77 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 7.79. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ \textit{donde}\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 7.96. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ \textit{para}\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 7.80. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t),\ \textit{donde}\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 7.78 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 7.79. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 7.79 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds.$$

Proposición 7.81. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 7.97. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 7.82. *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t),\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 7.80 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$*.*

Definición 7.98. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 7.80. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 7.81. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 7.82. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_{+}$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 7.99. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 7.83. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 7.81 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 7.100 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 7.84. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\left\{A(t) > x, B(t) > y\right\} = P\left\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\right\} \tag{7.69}$$

Ejemplo 7.12 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (15.43) se tiene que*

$$P\left\{A(t) > x, B(t) > y\right\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 7.101. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 7.85. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 7.83. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 7.82. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación N es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\,ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 7.86. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 7.34. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

7.7. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[123]

Definición 7.102. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{7.70}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 7.103. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 7.87. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 7.84. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 7.13 (**Proceso Poisson**). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación* $N(t)$ *tienen distribución exponencial* $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ *con tasa* λ. *Entonces* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ.

Nota 7.88. *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n, *para* $n \geq 2$, *a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G, *entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 7.83. *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (7.71)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (7.72)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 7.35 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$, *entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (7.73)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 7.104. *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 7.84. *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$, *donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (7.74)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (7.75)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 7.36. *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, *para* $n \geq 1$, *son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (7.76)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 7.105. *La función de renovación asociada con la distribución* F, *del proceso* $N(t)$, *es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 7.85. *Supóngase que la distribución de inter-renovación* F *tiene densidad* f. *Entonces* $U(t)$ *también tiene densidad, para* $t > 0$, *y es* $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. *Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 7.106. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 7.86. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 7.89. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 7.85. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 7.37 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 7.107. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \ t \geq 0, \tag{7.77}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 7.87. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 7.86 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 7.108. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 7.88. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 7.109. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_{+}} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^{n} = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 7.89. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 7.90. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 7.87. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 7.38 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}\left[N(t) + 1\right],\ t \geq 0,$$

Definición 7.110. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{7.78}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 7.90. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 7.88 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 7.91. *Una función $h : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 7.89 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds.$$

Proposición 7.91. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 7.111. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 7.92. *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 7.90 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 7.92. *Una función* $h : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 7.91 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds.$$

Proposición 7.93. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 7.112. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 7.94. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 7.92 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 7.113. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 7.93. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 7.94. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 7.95. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 7.114. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 7.96. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 7.93 (Procesos Regenerativos). *Suponga que el proceso*

Definición 7.115 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- *$A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- *$B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- *$L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 7.97. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t + y) - N((t - x)) = 0\} \tag{7.79}$$

Ejemplo 7.14 (Tiempos de recurrencia Poisson). *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (15.43) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x+y$.

Nota 7.98. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 7.116. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1+t), \ldots, X(s_k+t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 7.99. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 7.95. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 7.94. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación N es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 7.100. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 7.39. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 7.101. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 7.102. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 7.117 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 7.118. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 7.103. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 7.119. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 7.104. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 7.105. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 7.120 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 7.106. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 7.121. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 7.107. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 7.122. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty}\mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 7.123. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 7.124. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 7.95. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

8. Procesos Regenerativos: Thorisson

Definición 8.1. *Un elemento aleatorio con valores en un espacio medible* $(E, \mathcal{E})$*, es un mapeo definido en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *a* $(E, \mathcal{E})$*, es decir, para* $A \in \mathcal{E}$*, se tiene que* $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$*, donde* $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.

Nota 8.1. *También se dice que* Y *está soportado por el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y que* Y *es un mapeo medible de* Ω *en* E*, es decir, es* $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ ***medible****.*

Definición 8.2. *Para cada* $i \in \mathbb{I}$*, sea* P_i *una medida de probabilidad en un espacio medible* $(E_i, \mathcal{E}_i)$*. Se define el espacio producto* $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}} \mathcal{E}_i\right)$*, donde* $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ *es el producto cartesiano de los* E_i*'s, y* $\otimes_{i\in\mathbb{I}} \mathcal{E}_i$ *es la* ***σ-álgebra producto****, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en* $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ *que hace al i-ésimo mapeo proyección en* E_i *medible para toda* $i \in \mathbb{I}$*, es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección, es decir*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}} \mathcal{E}_i := \sigma \left\{ \{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i \right\}.$$

Definición 8.3. *Un espacio de probabilidad* $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ *es una* ***extensión de otro espacio de probabilidad*** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *si* $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ *soporta un elemento aleatorio* $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ *que tienen a* $\mathbb{P}$ *como distribución.*

Teorema 8.1. *Sea* $\mathbb{I}$ *un conjunto de índices arbitrario. Para cada* $i \in \mathbb{I}$ *sea* P_i *una medida de probabilidad en un espacio medible* $(E_i, \mathcal{E}_i)$*. Entonces existe una única medida de probabilidad* $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ *en* $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ *tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i \left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \dots, y_n \in A_{i_n} \right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$*, toda* $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{I}$ *y todo* $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \dots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ es llamada la **medida producto** y $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}} \mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i\right)$, es llamado **espacio de probabilidad producto**.

Definición 8.4. *Un espacio medible* $(E, \mathcal{E})$ *es* ***Polaco*** *si existe una métrica en* E *tal que* E *es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en* E*, y separable,* E *tienen un subconjunto denso numerable, y tal que* $\mathcal{E}$ *es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 8.5. *Dos espacios medibles* $(E, \mathcal{E})$ *y* $(G, \mathcal{G})$ *son Borel equivalentes (isomorfos) si existe una biyección* $f : E \to G$ *tal que* f *es* $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ *medible y su inversa* f^{-1} *es* $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ *medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 8.6. *Un espacio medible* $(E, \mathcal{E})$ *es un* ***espacio estándar*** *si es Borel equivalente a* $(G, \mathcal{G})$*, donde* G *es un subconjunto de Borel de* $[0, 1]$ *y* $\mathcal{G}$ *son los subconjuntos de Borel de* G*.*

Nota 8.2. *Cualquier espacio polaco es un espacio estándar.*

Definición 8.7. *Un proceso estocástico con conjunto de índices* $\mathbb{I}$ *y espacio de estados* $(E, \mathcal{E})$ *es una familia* $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ *donde* $\mathbb{Z}_s$ *son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y todos toman valores en* $(E, \mathcal{E})$*.*

Definición 8.8. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (****PEOSCT****) es un proceso estocástico con conjunto de índices* $\mathbb{I} = [0, \infty)$*.*

El espacio $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}} (E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 8.3. *La distribución de un proceso estocástico* Z *es la distribución de* Z *como un elemento aleatorio en* $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$*. La distribución de* Z *esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 8.4. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E,\mathcal{E})=(\mathbb{R},\mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_1}\leq x_1,\ldots,Z_{t_n}\leq x_n\right),x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R},t_1,\ldots,t_n\in\mathbb{I},n\geq 1. \tag{8.1}$$

Nota 8.5. *Para espacios polacos $(E,\mathcal{E})$ el **Teorema de Consistencia de Kolmogorov** asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 8.9. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w\in\Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 8.6. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H,\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z\in H$ en $z_t\in E$ para $t\in\mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H}:=E^{\mathbb{I}}\cap H \quad := \quad \left\{A\cap H : A\in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{8.2}$$
$$Z_t:(\Omega.\mathcal{F}) \quad \rightarrow \quad (H,\mathcal{H}) \tag{8.3}$$

Nota 8.7. *Z tiene **trayectorias con valores en** H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ a $(H,\mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H,\mathcal{H})$ se le llama **el espacio de trayectorias de** Z.*

Nota 8.8. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H,\mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 8.10. *Sea Z un PEOSCT (ver definición 8.8) con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0,\infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω por:*

$$\begin{aligned} Z_T(w) &:= Z_{T(w)}(w), w\in\Omega.\\ Z_t:(\Omega,\mathcal{F}) &\rightarrow (E,\mathcal{E}). \end{aligned}$$

Definición 8.11. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible (**CM**), es decir un **PEOSCTCM**, si el mapeo que toma $(w,t)\in\Omega\times[0,\infty)$ a $Z_t(w)\in E$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

$$\begin{aligned} (\Omega,[0,\infty)) &\rightarrow (E,\mathcal{E})\\ (w,t) &\rightarrow Z_t(w). \end{aligned}$$

Nota 8.9. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w,T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w,T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 8.12. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H,\mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible (**CCM**) si el mapeo $(z,t)\in H\times[0,\infty)$ en $Z_t\in E$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

$$\begin{aligned} (H\times[0,\infty),\mathcal{H}\times\mathcal{B}[0,\infty)) &\rightarrow (E,\mathcal{E})\\ (z,t) &\rightarrow Z_t \end{aligned}$$

Nota 8.10. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PEOSCTCCM Z es un mapeo de $\Omega\times[0,\infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w,t) en $(Z(w),t)$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w),t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

$$\begin{aligned} (\Omega\times[0,\infty),\mathcal{F}\times\mathcal{B}[0,\infty)) &\rightarrow (H\times[0,\infty),\mathcal{H}\times\mathcal{B}[0,\infty))\rightarrow(E,\mathcal{E})\\ (w,t) &\rightarrow (Z(w),t])\rightarrow Z_t(w) \end{aligned}$$

Definición 8.13. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante (**ISI**) si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s\in[0,\infty)} : z\in H\right\} = H,\, t\in[0,\infty).$$

Definición 8.14. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t\in[0,\infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s\in[0,\infty)},\, z\in H.$$

Definición 8.15. *Se dice que un proceso Z es shift-medible (**SM**) si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t)\in H\times[0,\infty)$ en $\theta_t z\in H$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ medible.*

$$\begin{array}{rcl}(H\times[0,\infty),\mathcal{H}\times\mathcal{B}[0,\infty)) & \rightarrow & (H,\mathcal{H})\\ (z,t) & \rightarrow & \theta_t(z)\end{array}$$

Nota 8.11. *Un proceso estocástico (PEOSCT) con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es PEOSCTCCM.*

Nota 8.12.

- *Por la nota (8.11) dado el espacio polaco $(E,\mathcal{E})$ si se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0,\infty)$, que es ISI, entonces cumple con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuya cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 8.13. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 8.2. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Para $\{X(t): t\geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 8.16. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ a $(E,\mathcal{E})$, es decir, para $A\in\mathcal{E}$, se tiene que $\{Y\in A\}\in\mathcal{F}$, donde $\{Y\in A\}:=\{w\in\Omega: Y(w)\in A\}=: Y^{-1}A$.*

Nota 8.14. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 8.17. *Para cada $i\in\mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i,\mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i\in\mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma\left\{\{y: y_i\in A\}: i\in\mathbb{I} \text{ y } A\in\mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 8.18. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi\in(\Omega,\mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 8.3. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i\in\mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i,\mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y\in\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i: y_i\in A_{i_1},\ldots,y_n\in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n})\cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n>0$, toda $i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{I}$ y todo $A_{i_1}\in\mathcal{E}_{i_1},\ldots,A_{i_n}\in\mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i,P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}},E_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 8.19. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 8.20. *Dos espacios medibles $(E,\mathcal{E})$ y $(G,\mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f: E \rightarrow G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 8.21. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G,\mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0,1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 8.15. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 8.22. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ es una familia $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E,\mathcal{E})$.*

Definición 8.23. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0,\infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}}(E,\mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 8.16. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 8.17. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E,\mathcal{E}) = (\mathbb{R},\mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}(Z_{t_1} \leq x_1,\dots,Z_{t_n} \leq x_n), x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}, t_1,\dots,t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{8.4}$$

Nota 8.18. *Para espacios polacos $(E,\mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 8.24. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 8.19. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H,\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{8.5}$$

Nota 8.20. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ a $(H,\mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H,\mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 8.21. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H,\mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 8.25. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0,\infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) . w \in \Omega.$$

Definición 8.26. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible (**CM**) si el mapeo que toma $(w,t) \in \Omega \times [0,\infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 8.22. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 8.27. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H, \mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible (**CCM**) si el mapeo $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 8.23. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0,\infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w,t) en $(Z(w), t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w), t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 8.28. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante (**ISI**) si*

$$\left\{ (z_{t+s})_{s \in [0,\infty)} : z \in H \right\} = H, \; t \in [0,\infty).$$

Definición 8.29. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0,\infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s \in [0,\infty)}, \; z \in H.$$

Definición 8.30. *Se dice que un proceso Z es shift-medible (**SM**) si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ medible.*

Nota 8.24. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 8.25.

- *Dado el espacio polaco $(E, \mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0,\infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 8.26. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 8.4. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 8.31. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s \in [0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L, \mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{ (s_k)_0^\infty \in [0,\infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty \right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.

Así el par (Z, S) es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 8.32. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t (z, (s_k)_0^\infty) = \theta_t \left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t \right)_0^\infty \right)$$

donde $n_{t-} = inf \{ n \geq 1 : s_n \geq t \}$.

Nota 8.27. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 8.33. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0, S_n), S_0, \ldots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 8.28. *Si el par (Z,S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 8.5. *Supóngase que el par (Z,S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z,S) con periodo d.*

Definición 8.34. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx > 0$ con $X_2, X_3, \ldots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\, dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 8.35. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 8.29.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 8.30. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 8.6. *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 8.7. *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0, S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*, S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 8.8. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{8.6}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n} (Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{8.7}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{8.8}$$

Definición 8.36. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.*

Nota 8.31. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 8.37. *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}} \mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}} \mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}} \mathcal{E}_i := \sigma \left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 8.38. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 8.9. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i \left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}} \mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 8.39. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 8.40. *Dos espacios medibles $(E, \mathcal{E})$ y $(G, \mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \to G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 8.41. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G, \mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 8.32. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 8.42. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ es una familia $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E, \mathcal{E})$.*

Definición 8.43. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}}(E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 8.33. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 8.34. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_1} \leq x_1, \dots, Z_{t_n} \leq x_n\right), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{8.9}$$

Nota 8.35. *Para espacios polacos $(E, \mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 8.44. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 8.36. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H, \mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{8.10}$$

Nota 8.37. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ a $(H, \mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H, \mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 8.38. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H, \mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 8.45. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0, \infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) . w \in \Omega.$$

Definición 8.46. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible **(CM)** si el mapeo que toma $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 8.39. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 8.47. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H, \mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible **(CCM)** si el mapeo $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 8.40. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0, \infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w, t) en $(Z(w), t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w), t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 8.48. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s\in[0,\infty)} : z \in H\right\} = H,\ t \in [0, \infty).$$

Definición 8.49. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0, \infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s\in[0,\infty)},\ z \in H.$$

Definición 8.50. *Se dice que un proceso Z es shift-medible (**SM**) si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ medible.*

Nota 8.41. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 8.42.

- *Dado el espacio polaco $(E,\mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0,\infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 8.43. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 8.10. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 8.51. *Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z=(Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S=(S_k)_0^{\infty}$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \rightarrow \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L,\mathcal{L})$, donde*

$$L=\left\{(s_k)_0^{\infty} \in [0,\infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \rightarrow \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L}=L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.

Así el par (Z,S) es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ en $(H\times L,\mathcal{H}\otimes\mathcal{L})$. El par $\mathcal{H}\otimes\mathcal{L}^{+}$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H\times L,\mathcal{H}\otimes\mathcal{L})$ en $([0,\infty),\mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 8.52. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H\times L$ en $H\times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z,(s_k)_0^{\infty}\right)=\theta_t\left(z,\left(s_{n_{t-}+k}-t\right)_0^{\infty}\right)$$

donde $n_{t-}=inf\{n\geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 8.44. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t)\in H\times[0,\infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 8.53. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S)=\left(Z^0,S^0\right), n\geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $((Z_s)\, s\in[0,S_n), S_0,\dots,S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 8.45. *Si el par (Z,S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1,X_2,\dots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 8.11. *Supóngase que el par (Z,S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**},S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z,S) con periodo d.*

Definición 8.54. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n\geq 1$ y una función $f\in\mathcal{B}^{+}$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx>0$ con $X_2,X_3,\dots,X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_n\in B)\geq\int_B f(x)\,dx$$

para $B\in\mathcal{B}$.

Definición 8.55. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si* $\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right)$ *para* $n \geq 0$ *en distribución y* $\theta_{S_n}(Z,S)$ *es independiente de* $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ *para* $n \geq 0$. *Se dice que el par* (Z,S) *es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 8.46.

- *El proceso de trayectorias* $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ *es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces* (Z,S) *es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 8.47. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias* $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ *es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 8.12. *Supongase que el par* (Z,S) *es WSR con* $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. *Entonces* (Z^*, S^*) *en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de* (Z,S).

