Temas Selectos de Probabilidad

Carlos E. Martínez-Rodríguez

Julio 2024

Contents

Part I

TERCERA PARTE: TEMAS SELECTOS CADENAS DE MARKOV

CAPÍTULO 1

CADENAS DE MARKOV

1.1 Estacionareidad

Sea $v = (v_i)_{i\in E}$ medida no negativa en E, podemos definir una nueva medida $v\mathbb{P}$ que asigna masa $\sum_{i\in E} v_i p_{ij}$ a cada estado j.

Definición 1. *La medida v es estacionaria si $v_i < \infty$ para toda i y además $v\mathbb{P} = v$.*

En el caso de que v sea distribución, independientemente de que sea estacionaria o no, se cumple con

$$\mathbb{P}_v\left[X_1 = j\right] = \sum_{i\in E} \mathbb{P}_v\left[X_0 = i\right] p_{ij} = \sum_{i\in E} v_i p_{ij} = \left(vP\right)_j$$

Teorema 1. *Supongamos que v es una distribución estacionaria. Entonces*

i) La cadena es estrictamente estacionaria con respecto a $\mathbb{P}_v$, es decir, $\mathbb{P}_v$-distribución de $\{X_n, X_{n+1}, \ldots\}$ no depende de n;

ii) Existe un aversión estrictamente estacionaria $\{X_n\}_{n\in Z}$ de la cadena con doble tiempo infinito y $\mathbb{P}\left(X_n = i\right) = v_i$ para toda $n \in Z$.

Teorema 2. *Sea i estado fijo, recurrente. Entonces una medida estacionaria v puede definirse haciendo que v_j sea el número esperado de visitas a j entre dos visitas consecutivas i,*

$$v_j = \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \mathbb{1}\left(X_n = i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i\left[X_n = j, \tau(i) > n\right] \tag{1.1}$$

Teorema 3. *Si la cadena es irreducible y recurrente, entonces existe una medida estacionaria v, tal que satisface $0 < v_j < \infty$ para toda j, y es única salvo factores multiplicativos, es decir, si v, v^* son estacionarias, entonces $c = cv^*$ para alguna $c \in (0, \infty)$.*

Corolario 1. *Si la cadena es irreducible y positiva recurrente, existe una única distribución estacionaria π dada por*

$$\pi_j = \frac{1}{\mathbb{E}_i \tau_i} \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \mathbb{1}\left(X_n = j\right) = \frac{1}{\mathbb{E}_j \tau\left(j\right)}. \tag{1.2}$$

Corolario 2. *Cualquier cadena de Markov irreducible con un espacio de estados finito es positiva recurrente.*

1.2 Funciones Armónicas, Recurrencia y Transitoriedad

Definición 2. *Una función Armónica es el eigenvector derecho h de P correspondiente al eigenvalor 1.*

$$Ph = h \Leftrightarrow h(i) = \sum_{j \in E} p_{ij} h(j) = \mathbb{E}_i h(X_1) = \mathbb{E}\left[h(X_{n+1}) | X_n = i\right].$$

es decir, $\{h(X_n)\}$ es martingala.

Proposición 1. *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y sea i estado fijo arbitrario. Entonces la cadena es transitoria sí y sólo si existe una función no cero, acotada $h : E - \{i\} \to \mathbb{R}$ que satisface*

$$h(j) = \sum_{k \neq i} p_{jk} h(k) \text{ para } j \neq i. \tag{1.3}$$

Proposición 2. *Suponga que la cadena es irreducible y sea E_0 un subconjunto finito de E tal que se cumple la ecuación 5.2 para alguna función h acotada que satisface $h(i) < h(j)$ para algún estado $i \notin E_0$ y todo $j \in E_0$. Entonces la cadena es transitoria.*

1.3 Teoría Ergódica

Lema 1. *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y se F subconjunto finito del espacio de estados. Entonces la cadena es positiva recurrente si $\mathbb{E}_i \tau(F) < \infty$ para todo $i \in F$.*

Proposición 3. *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y transiente o cero recurrente, entonces $p_{ij}^n \to 0$ conforme $n \to \infty$ para cualquier $i, j \in E$, E espacio de estados.*

Utilizando el teorema (2.2) y el corolario 1, se demuestra el siguiente resultado importante.

Teorema 4. *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y aperiódica positiva recurrente, y sea $\pi = \{\pi_j\}_{j \in E}$ la distribución estacionaria. Entonces $p_{ij}^n \to \pi_j$ para todo i, j.*

Definición 3. *Una cadena irreducible aperiodica, positiva recurrente con medida estacionaria v, es llamada* ergódica.

Proposición 4. *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y recurrente con medida estacionaria v, entocnes para todo $i, j, k, l \in E$*

$$\frac{\sum_{n=0}^{m} p_{ij}^n}{\sum_{n=0}^{m} p_{lk}^n} \to \frac{v_j}{v_k},\ m \to \infty \tag{1.4}$$

Lema 2. *La matriz $\widetilde{P}$ con elementos $\widetilde{p}_{ij} = \frac{v_{ji} p_{ji}}{v_i}$ es una matriz de transición. Ademś, el i-ésimo elementos $\widetilde{p}_{ij}^m$ de la matriz potencia $\widetilde{P}^m$ est? dada por $\widetilde{p}_{ij}^m = \frac{v_{ji} p_{ji}^m}{v_i}$.*

Lema 3. *Defínase $N_i^m = \sum_{n=0}^{m} \mathbb{1}(X_n = i)$ como el número de visitas a i antes del tiempo m. Entonces si la cadena es reducible y recurrente, $lim_{m \to \infty} \frac{\mathbb{E}_j N_i^m}{\mathbb{E}_k N_i^m} = 1$ para todo $j, k \in E$.*

1.3.1 Ejemplo de Cadena de Markov para dos Estados

Supongamos que se tiene la siguiente cadena:

$$\begin{pmatrix} 1-q & q \\ p & 1-p \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Si $P[X_0 = 0] = \pi_0(0) = a$ y $P[X_0 = 1] = \pi_0(1) = b = 1 - \pi_0(0)$, con $a + b = 1$, entonces después de un procedimiento más o menos corto se tiene que:

$$P[X_n = 0] = \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \left(a - \frac{p}{p+q}\right).$$
$$P[X_n = 1] = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \left(b - \frac{q}{p+q}\right).$$

donde, como $0 < p, q < 1$, se tiene que $|1-p-q| < 1$, entonces $(1-p-q)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto

$$lim_{n\to\infty} P[X_n = 0] = \frac{p}{p+q}.$$
$$lim_{n\to\infty} P[X_n = 1] = \frac{q}{p+q}.$$