Teorema 8.13. *Supongase que* (Z,S) *es cycle-stationary con* $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. *Sea U distribuida uniformemente en* $[0,1)$ *e independiente de* $\left(Z^0, S^0\right)$ *y sea* $\mathbb{P}^*$ *la medida de probabilidad en* $(\Omega, \mathbb{P})$ *definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. *Sea* (Z^*, S^*) *con distribución* $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. *Entonces* $(Z*, S^*)$ *es estacionario,*

$$\mathbb{E}\left[f\left(Z^*, S^*\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, *and* S_0^* *es continuo con función distribución* G_∞ *definida por*

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ *y densidad* $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, *con* $x \geq 0$.

Teorema 8.14. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y* S_0 *y* S_1 *tiempos aleatorios tales que* $0 \leq S_0 < S_1$ *y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{8.11}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que*

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{8.12}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{8.13}$$

Definición 8.56. *Un elemento aleatorio en un espacio medible* $(E, \mathcal{E})$ *en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *a* $(E, \mathcal{E})$, *es decir, para* $A \in \mathcal{E}$, *se tiene que* $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, *donde* $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.

Nota 8.48. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y que Y es un mapeo medible de* Ω *en E, es decir, es* $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ *medible.*

Definición 8.57. *Para cada* $i \in \mathbb{I}$ *sea* P_i *una medida de probabilidad en un espacio medible* $(E_i, \mathcal{E}_i)$. *Se define el espacio producto* $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, *donde* $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ *es el producto cartesiano de los* E_i*'s, y* $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ *es la* σ*-álgebra producto, es decir, es la* σ*-álgebra más pequeña en* $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ *que hace al i-ésimo mapeo proyección en* E_i *medible para toda* $i \in \mathbb{I}$ *es la* σ*-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma\left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 8.58. *Un espacio de probabilidad* $\left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}}\right)$ *es una extensión de otro espacio de probabilidad* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *si* $\left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}}\right)$ *soporta un elemento aleatorio* $\xi\in(\Omega,\mathcal{F})$ *que tienen a* $\mathbb{P}$ *como distribución.*

Teorema 8.15. *Sea* $\mathbb{I}$ *un conjunto de índices arbitrario. Para cada* $i\in\mathbb{I}$ *sea* P_i *una medida de probabilidad en un espacio medible* $(E_i,\mathcal{E}_i)$*. Entonces existe una única medida de probabilidad* $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ *en* $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i)$ *tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y\in\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i:y_i\in A_{i_1},\dots,y_n\in A_{i_n}\right)=P_{i_1}\left(A_{i_n}\right)\cdots P_{i_n}\left(A_{i_n}\right)$$

para todos los enteros $n>0$*, toda* $i_1,\dots,i_n\in\mathbb{I}$ *y todo* $A_{i_1}\in\mathcal{E}_{i_1},\dots,A_{i_n}\in\mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i,P_i):=\left(\prod_{i\in\mathbb{I}},E_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 8.59. *Un espacio medible* $(E,\mathcal{E})$ *es Polaco si existe una métrica en* E *tal que* E *es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en* E*, y separable,* E *tienen un subconjunto denso numerable, y tal que* $\mathcal{E}$ *es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 8.60. *Dos espacios medibles* $(E,\mathcal{E})$ *y* $(G,\mathcal{G})$ *son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección* $f:E\rightarrow G$ *tal que* f *es* $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ *medible y su inversa* f^{-1} *es* $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ *medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 8.61. *Un espacio medible* $(E,\mathcal{E})$ *es un espacio estándar si es Borel equivalente a* $(G,\mathcal{G})$*, donde* G *es un subconjunto de Borel de* $[0,1]$ *y* $\mathcal{G}$ *son los subconjuntos de Borel de* G*.*

Nota 8.49. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 8.62. *Un proceso estocástico con conjunto de índices* $\mathbb{I}$ *y espacio de estados* $(E,\mathcal{E})$ *es una familia* $Z=(\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ *donde* $\mathbb{Z}_s$ *son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *y todos toman valores en* $(E,\mathcal{E})$*.*

Definición 8.63. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices* $\mathbb{I}=[0,\infty)$*.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right):=\otimes_{s\in\mathbb{I}}(E,\mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w)=(Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w\in\Omega$.

Nota 8.50. *La distribución de un proceso estocástico* Z *es la distribución de* Z *como un elemento aleatorio en* $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$*. La distribución de* Z *esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 8.51. *En particular cuando* Z *toma valores reales, es decir,* $(E,\mathcal{E})=(\mathbb{R},\mathcal{B})$ *las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_1}\leq x_1,\dots,Z_{t_n}\leq x_n\right),x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R},t_1,\dots,t_n\in\mathbb{I},n\geq 1. \tag{8.14}$$

Nota 8.52. *Para espacios polacos* $(E,\mathcal{E})$ *el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 8.64. *Las trayectorias de* Z *son las realizaciones* $Z(w)$ *para* $w\in\Omega$ *del mapeo aleatorio* Z*.*

Nota 8.53. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto* H *de* $E^{\mathbb{I}}$*. En este caso es natural considerar a* Z *como un elemento aleatorio que no está en* $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ *sino en* $(H,\mathcal{H})$*, donde* $\mathcal{H}$ *es la* σ*-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a* $z\in H$ *a* $z_t\in E$ *para* $t\in\mathbb{I}$*. A* $\mathcal{H}$ *se le conoce como la traza de* H *en* $E^{\mathbb{I}}$*, es decir,*

$$\mathcal{H}:=E^{\mathbb{I}}\cap H:=\left\{A\cap H:A\in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{8.15}$$

Nota 8.54. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ a $(H,\mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H,\mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 8.55. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H,\mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 8.65. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0,\infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) .w \in \Omega.$$

Definición 8.66. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible (**CM**) si el mapeo que toma $(w,t) \in \Omega \times [0,\infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 8.56. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w,T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w,T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 8.67. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H,\mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible (**CCM**) si el mapeo $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 8.57. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega\times[0,\infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w,t) en $(Z(w),t)$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w),t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 8.68. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante (**ISI**) si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s\in[0,\infty)} : z \in H\right\} = H,\ t \in [0,\infty).$$

Definición 8.69. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t\in[0,\infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s\in[0,\infty)},\ z \in H.$$

Definición 8.70. *Se dice que un proceso Z es shift-medible (**SM**) si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t) \in H\times[0,\infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ medible.*

Nota 8.58. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 8.59.

- *Dado el espacio polaco $(E,\mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0,\infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 8.60. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 8.16. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 8.71. *Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \rightarrow \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L,\mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^\infty \in [0,\infty)^{\{0,1,\ldots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \rightarrow \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\ldots\}}$.

Así el par (Z,S) es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ en $(H\times L,\mathcal{H}\otimes\mathcal{L})$. El par $\mathcal{H}\otimes\mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H\times L,\mathcal{H}\otimes\mathcal{L})$ en $([0,\infty),\mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 8.72. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t \left(z, (s_k)_0^{\infty}\right) = \theta_t \left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^{\infty}\right)$$

donde $n_{t-} = inf \{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 8.61. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 8.73. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0, S_n), S_0, \ldots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z, S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 8.62. *Si el par (Z, S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 8.17. *Supóngase que el par (Z, S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z, S) con periodo d.*

Definición 8.74. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx > 0$ con $X_2, X_3, \ldots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\, dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 8.75. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z, S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 8.63.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0, \infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z, S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 8.64. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0, \infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 8.18. *Supongase que el par (Z, S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S).*

Teorema 8.19. *Supongase que (Z, S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0, 1)$ e independiente de $\left(Z^0, S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*, S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 8.20. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{8.16}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{8.17}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{8.18}$$

Definición 8.76. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.*

Nota 8.65. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 8.77. *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i \in \mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i := \sigma\left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 8.78. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 8.21. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i$ en $\otimes_{i \in \mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i \left(y \in \prod_{i \in \mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i \in \mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i \in \mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 8.79. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 8.80. *Dos espacios medibles $(E, \mathcal{E})$ y $(G, \mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \rightarrow G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 8.81. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G, \mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 8.66. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 8.82. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ es una familia $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s \in \mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E, \mathcal{E})$.*

Definición 8.83. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right):=\otimes_{s\in\mathbb{I}}\left(E,\mathcal{E}\right)$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z\left(w\right)=\left(Z_{s}\left(w\right)\right)_{s\in\mathbb{I}}$ y $w\in\Omega$.

Nota 8.67. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 8.68. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $\left(E,\mathcal{E}\right)=\left(\mathbb{R},\mathcal{B}\right)$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_{1}}\leq x_{1},\dots,Z_{t_{n}}\leq x_{n}\right),x_{1},\dots,x_{n}\in\mathbb{R},t_{1},\dots,t_{n}\in\mathbb{I},n\geq1. \tag{8.19}$$

Nota 8.69. *Para espacios polacos $\left(E,\mathcal{E}\right)$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 8.84. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z\left(w\right)$ para $w\in\Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 8.70. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $\left(H,\mathcal{H}\right)$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z\in H$ a $z_{t}\in E$ para $t\in\mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H}:=E^{\mathbb{I}}\cap H:=\left\{A\cap H:A\in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{8.20}$$

Nota 8.71. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_{t} es un mapeo medible de $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ a $\left(H,\mathcal{H}\right)$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $\left(H,\mathcal{H}\right)$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 8.72. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $\left(H,\mathcal{H}\right)$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(H,\mathcal{H}\right)$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 8.85. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $\left(E,\mathcal{E}\right)$ y sea T un tiempo aleatorio en $\left[0,\infty\right)$. Por Z_{T} se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_{T}\left(w\right):=Z_{T\left(w\right)}\left(w\right).w\in\Omega.$$

Definición 8.86. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible **(CM)** si el mapeo que toma $\left(w,t\right)\in\Omega\times\left[0,\infty\right)$ a $Z_{t}\left(w\right)\in E$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}\left[0,\infty\right)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 8.73. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_{T} es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $\left(w,T\left(w\right)\right)$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}\left[0,\infty\right)$ medible, mientras que el segundo toma $\left(w,T\left(w\right)\right)$ en $Z_{T\left(w\right)}\left(w\right)$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}\left[0,\infty\right)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 8.87. *Un PEOSCT con espacio de estados $\left(H,\mathcal{H}\right)$ es canónicamente conjuntamente medible **(CCM)** si el mapeo $\left(z,t\right)\in H\times\left[0,\infty\right)$ en $Z_{t}\in E$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}\left[0,\infty\right)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 8.74. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega\times\left[0,\infty\right)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma $\left(w,t\right)$ en $\left(Z\left(w\right),t\right)$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}\left[0,\infty\right)/\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}\left[0,\infty\right)$ medible, y el segundo que toma $\left(Z\left(w\right),t\right)$ en $Z_{t}\left(w\right)$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}\left[0,\infty\right)/\mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 8.88. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{\left(z_{t+s}\right)_{s\in\left[0,\infty\right)}:z\in H\right\}=H,\ t\in\left[0,\infty\right).$$

Definición 8.89. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_{t}, $t\in\left[0,\infty\right)$, de H a H por*

$$\theta_{t}z=\left(z_{t+s}\right)_{s\in\left[0,\infty\right)},\ z\in H.$$

Definición 8.90. *Se dice que un proceso Z es shift-medible (**SM**) si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ medible.*

Nota 8.75. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 8.76.
- *Dado el espacio polaco $(E,\mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0,\infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 8.77. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 8.22. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 8.91. *Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^{\infty}$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L,\mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^{\infty} \in [0,\infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.

Así el par (Z,S) es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ en $(H\times L, \mathcal{H}\otimes\mathcal{L})$. El par $\mathcal{H}\otimes\mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H\times L,\mathcal{H}\otimes\mathcal{L})$ en $([0,\infty),\mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 8.92. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H\times L$ en $H\times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z,(s_k)_0^{\infty}\right) = \theta_t\left(z,\left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^{\infty}\right)$$

donde $n_{t-} = inf\{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 8.78. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t) \in H\times[0,\infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 8.93. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0,S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $((Z_s)\, s\in[0,S_n), S_0,\dots,S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 8.79. *Si el par (Z,S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \dots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 8.23. *Supóngase que el par (Z,S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**},S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z,S) con periodo d.*

Definición 8.94. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx > 0$ con $X_2, X_3, \dots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\,dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 8.95. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 8.80.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 8.81. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 8.24. *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 8.25. *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0, S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*, S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 8.26. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{8.21}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{8.22}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{8.23}$$

8.1. One Sided Process

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L, \mathcal{L})$, $S : (\Omega, \mathcal{F}) \to (L, \mathcal{L})$, donde

$$L = \left\{(s_k)_0^\infty \in [0,\infty)^{\{0,1,\ldots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\ldots\}}$.

Así el par (Z,S) es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty))$.

$$\begin{aligned} (Z,S) : (\Omega, \mathcal{F}) &\to (H \times L, \mathcal{H} \times \mathcal{L}) \\ \mathcal{H} \times \mathcal{L}^* : (H \times L, \mathcal{H} \times \mathcal{L}) &\to ([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty)). \end{aligned}$$

8.2. Regeneration: Shift-Measurability

Definición 8.96. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t \left(z, (s_k)_0^\infty\right) = \theta_t \left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^\infty\right)$$

donde $n_{t-} = inf \{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 8.82. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

8.3. Cycle-Stationarity

Definición 8.97. *Los tiempos aleatorios S_n dividen Z en*

a) un retraso $D = (Z_s)_{s \in [0,\infty)}$,

b) una sucesión de ciclos $C_n = \left(Z_{S_{n-1}+s}\right)_{s \in [0, X_n)}$, $n \geq 1$,

c) las longitudes de los ciclos $X_n = S_n - S_{n-1}$, $n \neq 1$.

Nota 8.83. *a) El retraso D y los ciclos C_n son procesos estocásticos que se desvanecen en los tiempos aleatorios S_0 y X_n respectivamente.*

b) Las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots$ y el retraso de la longitud (delay-length) S_0 son obtenidos por el mismo mapeo medible de sus respectivos ciclos $C_1, C_2, \ldots$ y el retraso D.

c) El par (Z,S) es un mapeo medible del retraso y de los ciclos y viceversa.

Definición 8.98. *(Z,S) es zero-delayed si $S_0 \equiv 0$. Se define el par zero-delayed por*

$$\left(Z^0, S^0\right) := \theta_{S_0}(Z,S)$$

Entonces $S_0^0 \equiv 0$ y $S_0^0 \equiv X_1^0$, mientras que para $n \geq 1$ se tiene que $X_n^0 \equiv X_n$ y $C_n^0 \equiv C_n$.

Definición 8.99. *Se le llama al par (Z,S) **ciclo-stacionario** si los ciclos forman una sucesión estacionaria, es decir, con $=^D$ denota iguales en distribución:*

$$(C_{n+1}, C_{n+2}, \ldots) =^D (C_1, C_2, \ldots), \geq 0$$

Ciclo-estacionareidad es equivalente a

$$\theta_{S_n}(Z,S) =^D \left(Z^0, S^0\right), \geq 0,$$

donde $(C_{n+1}, C_{n+2}, \ldots)$ y $\theta_{S_n}(Z,S)$ son mapeos medibles de cada uno y que no dependen de n.

Definición 8.100. *Un par (Z^*, S^*) es **estacionario** si $\theta(Z^*, S^*) =^D (Z^*, S^*)$, para $t \geq 0$.*

Teorema 8.27. *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0, S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces (Z^*, S^*) es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

8.4. Classical Regeneration

Definición 8.101. *Dado un proceso* ***PEOSSM*** *(Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice* ***regenerativo clásico*** *con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0,S_n), S_0, \ldots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 8.84. *Si el par (Z,S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un* ***proceso de renovación****. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

8.5. Stationary Version

Teorema 8.28. *Supóngase que el par (Z,S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 8.27 es una versión estacionaria de (Z,S).*

8.6. Spread Out

Definición 8.102. *Una variable aleatoria X_1 es* ***spread out*** *si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx > 0$ con $X_2, X_3, \ldots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\,dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

8.7. Wide Sense Regeneration

Definición 8.103. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (****WSR****) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 8.85.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 8.86. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 8.29. *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema (8.27) es una versión estacionaria de (Z,S).*

8.8. Existence of Regeneration Times

Teorema 8.30. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSCTSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{8.24}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{8.25}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{8.26}$$

Corolario 8.1. *Bajo las condiciones del Teorema anterior (8.30), el par* (Z, S) *es regenerativo clásico. Si además se tiene que* $\mathbb{E}[X_1] < \infty$ *por el Teorema (8.28) existe un par* (Z^*, S^*) *que es una vesión estacionaria de* (Z, S).

Nota 8.87. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 8.88. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 8.104 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 8.105. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 8.89. *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$, *donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 8.106. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, *sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 8.90. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 8.91. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 8.107 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 8.92. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

9. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[123]

Definición 9.1. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{9.1}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 9.2. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 9.1. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \ t \ < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &=& 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 9.1. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 9.1 (**Proceso Poisson**)**.** *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 9.2. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 9.1. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{9.2}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{9.3}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 9.1 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{9.4}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 9.3. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 9.2. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{9.5}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{9.6}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 9.2. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{9.7}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 9.4. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 9.2. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 9.5. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 9.3. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 9.3. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 9.3. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 9.3 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 9.6. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{9.8}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 9.4. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 9.4 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 9.7. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 9.5. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 9.8. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 9.6. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 9.4. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 9.5. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 9.4 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right], \; t \geq 0,$$

Definición 9.9. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{9.9}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 9.7. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 9.6 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 9.5. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 9.7 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 9.8. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 9.10. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 9.9. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 9.8 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 9.6. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 9.9 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 9.10. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 9.11. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 9.11. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 9.10 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Definición 9.12. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 9.7. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 9.8. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 9.9. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 9.13. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 9.10. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 9.11 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 9.14 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 9.11. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{9.10}$$

Ejemplo 9.2 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (15.43) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 9.12. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 9.15. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 9.13. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 9.12. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 9.12. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación N es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 9.14. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 9.5. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 9.15. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 9.16. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 9.16 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 9.17. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 9.17. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 9.18. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 9.18. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 9.19. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 9.19 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 9.20. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 9.20. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$
\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,
\end{aligned}
$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$
\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},
$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 9.21. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$
\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},
$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 9.21. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$
\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,
$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 9.22. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 9.23. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$, *es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$, S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 9.13. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$. *Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t, *además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,*entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

9.1. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[123]

Definición 9.24. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{9.11}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 9.25. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, *para* $n \geq 1$, *son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F, *donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$. *Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 9.22. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F, *con* $F(0) = 0$, *para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F. *Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, *donde* $T_n \rightarrow \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 9.13. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 9.23. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 9.14. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (9.12)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (9.13)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 9.6 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{9.14}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\left\{Z\left(t\right) : t \geq 0\right\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N\left(t\right)$

Definición 9.26. *Para el proceso $\left\{Z\left(t\right) : t \geq 0\right\}$ se define la fluctuación máxima de $Z\left(t\right)$ en el intervalo $\left(T_{n-1}, T_n\right]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z\left(t\right) - Z\left(T_{n-1}\right)|$$

Teorema 9.15. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} & (9.15)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (9.16)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 9.7. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{9.17}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 9.27. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 9.14. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 9.28. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 9.15. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 9.24. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 9.16. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 9.8 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \, t \geq 0,$$

Definición 9.29. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \, t \geq 0, \tag{9.18}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 9.16. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 9.17 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 9.30. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 9.17. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 9.31. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 9.18. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 9.25. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 9.18. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 9.9 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 9.32. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \ t \geq 0, \tag{9.19}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 9.19. *La función* $U \star h(t)$ *es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 9.19 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 9.26. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 9.20 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 9.20. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 9.33. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 9.21. *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 9.21 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$*.*

Nota 9.27. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 9.22 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 9.22. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 9.34. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 9.23. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t),\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 9.23 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

9.2. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[123]

Definición 9.35. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{9.20}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 9.36. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 9.28. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 9.24. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 9.29. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 9.24. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{9.21}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{9.22}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 9.10 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{9.23}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 9.37. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 9.25. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{9.24}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{9.25}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 9.11. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{9.26}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 9.38. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 9.25. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 9.39. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 9.26. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 9.30. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 9.26. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 9.12 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 9.40. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \ t \geq 0, \tag{9.27}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 9.27. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 9.27 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 9.41. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 9.28. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 9.42. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 9.29. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 9.31. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 9.28. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 9.13 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}\left[N(t) + 1\right], \; t \geq 0,$$

Definición 9.43. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{9.28}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 9.30. *La función* $U \star h(t)$ *es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 9.29 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \textit{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 9.32. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 9.30 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 9.31. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,, \textit{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 9.44. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \textit{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 9.32. *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\,, \textit{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 9.31 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$*.*

Nota 9.33. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 9.32 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 9.33. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,, \textit{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 9.45. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 9.34. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 9.33 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T > t)\right]$.

9.3. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[123]

Definición 9.46. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{9.29}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 9.47. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 9.34. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\ t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 9.35. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 9.35. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 9.34. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu,\ c.s. \tag{9.30}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu,\ c.s. \tag{9.31}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 9.14 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t \to \infty. \tag{9.32}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 9.48. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 9.35. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a,\ c.s. \tag{9.33}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu,\ c.s. \tag{9.34}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 9.15. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]},\ c.s.\ cuando\ t \to \infty. \tag{9.35}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 9.49. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 9.36. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 9.50. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 9.37. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 9.36. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 9.36. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 9.16 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 9.51. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \ t \geq 0, \tag{9.36}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 9.38. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 9.37 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 9.52. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 9.39. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 9.53. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 9.40. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 9.37. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 9.38. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 9.17 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}\left[N(t) + 1\right], \ t \geq 0,$$

Definición 9.54. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \ t \geq 0, \tag{9.37}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 9.41. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 9.39 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 9.38. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 9.40 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 9.42. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 9.55. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 9.43. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 9.41 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 9.39. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 9.42 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 9.44. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 9.56. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 9.45. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 9.43 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

9.4. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[123]

Definición 9.57. *Sean $0\leq T_1\leq T_2\leq\ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\left(T_{n}\leq t\right),\tag{9.38}$$

para $t\geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t):t\geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0<T_1<T_2<\ldots$ casi seguramente.

Definición 9.58. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n=T_n-T_{n-1}$, para $n\geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0)=0$ y $T_0=0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 9.40. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0)=0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1,\xi_2,\ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ y $N(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}(T_n\leq t)$, donde $T_n\rightarrow\infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t)\geq n\} & = & \{T_n\leq t\}\\ T_{N(t)}\leq & t & <T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n)=n$, y

$$N\left(t\right)=\max\left\{n:T_{n}\leq t\right\}=\min\left\{n:T_{n+1}>t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 9.46. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 9.41. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 9.44. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{9.39}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{9.40}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 9.18 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{9.41}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 9.59. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 9.45. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{9.42}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{9.43}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 9.19. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{9.44}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 9.60. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t),\ t\geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t)=\mathbb{1}(t\geq 0)$.

Proposición 9.47. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t>0$, y es $U^{'}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t)>N(t-)\right\}=0,\ t\geq 0.$$

Definición 9.61. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha)=\int_{\mathbb{R}_{+}}e^{-\alpha t}dF(t),\ \alpha\geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F^{n\star}}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F}(\alpha)^{n}=\frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 9.48. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha)=\frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 9.42. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)]=\lambda t$, para $t\geq 0$.*

Teorema 9.46. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t)=\mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()}f(T_n)\right]=\int_{(0,t]}f(s)\,d\eta(s),\ t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1,X_2,\ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n|T_n=s]=f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)}X_n\right]=\int_{(0,t]}f(s)\,d\eta(s),\ t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 9.20 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right]=\mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right],\ t\geq 0,$$

Definición 9.62. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t)=h(t)+\int_{[0,t]}H(t-s)\,dF(s),\ t\geq 0,\tag{9.45}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 9.49. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 9.47 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 9.63. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 9.50. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 9.64. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 9.51. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 9.43. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 9.48. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 9.21 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 9.65. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{9.46}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 9.52. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 9.49 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 9.44. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 9.50 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 9.53. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,, \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 9.66. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)\,|T] = \mathbb{E}[X(t)]\,, \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 9.54. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t)\,, \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]\,.$$

Teorema 9.51 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 9.45. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 9.52 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 9.55. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,, \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 9.67. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 9.56. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t),\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 9.53 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\left\{|X(t)|:t\leq T\right\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

10. Procesos Regenerativos: Thorisson

Definición 10.1. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ a $(E,\mathcal{E})$, es decir, para $A\in\mathcal{E}$, se tiene que $\{Y\in A\}\in\mathcal{F}$, donde $\{Y\in A\}:=\{w\in\Omega:Y(w)\in A\}=:Y^{-1}A$.*

Nota 10.1. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.2. *Para cada $i\in\mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i,\mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i):=\left(\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i\in\mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i:=\sigma\left\{\{y:y_i\in A\}:i\in\mathbb{I}\ y\ A\in\mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 10.3. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi\in(\Omega,\mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 10.1. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i\in\mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i,\mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y\in\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i:y_i\in A_{i_1},\ldots,y_n\in A_{i_n}\right)=P_{i_1}\left(A_{i_n}\right)\cdots P_{i_n}\left(A_{i_n}\right)$$

para todos los enteros $n>0$, toda $i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{I}$ y todo $A_{i_1}\in\mathcal{E}_{i_1},\ldots,A_{i_n}\in\mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i,P_i):=\left(\prod_{i\in\mathbb{I}},E_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 10.4. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 10.5. *Dos espacios medibles $(E,\mathcal{E})$ y $(G,\mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f:E\rightarrow G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 10.6. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G,\mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0,1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 10.2. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 10.7. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ es una familia $Z=(\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E,\mathcal{E})$.*

Definición 10.8. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}=[0,\infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right):=\otimes_{s\in\mathbb{I}}(E,\mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w)=(Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w\in\Omega$.

Nota 10.3. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 10.4. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E,\mathcal{E})=(\mathbb{R},\mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_1}\leq x_1,\ldots,Z_{t_n}\leq x_n\right),x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R},t_1,\ldots,t_n\in\mathbb{I},n\geq 1. \tag{10.1}$$

Nota 10.5. *Para espacios polacos $(E,\mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 10.9. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w\in\Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 10.6. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H,\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z\in H$ a $z_t\in E$ para $t\in\mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H}:=E^{\mathbb{I}}\cap H:=\left\{A\cap H:A\in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{10.2}$$

Nota 10.7. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ a $(H,\mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H,\mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 10.8. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H,\mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 10.10. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0,\infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w):=Z_{T(w)}(w).w\in\Omega.$$

Definición 10.11. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible (**CM**) si el mapeo que toma $(w,t)\in\Omega\times[0,\infty)$ a $Z_t(w)\in E$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 10.9. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w,T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w,T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.12. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H,\mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible (**CCM**) si el mapeo $(z,t)\in H\times[0,\infty)$ en $Z_t\in E$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 10.10. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0,\infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w,t) en $(Z(w),t)$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w),t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 10.13. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s\in[0,\infty)} : z \in H\right\} = H,\ t \in [0,\infty).$$

Definición 10.14. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0,\infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s\in[0,\infty)},\ z \in H.$$

Definición 10.15. *Se dice que un proceso Z es shift-medible **(SM)** si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ medible.*

Nota 10.11. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 10.12.

- *Dado el espacio polaco $(E,\mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0,\infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuya cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 10.13. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 10.2. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 10.16. *Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L,\mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^\infty \in [0,\infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.

Así el par (Z,S) es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ en $(H\times L, \mathcal{H}\otimes\mathcal{L})$. El par $\mathcal{H}\otimes\mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H\times L,\mathcal{H}\otimes\mathcal{L})$ en $([0,\infty),\mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 10.17. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H\times L$ en $H\times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z,(s_k)_0^\infty\right) = \theta_t\left(z,\left(s_{n_{t-}+k}-t\right)_0^\infty\right)$$

donde $n_{t-} = inf\{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 10.14. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t)\in H\times[0,\infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.18. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0,S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $((Z_s)\, s\in[0,S_n), S_0,\dots,S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 10.15. *Si el par (Z, S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 10.3. *Supóngase que el par (Z, S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z, S) con periodo d.*

Definición 10.19. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx > 0$ con $X_2, X_3, \ldots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\, dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 10.20. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z, S) = (Z^0, S^0)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z, S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 10.16.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z, S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 10.17. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 10.4. *Supongase que el par (Z, S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S).*

Teorema 10.5. *Supongase que (Z, S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0, 1)$ e independiente de (Z^0, S^0) y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*, S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 10.6. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{10.3}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{10.4}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{10.5}$$

- Lista de pendientes por agregar

  a) definiciones de la Sección 2.1, página 128
  b) Segundo párrafo, Sección 2.8, página 131
  c) Sección 2.7, página 130
  d) Teorema 4.5, página 362
  e) Definición 3.1, página 346
  f) Ecuaciones 4.6 y 4.7 página 362
  b) Teorema 3.1, página 348.

10.1. Procesos Regenerativos: Thorisson

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 10.21. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.*

Nota 10.18. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.22. *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma\left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 10.23. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 10.7. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i \left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 10.24. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 10.25. *Dos espacios medibles $(E, \mathcal{E})$ y $(G, \mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \to G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 10.26. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G, \mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 10.19. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 10.27. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ es una familia $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E, \mathcal{E})$.*

Definición 10.28. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}} (E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 10.20. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 10.21. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_1} \leq x_1, \dots, Z_{t_n} \leq x_n\right), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{10.6}$$

Nota 10.22. *Para espacios polacos $(E, \mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 10.29. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 10.23. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H, \mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{10.7}$$

Nota 10.24. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ a $(H, \mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H, \mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 10.25. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H, \mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 10.30. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0, \infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) . w \in \Omega.$$

Definición 10.31. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible (**CM**) si el mapeo que toma $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 10.26. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.32. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H, \mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible (**CCM**) si el mapeo $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 10.27. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0, \infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w, t) en $(Z(w), t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w), t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 10.33. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante (**ISI**) si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s\in[0,\infty)} : z \in H\right\} = H,\, t \in [0,\infty).$$

Definición 10.34. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0,\infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s\in[0,\infty)},\, z \in H.$$

Definición 10.35. *Se dice que un proceso Z es shift-medible (**SM**) si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ medible.*

Nota 10.28. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 10.29.

- *Dado el espacio polaco $(E,\mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0,\infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 10.30. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 10.8. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 10.36. *Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L,\mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^\infty \in [0,\infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.

Así el par (Z,S) es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 10.37. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z,(s_k)_0^\infty\right) = \theta_t\left(z,\left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^\infty\right)$$

donde $n_{t-} = inf\{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 10.31. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.38. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0,S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0,S_n), S_0,\dots,S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 10.32. *Si el par (Z,S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \dots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 10.9. *Supóngase que el par (Z, S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z, S) con periodo d.*

Definición 10.39. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx > 0$ con $X_2, X_3, \ldots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\, dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 10.40. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z, S) = (Z^0, S^0)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z, S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 10.33.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z, S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 10.34. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 10.10. *Supongase que el par (Z, S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S).*

Teorema 10.11. *Supongase que (Z, S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0, 1)$ e independiente de (Z^0, S^0) y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*, S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 10.12. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{10.8}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{10.9}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{10.10}$$

Definición 10.41. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.*

Nota 10.35. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.42. *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma\left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 10.43. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 10.13. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 10.44. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 10.45. *Dos espacios medibles $(E, \mathcal{E})$ y $(G, \mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \rightarrow G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 10.46. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G, \mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 10.36. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 10.47. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ es una familia $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E, \mathcal{E})$.*

Definición 10.48. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}} (E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 10.37. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 10.38. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}(Z_{t_1} \leq x_1, \ldots, Z_{t_n} \leq x_n), x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{10.11}$$

Nota 10.39. *Para espacios polacos $(E, \mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 10.49. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 10.40. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H, \mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{10.12}$$

Nota 10.41. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ a $(H, \mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H, \mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 10.42. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H, \mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 10.50. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0, \infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) . w \in \Omega.$$

Definición 10.51. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible (**CM**) si el mapeo que toma $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 10.43. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F} / \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.52. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H, \mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible (**CCM**) si el mapeo $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 10.44. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0, \infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w, t) en $(Z(w), t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w), t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 10.53. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante (**ISI**) si*

$$\left\{\left(z_{t+s}\right)_{s \in [0, \infty)} : z \in H\right\} = H, \; t \in [0, \infty).$$

Definición 10.54. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0, \infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = \left(z_{t+s}\right)_{s \in [0, \infty)}, \; z \in H.$$

Definición 10.55. *Se dice que un proceso Z es shift-medible (**SM**) si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H}$ medible.*

Nota 10.45. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 10.46.