Si hacemos $v = \left(\frac{p}{p+q}, \frac{q}{p+q}\right)$, entonces

$$\left(\frac{p}{p+q}, \frac{q}{p+q}\right)\left(\begin{array}{cc} 1-q & q \\ p & 1-p \end{array}\right).$$

Proposición 5. *Suponga que la cadena es irreducible y sea E_0 un subconjunto finito de E tal que se cumple la ecuación 5.2 para alguna función h acotada que satisface $h(i) < h(j)$ para algún estado $i \notin E_0$ y todo $j \in E_0$. Entonces la cadena es transitoria.*

1.4 Procesos de Markov de Saltos

Consideremos un estado que comienza en el estado x_0 al tiempo 0, supongamos que el sistema permanece en x_0 hasta algún tiempo positivo τ_1, tiempo en el que el sistema salta a un nuevo estado $x_1 \neq x_0$. Puede ocurrir que el sistema permanezca en x_0 de manera indefinida, en este caso hacemos $\tau_1 = \infty$. Si τ_1 es finito, el sistema permanecerá en x_1 hasta τ_2, y así sucesivamente. Sea

$$X(t) = \left\{\begin{array}{cc} x_0 & 0 \leq t < \tau_1 \\ x_1 & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ x_2 & \tau_2 \leq t < \tau_3 \\ \vdots & \end{array}\right. \tag{1.6}$$

A este proceso se le llama *proceso de salto*. Si

$$lim_{n\to\infty} \tau_n = \left\{\begin{array}{cc} < \infty & X_t \text{ explota} \\ = \infty & X_t \text{ no explota} \end{array}\right. \tag{1.7}$$

Un proceso puro de saltos es un proceso de saltos que satisface la propiedad de Markov.

Proposición 6. *Un proceso de saltos es Markoviano si y sólo si todos los estados no absorbentes x son tales que*

$$P_x(\tau_1 > t+s | \tau_1 > s) = P_x(\tau_1 > t)$$

para $s, t \geq 0$, equivalentemente

$$\frac{1-F_x(t+s)}{1-F_x(s)} = 1 - F_x(t). \tag{1.8}$$

Nota 1. *Una distribución F_x satisface la ecuación (1.8) si y sólo si es una función de distribución exponencial para todos los estados no absorbentes x.*

Por un proceso de nacimiento y muerte se entiende un proceso de Markov de Saltos, $\{X_t\}_{t\geq 0}$ en $E = \mathbb{N}$ tal que del estado n sólo se puede mover a $n-1$ o $n+1$, es decir, la matriz intensidad es de la forma:

$$\Lambda = \left(\begin{array}{ccccc} -\beta_0 & \beta_0 & 0 & 0 & \dots \\ \delta_1 & -\beta_1-\delta_1 & \beta_1 & 0 & \dots \\ 0 & \delta_2 & -\beta_2-\delta_2 & \beta_2 & \dots \\ \vdots & & & \ddots & \end{array}\right) \tag{1.9}$$

donde β_n son las probabilidades de nacimiento y δ_n las probabilidades de muerte.

La matriz de transición es

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

con $p_n = \frac{\beta_n}{\beta_n+\delta_n}$ y $q_n = \frac{\delta_n}{\beta_n+\delta_n}$

Proposición 7. *La recurrencia de un Proceso Markoviano de Saltos $\{X_t\}_{t\geq 0}$ con espacio de estados numerable, o equivalentemente de la cadena encajada $\{Y_n\}$ es equivalente a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\beta_1 \cdots \beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} = \infty \tag{1.11}$$

Lema 1. *Independientemente de la recurrencia o transitoriedad de la cadena, hay una y sólo una, salvo múltiplos, solución ν a $\nu\Lambda = 0$, dada por*

$$\nu_n = \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \nu_0 \tag{1.12}$$

Corolario 3. *En el caso recurrente, la medida estacionaria μ para $\{Y_n\}$ está dada por*

$$\mu_n = \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n} \mu_0 \tag{1.13}$$

para $n = 1, 2, \ldots$

Definición 4. *Una medida ν es estacionaria si $0 \leq \nu_j < \infty$ y para toda t se cumple que $\nu P^t = nu$.*

Definición 5. *Un proceso irreducible recurrente con medida estacionaria con masa finita es llamado ergódico.*

Teorema 5. *Un Proceso de Saltos de Markov irreducible no explosivo es ergódico si y sólo si uno puede encontrar una solución π de probabilidad, $|\pi| = 1$, $0 \leq \pi_j \leq 1$ para $\nu\Lambda = 0$. En este caso π es la distribución estacionaria.*

Corolario 4. *$\{X_t\}_{t\geq 0}$ es ergódica si y sólo si (1.21) se cumple y $S < \infty$, en cuyo caso la distribución estacionaria π está dada por*

$$\pi_0 = \frac{1}{S},\ \pi_n = \frac{1}{S} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n},\ n = 1, 2, \ldots \tag{1.14}$$

Sea E espacio discreto de estados, finito o numerable, y sea $\{X_t\}$ un proceso de Markov con espacio de estados E. Una medida μ en E definida por sus probabilidades puntuales μ_i, escribimos $p^t_{ij} = P^t(i, \{j\}) = P_i(X_t = j)$.

El monto del tiempo gastado en cada estado es positivo, de modo tal que las trayectorias muestrales son constantes por partes. Para un proceso de saltos denotamos por los tiempos de saltos a $S_0 = 0 < S_1 < S_2 \cdots$, los tiempos entre saltos consecutivos $T_n = S_{n+1} - S_n$ y la secuencia de estados visitados por $Y_0, Y_1, \ldots$, así las trayectorias muestrales son constantes entre S_n consecutivos, continua por la derecha, es decir, $X_{S_n} = Y_n$.

La descripción de un modelo práctico está dado usualmente en términos de las intensidades $\lambda(i)$ y las probabilidades de salto q_{ij} más que en términos de la matriz de transición P^t. Supóngase de ahora en adelante que $q_{ii} = 0$ cuando $\lambda(i) > 0$

Teorema 6. *Cualquier Proceso de Markov de Saltos satisface la Propiedad Fuerte de Markov*

Definición 6. *Una medida $v \neq 0$ es estacionaria si $0 \leq v_j < \infty$, $vP^t = v$ para toda t.*

Teorema 7. *Supongamos que $\{X_t\}$ es irreducible recurrente en E. Entonces existe una y sólo una, salvo múltiplos, medida estacionaria v. Esta v tiene la propiedad de que $0 < v_j < \infty$ para todo j y puede encontrarse en cualquiera de las siguientes formas* *i) Para algún estado i, fijo pero arbitrario, v_j es el tiempo esperado utilizado en j entre dos llegadas consecutivas al estado i;*

$$v_j = \mathbb{E}_i \int_0^{w(i)} \mathbb{1}\left(X_t = j\right) dt \tag{1.15}$$

con $w\left(i\right) = \inf\left\{t > 0 : X_t = i, X_{t^-} = \lim_{s \uparrow t} X_s \neq i\right\}$.

ii) $v_j = \frac{\mu_j}{\lambda(j)}$, donde μ es estacionaria para $\left\{Y_n\right\}$.

iii) como solución de $v\Lambda = 0$.