- *Dado el espacio polaco $(E, \mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0, \infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 10.47. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 10.14. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 10.56. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *espacio de probabilidad que soporta al proceso* $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ *y* $S = (S_k)_0^{\infty}$ *donde* Z *es un PEOSCTM con espacio de estados* $(E, \mathcal{E})$ *y espacio de trayectorias* $(H, \mathcal{H})$ *y además* S *es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición* $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$*. Considerando* S *como un mapeo medible de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *al espacio sucesión* $(L, \mathcal{L})$*, donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^{\infty} \in [0,\infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ *son los subconjuntos de Borel de* L*, es decir,* $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$*.*

Así el par (Z, S) *es un mapeo medible de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *en* $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$*. El par* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^{+}$ *denotará la clase de todas las funciones medibles de* $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ *en* $([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty))$*.*

Definición 10.57. *Sea* θ_t *el mapeo-shift conjunto de* $H \times L$ *en* $H \times L$ *dado por*

$$\theta_t\left(z, (s_k)_0^{\infty}\right) = \theta_t\left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^{\infty}\right)$$

donde $n_{t-} = inf\{n \geq 1 : s_n \geq t\}$*.*

Nota 10.48. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que* Z *es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias* H *es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma* $(z, t) \in H \times [0,\infty)$ *en* $z_t \in E$ *es* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ *medible.*

Definición 10.58. *Dado un proceso* ***PEOSSM*** *(Proceso Estocástico One Side Shift Medible)* Z*, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración* S *si*

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z, S)$ *es independiente de* $((Z_s)\, s \in [0, S_n), S_0, \dots, S_n)$ *Si lo anterior se cumple, al par* (Z, S) *se le llama regenerativo clásico.*

Nota 10.49. *Si el par* (Z, S) *es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos* $X_1, X_2, \dots,$ *son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso* S_0*, es decir,* S *es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 10.15. *Supóngase que el par* (Z, S) *es regenerativo clásico con* $\mathbb{E}[X_1] < \infty$*. Entonces* (Z^*, S^*) *en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de* (Z, S)*. Además, si* X_1 *es lattice con span d, entonces* (Z^{**}, S^{**}) *en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de* (Z, S) *con periodo d.*

Definición 10.59. *Una variable aleatoria* X_1 *es spread out si existe una* $n \geq 1$ *y una función* $f \in \mathcal{B}^{+}$ *tal que* $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx > 0$ *con* $X_2, X_3, \dots, X_n$ *copias i.i.d de* X_1*,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\,dx$$

para $B \in \mathcal{B}$*.*

Definición 10.60. *Dado un proceso estocástico* Z *se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración* S *si* $\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right)$ *para* $n \geq 0$ *en distribución y* $\theta_{S_n}(Z, S)$ *es independiente de* $(S_0, S_1, \dots, S_n)$ *para* $n \geq 0$*. Se dice que el par* (Z, S) *es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 10.50.

- *El proceso de trayectorias* $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ *es WSR con tiempos de regeneración* S *pero no es regenerativo clásico.*
- *Si* Z *es cualquier proceso estacionario y* S *es un proceso de renovación que es independiente de* Z*, entonces* (Z, S) *es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 10.51. *Para cualquier proceso estocástico* Z*, el proceso de trayectorias* $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ *es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 10.16. *Supongase que el par (Z, S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S).*

Teorema 10.17. *Supongase que (Z, S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0, 1)$ e independiente de $\left(Z^0, S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*, S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 10.18. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{10.13}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{10.14}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{10.15}$$

Definición 10.61. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.*

Nota 10.52. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.62. *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i \in \mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i := \sigma\left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 10.63. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 10.19. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i$ en $\otimes_{i \in \mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i\left(y \in \prod_{i \in \mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i,P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 10.64. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 10.65. *Dos espacios medibles $(E,\mathcal{E})$ y $(G,\mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \rightarrow G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 10.66. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G,\mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0,1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 10.53. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 10.67. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ es una familia $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E,\mathcal{E})$.*

Definición 10.68. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0,\infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}}(E,\mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 10.54. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 10.55. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E,\mathcal{E}) = (\mathbb{R},\mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}(Z_{t_1} \leq x_1,\ldots,Z_{t_n} \leq x_n), x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}, t_1,\ldots,t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{10.16}$$

Nota 10.56. *Para espacios polacos $(E,\mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 10.69. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 10.57. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H,\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{10.17}$$

Nota 10.58. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ a $(H,\mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H,\mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 10.59. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H,\mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 10.70. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0,\infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w).w \in \Omega.$$

Definición 10.71. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible (**CM**) si el mapeo que toma $(w,t) \in \Omega \times [0,\infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 10.60. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.72. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H,\mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible (**CCM**) si el mapeo $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 10.61. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0,\infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w,t) en $(Z(w),t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w),t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 10.73. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante (**ISI**) si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s\in[0,\infty)} : z \in H\right\} = H,\ t \in [0,\infty).$$

Definición 10.74. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0,\infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s\in[0,\infty)},\ z \in H.$$

Definición 10.75. *Se dice que un proceso Z es shift-medible (**SM**) si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ medible.*

Nota 10.62. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 10.63.

- *Dado el espacio polaco $(E,\mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0,\infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 10.64. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 10.20. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 10.76. *Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L,\mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^\infty \in [0,\infty)^{\{0,1,\ldots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\ldots\}}$.

Así el par (Z,S) es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 10.77. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z, (s_k)_0^\infty\right) = \theta_t\left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^\infty\right)$$

donde $n_{t-} = inf\{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 10.65. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.78. *Dado un proceso* ***PEOSSM*** *(Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}\left(Z,S\right)=\left(Z^0,S^0\right),n\geq 0$$

y además $\theta_{S_n}\left(Z,S\right)$ es independiente de $\left(\left(Z_s\right)s\in\left[0,S_n\right),S_0,\ldots,S_n\right)$ Si lo anterior se cumple, al par $\left(Z,S\right)$ se le llama regenerativo clásico.

Nota 10.66. *Si el par $\left(Z,S\right)$ es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1,X_2,\ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 10.21. *Supóngase que el par $\left(Z,S\right)$ es regenerativo clásico con $\mathbb{E}\left[X_1\right]<\infty$. Entonces $\left(Z^*,S^*\right)$ en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de $\left(Z,S\right)$. Además, si X_1 es lattice con span d, entonces $\left(Z^{**},S^{**}\right)$ en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de $\left(Z,S\right)$ con periodo d.*

Definición 10.79. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n\geq 1$ y una función $f\in\mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}}f\left(x\right)dx>0$ con $X_2,X_3,\ldots,X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}\left(X_1+\cdots+X_n\in B\right)\geq\int_B f\left(x\right)dx$$

para $B\in\mathcal{B}$.

Definición 10.80. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}\left(Z,S\right)=\left(Z^0,S^0\right)$ para $n\geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}\left(Z,S\right)$ es independiente de $\left(S_0,S_1,\ldots,S_n\right)$ para $n\geq 0$. Se dice que el par $\left(Z,S\right)$ es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 10.67.

- *El proceso de trayectorias $\left(\theta_s Z\right)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces $\left(Z,S\right)$ es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 10.68. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $\left(\theta_s Z\right)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 10.22. *Supongase que el par $\left(Z,S\right)$ es WSR con $\mathbb{E}\left[X_1\right]<\infty$. Entonces $\left(Z^*,S^*\right)$ en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de $\left(Z,S\right)$.*

Teorema 10.23. *Supongase que $\left(Z,S\right)$ es cycle-stationary con $\mathbb{E}\left[X_1\right]<\infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0,S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $\left(\Omega,\mathbb{P}\right)$ definida por*

$$d\mathbb{P}^*=\frac{X_1}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}d\mathbb{P}$$

. Sea $\left(Z^*,S^*\right)$ con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0,S^0\right)\in\cdot\right)$. Entonces $\left(Z*,S^*\right)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}\left[f\left(Z^*,S^*\right)\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^{X_1}f\left(\theta_s\left(Z^0,S^0\right)\right)ds\right]/\mathbb{E}\left[X_1\right]$$

$f\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty\left(x\right):=\frac{\mathbb{E}\left[X_1\right]\wedge x}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}$$

para $x\geq 0$ y densidad $\mathbb{P}\left[X_1>x\right]/\mathbb{E}\left[X_1\right]$, con $x\geq 0$.

Teorema 10.24. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{10.18}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{10.19}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{10.20}$$

Definición 10.81. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.*

Nota 10.69. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.82. *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma\left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 10.83. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 10.25. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i \left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 10.84. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 10.85. *Dos espacios medibles $(E, \mathcal{E})$ y $(G, \mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \rightarrow G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 10.86. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G, \mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 10.70. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 10.87. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ es una familia $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E, \mathcal{E})$.*

Definición 10.88. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right):=\otimes_{s\in\mathbb{I}}\left(E,\mathcal{E}\right)$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z\left(w\right)=\left(Z_{s}\left(w\right)\right)_{s\in\mathbb{I}}$ y $w\in\Omega$.

Nota 10.71. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 10.72. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $\left(E,\mathcal{E}\right)=\left(\mathbb{R},\mathcal{B}\right)$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_{1}}\leq x_{1},\dots,Z_{t_{n}}\leq x_{n}\right),x_{1},\dots,x_{n}\in\mathbb{R},t_{1},\dots,t_{n}\in\mathbb{I},n\geq1. \tag{10.21}$$

Nota 10.73. *Para espacios polacos $\left(E,\mathcal{E}\right)$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 10.89. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z\left(w\right)$ para $w\in\Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 10.74. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $\left(H,\mathcal{H}\right)$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z\in H$ a $z_{t}\in E$ para $t\in\mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H}:=E^{\mathbb{I}}\cap H:=\left\{A\cap H:A\in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{10.22}$$

Nota 10.75. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_{t} es un mapeo medible de $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ a $\left(H,\mathcal{H}\right)$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $\left(H,\mathcal{H}\right)$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 10.76. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $\left(H,\mathcal{H}\right)$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(H,\mathcal{H}\right)$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 10.90. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $\left(E,\mathcal{E}\right)$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0,\infty)$. Por Z_{T} se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_{T}\left(w\right):=Z_{T\left(w\right)}\left(w\right).w\in\Omega.$$

Definición 10.91. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible **(CM)** si el mapeo que toma $\left(w,t\right)\in\Omega\times[0,\infty)$ a $Z_{t}\left(w\right)\in E$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 10.77. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_{T} es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $\left(w,T\left(w\right)\right)$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)$ medible, mientras que el segundo toma $\left(w,T\left(w\right)\right)$ en $Z_{T\left(w\right)}\left(w\right)$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.92. *Un PEOSCT con espacio de estados $\left(H,\mathcal{H}\right)$ es canónicamente conjuntamente medible **(CCM)** si el mapeo $\left(z,t\right)\in H\times[0,\infty)$ en $Z_{t}\in E$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 10.78. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega\times[0,\infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma $\left(w,t\right)$ en $\left(Z\left(w\right),t\right)$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)$ medible, y el segundo que toma $\left(Z\left(w\right),t\right)$ en $Z_{t}\left(w\right)$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 10.93. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{\left(z_{t+s}\right)_{s\in[0,\infty)}:z\in H\right\}=H,\ t\in[0,\infty).$$

Definición 10.94. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_{t}, $t\in[0,\infty)$, de H a H por*

$$\theta_{t}z=\left(z_{t+s}\right)_{s\in[0,\infty)},\ z\in H.$$

Definición 10.95. *Se dice que un proceso Z es shift-medible (**SM**) si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ medible.*

Nota 10.79. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 10.80.

- *Dado el espacio polaco $(E,\mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0,\infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 10.81. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 10.26. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 10.96. *Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z=(Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S=(S_k)_0^{\infty}$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \rightarrow \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L,\mathcal{L})$, donde*

$$L=\left\{(s_k)_0^{\infty} \in [0,\infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \rightarrow \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L}=L\cap\mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.

Así el par (Z,S) es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ en $(H\times L,\mathcal{H}\otimes\mathcal{L})$. El par $\mathcal{H}\otimes\mathcal{L}^{+}$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H\times L,\mathcal{H}\otimes\mathcal{L})$ en $([0,\infty),\mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 10.97. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H\times L$ en $H\times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z,(s_k)_0^{\infty}\right)=\theta_t\left(z,\left(s_{n_{t-}+k}-t\right)_0^{\infty}\right)$$

donde $n_{t-}=inf\{n\geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 10.82. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t)\in H\times[0,\infty)$ en $z_t\in E$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.98. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S)=\left(Z^0,S^0\right), n\geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $((Z_s)\, s\in[0,S_n), S_0,\dots,S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 10.83. *Si el par (Z,S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1,X_2,\dots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 10.27. *Supóngase que el par (Z,S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**},S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z,S) con periodo d.*

Definición 10.99. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n\geq 1$ y una función $f\in\mathcal{B}^{+}$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx>0$ con $X_2,X_3,\dots,X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_n\in B)\geq\int_B f(x)\,dx$$

para $B\in\mathcal{B}$.

Definición 10.100. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S)=\left(Z^0,S^0\right)$ para $n\geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0,S_1,\ldots,S_n)$ para $n\geq 0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 10.84.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 10.85. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 10.28. *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 10.29. *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0,S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega,\mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^*=\frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]}d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*,S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0,S^0\right)\in\cdot\right)$. Entonces $(Z*,S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*,S^*)]=\mathbb{E}\left[\int_0^{X_1}f\left(\theta_s\left(Z^0,S^0\right)\right)ds\right]/\mathbb{E}[X_1]$$

$f\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x):=\frac{\mathbb{E}[X_1]\wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x\geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1>x]/\mathbb{E}[X_1]$, con $x\geq 0$.

Teorema 10.30. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0\leq S_0<S_1$ y*

$$\theta_{S_1}Z=\theta_{S_0}Z \text{ en distribución.} \tag{10.23}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z,S)=\left(Z^0,S^0\right),n\geq 0, \text{ en distribución,} \tag{10.24}$$

$$(Z,S_0,S_1) \text{ depende de } (X_2,X_3,\ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1}Z. \tag{10.25}$$

10.2. Procesos Regenerativos: Thorisson

Para $\{X(t):t\geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n=T_n-T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 10.101. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ a $(E,\mathcal{E})$, es decir, para $A\in\mathcal{E}$, se tiene que $\{Y\in A\}\in\mathcal{F}$, donde $\{Y\in A\}:=\{w\in\Omega:Y(w)\in A\}=:Y^{-1}A$.*

Nota 10.86. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.102. *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma\left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 10.103. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 10.31. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 10.104. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 10.105. *Dos espacios medibles $(E, \mathcal{E})$ y $(G, \mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \to G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 10.106. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G, \mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 10.87. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 10.107. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ es una familia $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E, \mathcal{E})$.*

Definición 10.108. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}} (E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 10.88. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 10.89. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}(Z_{t_1} \leq x_1, \ldots, Z_{t_n} \leq x_n), x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{10.26}$$

Nota 10.90. *Para espacios polacos $(E, \mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 10.109. *Las trayectorias de* Z *son las realizaciones* $Z(w)$ *para* $w \in \Omega$ *del mapeo aleatorio* Z*.*

Nota 10.91. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto* H *de* $E^{\mathbb{I}}$*. En este caso es natural considerar a* Z *como un elemento aleatorio que no está en* $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ *sino en* $(H, \mathcal{H})$*, donde* $\mathcal{H}$ *es la* σ*-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a* $z \in H$ *a* $z_t \in E$ *para* $t \in \mathbb{I}$*. A* $\mathcal{H}$ *se le conoce como la traza de* H *en* $E^{\mathbb{I}}$*, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{10.27}$$

Nota 10.92. Z *tiene trayectorias con valores en* H *y cada* Z_t *es un mapeo medible de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *a* $(H, \mathcal{H})$*. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular* H*, al espacio* $(H, \mathcal{H})$ *se le llama el espacio de trayectorias de* Z*.*

Nota 10.93. *La distribución del proceso estocástico* Z *con espacio de trayectorias* $(H, \mathcal{H})$ *es la distribución de* Z *como un elemento aleatorio en* $(H, \mathcal{H})$*. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 10.110. *Sea* Z *un PEOSCT con espacio de estados* $(E, \mathcal{E})$ *y sea* T *un tiempo aleatorio en* $[0, \infty)$*. Por* Z_T *se entiende el mapeo con valores en* E *definido en* Ω *en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) . w \in \Omega.$$

Definición 10.111. *Un PEOSCT* Z *es conjuntamente medible* ***(CM)*** *si el mapeo que toma* $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ *a* $Z_t(w) \in E$ *es* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ *medible.*

Nota 10.94. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que* Z_T *es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma* w *en* $(w, T(w))$ *es* $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ *medible, mientras que el segundo toma* $(w, T(w))$ *en* $Z_{T(w)}(w)$ *es* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ *medible.*

Definición 10.112. *Un PEOSCT con espacio de estados* $(H, \mathcal{H})$ *es canónicamente conjuntamente medible* ***(CCM)*** *si el mapeo* $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ *en* $Z_t \in E$ *es* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ *medible.*

Nota 10.95. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM* Z *es un mapeo de* $\Omega \times [0, \infty)$ *a* E*, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma* (w, t) *en* $(Z(w), t)$ *es* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ *medible, y el segundo que toma* $(Z(w), t)$ *en* $Z_t(w)$ *es* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ *medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 10.113. *Un conjunto de trayectorias* H *de un PEOSCT* Z*, es internamente shift-invariante* ***(ISI)*** *si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s \in [0, \infty)} : z \in H\right\} = H,\ t \in [0, \infty).$$

Definición 10.114. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift* θ_t*,* $t \in [0, \infty)$*, de* H *a* H *por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)},\ z \in H.$$

Definición 10.115. *Se dice que un proceso* Z *es shift-medible* ***(SM)*** *si* Z *tiene un conjunto de trayectorias* H *que es ISI y además el mapeo que toma* $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ *en* $\theta_t z \in H$ *es* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H}$ *medible.*

Nota 10.96. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias* H *ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 10.97.

- *Dado el espacio polaco* $(E, \mathcal{E})$ *se tiene el conjunto de trayectorias* $D_E[0, \infty)$ *que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si* G *es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en* G*, y como* G *es segundo numerable como subespacio de* E*, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 10.98. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 10.32. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 10.116. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^{\infty}$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \rightarrow \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L, \mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^{\infty} \in [0, \infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \rightarrow \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.

Así el par (Z, S) es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^{+}$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0, \infty), \mathcal{B}[0, \infty))$.

Definición 10.117. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z, (s_k)_0^{\infty}\right) = \theta_t\left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^{\infty}\right)$$

donde $n_{t-} = inf\{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 10.99. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.118. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0, S_n), S_0, \dots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z, S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 10.100. *Si el par (Z, S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \dots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 10.33. *Supóngase que el par (Z, S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^{*}, S^{*}) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z, S) con periodo d.*

Definición 10.119. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^{+}$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx > 0$ con $X_2, X_3, \dots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\, dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 10.120. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \dots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z, S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 10.101.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z, S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 10.102. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 10.34. *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 10.35. *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0,S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega,\mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^*=\frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]}d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*,S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0,S^0\right)\in\cdot\right)$. Entonces $(Z*,S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}\left[f\left(Z^*,S^*\right)\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^{X_1}f\left(\theta_s\left(Z^0,S^0\right)\right)ds\right]/\mathbb{E}[X_1]$$

$f\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x):=\frac{\mathbb{E}[X_1]\wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x\geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1>x]/\mathbb{E}[X_1]$, con $x\geq 0$.

Teorema 10.36. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0\leq S_0<S_1$ y*

$$\theta_{S_1}Z=\theta_{S_0}Z \text{ en distribución.} \tag{10.28}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z,S)=\left(Z^0,S^0\right),n\geq 0, \text{ en distribución,} \tag{10.29}$$

$$(Z,S_0,S_1) \text{ depende de } (X_2,X_3,\ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1}Z. \tag{10.30}$$

Definición 10.121. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ a $(E,\mathcal{E})$, es decir, para $A\in\mathcal{E}$, se tiene que $\{Y\in A\}\in\mathcal{F}$, donde $\{Y\in A\}:=\{w\in\Omega:Y(w)\in A\}=:Y^{-1}A$.*

Nota 10.103. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.122. *Para cada $i\in\mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i,\mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i):=\left(\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i\in\mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i:=\sigma\left\{\{y:y_i\in A\}:i\in\mathbb{I} \text{ y } A\in\mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 10.123. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi\in(\Omega,\mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 10.37. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i\in\mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i,\mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y\in\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i:y_i\in A_{i_1},\ldots,y_n\in A_{i_n}\right)=P_{i_1}\left(A_{i_n}\right)\cdots P_{i_n}\left(A_{i_n}\right)$$

para todos los enteros $n>0$, toda $i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{I}$ y todo $A_{i_1}\in\mathcal{E}_{i_1},\ldots,A_{i_n}\in\mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i,P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}},E_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 10.124. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 10.125. *Dos espacios medibles $(E,\mathcal{E})$ y $(G,\mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f:E\rightarrow G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 10.126. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G,\mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0,1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 10.104. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 10.127. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ es una familia $Z=(\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E,\mathcal{E})$.*

Definición 10.128. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}=[0,\infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right):=\otimes_{s\in\mathbb{I}}(E,\mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w)=(Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w\in\Omega$.

Nota 10.105. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 10.106. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E,\mathcal{E})=(\mathbb{R},\mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}(Z_{t_1}\leq x_1,\ldots,Z_{t_n}\leq x_n), x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}, t_1,\ldots,t_n\in\mathbb{I}, n\geq 1. \tag{10.31}$$

Nota 10.107. *Para espacios polacos $(E,\mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 10.129. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w\in\Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 10.108. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H,\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z\in H$ a $z_t\in E$ para $t\in\mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H}:=E^{\mathbb{I}}\cap H:=\left\{A\cap H : A\in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{10.32}$$

Nota 10.109. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ a $(H,\mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H,\mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 10.110. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H,\mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 10.130. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0,\infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w):=Z_{T(w)}(w).w\in\Omega.$$

Definición 10.131. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible **(CM)** si el mapeo que toma $(w,t) \in \Omega \times [0,\infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 10.111. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w,T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w,T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.132. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H,\mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible **(CCM)** si el mapeo $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 10.112. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0,\infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w,t) en $(Z(w),t)$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w),t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 10.133. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s\in[0,\infty)} : z \in H\right\} = H,\ t \in [0,\infty).$$

Definición 10.134. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0,\infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s\in[0,\infty)},\ z \in H.$$

Definición 10.135. *Se dice que un proceso Z es shift-medible **(SM)** si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ medible.*

Nota 10.113. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 10.114.

- *Dado el espacio polaco $(E,\mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0,\infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 10.115. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 10.38. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 10.136. *Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L,\mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^\infty \in [0,\infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.

Así el par (Z,S) es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ en $(H \times L,\mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L,\mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0,\infty),\mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 10.137. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z,(s_k)_0^\infty\right) = \theta_t\left(z,\left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^\infty\right)$$

donde $n_{t-} = inf\{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 10.116. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.138. *Dado un proceso* ***PEOSSM*** *(Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $\left((Z_s)\, s \in [0, S_n), S_0, \ldots, S_n\right)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 10.117. *Si el par (Z,S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 10.39. *Supóngase que el par (Z,S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z,S) con periodo d.*

Definición 10.139. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx > 0$ con $X_2, X_3, \ldots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\, dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 10.140. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 10.118.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 10.119. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 10.40. *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 10.41. *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0, S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*, S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}\left[f(Z^*, S^*)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 10.42. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{10.33}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n} (Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{10.34}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{10.35}$$

Definición 10.141. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1} A$.*

Nota 10.120. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.142. *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i := \sigma \left\{ \{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i \right\}.$$

Definición 10.143. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 10.43. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i$ en $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i \left(y \in \prod_{i \in \mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n} \right) = P_{i_1} (A_{i_n}) \cdots P_{i_n} (A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i \in \mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 10.144. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 10.145. *Dos espacios medibles $(E, \mathcal{E})$ y $(G, \mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \rightarrow G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 10.146. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G, \mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 10.121. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 10.147. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ es una familia $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s \in \mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E, \mathcal{E})$.*

Definición 10.148. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right):=\otimes_{s\in\mathbb{I}}\left(E,\mathcal{E}\right)$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z\left(w\right)=\left(Z_{s}\left(w\right)\right)_{s\in\mathbb{I}}$ y $w\in\Omega$.

Nota 10.122. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 10.123. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $\left(E,\mathcal{E}\right)=\left(\mathbb{R},\mathcal{B}\right)$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_{1}}\leq x_{1},\ldots,Z_{t_{n}}\leq x_{n}\right),x_{1},\ldots,x_{n}\in\mathbb{R},t_{1},\ldots,t_{n}\in\mathbb{I},n\geq1. \tag{10.36}$$

Nota 10.124. *Para espacios polacos $\left(E,\mathcal{E}\right)$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 10.149. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z\left(w\right)$ para $w\in\Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 10.125. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $\left(H,\mathcal{H}\right)$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z\in H$ a $z_{t}\in E$ para $t\in\mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H}:=E^{\mathbb{I}}\cap H:=\left\{A\cap H:A\in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{10.37}$$

Nota 10.126. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_{t} es un mapeo medible de $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ a $\left(H,\mathcal{H}\right)$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $\left(H,\mathcal{H}\right)$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 10.127. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $\left(H,\mathcal{H}\right)$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(H,\mathcal{H}\right)$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 10.150. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $\left(E,\mathcal{E}\right)$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0,\infty)$. Por Z_{T} se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_{T}\left(w\right):=Z_{T\left(w\right)}\left(w\right).w\in\Omega.$$

Definición 10.151. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible **(CM)** si el mapeo que toma $\left(w,t\right)\in\Omega\times[0,\infty)$ a $Z_{t}\left(w\right)\in E$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 10.128. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_{T} es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $\left(w,T\left(w\right)\right)$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)$ medible, mientras que el segundo toma $\left(w,T\left(w\right)\right)$ en $Z_{T\left(w\right)}\left(w\right)$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.152. *Un PEOSCT con espacio de estados $\left(H,\mathcal{H}\right)$ es canónicamente conjuntamente medible **(CCM)** si el mapeo $\left(z,t\right)\in H\times[0,\infty)$ en $Z_{t}\in E$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 10.129. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega\times[0,\infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma $\left(w,t\right)$ en $\left(Z\left(w\right),t\right)$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)$ medible, y el segundo que toma $\left(Z\left(w\right),t\right)$ en $Z_{t}\left(w\right)$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 10.153. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{\left(z_{t+s}\right)_{s\in[0,\infty)}:z\in H\right\}=H,\,t\in[0,\infty).$$

Definición 10.154. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0, \infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s \in [0,\infty)}, \ z \in H.$$

Definición 10.155. *Se dice que un proceso Z es shift-medible (**SM**) si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H}$ medible.*

Nota 10.130. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 10.131.
- *Dado el espacio polaco $(E, \mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0, \infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 10.132. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 10.44. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 10.156. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s \in [0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L, \mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{ (s_k)_0^\infty \in [0, \infty)^{\{0,1,\ldots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty \right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\ldots\}}$.

Así el par (Z, S) es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0, \infty), \mathcal{B}[0, \infty))$.

Definición 10.157. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t \left(z, (s_k)_0^\infty\right) = \theta_t \left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^\infty\right)$$

donde $n_{t-} = inf \{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 10.133. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.158. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0, S_n), S_0, \ldots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z, S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 10.134. *Si el par (Z, S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 10.45. *Supóngase que el par (Z, S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z, S) con periodo d.*

Definición 10.159. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx > 0$ con $X_2, X_3, \ldots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\, dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 10.160. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 10.135.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 10.136. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 10.46. *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 10.47. *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0, S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*, S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 10.48. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{10.38}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{10.39}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{10.40}$$

Definición 10.161. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.*

Nota 10.137. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.162. *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma\left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 10.163. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 10.49. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i \left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 10.164. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 10.165. *Dos espacios medibles $(E, \mathcal{E})$ y $(G, \mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \to G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 10.166. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G, \mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 10.138. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 10.167. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ es una familia $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E, \mathcal{E})$.*

Definición 10.168. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}} (E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 10.139. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 10.140. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}(Z_{t_1} \leq x_1, \ldots, Z_{t_n} \leq x_n), x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{10.41}$$

Nota 10.141. *Para espacios polacos $(E, \mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 10.169. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 10.142. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H, \mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{10.42}$$

Nota 10.143. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ a $(H, \mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H, \mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 10.144. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H, \mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 10.170. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0, \infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) . w \in \Omega.$$

Definición 10.171. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible **(CM)** si el mapeo que toma $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 10.145. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F} / \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.172. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H, \mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible **(CCM)** si el mapeo $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 10.146. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0, \infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w, t) en $(Z(w), t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w), t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 10.173. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s \in [0, \infty)} : z \in H\right\} = H,\ t \in [0, \infty).$$

Definición 10.174. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0, \infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)},\ z \in H.$$

Definición 10.175. *Se dice que un proceso Z es shift-medible **(SM)** si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H}$ medible.*

Nota 10.147. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 10.148.

- *Dado el espacio polaco $(E, \mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0, \infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 10.149. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 10.50. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 10.176. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^{\infty}$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L, \mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^{\infty} \in [0, \infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.

Así el par (Z, S) es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^{+}$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0, \infty), \mathcal{B}[0, \infty))$.

Definición 10.177. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t \left(z, (s_k)_0^{\infty}\right) = \theta_t \left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^{\infty}\right)$$

donde $n_{t-} = inf \{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 10.150. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 10.178. *Dado un proceso* ***PEOSSM*** *(Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n} (Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n} (Z, S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0, S_n), S_0, \dots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z, S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 10.151. *Si el par (Z, S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \dots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 10.51. *Supóngase que el par (Z, S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z, S) con periodo d.*

Definición 10.179. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^{+}$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx > 0$ con $X_2, X_3, \dots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\, dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 10.180. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n} (Z, S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n} (Z, S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \dots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z, S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 10.152.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z, S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 10.153. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 10.52. *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 10.53. *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0,S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega,\mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^*=\frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]}d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*,S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0,S^0\right)\in\cdot\right)$. Entonces $(Z*,S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}\left[f\left(Z^*,S^*\right)\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^{X_1}f\left(\theta_s\left(Z^0,S^0\right)\right)ds\right]/\mathbb{E}[X_1]$$

$f\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x):=\frac{\mathbb{E}[X_1]\wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x\geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1>x]/\mathbb{E}[X_1]$, con $x\geq 0$.

Teorema 10.54. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0\leq S_0<S_1$ y*

$$\theta_{S_1}Z=\theta_{S_0}Z \text{ en distribución.} \tag{10.43}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z,S)=\left(Z^0,S^0\right),n\geq 0,\ \text{ en distribución,} \tag{10.44}$$

$$(Z,S_0,S_1)\ \text{ depende de }\ (X_2,X_3,\ldots)\ \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1}Z. \tag{10.45}$$

11. Procesos Regenerativos Estacionarios: Visión clásica

Definición 11.1. *Sean $0\leq T_1\leq T_2\leq\ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}(T_n\leq t), \tag{11.1}$$

para $t\geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t):t\geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0<T_1<T_2<\ldots$ casi seguramente.

Definición 11.2. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n=T_n-T_{n-1}$, para $n\geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0)=0$ y $T_0=0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 11.1. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0)=0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1,\xi_2,\ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ y $N(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}(T_n\leq t)$, donde $T_n\to\infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

12. Procesos Regenerativos

Nota 12.1. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 12.2. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.1 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 12.2. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.3. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

12.1. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.3. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 12.4. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 12.5. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.4 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.6. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.5. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.7. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

12.2. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.6. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 12.1. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Observación 12.2. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.7 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.8. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.8. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.9. *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_{∞}

12.3. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.9. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el* n*-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 12.10. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 12.11. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.10 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.12. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.11. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.13. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

12.4. Procesos Regenerativos

Nota 12.14. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 12.15. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.12 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 12.13. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.16. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.14. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 12.17. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 12.18. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.15 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.19. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.16. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.20. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 12.17. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 12.18. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 12.19. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 12.1. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{X} V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t}V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$*.*

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\left\{X_{1},X_{2},\ldots\right\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right)\in A|X_{1}+X_{2}+\cdots+X_{R(t)}=s,\left\{V\left(\tau\right),\tau<s\right\}\right\}=\mathbb{P}\left\{V\left(t-s\right)\in A|X_{1}>t-s\right\},$$

para todo $0\leq s\leq t$, donde $R\left(t\right)=\max\left\{X_{1}+X_{2}+\cdots+X_{j}\leq t\right\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0,X_{1})$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$, $[X_{1},X_{1}+X_{2})$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X=X_{1}$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 12.20. *Se define el proceso estacionario,* $\left\{V^{*}\left(t\right),t\geq0\right\}$*, para* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ *por*

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right)\in A\right\}=\frac{1}{\mathbb{E}\left[X\right]}\int_{0}^{\infty}\mathbb{P}\left\{V\left(t+x\right)\in A|X>x\right\}\left(1-F\left(x\right)\right)dx,$$

para todo $t\geq0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 12.21. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0,\lambda,2\lambda,\ldots$ *para alguna* $\lambda>0$ *entera.*

Definición 12.22. *Una modificación medible de un proceso* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$*, es una versión de este,* $\left\{V\left(t,w\right)\right\}$ *conjuntamente medible para* $t\geq0$ *y para* $w\in S$*,* S *espacio de estados para* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$*.*

Teorema 12.2. *Sea* $\left\{V\left(t\right),t\geq\right\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}\left[X\right]<\infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t}V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$*.*

Para $\left\{X\left(t\right):t\geq0\right\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N\left(t\right)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_{+}$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X\left(t\right)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_{n}=T_{n}-T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

12.5. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.23. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 12.3. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 12.4. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.24 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.21. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.25. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.22. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

12.6. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.26. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 12.5. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 12.6. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.27 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.23. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.28. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.24. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