Definición 7. *Un proceso irreducible recurrente con medida estacionaria de masa finita es llamado ergódico.*

Teorema 8. *Un proceso de Markov de saltos irreducible no explosivo es ergódico si y sólo si se puede encontrar una solución, de probabilidad, π, con $|\pi| = 1$ y $0 \leq \pi_j \leq 1$, a $\pi\Lambda = 0$. En este caso π es la distribución estacionaria.*

Corolario 5. *Una condición suficiente para la ergodicidad de un proceso irreducible es la existencia de una probabilidad π que resuelva el sistema $\pi\Lambda = 0$ y que además tenga la propiedad de que $\sum \pi_j \lambda\left(j\right)$.*

1.5 Matriz Intensidad

Definición 8. *La matriz intensidad $\Lambda = \left(\lambda\left(i,j\right)\right)_{i,j\in E}$ del proceso de saltos $\left\{X_t\right\}_{t\geq 0}$ está dada por*

$$\begin{aligned} \lambda\left(i,j\right) &= \lambda\left(i\right) q_{i,j},\ j \neq i \\ \lambda\left(i,i\right) &= -\lambda\left(i\right) \end{aligned}$$

Proposición 8. *Una matriz $E \times E$, Λ es la matriz de intensidad de un proceso markoviano de saltos $\left\{X_t\right\}_{t\geq 0}$ si y sólo si*

$$\lambda\left(i,i\right) \leq 0,\ \lambda\left(i,j\right),\ i \neq j,\ \sum_{j\in E} \lambda\left(i,j\right) = 0.$$

Además, Λ está en correspondencia uno a uno con la distribución del proceso minimal dado por el teorema 3.1.

Para el caso particular de la Cola $M/M/1$, la matríz de itensidad está dada por

$$\Lambda = \left[\begin{array}{cccccc} -\beta & \beta & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \delta & -\beta-\delta & \beta & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \delta & -\beta-\delta & \beta & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{array}\right]$$

1.6 Medidas Estacionarias

Definición 9. *Una medida $v \neq 0$ es estacionaria si $0 \leq v_j < \infty$, $vP^t = v$ para toda t.*

Teorema 9. *Supongamos que $\left\{X_t\right\}$ es irreducible recurrente en E. Entonces existe una y sólo una, salvo múltiplos, medida estacionaria v. Esta v tiene la propiedad de que $0 < v_j < \infty$ para todo j y puede encontrarse en cualquiera de las siguientes formas*

i) Para algún estado i, fijo pero arbitrario, v_j es el tiempo esperado utilizado en j entre dos llegadas consecutivas al estado i;

$$v_j = \mathbb{E}_i \int_0^{w(i)} \mathbb{1}\left(X_t = j\right) dt \tag{1.16}$$

con $w\left(i\right) = \inf\left\{t > 0 : X_t = i, X_{t^-} = \lim_{s \uparrow t} X_s \neq i\right\}$.

ii) $v_j = \frac{\mu_j}{\lambda(j)}$, donde μ es estacionaria para $\left\{Y_n\right\}$.

iii) como solución de $v\Lambda = 0$.

1.7 Criterios de Ergodicidad

Definición 10. *Un proceso irreducible recurrente con medida estacionaria de masa finita es llamado ergódico.*

Teorema 10. *Un proceso de Markov de saltos irreducible no explosivo es ergódico si y sólo si se puede encontrar una solución, de probabilidad, π, con $|\pi| = 1$ y $0 \leq \pi_j \leq 1$, a $\pi\Lambda = 0$. En este caso π es la distribución estacionaria.*

Corolario 6. *Una condición suficiente para la ergodicidad de un proceso irreducible es la existencia de una probabilidad π que resuelva el sistema $\pi\Lambda = 0$ y que además tenga la propiedad de que $\sum \pi_j \lambda(j) < \infty$.*

Proposición 9. *Si el proceso es ergódico, entonces existe una versión estrictamente estacionaria $\{X_t\}_{-\infty<t<\infty}$ con doble tiempo infinito.*

Teorema 11. *Si $\{X_t\}$ es ergódico y π es la distribución estacionaria, entonces para todo i, j, $p_{ij}^t \rightarrow \pi_j$ cuando $t \rightarrow \infty$.*

Corolario 7. *Si $\{X_t\}$ es irreducible recurente pero no ergódica, es decir $|v| = \infty$, entonces $p_{ij}^t \rightarrow 0$ para todo $i, j \in E$.*

Corolario 8. *Para cualquier proceso Markoviano de Saltos minimal, irreducible o no, los límites $li_{t\rightarrow\infty} p_{ij}^t$ existe.*

1.8 Procesos de Nacimiento y Muerte

Proposición 10. *La recurrencia de $\{X_t\}$, o equivalentemente de $\{Y_n\}$ es equivalente a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\beta_1 \cdots \beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} = \infty \tag{1.17}$$

Lema 4. *Independientemente de la recurrencia o transitorieadad, existe una y sólo una, salvo múltiplos, solución a $v\Lambda = 0$, dada por*

$$v_n = \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} v_0 \tag{1.18}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Corolario 9. *En el caso recurrente, la medida estacionaria μ para $\{Y_n\}$ está dada por*

$$\mu_n = \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n} \mu_0 \tag{1.19}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Se define a $S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_0\beta_1\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}$

Corolario 10. *$\{X_t\}$ es ergódica si y sólo si la ecuación (1.21) se cumple y además $S < \infty$, en cuyo caso la distribución ergódica, π, está dada por*

$$\pi_0 = \frac{1}{S},\ \pi_n = \frac{1}{S} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \tag{1.20}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

1.9 Procesos de Nacimiento y Muerte Generales

Por un proceso de nacimiento y muerte se entiende un proceso de saltos de markov $\{X_t\}_{t\geq 0}$ con espacio de estados a lo más numerable, con la propiedad de que sólo puede ir al estado $n+1$ o al estado $n-1$, es decir, su matriz de intensidad es de la forma

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\beta_0 & \beta_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \delta_1 & -\beta_1-\delta_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \delta_2 & -\beta_2-\delta_2 & \beta_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

donde β_n son las intensidades de nacimiento y δ_n las intensidades de muerte, o también se puede ver como a X_t el número de usuarios en una cola al tiempo t, un salto hacia arriba corresponde a la llegada de un nuevo usuario y un salto hacia abajo como al abandono de un usuario después de haber recibido su servicio.