12.7. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.29. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 12.7. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 12.8. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.30 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.25. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.31. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.26. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Procesos Regenerativos

Nota 12.27. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 12.28. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.32 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 12.33. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.29. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.34. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 12.30. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 12.31. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.35 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.32. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.36. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.33. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

12.8. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.37. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 12.9. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 12.10. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.38 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.34. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.39. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.35. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

12.9. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.40. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 12.11. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 12.12. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.41 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.36. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.42. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.37. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

12.10. Procesos Regenerativos

Nota 12.38. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 12.39. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.43 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 12.44. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.40. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

12.11. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.45. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 12.41. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 12.42. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.46 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.43. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.47. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.44. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

12.12. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.48. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 12.13. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 12.14. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.49 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.45. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.50. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.46. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

12.13. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.51. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 12.15. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Observación 12.16. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.52 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.47. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.53. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.48. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

12.14. Procesos Regenerativos

Nota 12.49. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 12.50. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

12.15. Procesos Regenerativos

12.16. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.54. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 12.51. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 12.52. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.55 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.53. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.56. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.54. *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$, *donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_{∞}

Procesos Regenerativos

Nota 12.55. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 12.56. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.57 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 12.58. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.57. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.59. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 12.58. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 12.59. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.60 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.60. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.61. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.61. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

12.17. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.62. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 12.17. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 12.18. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.63 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.62. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.64. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.63. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

12.18. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.65. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 12.19. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 12.20. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.66 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.64. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.67. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.65. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

12.19. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.68. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 12.21. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 12.22. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.69 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.66. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.70. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.67. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

12.20. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.71. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 12.23. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 12.24. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.72 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.68. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.73. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.69. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

12.21. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.74. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 12.25. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Observación 12.26. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.75 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.70. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.76. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.71. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

12.22. Procesos Regenerativos

Nota 12.72. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 12.73. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.77 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 12.78. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.74. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.79. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 12.75. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Nota 12.76. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.80 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.77. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.81. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.78. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 12.82. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 12.83. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 12.84. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 12.3. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 12.85. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 12.86. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 12.87. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 12.4. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

12.23. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.88. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el* n*-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Observación 12.27. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Observación 12.28. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.89 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.79. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.90. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.80. *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_{∞}

12.24. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 12.91. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Observación 12.29. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Observación 12.30. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 12.92 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 12.81. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 12.93. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 12.82. *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$, *donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_{∞}

13. Procesos de Renovación

Definición 13.1. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.1}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 13.2. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, *para* $n \geq 1$, *son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F, *donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$. *Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 13.1. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F, *con* $F(0) = 0$, *para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F. *Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, *donde* $T_n \rightarrow \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

13.1. Procesos de Renovación

Definición 13.3. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.2}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 13.4. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, *para* $n \geq 1$, *son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F, *donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$. *Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 13.2. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F, *con* $F(0) = 0$, *para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F. *Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, *donde* $T_n \to \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Ejemplo 13.1 (**Proceso Poisson**). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación* $N(t)$ *tienen distribución exponencial* $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ *con tasa* λ. *Entonces* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ.

Nota 13.3. *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n, *para* $n \geq 2$, *a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G, *entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Nota 13.4. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 13.1 (Teorema Principal de Renovación). *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \to \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) \, ds.$$

Proposición 13.1. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 13.5. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}[X(T + t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 13.2. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t),\ donde\ h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 13.2 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 13.5. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 13.3 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 13.3. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 13.6. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T + t)|T] = \mathbb{E}[X(t)],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 13.4. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t),\ donde\ h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 13.4 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 13.7. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 13.6. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 13.7. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 13.8. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 13.8. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 13.9. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 13.5 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 13.9 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t*.*

- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t*, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t*.*

- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$*, la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t*.*

Nota 13.10. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n*, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$*. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t + y) - N((t - x)) = 0\} \tag{13.3}$$

Ejemplo 13.2 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*, entonces de la expresión (15.43) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$*.*

Nota 13.11. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 13.10. *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$*,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 13.12. *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$*,* $t \geq 0$*.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 13.5. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 13.6. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 13.13. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 13.1. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Procesos de Renovación

Definición 13.11. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.4}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 13.12. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 13.14. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Procesos de Renovación

Definición 13.13. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.5}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 13.14. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 13.15. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Procesos de Renovación

Definición 13.15. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.6}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 13.16. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 13.16. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Procesos de Renovación

Definición 13.17. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.7}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 13.18. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 13.17. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Procesos de Renovación

Definición 13.19. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.8}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 13.20. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 13.18. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

13.2. Procesos de Renovación

Definición 13.21. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.9}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 13.22. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 13.19. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

13.3. Procesos de Renovación

Definición 13.23. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.10}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 13.24. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 13.20. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

13.4. Procesos de Renovación

Definición 13.25. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.11}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 13.26. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 13.21. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

13.5. Procesos de Renovación

Definición 13.27. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.12}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 13.28. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 13.22. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

13.6. Procesos de Renovación

Definición 13.29. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.13}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 13.30. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 13.23. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Definición 13.31. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.14}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 13.32. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, *para* $n \geq 1$, *son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F, *donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$. *Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 13.24. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F, *con* $F(0) = 0$, *para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F. *Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, *donde* $T_n \to \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 13.6. *Para cada* $t \geq 0$, *la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, *para* $m \geq 1$.

Ejemplo 13.3 (**Proceso Poisson**)**.** *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación* $N(t)$ *tienen distribución exponencial* $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ *con tasa* λ. *Entonces* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ.

Nota 13.25. *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la* n*-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 13.7. *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (13.15)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (13.16)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 13.2 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$
t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{13.17}
$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 13.33. *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$
M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|
$$

Teorema 13.8. *Supóngase que* $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (13.18)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (13.19)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 13.3. *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{13.20}
$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 13.34. *La función de renovación asociada con la distribución* F*, del proceso* $N(t)$*, es*

$$
U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,
$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$*.*

Proposición 13.7. *Supóngase que la distribución de inter-renovación* F *tiene densidad* f*. Entonces* $U(t)$ *también tiene densidad, para* $t > 0$*, y es* $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$*. Además*

$$
\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.
$$

Definición 13.35. *La Transformada de Laplace-Stieljes de* F *está dada por*

$$
\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.
$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 13.8. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 13.26. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 13.9. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 13.4 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1],\ t \geq 0,$$

Definición 13.36. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{13.21}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 13.9. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 13.10 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 13.37. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 13.10. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 13.38. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 13.11. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 13.27. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 13.11. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 13.5 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 13.39. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t - s) \, dF(s), \; t \geq 0, \tag{13.22}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 13.12. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 13.12 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 13.28. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 13.13 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 13.13. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\textit{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 13.40. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\textit{ para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 13.14. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\textit{ donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 13.14 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Nota 13.29. *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)|\leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 13.15 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 13.15. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\textit{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 13.41. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\textit{ para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 13.16. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\textit{ donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 13.16 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 13.42. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 13.30. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 13.31. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 13.32. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 13.43. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 13.33. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 13.17 (Procesos Regenerativos). *Suponga que el proceso*

Definición 13.44 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- *$A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- *$B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- *$L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 13.34. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{13.23}$$

Ejemplo 13.4 (Tiempos de recurrencia Poisson). *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (15.43) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 13.35. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 13.45. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 13.36. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 13.17. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 13.18. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 13.37. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 13.6. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

13.7. Procesos de Renovación

Definición 13.46. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.24}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 13.47. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 13.38. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

13.8. Procesos de Renovación

Definición 13.48. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.25}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 13.49. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 13.39. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

13.9. Procesos de Renovación

Definición 13.50. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.26}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 13.51. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 13.40. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

13.10. Procesos de Renovación

Definición 13.52. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.27}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 13.53. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 13.41. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

13.11. Procesos de Renovación

Definición 13.54. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.28}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 13.55. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 13.42. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Nota 13.43. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 13.19 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 13.18. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 13.56. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 13.19. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t),\ donde\ h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 13.20 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$.

13.12. Procesos de Renovación

Definición 13.57. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.29}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 13.58. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 13.44. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

13.13. Procesos de Renovación

Definición 13.59. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.30}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 13.60. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 13.45. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

13.14. Procesos de Renovación

Definición 13.61. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.31}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 13.62. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 13.46. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

13.15. Procesos de Renovación

Definición 13.63. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.32}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 13.64. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 13.47. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes N$\tilde{A}^o$meros.*

13.16. Procesos de Renovación

Definición 13.65. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.33}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 13.66. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 13.48. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes N$\tilde{A}^o$meros.*

13.17. Procesos de Renovación

Definición 13.67. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.34}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 13.68. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, para* $n \geq 1$*, son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F*, donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$*. Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 13.49. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F*, con* $F(0) = 0$*, para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F*. Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$*, donde* $T_n \to \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

13.18. Procesos de Renovación

Definición 13.69. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.35}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 13.70. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, para* $n \geq 1$*, son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F*, donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$*. Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 13.50. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F*, con* $F(0) = 0$*, para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F*. Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$*, donde* $T_n \to \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

13.19. Procesos de Renovación

Definición 13.71. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.36}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 13.72. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 13.51. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

13.20. Procesos de Renovación

Definición 13.73. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.37}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 13.74. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 13.52. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Definición 13.75. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.38}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 13.76. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 13.53. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 13.20. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 13.5 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 13.54. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 13.21. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{13.39}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{13.40}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 13.7 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{13.41}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 13.77. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 13.22. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{13.42}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{13.43}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 13.8. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{13.44}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 13.78. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 13.21. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 13.79. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 13.22. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 13.55. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 13.23. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 13.9 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 13.80. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{13.45}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 13.23. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 13.24 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu, \; \textit{cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 13.81. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 13.24. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 13.82. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 13.25. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 13.56. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 13.25. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 13.10 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 13.83. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \; t \geq 0, \tag{13.46}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 13.26. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 13.26 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \; \textit{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 13.57. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 13.27 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 13.27. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\textrm{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 13.84. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\textrm{ para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 13.28. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\textrm{ donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 13.28 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Nota 13.58. *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 13.29 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 13.29. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\textrm{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 13.85. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\textrm{ para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 13.30. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\textrm{ donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 13.30 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 13.86. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 13.59. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Nota 13.60. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 13.61. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 13.87. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 13.62. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 13.31 (Procesos Regenerativos). *Suponga que el proceso*

Definición 13.88 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- *$A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- *$B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- *$L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 13.63. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t + y) - N((t - x)) = 0\} \tag{13.47}$$

Ejemplo 13.6 (Tiempos de recurrencia Poisson). *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (15.43) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x+y$.

Nota 13.64. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 13.89. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 13.65. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 13.31. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 13.32. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 13.66. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 13.11. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

13.21. Procesos de Renovación

Definición 13.90. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{13.48}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 13.91. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 13.67. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

14. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.1. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 14.2. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 14.3. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 14.1. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

14.1. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.4. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 14.5. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 14.6. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 14.2. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Corolario 14.1. *Sea* $\{V(t), t \geq 0\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E} < \infty$*,* F *es no-aritmética, y para todo* $x \geq 0$*,* $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $[0, \tau]$*, entonces* $V(t)$ *converge en distribución cuando* $t \rightarrow \infty$ *y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V(t)$ *cuando* $t \rightarrow \infty$*.*

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.7. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 14.8. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 14.9. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t,w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 14.3. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$*.*

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.10. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 14.11. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 14.12. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t,w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 14.4. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}(0)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V(s)\,ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t}V(s)\,ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$*.*

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces

Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t. Entonces, determinando el primer momento es posible ver que

Definición 14.13. *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1)-\tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 14.14. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$.*

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t=\tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $\left[\overline{\tau}(m),\tau_i(m+1)\right]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{P_i(z_i)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si $I_i(z)=\mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$ se tiene que $F_i(z)=I_i\left[P_i(z)\right]$ para $i=1,2$.

Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (13.71), sean $T_1,T_2,\ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i)=0,L_2(T_i)=0,\hat{L}_1(T_i)=0$ y $\hat{L}_2(T_i)=0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 14.15. *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 14.16. *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 14.17. *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m=1,2,\ldots,M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

[9]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\left\{V(t),t\geq0\right\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\left\{X_1,X_2,\ldots\right\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t)\in A|X_1+X_2+\cdots+X_{R(t)}=s,\left\{V(\tau),\tau<s\right\}\right\}=\mathbb{P}\left\{V(t-s)\in A|X_1>t-s\right\},$$

para todo $0\leq s\leq t$, donde $R(t)=\max\left\{X_1+X_2+\cdots+X_j\leq t\right\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0,X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\left\{V(t),t\geq0\right\}$, $[X_1,X_1+X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X=X_1$ y sea F la función de distrbución de X

[9] In Stidham and Heyman [129] shows that is sufficient for the regenerative process to be stationary that the mean regenerative cycle time is finite: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}C_i^{(m)}\right]<\infty$,

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$, además, como $M_i>0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}\left[C_i\right]<\infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N}\mu_k<1$.

Definición 14.18. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$, *para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 14.19. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 14.20. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$, *es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$, S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 14.5. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$. *Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t, *además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,*entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 14.2. *Sea* $\{V(t), t \geq 0\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E} < \infty$, F *es no-aritmética, y para todo* $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $[0, \tau]$, *entonces* $V(t)$ *converge en distribución cuando* $t \rightarrow \infty$ *y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V(t)$ *cuando* $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.21. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$, *para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 14.22. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 14.23. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$, *es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$, S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 14.6. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$. *Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t, *además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,*entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.24. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$, *para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 14.25. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 14.26. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$, *es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$, S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 14.7. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$. *Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t, *además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^*\left(0\right)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V\left(s\right)ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$*.*

Para $\left\{X\left(t\right):t\geq0\right\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N\left(t\right)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X\left(t\right)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n=T_n-T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\left\{X_1,X_2,\ldots\right\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right)\in A|X_1+X_2+\cdots+X_{R(t)}=s,\left\{V\left(\tau\right),\tau<s\right\}\right\}=\mathbb{P}\left\{V\left(t-s\right)\in A|X_1>t-s\right\},$$

para todo $0\leq s\leq t$, donde $R\left(t\right)=\max\left\{X_1+X_2+\cdots+X_j\leq t\right\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $\left[0,t\right]$. El intervalo $\left[0,X_1\right)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$, $\left[X_1,X_1+X_2\right)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X=X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.27. *Se define el proceso estacionario,* $\left\{V^*\left(t\right),t\geq0\right\}$*, para* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ *por*

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right)\in A\right\}=\frac{1}{\mathbb{E}\left[X\right]}\int_0^{\infty}\mathbb{P}\left\{V\left(t+x\right)\in A|X>x\right\}\left(1-F\left(x\right)\right)dx,$$

para todo $t\geq0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 14.28. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0,\lambda,2\lambda,\ldots$ *para alguna* $\lambda>0$ *entera.*

Definición 14.29. *Una modificación medible de un proceso* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$*, es una versión de este,* $\left\{V\left(t,w\right)\right\}$ *conjuntamente medible para* $t\geq0$ *y para* $w\in S$*,* S *espacio de estados para* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$*.*

Teorema 14.8. *Sea* $\left\{V\left(t\right),t\geq\right\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}\left[X\right]<\infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^*\left(0\right)\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^*\left(0\right)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V\left(s\right)ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$*.*

Corolario 14.3. *Sea* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E}<\infty$*,* F *es no-aritmética, y para todo* $x\geq0$*,* $P\left\{V\left(t\right)\leq x,C>x\right\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $\left[0,\tau\right]$*, entonces* $V\left(t\right)$ *converge en distribución cuando* $t\rightarrow\infty$ *y*

$$\mathbb{E}V=\frac{\mathbb{E}\int_0^X V\left(s\right)ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V\left(t\right)$ *cuando* $t\rightarrow\infty$*.*

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

14.2. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.30. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 14.31. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 14.32. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 14.9. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.33. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 14.34. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 14.35. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 14.10. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] \quad = \quad \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 14.4. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) \, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

14.3. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.36. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 14.37. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 14.38. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 14.11. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

14.4. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.39. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 14.40. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 14.41. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 14.12. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^*(0)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^*(0)\right] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Corolario 14.5. *Sea* $\{V(t), t \geq 0\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E} < \infty$*,* F *es no-aritmética, y para todo* $x \geq 0$*,* $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $[0, \tau]$*, entonces* $V(t)$ *converge en distribución cuando* $t \rightarrow \infty$ *y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\,ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V(t)$ *cuando* $t \rightarrow \infty$*.*

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

14.5. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.42. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A\right\} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[X\right]} \int_0^\infty \mathbb{P}\left\{V(t+x) \in A | X > x\right\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 14.43. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 14.44. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 14.13. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^*(0)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]<\infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]<\infty$,*entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t}V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$.

Corolario 14.6. *Sea* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E}<\infty$, F *es no-aritmética, y para todo* $x\geq0$, $P\left\{V\left(t\right)\leq x,C>x\right\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $\left[0,\tau\right]$, *entonces* $V\left(t\right)$ *converge en distribución cuando* $t\rightarrow\infty$ *y*

$$\mathbb{E}V=\frac{\mathbb{E}\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V\left(t\right)$ *cuando* $t\rightarrow\infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

14.6. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\left\{X_{1},X_{2},\ldots\right\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right)\in A|X_{1}+X_{2}+\cdots+X_{R(t)}=s,\left\{V\left(\tau\right),\tau<s\right\}\right\}=\mathbb{P}\left\{V\left(t-s\right)\in A|X_{1}>t-s\right\},$$

para todo $0\leq s\leq t$, donde $R\left(t\right)=\max\left\{X_{1}+X_{2}+\cdots+X_{j}\leq t\right\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $\left[0,t\right]$. El intervalo $\left[0,X_{1}\right)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$, $\left[X_{1},X_{1}+X_{2}\right)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X=X_{1}$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.45. *Se define el proceso estacionario,* $\left\{V^{*}\left(t\right),t\geq0\right\}$, *para* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ *por*

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right)\in A\right\}=\frac{1}{\mathbb{E}\left[X\right]}\int_{0}^{\infty}\mathbb{P}\left\{V\left(t+x\right)\in A|X>x\right\}\left(1-F\left(x\right)\right)dx,$$

para todo $t\geq0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 14.46. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0,\lambda,2\lambda,\ldots$ *para alguna* $\lambda>0$ *entera.*

Definición 14.47. *Una modificación medible de un proceso* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$, *es una versión de este,* $\left\{V\left(t,w\right)\right\}$ *conjuntamente medible para* $t\geq0$ *y para* $w\in S$, S *espacio de estados para* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$.

Teorema 14.14. *Sea* $\left\{V\left(t\right),t\geq\right\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}\left[X\right]<\infty$. *Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t, *además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]<\infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]<\infty$,*entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t}V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$.

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces

Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t. Entonces, determinando el primer momento es posible ver que

Definición 14.48. *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 14.49. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.*

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si $I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)}\right]$ se tiene que $F_i(z) = I_i[P_i(z)]$ para $i = 1, 2$.

Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (13.71), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 14.50. *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 14.51. *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 14.52. *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

[10]

14.7. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

[10]In Stidham and Heyman [129] shows that is sufficient for the regenerative process to be stationary that the mean regenerative cycle time is finite: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$,

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1$.

Definición 14.53. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 14.54. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 14.55. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 14.15. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

14.8. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.56. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 14.57. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 14.58. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 14.16. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^{*}(0)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}(0)\right] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t} V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

14.9. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.59. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^{*}(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A\right\} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[X\right]} \int_{0}^{\infty} \mathbb{P}\left\{V(t+x) \in A | X > x\right\} (1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 14.60. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 14.61. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 14.17. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}\left[X\right] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^{*}(0)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}(0)\right] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t} V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

14.10. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.62. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 14.63. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 14.64. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 14.18. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

14.11. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.65. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 14.66. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 14.67. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 14.19. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] \quad = \quad \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 14.7. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

14.12. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.68. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 14.69. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 14.70. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 14.20. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

14.13. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.71. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t + x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 14.72. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 14.73. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 14.21. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^*(0)\right] < \infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,*entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

14.14. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.74. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$, *para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A\right\} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[X\right]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\left\{V(t+x) \in A | X > x\right\} (1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 14.75. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 14.76. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$, *es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$, S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 14.22. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}\left[X\right] < \infty$. *Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t, *además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^*(0)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^*(0)\right] < \infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,*entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

14.15. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.77. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 14.78. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 14.79. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 14.23. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.80. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 14.81. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 14.82. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 14.24. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Corolario 14.8. *Sea* $\{V(t), t \geq 0\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E} < \infty$*,* F *es no-aritmética, y para todo* $x \geq 0$*,* $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $[0, \tau]$*, entonces* $V(t)$ *converge en distribución cuando* $t \rightarrow \infty$ *y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V(t)$ *cuando* $t \rightarrow \infty$*.*

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

14.16. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.83. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 14.84. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 14.85. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 14.25. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

14.17. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.86. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t + x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 14.87. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 14.88. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 14.26. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

14.18. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.89. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 14.90. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 14.91. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 14.27. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Corolario 14.9. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \to \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \to \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 14.92. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{14.1}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 14.93. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 14.1. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 14.2. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 14.28 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 14.1. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 14.94. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)\,|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 14.2. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 14.29 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$.

14.19. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.95. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 14.96. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 14.97. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 14.30. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

14.20. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.98. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 14.99. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 14.100. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 14.31. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

14.21. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.101. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 14.102. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 14.103. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 14.32. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t}V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$*.*

14.22. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\left\{X_{1},X_{2},\ldots\right\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right)\in A|X_{1}+X_{2}+\cdots+X_{R(t)}=s,\left\{V\left(\tau\right),\tau<s\right\}\right\}=\mathbb{P}\left\{V\left(t-s\right)\in A|X_{1}>t-s\right\},$$

para todo $0\leq s\leq t$, donde $R\left(t\right)=\max\left\{X_{1}+X_{2}+\cdots+X_{j}\leq t\right\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0,X_{1})$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$, $[X_{1},X_{1}+X_{2})$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X=X_{1}$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.104. *Se define el proceso estacionario,* $\left\{V^{*}\left(t\right),t\geq0\right\}$*, para* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ *por*

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right)\in A\right\}=\frac{1}{\mathbb{E}\left[X\right]}\int_{0}^{\infty}\mathbb{P}\left\{V\left(t+x\right)\in A|X>x\right\}\left(1-F\left(x\right)\right)dx,$$

para todo $t\geq0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 14.105. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0,\lambda,2\lambda,\ldots$ *para alguna* $\lambda>0$ *entera.*

Definición 14.106. *Una modificación medible de un proceso* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$*, es una versión de este,* $\left\{V\left(t,w\right)\right\}$ *conjuntamente medible para* $t\geq0$ *y para* $w\in S$*,* S *espacio de estados para* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$*.*

Teorema 14.33. *Sea* $\left\{V\left(t\right),t\geq\right\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}\left[X\right]<\infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t}V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$*.*

14.23. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.107. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 14.108. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 14.109. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 14.34. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$*.*

Corolario 14.10. *Sea* $\{V(t), t \geq 0\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E} < \infty$*,* F *es no-aritmética, y para todo* $x \geq 0$*,* $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $[0, \tau]$*, entonces* $V(t)$ *converge en distribución cuando* $t \to \infty$ *y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V(t)$ *cuando* $t \to \infty$*.*

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

14.24. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.110. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 14.111. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 14.112. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 14.35. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 14.11. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

14.25. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.113. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 14.114. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 14.115. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 14.36. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

14.26. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 14.116. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 14.117. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 14.118. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 14.37. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

15. Output Process and Regenerative Processes

En Sigman, Thorison y Wolff [128] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 15.1. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k (X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 15.1. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) Los tiempos de servicio son identicamente cero;

b) $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;

c) $L = 1$ y $G = D$;

d) $L = \infty$ y $G = M$.

En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\left\{T_{n+1} - T_n \leq t\right\}$ son

a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;

b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;

c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;

d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.

- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.

- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.

- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 15.2. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.

  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$

  d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 15.3. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

15.1. Output Process and Regenerative Processes

En Sigman, Thorison y Wolff [128] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 15.2. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.

- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.

- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 15.4. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*

  b) *$L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;*

  c) *$L = 1$ y $G = D$;*

  d) *$L = \infty$ y $G = M$.*

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\left\{T_{n+1} - T_n \leq t\right\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;

  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;

  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;

  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.

- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.

- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.

- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 15.5. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*

  c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$*

  d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 15.6. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

En Sigman, Thorison y Wolff [128] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 15.3. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1}X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k (X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 15.7. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*
  b) $L = 0$, *para cualquier proceso de servicio* S;
  c) $L = 1$ *y* $G = D$;
  d) $L = \infty$ *y* $G = M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;
  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;
  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 15.8. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$
  b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*
  c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para* $L < \infty$
  d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

Teorema 15.9. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Nota 15.1. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 15.2. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 15.1 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 15.2. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 15.3. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 15.3. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 15.4. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 15.5. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 15.4 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 15.6. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 15.5. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 15.7. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Nota 15.8. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 15.9. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 15.6 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 15.7. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 15.10. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 15.8. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 15.11. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 15.12. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 15.9 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 15.13. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 15.10. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 15.14. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

15.2. Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [82]

Definición 15.11 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 15.15. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [128].*

Nota 15.16. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 15.12. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 15.17. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 15.18. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 15.19. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 15.20. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

15.3. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 15.13. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 15.14. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 15.15. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 15.10. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}(0)\right] < \infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\,ds\right] < \infty$,*entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t} V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 15.1. *Sea* $\{V(t), t \geq 0\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E} < \infty$, F *es no-aritmética, y para todo* $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $[0, \tau]$, *entonces* $V(t)$ *converge en distribución cuando* $t \rightarrow \infty$ *y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_{0}^{X} V(s)\,ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V(t)$ *cuando* $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

15.4. Procesos de Renovación

Definición 15.16. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{15.1}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 15.17. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, *para* $n \geq 1$, *son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F, *donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$. *Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 15.21. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F, *con* $F(0) = 0$, *para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F. *Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, *donde* $T_n \rightarrow \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

15.5. Teorema Principal de Renovación

Nota 15.22. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 15.11 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 15.4. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 15.18. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 15.5. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 15.12 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T > t)\right]$.

15.6. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 15.6. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 15.23. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 15.13. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (15.2)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (15.3)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 15.2 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{15.4}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 15.19. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 15.14. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (15.5)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (15.6)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 15.3. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{15.7}$$

15.7. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \;\; t \;\; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 15.7. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 15.24. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 15.15. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{15.8}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{15.9}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 15.4 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{15.10}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 15.20. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 15.16. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{15.11}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{15.12}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 15.5. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{15.13}$$

15.8. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 15.8. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 15.25. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 15.17. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{15.14}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{15.15}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 15.6 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \tag{15.16}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 15.21. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 15.18. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (15.17)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (15.18)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 15.7. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{15.19}
$$

15.9. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$
\begin{aligned}
\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\
T_{N(t)} \leq & \quad t < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$
N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}
$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$
P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)
$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$
\begin{aligned}
\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\
P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right)
\end{aligned}
$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$
\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)
$$

Proposición 15.9. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 15.26. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 15.19. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (15.20)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (15.21)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 15.8 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{15.22}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 15.22. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 15.20. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (15.23) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (15.24) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 15.9. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{15.25}$$

15.10. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 15.10. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 15.27. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 15.21. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{15.26}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{15.27}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 15.10 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{15.28}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 15.23. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 15.22. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{15.29}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{15.30}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 15.11. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{15.31}$$

15.11. Función de Renovación

Definición 15.24. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{15.32}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 15.11. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 15.23 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

15.12. Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 15.25. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 15.12. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 15.26. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 15.13. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 15.28. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 15.24. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 15.12 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \, t \geq 0,$$

15.13. Procesos de Renovación

Definición 15.27. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{15.33}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 15.28. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 15.29. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

15.14. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[123]

Definición 15.29. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{15.34}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 15.30. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 15.30. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 15.14. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 15.1 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 15.31. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 15.25. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (15.35) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (15.36) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 15.13 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (15.37)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 15.31. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 15.26. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (15.38) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (15.39) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 15.14. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (15.40)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 15.32. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 15.15. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 15.33. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 15.16. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 15.32. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 15.27. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 15.15 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 15.34. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \; t \geq 0, \tag{15.41}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 15.17. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 15.28 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 15.35. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 15.18. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 15.36. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 15.19. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 15.33. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 15.29. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 15.16 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 15.37. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{15.42}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 15.20. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (13.22).*

Teorema 15.30 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 15.34. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 15.31 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 15.21. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 15.38. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 15.22. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\,,\text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 15.32 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 15.35. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 15.33 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 15.23. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 15.39. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 15.24. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 15.34 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 15.40. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 15.36. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Nota 15.37. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 15.38. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 15.41. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 15.39. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 15.35 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 15.42 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*

- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*

- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 15.40. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{15.43}$$

Ejemplo 15.2 (Tiempos de recurrencia Poisson). *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (15.43) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 15.41. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 15.43. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 15.42. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 15.25. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 15.36. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 15.43. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 15.17. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

15.15. Procesos Regenerativos

Nota 15.44. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Nota 15.45. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 15.44 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 15.45. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 15.46. *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$, *donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_{∞}

15.16. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 15.46. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, *sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 15.47. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 15.48. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 15.47 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 15.49. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 15.48. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 15.50. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

15.17. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 15.49. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 15.50. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 15.51. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t,w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 15.37. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

15.18. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [129]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 15.52. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 15.53. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 15.54. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t,w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 15.38. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

16. Resultados para Procesos de Salida

En Sigman, Thorison y Wolff [128] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 16.1. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k (X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.

- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.

- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 16.1. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) Los tiempos de servicio son identicamente cero;

  b) $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;

  c) $L = 1$ y $G = D$;

  d) $L = \infty$ y $G = M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;

  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;

  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;

  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.

- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.

- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.

- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

Teorema 16.2. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

a) $s = \infty$

b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.

c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$

d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 16.3. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [101] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 16.4. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right) 2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2 (1-\delta)^{-1}.
\end{aligned}
$$

  Teorema 16.5. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 16.6. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

17. Resultados para Procesos de Salida

En Sigman, Thorison y Wolff [128] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 17.1. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 17.1. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*

  b) $L = 0$, *para cualquier proceso de servicio S;*

  c) $L = 1$ *y* $G = D$;

  d) $L = \infty$ *y* $G = M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ *son*

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;

  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;

  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;

  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 17.2. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*

  c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para* $L < \infty$

  d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 17.3. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [101] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.

- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

Teorema 17.4. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu\left(\mu+\theta\right)^{-1}\left[\delta\theta-\mu\left(1-\delta\right)\alpha\left(\theta\right)\right]\left[\theta-\mu\left(1-\delta\right)^{-1}\right] \\
\alpha\left(\theta\right) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\
var\left(D_n\right) &= var\left(T_0\right)-\left(\tau^{-1}-\delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}\left(S_0\right)\right)^2\left(1-\delta\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Teorema 17.5. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 17.6. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

Referencias

[1] Ash, Robert B. Basic probability theory. Courier Corporation, 2008.

[2] Asmussen, S. (1987). *Applied Probability and Queues.* John Wiley and Sons.

[3] Bhat, N. (2008). *An Introduction to Queueing Theory: Modelling and Analysis in Applications.* Birkhauser.

[4] Boxma, J. O. (1987). Pseudoconservation Laws in Cyclic Service Systems. *Journal of Applied Probability*, 24, 949-964.

[5] Borovkov, A. A., and Schassberger, R. (1995). Ergodicity of a Polling Network. *Stochastic Processes and their Applications*, 50(2), 253-262.

[6] van den Bos, L., and Boon, M. (2013). *Networks of Polling Systems* (report). Eindhoven University of Technology.

[7] Boon, M. A. A., van der Mei, R. D., and Winands, E. M. M. (2011). Applications of Polling Systems. February 24, 2011.

[8] Ng, C. H., and Soong, B. H. (2008). *Queueing Modelling Fundamentals with Applications in Communications Networks.* John Wiley and Sons.

[9] Chen, H. (1995). Fluid Approximations and Stability of Multiclass Queueing Networks I: Work-conserving Disciplines. *Annals of Applied Probability.*

[10] Cooper, R. B. (1970). Queues Served in Cyclic Order: Waiting Times. *The Bell System Technical Journal*, 49, 399-413.

[11] Dai, J. G. (1995). On Positive Harris Recurrence of Multiclass Queueing Networks: A Unified Approach Via Fluid Limit Models. *The Annals of Applied Probability*, 5(1), 49-77.

[12] Dai, J. G., and Meyn, S. P. (1995). Stability and Convergence of Moments for Multiclass Queueing Networks Via Fluid Limit Models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(11), 1889-1904.

[13] Dai, J. G., and Weiss, G. (1996). Stability and Instability of Fluid Models for Reentrant Lines. *Mathematics of Operations Research*, 21(1), 115-134.

[14] Daley, D. J. (1968). The Correlation Structure of the Output Process of Some Single Server Queueing Systems. *The Annals of Mathematical Statistics*, 39(3), 1007-1019.

[15] Davis, M. H. A. (1984). Piecewise Deterministic Markov Processes: A General Class of Nondiffusion Stochastic Models. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 46(3), 353-388.

[16] Down, D. (1998). On the Stability of Polling Models with Multiple Servers. *Journal of Applied Probability*, 35(3), 925-935.