La cadena de saltos $\{Y_n\}$ tiene matriz de transición dada por

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

donde $p_n = \frac{\beta_n}{\beta_n+\delta_n}$ y $q_n = 1-p_n = \frac{\delta_n}{\beta_n+\delta_n}$, donde además se asumne por el momento que p_n no puede tomar el valor 0 ó 1 para cualquier valor de n.

Proposición 11. *La recurrencia de $\{X_t\}$, o equivalentemente de $\{Y_n\}$ es equivalente a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_1\cdots\delta_n}{\beta_1\cdots\beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1\cdots q_n}{p_1\cdots p_n} = \infty \tag{1.21}$$

Lema 5. *Independientemente de la recurrencia o transitorieadad, existe una y sólo una, salvo múltiplos, solución a $v\Lambda = 0$, dada por*

$$v_n = \frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} v_0 \tag{1.22}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Corolario 11. *En el caso recurrente, la medida estacionaria μ para $\{Y_n\}$ está dada por*

$$\mu_n = \frac{p_1\cdots p_{n-1}}{q_1\cdots q_n}\mu_0 \tag{1.23}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Se define a $S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_0\beta_1\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}$.

Corolario 12. *$\{X_t\}$ es ergódica si y sólo si la ecuación (1.21) se cumple y además $S < \infty$, en cuyo caso la distribución ergódica, π, está dada por*

$$\pi_0 = \frac{1}{S},\ \pi_n = \frac{1}{S}\frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} \tag{1.24}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

1.10 Notación Kendall-Lee

A partir de este momento se harán las siguientes consideraciones:

a) Si t_n es el tiempo aleatorio en el que llega al sistema el n-ésimo cliente, para $n = 1, 2, \ldots$, $t_0 = 0$ y $t_0 < t_1 < \cdots$ se definen los tiempos entre arribos $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ para $n = 1, 2, \ldots$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

b) Los tiempos entre arribos tienen un valor medio $E(\tau)$ finito y positivo $\frac{1}{\beta}$, es decir, β se puede ver como la tasa o intensidad promedio de arribos al sistema por unidad de tiempo.

c) Además se supondrá que los servidores son identicos y si s denota la variable aleatoria que describe el tiempo de servicio, entonces $E(s) = \frac{1}{\delta}$, δ es la tasa promedio de servicio por servidor.

La notación de Kendall-Lee es una forma abreviada de describir un sistema de espera con las siguientes componentes:

a) **Fuente**: Población de clientes potenciales del sistema, esta puede ser finita o infinita.

b) **Proceso de Arribos**: Proceso determinado por la función de distribución $A(t) = P\{\tau \leq t\}$ de los tiempos entre arribos.

Además tenemos las siguientes igualdades

$$N(t) = N_q(t) + N_s(s) \tag{1.25}$$

donde

- $N(t)$ es el número de clientes en el sistema al tiempo t.
- $N_q(t)$ es el número de cliente en la cola al tiempo t.
- $N_s(t)$ es el número de clientes recibiendo servicio en el tiempo t.

Bajo la hipótesis de estacionareidad, es decir, las características de funcionamiento del sistema se han estabilizado en valores independientes del tiempo, entonces

$$N = N_q + N_s. \tag{1.26}$$

Los valores medios de las cantidades anteriores se escriben como $L = E(N)$, $L_q = E(N_q)$ y $L_s = E(N_s)$, entonces de la ecuación 1.25 se obtiene

$$L = L_q + L_s \tag{1.27}$$

Si q es el tiempo que pasa un cliente en la cola antes de recibir servicio, y W es el tiempo total que un cliente pasa en el sistema, entonces

$$w = q + s$$

por lo tanto

$$W = W_q + W_s,$$

donde $W = E(w)$, $W_q = E(q)$ y $W_s = E(s) = \frac{1}{\delta}$.

La intensidad de tráfico se define como

$$\rho = \frac{E(s)}{E(\tau)} = \frac{\beta}{\delta}. \tag{1.28}$$

La utilización por servidor es

$$u = \frac{\rho}{c} = \frac{\beta}{c\delta}. \tag{1.29}$$

donde c es el número de servidores.

Esta notación es una forma abreviada de describir un sistema de espera con componentes dados a continuación, la notación es

$$A/S/c/K/F/d \tag{1.30}$$

Cada una de las letras describe:

- A es la distribución de los tiempos entre arribos.
- S es la distribución del tiempo de servicio.
- c es el número de servidores.
- K es la capacidad del sistema.
- F es el número de individuos en la fuente.
- d es la disciplina del servicio

Usualmente se acostumbra suponer que $K = \infty$, $F = \infty$ y $d = FIFO$, es decir, First In First Out. Las distribuciones usuales para A y B son:

- GI para la distribución general de los tiempos entre arribos.
- G distribución general del tiempo de servicio.
- M Distribución exponencial para A o S.
- E_K Distribución Erlang-K, para A o S.
- D tiempos entre arribos o de servicio constantes, es decir, deterministicos.

1.10.1 Cola $M/M/1$

Este modelo corresponde a un proceso de nacimiento y muerte con $\beta_n = \beta$ y $\delta_n = \delta$ independiente del valor de n. La intensidad de tráfico $\rho = \frac{\beta}{\delta}$, implica que el criterio de recurrencia (ecuación 1.21) quede de la forma:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} = \infty.$$

Equivalentemente el proceso es recurrente si y sólo si

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n < \infty \Leftrightarrow \frac{\beta}{\delta} < 1.$$

Entonces $S = \frac{\delta}{\delta-\beta}$, luego por la ecuación 1.24 se tiene que

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{\delta-\beta}{\delta} = 1 - \frac{\beta}{\delta}, \\
\pi_n &= \pi_0 \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n = \left(1 - \frac{\beta}{\delta}\right)\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n = (1-\rho)\,\rho^n.
\end{aligned}$$

Lo cual nos lleva a la siguiente proposición:

Proposición 12. *La cola $M/M/1$ con intensidad de tráfico ρ, es recurrente si y sólo si $\rho \leq 1$.*

Entonces por el corolario 11

Proposición 13. *La cola $M/M/1$ con intensidad de tráfico ρ es ergódica si y sólo si $\rho < 1$. En cuyo caso, la distribución de equilibrio π de la longitud de la cola es geométrica, $\pi_n = (1-\rho)\,\rho^n$, para $n = 1, 2, \ldots$.*

De la proposición anterior se desprenden varios hechos importantes.

a) $\mathbb{P}[X_t = 0] = \pi_0 = 1 - \rho$, es decir, la probabilidad de que el sistema se encuentre ocupado.

b) De las propiedades de la distribución Geométrica se desprende que

   i) $\mathbb{E}[X_t] = \frac{\rho}{1-\rho}$,

ii) $Var\left[X_t\right] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$.

Si L es el número esperado de clientes en el sistema, incluyendo los que están siendo atendidos, entonces

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}. \tag{1.31}$$

Si además W es el tiempo total del cliente en la cola: $W = W_q + W_s$, $\rho = \frac{\mathbb{E}[s]}{\mathbb{E}[\tau]} = \beta W_s$, puesto que $W_s = \mathbb{E}\left[s\right]$ y $\mathbb{E}\left[\tau\right] = \frac{1}{\delta}$. Por la fórmula de Little $L = \lambda W$

$$\begin{aligned} W &= \frac{L}{\beta} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\beta} = \frac{\rho}{\delta}\frac{1}{1-\rho} = \frac{W_s}{1-\rho} \\ &= \frac{1}{\delta\left(1-\rho\right)} = \frac{1}{\delta-\beta}, \end{aligned}$$

luego entonces

$$\begin{aligned} W_q &= W - W_s = \frac{1}{\delta-\beta} - \frac{1}{\delta} = \frac{\beta}{\delta(\delta-\beta)} \\ &= \frac{\rho}{1-\rho}\frac{1}{\delta} = \mathbb{E}\left[s\right]\frac{\rho}{1-\rho}. \end{aligned}$$

Entonces

$$L_q = \beta W_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Finalmente, tenemos las siguientes proposiciones:

Proposición 14. *1. $W\left(t\right) = 1 - e^{-\frac{t}{W}}$.*

2. $W_q\left(t\right) = 1 - \rho\exp^{-\frac{t}{W}}$.
donde $W = \mathbb{E}(w)$.

Proposición 15. *La cola M/M/1 con intensidad de tráfico ρ es recurrente si y sólo si $\rho \leq 1$*

Proposición 16. *La cola M/M/1 con intensidad de tráfica ρ es ergodica si y sólo si $\rho < 1$. En este caso, la distribución de equilibrio π de la longitud de la cola es geométrica, $\pi_n = \left(1-\rho\right)\rho^n$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

1.10.2 Cola $M/M/\infty$

Este tipo de modelos se utilizan para estimar el número de líneas en uso en una gran red comunicación o para estimar valores en los sistemas $M/M/c$ o $M/M/c/c$, en el se puede pensar que siempre hay un servidor disponible para cada cliente que llega.

Se puede considerar como un proceso de nacimiento y muerte con parámetros $\beta_n = \beta$ y $\mu_n = n\mu$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Este modelo corresponde al caso en que $\beta_n = \beta$ y $\delta_n = n\delta$, en este caso el parámetro de interés $\eta = \frac{\beta}{\delta}$, luego, la ecuación 1.21 queda de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_1\cdots\delta_n}{\beta_1\cdots\beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty}n!\eta^{-n} = \infty$$

con $S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta^n}{n!} = e$, entonces por la ecuación 1.24 se tiene que

$$\pi_0 = e^{\rho}, \tag{1.32}$$

$$\pi_n = e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}. \tag{1.33}$$

Entonces, el número promedio de servidores ocupados es equivalente a considerar el número de clientes en el sistema, es decir,

$$L = \mathbb{E}[N] = \rho. \tag{1.34}$$
$$Var[N] = \rho. \tag{1.35}$$

Además se tiene que $W_q = 0$ y $L_q = 0$. El tiempo promedio en el sistema es el tiempo promedio de servicio, es decir, $W = \mathbb{E}[s] = \frac{1}{\delta}$.Resumiendo, tenemos la sisuguiente proposición:

Proposición 17. *La cola $M/M/\infty$ es ergódica para todos los valores de η. La distribución de equilibrio π es Poisson con media η,*

$$\pi_n = \frac{e^{-n}\eta^n}{n!}. \tag{1.36}$$

1.10.3 Cola $M/M/m$

Este sistema considera m servidores idénticos, con tiempos entre arribos y de servicio exponenciales con medias $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\beta}$ y $\mathbb{E}[s] = \frac{1}{\delta}$. definimos ahora la utilización por servidor como $u = \frac{\rho}{m}$ que también se puede interpretar como la fracción de tiempo promedio que cada servidor está ocupado.

La cola $M/M/m$ se puede considerar como un proceso de nacimiento y muerte con parámetros: $\beta_n = \beta$ para $n = 0, 1, 2, \dots$ y

$$\delta_n = \begin{cases} n\delta & n = 0, 1, \dots, m-1 \\ c\delta & n = m, \dots \end{cases} \tag{1.37}$$

entonces la condición de recurrencia se va a cumplir sí y sólo si $\sum_{n\geq 1} \frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} < \infty$, equivalentemente se debe de cumplir que

$$\begin{aligned} S &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\beta^n}{n!\delta^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^m}{m!} u^n \end{aligned}$$

converja, lo cual ocurre si $u < 1$, en este caso

$$S = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^m}{m!}(1-u) \tag{1.38}$$

luego, para este caso se tiene que

$$\pi_0 = \frac{1}{S} \tag{1.39}$$
$$\pi_n = \begin{cases} \pi_0 \frac{\rho^n}{n!} & n = 0, 1, \dots, m-1 \\ \pi_0 \frac{\rho^n}{m!m^{n-m}} & n = m, \dots \end{cases} \tag{1.40}$$

Al igual que se hizo antes, determinaremos los valores de L_q, W_q, W y L:

$$\begin{aligned} L_q &= \mathbb{E}[N_q] = \sum_{n=0}^{\infty} (n-m)\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_{n+m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_0 \frac{\rho^{n+m}}{m!m^{n+m}} = \pi_0 \frac{\rho^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} nu^n = \pi_0 \frac{u\rho^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{du} u^n \\ &= \pi_0 \frac{u\rho^m}{m!} \frac{d}{du} \sum_{n=0}^{\infty} u^n = \pi_0 \frac{u\rho^m}{m!} \frac{d}{du}\left(\frac{1}{1-u}\right) = \pi_0 \frac{u\rho^m}{m!} \frac{1}{(1-u)^2}, \end{aligned}$$

es decir

$$L_q = \frac{u\pi_0\rho^m}{m!\left(1-u\right)^2}, \tag{1.41}$$

luego

$$W_q = \frac{L_q}{\beta}. \tag{1.42}$$

Además

$$W = W_q + \frac{1}{\delta} \tag{1.43}$$

Si definimos

$$C\left(m,\rho\right) = \frac{\pi_0\rho^m}{m!\left(1-u\right)} = \frac{\pi_m}{1-u}, \tag{1.44}$$

que es la probabilidad de que un cliente que llegue al sistema tenga que esperar en la cola. Entonces podemos reescribir las ecuaciones recién enunciadas:

$$L_q = \frac{C\left(m,\rho\right)u}{1-u}, \tag{1.45}$$

$$W_q = \frac{C\left(m,\rho\right)\mathbb{E}\left[s\right]}{m\left(1-u\right)} \tag{1.46}$$

$$\tag{1.47}$$

Por tanto tenemos las siguientes proposiciones:

Proposición 18. *La cola $M/M/m$ con intensidad de tráfico ρ es ergódica si y sólo si $\rho < 1$. En este caso la distribución ergódica π está dada por*

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{1}{S}\frac{\eta^n}{n!} & 0 \leq n \leq m \\ \frac{1}{S}\frac{\eta^m}{m!}\rho^{n-m} & m \leq n < \infty \end{cases} \tag{1.48}$$

Proposición 19. *Para $t \geq 0$*

a)

$$W_q\left(t\right) = 1 - C\left(m,\rho\right)e^{-c\delta t(1-u)}. \tag{1.49}$$

b)

$$W\left(t\right) = \begin{cases} 1 + e^{-\delta t}\frac{\rho-m+W_q(0)}{m-1-\rho} + e^{-m\delta t(1-u)}\frac{C(m,\rho)}{m-1-\rho} & \rho \neq m-1 \\ 1 - \left(1 + C\left(m,\rho\right)\delta t\right)e^{-\delta t} & \rho = m-1 \end{cases} \tag{1.50}$$

Resumiendo, para este caso $\beta_n = \beta$ y $\delta_n = m\left(n\right)\delta$, donde $m\left(n\right)$ es el número de servidores ocupados en el estado n, es decir, $m\left(n\right) = m$, para $n \geq m$ y $m\left(n\right) = m$ para $1 \leq n \leq m$. La intensidad de tráfico es $\rho = \frac{\beta}{m\delta}$ y $\frac{\beta_n}{\delta_n} = \rho$ para $n \geq m$. Así, al igual que en el caso $m = 1$, la ecuación 1.21 y la recurrencia se cumplen si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{-n} = \infty$, es decir, cuando $\rho \leq 1$.

1.10.4 Cola $M/M/m/m$

Consideremos un sistema con m servidores idénticos, pero ahora cada uno es de capacidad finita m. Si todos los servidores se encuentran ocupados, el siguiente usuario en llegar se pierde pues no se le deja esperar a que reciba servicio. Este tipo de sistemas pueden verse como un proceso de nacimiento y muerte con

$$\beta_n = \begin{cases} \beta & n = 0,1,2,\ldots,m-1 \\ 0 & n \geq m \end{cases} \tag{1.51}$$

$$\delta_n = \begin{cases} n\delta & n = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \\ 0 & n \geq m \end{cases} \tag{1.52}$$

El proceso tiene epacio de estados finitos, $S = \{0, 1, \ldots, m\}$, entonces de las ecuaciones que determinan la distribución estacionaria se tiene que

$$\pi_n = \begin{cases} \pi_0 \frac{\rho^n}{n!} & n = 0, 1, 2, \ldots, m \\ 0 & n \geq m \end{cases} \tag{1.53}$$

y además

$$\pi_0 = \left(\sum_{n=0}^{m} \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1}. \tag{1.54}$$

A la ecuación 1.53 se le llama *distribución truncada*. Si definimos $\pi_m = B(m, \rho) = \pi_0 \frac{\rho^m}{m!}$, π_m representa la probabilidad de que todos los servidores se encuentren ocupados, y también se le conoce como *fórmula de pérdida de Erlang*. Necesariamente en este caso el tiempo de espera en la cola W_q y el número promedio de clientes en la cola L_q deben de ser cero puesto que no se permite esperar para recibir servicio, más aún, el tiempo de espera en el sistema y el tiempo de serivcio tienen la misma distribución, es decir,

$$W(t) = \mathbb{P}\{w \leq t\} = 1 - e^{-\mu t},$$

en particular

$$W = \mathbb{E}[w] = \mathbb{E}[s] = \frac{1}{\delta}.$$

Por otra parte, el número esperado de clientes en el sistema es

$$\begin{aligned} L &= \mathbb{E}[N] = \sum_{n=0}^{m} n\pi_n = \pi_0 \rho \sum_{n=0}^{m} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \pi_0 \rho \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\rho^n}{n!} \end{aligned}$$

entonces, se tiene que

$$L = \rho(1 - B(m, \rho)) = \mathbb{E}[s](1 - B(m, \rho)). \tag{1.55}$$

Además

$$\delta_q = \delta(1 - B(m, \rho)) \tag{1.56}$$

representa la tasa promedio efectiva de arribos al sistema.

1.10.5 Cola M/G/1

Consideremos un sistema de espera con un servidor, en el que los tiempos entre arribos son exponenciales, y los tiempos de servicio tienen una distribución general G. Sea $N(t)_{t\geq 0}$ el número de clientes en el sistema al tiempo t, y sean $t_1 < t_2 < \ldots$ los tiempos sucesivos en los que los clientes completan su servicio y salen del sistema.

La sucesión $\{X_n\}$ definida por $X_n = N(t_n)$ es una cadena de Markov, en específico es la Cadena encajada del proceso de llegadas de usuarios. Sea U_n el número de clientes que llegan al sistema durante el tiempo de servicio del n-ésimo cliente, entonces se tiene que

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + U_{n+1} & \text{si } X_n \geq 1, \\ U_{n+1} & \text{si } X_n = 0 \end{cases}$$

Dado que los procesos de arribos de los usuarios es Poisson con parámetro λ, la probabilidad condicional de que lleguen j clientes al sistema dado que el tiempo de servicio es $s = t$, resulta:

$$\mathbb{P}\{U = j | s = t\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}, \ j = 0, 1, \ldots$$

por el teorema de la probabilidad total se tiene que

$$a_j = \mathbb{P}\{U = j\} = \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{U = j|s = t\}\, dG(t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!} dG(t) \tag{1.57}$$

donde G es la distribución de los tiempos de servicio. Las probabilidades de transición de la cadena están dadas por

$$p_{0j} = \mathbb{P}\{U_{n+1} = j\} = a_j, \text{ para } j = 0, 1, \ldots \tag{1.58}$$

y para $i \geq 1$

$$p_{ij} = \begin{cases} \mathbb{P}\{U_{n+1} = j - i + 1\} = a_{j-i+1} & \text{, para } j \geq i - 1 \\ 0 & j < i - 1 \end{cases} \tag{1.59}$$

Entonces la matriz de transición es:

$$P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Sea $\rho = \sum_{n=0} n a_n$, entonces se tiene el siguiente teorema:

Teorema 12. *La cadena encajada $\{X_n\}$ es*

a) Recurrente positiva si $\rho < 1$,

b) Transitoria si $\rho > 1$,

c) Recurrente nula si $\rho = 1$.