[17] Disney, R. L., Farrell, R. L., and Morais, P. R. (1973). A Characterization of $M/G/1$ Queues with Renewal Departure Processes. *Management Science*, 19(11), Theory Series, 1222-1228.

[18] Eisenberg, M. (1972). Queues with Periodic Service and Changeover Time. *Operations Research*, 20(2), 440-451.

[19] Fricker, C., and Jaïbi, M. R. (1994). Monotonicity and Stability of Periodic Polling Models. *Queueing Systems*, 15(1-4), 211-238.

[20] Getoor, R. K. (1979). Transience and Recurrence of Markov Processes. In J. Azema and M. Yor (Eds.), *Seminaire de Probabilités XIV* (pp. 397-409). New York: Springer-Verlag.

[21] Gut, A. (1995). *Stopped Random Walks: Limit Theorems and Applications*. Applied Probability.

[22] Kaspi, H., and Mandelbaum, A. (1992). Regenerative Closed Queueing Networks. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 39(4), 239-258.

[23] Kleinrock, L. (1975). *Queueing Systems: Theory, Volume 1*. Wiley-Interscience.

[24] Konheim, A. G., Levy, H., and Srinivasan, M. M. (1994). Descendant Set: An Efficient Approach for the Analysis of Polling Systems. *IEEE Transactions on Communications*, 42(2-4), 1245-1253.

[25] Lang, S. (1973). *Calculus of Several Variables*. Addison-Wesley Publishing Company.

[26] Levy, H., and Sidi, M. (1990). Polling Systems: Applications, Modeling, and Optimization. *IEEE Transactions on Communications*, 30(10), 1750-1760.

[27] Fricker, C., and Jaïbi, M. R. (1998). Stability of Multi-server Polling Models. Institute National de Recherche en Informatique et en Automatique.

[28] Meyn, S. P., and Tweedie, R. L. (1993). *Markov Chains and Stochastic Stability*. Springer-Verlag.

[29] Meyn, S. P., and Down, D. (1994). Stability of Generalized Jackson Networks. *The Annals of Applied Probability*.

[30] van der Mei, R. D., and Borst, S. C. (1997). Analysis of Multiple-server Polling Systems by Means of the Power-Series Algorithm. *Stochastic Models*, 13(2), 339-369.

[31] Meyn, S. P. (1995). Transience of Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models. *The Annals of Applied Probability*, 5(4), 946-957.

[32] Adan, I. J. B. F., van Leeuwaarden, J. S. H., and Winands, E. M. M. (2006). On the Application of Rouche's Theorem in Queueing Theory. *Operations Research Letters*, 34(3), 355-360.

[33] Roubos, A. (2007). *Polling Systems and their Applications*. Vrije Universiteit Amsterdam.

[34] Saavedra, B. P. (2011). Informe Técnico del Microsimulador. Departamento de Matemáticas.

[35] Vishnevskii, V. M., and Semenova, O. V. (2006). Mathematical Methods to Study the Polling Systems. *Automation and Remote Control*, 67(2), 173-220.

[36] Serfozo, R. (2009). *Basics of Applied Stochastic Processes*. Springer-Verlag.

[37] Sharpe, M. (1998). *General Theory of Markov Processes*. Academic.

[38] Sigman, K. (1990). The Stability of Open Queueing Networks. *Stochastic Processes and their Applications*, 35(1), 11-15.

[39] Sidi, M., and Levy, H. (1990). Customer Routing in Polling Systems. In P. King, I. Mitrani, and R. Pooley (Eds.), *Proceedings Performance '90*. North-Holland, Amsterdam.

[40] Sidi, M., and Levy, H. (1991). Polling Systems with Simultaneous Arrivals. *IEEE Transactions on Communications*, 39(6), 823-827.

[41] Sigman, K., Thorisson, H., and Wolff, R. W. (1994). A Note on the Existence of Regeneration Times. *Journal of Applied Probability*, 31, 1116-1122.

[42] Stidham, S. Jr. (1972). Regenerative Processes in the Theory of Queues, with Applications to the Alternating Priority Queue. *Advances in Applied Probability*, 4(3), 542-577.

[43] Takagi, H. (1986). *Analysis of Polling Systems*. Cambridge: MIT Press.

[44] Takagi, H., and Kleinrock. (1986). Analysis of Polling Systems. Cambridge: MIT Press.

[45] Takagi, H. (1988). Queueing Analysis of Polling Models. *ACM Computing Surveys*, 20(1), 5-28.

[46] Thorisson, H. (2000). *Coupling, Stationarity, and Regeneration*. Probability and its Applications. Springer-Verlag.

[47] Winands, E. M. M., Adan, I. J. B. F., and van Houtum, G. J. (2006). Mean Value Analysis for Polling Systems. *Queueing Systems*, 54, 35-44.

[48] James, G., Witten, D., Hastie, T., and Tibshirani, R. (2013). *An Introduction to Statistical Learning: with Applications in R*. Springer.

[49] Hosmer, D. W., Lemeshow, S., and Sturdivant, R. X. (2013). *Applied Logistic Regression* (3rd ed.). Wiley.

[50] Bishop, C. M. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer.

[51] Harrell, F. E. (2015). *Regression Modeling Strategies: With Applications to Linear Models, Logistic and Ordinal Regression, and Survival Analysis*. Springer.

[52] R Documentation and Tutorials: `https://cran.r-project.org/manuals.html`

[53] Tutorials on R-bloggers: `https://www.r-bloggers.com/`

[54] Coursera: *Machine Learning* by Andrew Ng.

[55] edX: *Data Science and Machine Learning Essentials* by Microsoft.

[56] Ross, S. M. (2014). *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*. Academic Press.

[57] DeGroot, M. H., and Schervish, M. J. (2012). *Probability and Statistics* (4th ed.). Pearson.

[58] Hogg, R. V., McKean, J., and Craig, A. T. (2019). *Introduction to Mathematical Statistics* (8th ed.). Pearson.

[59] Kleinbaum, D. G., and Klein, M. (2010). *Logistic Regression: A Self-Learning Text* (3rd ed.). Springer.

[60] Wasserman, L. (2004). *All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference*. Springer.

[61] Probability and Statistics Tutorials on Khan Academy: `https://www.khanacademy.org/math/statistics-probability`

[62] Online Statistics Education: `http://onlinestatbook.com/`

[63] Peng, C. Y. J., Lee, K. L., and Ingersoll, G. M. (2002). *An Introduction to Logistic Regression Analysis and Reporting*. The Journal of Educational Research.

[64] Agresti, A. (2007). *An Introduction to Categorical Data Analysis* (2nd ed.). Wiley.

[65] Han, J., Pei, J., and Kamber, M. (2011). *Data Mining: Concepts and Techniques*. Morgan Kaufmann.

[66] Data Cleaning and Preprocessing on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/data-cleaning-and-preprocessing`

[67] Molinaro, A. M., Simon, R., and Pfeiffer, R. M. (2005). *Prediction Error Estimation: A Comparison of Resampling Methods*. Bioinformatics.

[68] Evaluating Machine Learning Models on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/evaluating-machine-learning-models`

[69] Practical Guide to Logistic Regression in R on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/practical-guide-to-logistic-regression-in-r`

[70] Coursera: *Statistics with R* by Duke University.

[71] edX: *Data Science: Probability* by Harvard University.

[72] Coursera: *Logistic Regression* by Stanford University.

[73] edX: *Data Science: Inference and Modeling* by Harvard University.

[74] Coursera: *Data Science: Wrangling and Cleaning* by Johns Hopkins University.

[75] edX: *Data Science: R Basics* by Harvard University.

[76] Coursera: *Regression Models* by Johns Hopkins University.

[77] edX: *Data Science: Statistical Inference* by Harvard University.

[78] An Introduction to Survival Analysis on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/an-introduction-to-survival-analysis`

[79] Multinomial Logistic Regression on DataCamp: `https://www.datacamp.com/community/tutorials/multinomial-logistic-regression-R`

[80] Coursera: *Survival Analysis* by Johns Hopkins University.

[81] edX: *Data Science: Statistical Inference and Modeling for High-throughput Experiments* by Harvard University.

[82] Sigman, K., and Wolff, R. W. (1993). A Review of Regenerative Processes. *SIAM Review*, 38(2), 269-288.

[83] I.J.B.F. Adan, J.S.H. van Leeuwaarden, and E.M.M. Winands. On the application of Rouches theorem in queueing theory. Operations Research Letters, 34(3):355-360, 2006.

[84] Asmussen Soren, Applied Probability and Queues, John Wiley and Sons, 1987.

[85] Bhat Narayan, An Introduction to Queueing Theory Modelling and Analysis in Applications, Birkhauser, 2008.

[86] Boxma J. O., Analysis and Optimization of Polling Systems, Queueing, Performance and Control in ATM, pp. 173-183, 1991.

[87] Boxma J. O., Pseudoconservation Laws in Cyclic Service Systems, Journal of Applied Probability, vol. 24, 1987, pp. 949-964.

[88] Boon M.A.A., Van der Mei R.D. and Winands E.M.M., Applications of Polling Systems, 2011.

[89] Borovkov. A. A. and Schassberger R., Ergodicity of a Polling Network, Stochastic Processes and their Applications, vol. 50, no. 2, 1995, pp. 253-262.

[90] Laurent van den Bos and Marko Boon, Networks of Polling Systems (report), Eindhoven University of Technology, 2013.

[91] Chee-Hook Ng. y Boon-Hee Soong, Queueing Modelling Fundemantals with Applications in Communications Networks, John-Wiley and Sons, Ltd, 2008.

[92] Chen H., Fluid Approximations and Stability of Multiclass Queueing Networks I: Work-Conserving Disciplines, Annals Applied Probabability, vol. 5, no. 3, 1995, pp. 637-665.

[93] R.B. Cooper, G. Murray, Queues served in cyclic order (The Bell System Technical Journal, 48 (1969) 675-689).

[94] R.B. Cooper, Queues served in cyclic order: waiting times (The Bell System Technical Journal, 49 (1970) 399-413).

[95] Dai Jean G., On positive Harris Recurrence of Multiclass Queueing Networks: A Unified Approach Via Fluid Limit Models, The Annals of Applied Probability, vol. 5, No. 1, 1995, pp. 49-77.

[96] Dai Jim G. and Meyn Sean P., Stability and Convergence of Moments for Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models, IEEE transactions on Automatic Control, vol. 40, No. 11, 1995, pp. 1889-1904.

[97] Dai Jim G. and Weiss G., Stability and Inestability of Fluid Models for Reentrant Lines, Mathematics of Operation Research, vol. 21, no. 1, 1996, pp. 115-134.

[98] D.J. Daley, The correlation structure of the output process of some single server queueing systems, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 39. No. 3, pp. 1007-1019, 1968.

[99] Davis, M. H. A., Piecewise Deterministic Markov Processes: A General Class of Nondifussion Stochastic Models. Journal of Royal Statistics Society Serie B, vol. 46, no. 3, 1984, pp. 353-388.

[100] Down D., On the Stability of Polling Models with Multiple Servers, Journal of Applied Probability, vol. 35, no. 3, 1998, pp. 925-935.

[101] D.J. Daley, The correlation structure of the output process of some single server queueing systems, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 39. No. 3, pp. 1007-1019, 1968.

[102] Ralpjh L. Disney, Robert L. Farrell and Paulo Renato Morais, A Characterization of $M/G/1$ Queues with Renewal Departure Processes, Manage of Science, Vol. 19, No. 11, Theory Series, pp. 1222-1228, 1973.

[103] M. Eisenberg, Queues with periodic service and changeover time (Operations Research, 20 (2)(1972) 440-451).

[104] Fricker Christine and Jaïbi M.R., Monotonicity and Stability of Periodic Polling Models, Queueing Systems, vol. 15, no. 1-4, 1994, pp. 211-238.

[105] Fricker Christine and Jaïbi M.R., Stability of Multi-Server Polling Models, Institute National de Recherche en Informatique et en Automatique, Issue 3347, 1998.

[106] Getoor R. K., Transience and recurrence of Markov processes, Siminaire de Probabilitis XIV, J. Azema and M Yor, Eds. New York Springer-Verlag, 1979.

[107] Gut A., Stopped Random Walks: Limit Theorems and Applications, Applied Probability, 1995.

[108] Chee-Hook Ng. y Boon-Hee Soong, Queueing Modelling Fundemantals with Applications in Communications Networks, John-Wiley and Sons, Ltd, 2008.

[109] Kaspi H. and Mandelbaum A., Regenerative Closed Queueing Networks, Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, vol. 39, no. 4, 1992, pp. 239-258.

[110] A.G. Konheim, H. Levy, M.M. Srinivasan, Descendant set: an efficient approach for the analysis of polling systems (IEEE Transactions on Communications, 42 (2/3/4)(1994) 1245-1253).

[111] Leonard Kleinrock, Theory, Volume 1, Queueing Systems Wiley-Interscience, 1975,

[112] A. G. Konheim, h. Levy and M. M. Srinivasan. Descendant set: an efficient approach for the analysis of polling systems. IEEE Trabsanctions on Communications, 42(2-4): pp. 1245-1253, 1994.

[113] Serge Lang, Calculus of Several Variables, Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

[114] Levy Hanoch y Sidi Moshe , Polling Systems: Applications, Modeling, and Optimization, IEEE Transactions on Communications, vol. 30, no. 10, 1990, pp. 1750-1760.

[115] van der Mei, R.D. and Borst, S. C., Analysis of Multiple-Server Polling Systems by Means of the Power-Series Algorithm, Stochastic Models, vol. 13, no. 2, 1997, pp. 339-369.

[116] Meyn Sean P., Transience of Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models, The Annals of Applied Probability, vol. 5, no. 4, 1995, pp.946-957.

[117] Meyn S. P. and Tweedie R. L., Stability of Markovian Processes II:Continuous Time Processes and Sample Chains, Advanced Applied Pobability, vol. 25, 1993, pp. 487-517.

[118] Meyn S. P. and Tweedie R. L., Markov Chains and Stochastic Stability, 1993.

[119] Meyn, S.P. and Down, D., Stability of Generalized Jackson Networks, The Annals of Applied Probability, 1994.

[120] Roubos Alex, Polling Systems and their Applications, Vrije Universiteit Amsterdam, 2007.

[121] Saavedra B. P., Informe Técnico del Microsimulador, Departamento de Matemátias, 2011.

[122] Vishnevskii V.M. and Semenova O.V., Mathematical Methods to Study the Polling Systems, Automation and Remote Control, vol. 67, no. 2, 2006, pp. 173-220.

[123] Richard Serfozo, Basics of Applied Stochastic Processes, Springer-Verlag, 2009.

[124] Sharpe Michael , General Theory of Markov Processes. Boston, M.A. Academic, 1998.

[125] Sigman Karl, The Stability of Open Queueing Networks, Stochastic Processes and their Applications, vol. 35, no. 1, 1990, pp. 11-15.

[126] Sidi M. and Levy H., Customer Routing in Polling Systems, In: P. King, I. Mitrani, and R. Pooley (Eds.), Proceedings Performance '90, North-Holland, Amsterdam, 1990.

[127] Sidi M. and Levy H., Polling Systems with Simultaneus Arrivals. IEEE Transactions on Communications, vol. 39, no. 6, 1991, pp. 823-827.

[128] Karl Sigman, Hermann Thorisson and Ronald W. Wolff, A Note on the Existence of Regeneration Times, Journal of Applied Probability, vol. 31, pp. 1116-1122, 1994.

[129] Shaler Stidham, Jr., Regenerative Processes in the theory ow queues, with applications to the alternating priority queue, Advances in Applied Probability, Vol. 4, no. 3, 1972,pp. 542-577.

[130] Takagi H., Analysis of Polling Systems, Cambdrige: MIT Press, 1986

[131] Takagi H. and Kleinrock, Analysis of Polling Systems, Cambdrige: MIT Press, 1986

[132] Takagi Hideaki, Queueing Analysis of Polling Models, ACM computing Surveys, vol. 20, no. 1, 1988, pp. 5-28.

[133] Hermann Thorisson, Coupling, Stationarity, and Regeneration, Probability and its Applications, Springer-Verlag, 2000.

[134] E.M.M. Winands, I.J.B.F. Adan adn G.J. van Houtum, Mean value analysis for polling systems, Queueing Systems (2006), 54:35-44,

[135] Konheim, A.G. and Meister, B., Waiting Lines and Times in a System with Polling, J. ACM, 1974, vol. 21, n0. 3, pp. 470-490.

[136] Levy, H. and Kleinrock, L., Polling Systems with Zero Switch-over Periods: A General Method for Analysis the Expected DElay, Performance Evaluat., 1991, vol. 13, no. 2, pp. 97-107.

[137] Yechiali, U., Analysis and Control of Polling systems, in Performance Evaluation of Computer and Communications Systems, Donatiello, L. and Nelson R., Eds. Berlin: Springer Verlag, 1993, pp. 630-650.

Índice alfabético