Recordemos que si la cadena de Markov $\{X_n\}$ tiene una distribución estacionaria entonces existe una distribución de probabilidad $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots,)$, con $\pi_i \geq 0$ y $\sum_{i\geq 1} \pi_i = 1$ tal que satisface la ecuación $\pi = \pi P$, equivalentemente

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_k p_{ij}, \text{ para } j = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.60}$$

que se puede ver como

$$\pi_j = \pi_0 a_j + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1}, \text{ para } j = 0, 1, \ldots \tag{1.61}$$

si definimos

$$\pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j \tag{1.62}$$

y

$$A(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \tag{1.63}$$

con $|z_j| \leq 1$. Si la ecuación 1.61 la multiplicamos por z^j y sumando sobre j, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0 a_j z^j + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1} z^j \\ &= \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j + \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i a_{i-1} \\ &= \pi_0 A(z) + A(z)\left(\frac{\pi(z) - \pi_0}{z}\right) \end{aligned}$$

es decir,

$$\pi(z) = \pi_0 A(z) + A(z)\left(\frac{\pi(z) - \pi_0}{z}\right) \Leftrightarrow \pi(z) = \frac{\pi_0 A(z)(z-1)}{z - A(z)} \tag{1.64}$$

Si $z \to 1$, entonces $A(z) \to A(1) = 1$, y además $A^{'}(z) \to A^{'}(1) = \rho$. Si aplicamos la Regla de L'Hospital se tiene que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = lim_{z\to 1^-}\pi(z) = \pi_0 lim_{z\to 1^-}\frac{z-1}{z-A(z)} = \frac{\pi_0}{1-\rho}$$

Retomando,

$$a_j = \mathbb{P}\{U = j\} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}dG(t), \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

entonces

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}dG(t)\\ &= \int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}dG(t) = \int_0^{\infty}\lambda t dG(t) = \lambda\mathbb{E}[s]\end{aligned}$$

Además, se tiene que $\rho = \beta\mathbb{E}[s] = \frac{\beta}{\delta}$ y la distribución estacionaria está dada por

$$\pi_j = \pi_0 a_j + \sum_{i=1}^{j+1}\pi_i a_{j-i+1}, \text{ para } j = 0, 1, \ldots \tag{1.65}$$

$$\pi_0 = 1 - \rho. \tag{1.66}$$

Por otra parte se tiene que

$$L = \pi^{'}(1) = \rho + \frac{A^{''}(1)}{2(1-\rho)} \tag{1.67}$$

pero $A^{''}(1) = \sum_{n=1} n(n-1)a_n = \mathbb{E}[U^2] - \mathbb{E}[U]$, $\mathbb{E}[U] = \rho$ y $\mathbb{E}[U^2] = \lambda^2\mathbb{E}[s^2] + \rho$. Por lo tanto $L = \rho + \frac{\beta^2\mathbb{E}[s^2]}{2(1-\rho)}$.

De las fórmulas de Little, se tiene que $W = E(w) = \frac{L}{\beta}$, también el tiempo de espera en la cola

$$W_q = \mathbb{E}(q) = \mathbb{E}(w) - \mathbb{E}(s) = \frac{L}{\beta} - \frac{1}{\delta}, \tag{1.68}$$

además el número promedio de clientes en la cola es

$$L_q = \mathbb{E}(N_q) = \beta W_q = L - \rho \tag{1.69}$$

1.10.6 Cola con Infinidad de Servidores

Este caso corresponde a $\beta_n = \beta$ y $\delta_n = n\delta$. El parámetro de interés es $\eta = \frac{\beta}{\delta}$, de donde se obtiene:

$$\sum_{n\geq 0}\frac{\delta_1\cdots\delta_n}{\beta_1\cdots\beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} n!\eta^n = \infty,$$

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta^n}{n!} = e^n.$$

Proposición 20. *La cola $M/M/\infty$ es ergodica para todos los valores de η. La distribución de equilibrio π es Poisson con media η, $\pi_n = \frac{e^{-n}\eta}{n!}$*

1.11 Redes de Colas:Sistemas Abiertos

Considerese un sistema con dos servidores, en los cuales los usuarios llegan de acuerdo a un proceso poisson con intensidad λ_1 al primer servidor, después de ser atendido se pasa a la siguiente cola en el segundo servidor. Cada servidor atiende a un usuario a la vez con tiempo exponencial con razón μ_i, para $i = 1, 2$. A este tipo de sistemas se les conoce como sistemas secuenciales.

Defínase el par (n, m) como el número de usuarios en el servidor 1 y 2 respectivamente. Las ecuaciones de balance son

$$\begin{aligned}
\lambda P_{0,0} &= \mu_2 P_{0,1} && (1.70)\\
(\lambda + \mu_1) P_{n,0} &= \mu_2 P_{n,1} + \lambda P_{n-1,0} && (1.71)\\
(\lambda + \mu_2) P_{0,m} &= \mu_2 P_{0,m+1} + \mu_1 P_{1,m-1} && (1.72)\\
(\lambda + \mu_1 + \mu_2) P_{n,m} &= \mu_2 P_{n,m+1} + \mu_1 P_{n+1,m-1} + \lambda P_{n-1,m} && (1.73)
\end{aligned}$$

Cada servidor puede ser visto como un modelo de tipo $M/M/1$, de igual manera el proceso de salida de una cola $M/M/1$ con razón λ, nos permite asumir que el servidor 2 también es una cola $M/M/1$. Además la probabilidad de que haya n usuarios en el servidor 1 es

$$\begin{aligned}
P\{n \text{ en el servidor } 1\} &= \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right) = \rho_1^n (1 - \rho_1)\\
P\{m \text{ en el servidor } 2\} &= \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right) = \rho_2^m (1 - \rho_2)
\end{aligned}$$

Si el número de usuarios en los servidores 1 y 2 son variables aleatorias independientes, se sigue que:

$$P_{n,m} = \rho_1^n (1 - \rho_1) \rho_2^m (1 - \rho_2) \qquad (1.74)$$

Verifiquemos que $P_{n,m}$ satisface las ecuaciones de balance (1.70) Antes de eso, enunciemos unas igualdades que nos serán de utilidad:

$$\begin{aligned}
\mu_i \rho_i &= \lambda \text{ para } i = 1, 2.\\
\lambda P_{0,0} &= \lambda (1 - \rho_1)(1 - \rho_2)\\
\text{y } \mu_2 P_{0,1} &= \mu_2 (1 - \rho_1) \rho_2 (1 - \rho_2) \Rightarrow\\
\lambda P_{0,0} &= \mu_2 P_{0,1}\\
(\lambda + \mu_2) P_{0,m} &= (\lambda + \mu_2)(1 - \rho_1) \rho_2^m (1 - \rho_2)\\
\mu_2 P_{0,m+1} &= \lambda (1 - \rho_1) \rho_2^m (1 - \rho_2)\\
&= \mu_2 (1 - \rho_1) \rho_2^m (1 - \rho_2)\\
\mu_1 P_{1,m-1} &= \frac{\lambda}{\rho_2} (1 - \rho_1) \rho_2^m (1 - \rho_2) \Rightarrow\\
(\lambda + \mu_2) P_{0,m} &= \mu_2 P_{0,m+1} + \mu_1 P_{1,m-1}\\
(\lambda + \mu_1 + \mu_2) P_{n,m} &= (\lambda + \mu_1 + \mu_2) \rho^n (1 - \rho_1) \rho_2^m (1 - \rho_2)\\
\mu_2 P_{n,m+1} &= \mu_2 \rho_2 \rho_1^n (1 - \rho_1) \rho_2^m (1 - \rho_2)\\
\mu_1 P_{n-1,m-1} &= \mu_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} \rho_1^n (1 - \rho_1) \rho_2^m (1 - \rho_2)\\
\lambda P_{n-1,m} &= \frac{\lambda}{\rho_1} \rho_1^n (1 - \rho_1) \rho_2^m (1 - \rho_2)\\
\Rightarrow (\lambda + \mu_1 + \mu_2) P_{n,m} &= \mu_2 P_{n,m+1} + \mu_1 P_{n-1,m-1} + \lambda P_{n-1,m}
\end{aligned}$$

entonces efectivamente la ecuación (1.74) satisface las ecuaciones de balance (1.70). El número promedio de usuarios en el sistema, está dado por

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_{n,m} (n+m) P_{n,m} = \sum_{n,m} n P_{n,m} + \sum_{n,m} m P_{n,m} \\
&= \sum_{n} \sum_{m} n P_{n,m} + \sum_{m} \sum_{n} m P_{n,m} = \sum_{n} n \sum_{m} P_{n,m} + \sum_{m} m \sum_{n} P_{n,m} \\
&= \sum_{n} n \sum_{m} \rho_1^n (1-\rho_1) \rho_2^m (1-\rho_2) + \sum_{m} m \sum_{n} \rho_1^n (1-\rho_1) \rho_2^m (1-\rho_2) \\
&= \sum_{n} n \rho_1^n (1-\rho_1) \sum_{m} \rho_2^m (1-\rho_2) + \sum_{m} m \rho_2^m (1-\rho_2) \sum_{n} \rho_1^n (1-\rho_1) \\
&= \sum_{n} n \rho_1^n (1-\rho_1) + \sum_{m} m \rho_2^m (1-\rho_2) \\
&= \frac{\lambda}{\mu_1 - \lambda} + \frac{\lambda}{\mu_2 - \lambda}
\end{aligned}
$$

Part II

BIBLIOGRAFIA

CAPÍTULO 2

Bibliografía

Bibliography

[1] Asmussen, S. (1987). *Applied Probability and Queues*. John Wiley and Sons.

[2] Bhat, N. (2008). *An Introduction to Queueing Theory: Modelling and Analysis in Applications*. Birkhauser.

[3] Boxma, J. O. (1987). Pseudoconservation Laws in Cyclic Service Systems. *Journal of Applied Probability*, 24, 949-964.

[4] Borovkov, A. A., and Schassberger, R. (1995). Ergodicity of a Polling Network. *Stochastic Processes and their Applications*, 50(2), 253-262.

[5] van den Bos, L., and Boon, M. (2013). *Networks of Polling Systems* (report). Eindhoven University of Technology.

[6] Boon, M. A. A., van der Mei, R. D., and Winands, E. M. M. (2011). Applications of Polling Systems. February 24, 2011.

[7] Ng, C. H., and Soong, B. H. (2008). *Queueing Modelling Fundamentals with Applications in Communications Networks*. John Wiley and Sons.

[8] Chen, H. (1995). Fluid Approximations and Stability of Multiclass Queueing Networks I: Work-conserving Disciplines. *Annals of Applied Probability*.

[9] Cooper, R. B. (1970). Queues Served in Cyclic Order: Waiting Times. *The Bell System Technical Journal*, 49, 399-413.

[10] Dai, J. G. (1995). On Positive Harris Recurrence of Multiclass Queueing Networks: A Unified Approach Via Fluid Limit Models. *The Annals of Applied Probability*, 5(1), 49-77.

[11] Dai, J. G., and Meyn, S. P. (1995). Stability and Convergence of Moments for Multiclass Queueing Networks Via Fluid Limit Models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(11), 1889-1904.

[12] Dai, J. G., and Weiss, G. (1996). Stability and Instability of Fluid Models for Reentrant Lines. *Mathematics of Operations Research*, 21(1), 115-134.

[13] Daley, D. J. (1968). The Correlation Structure of the Output Process of Some Single Server Queueing Systems. *The Annals of Mathematical Statistics*, 39(3), 1007-1019.

[14] Davis, M. H. A. (1984). Piecewise Deterministic Markov Processes: A General Class of Nondiffusion Stochastic Models. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 46(3), 353-388.

[15] Down, D. (1998). On the Stability of Polling Models with Multiple Servers. *Journal of Applied Probability*, 35(3), 925-935.

[16] Disney, R. L., Farrell, R. L., and Morais, P. R. (1973). A Characterization of $M/G/1$ Queues with Renewal Departure Processes. *Management Science*, 19(11), Theory Series, 1222-1228.

[17] Eisenberg, M. (1972). Queues with Periodic Service and Changeover Time. *Operations Research*, 20(2), 440-451.

[18] Fricker, C., and Jaïbi, M. R. (1994). Monotonicity and Stability of Periodic Polling Models. *Queueing Systems*, 15(1-4), 211-238.

[19] Getoor, R. K. (1979). Transience and Recurrence of Markov Processes. In J. Azema and M. Yor (Eds.), *Seminaire de Probabilités XIV* (pp. 397-409). New York: Springer-Verlag.

[20] Gut, A. (1995). *Stopped Random Walks: Limit Theorems and Applications.* Applied Probability.

[21] Kaspi, H., and Mandelbaum, A. (1992). Regenerative Closed Queueing Networks. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 39(4), 239-258.

[22] Kleinrock, L. (1975). *Queueing Systems: Theory, Volume 1.* Wiley-Interscience.

[23] Konheim, A. G., Levy, H., and Srinivasan, M. M. (1994). Descendant Set: An Efficient Approach for the Analysis of Polling Systems. *IEEE Transactions on Communications*, 42(2-4), 1245-1253.

[24] Lang, S. (1973). *Calculus of Several Variables.* Addison-Wesley Publishing Company.

[25] Levy, H., and Sidi, M. (1990). Polling Systems: Applications, Modeling, and Optimization. *IEEE Transactions on Communications*, 30(10), 1750-1760.

[26] Fricker, C., and Jaïbi, M. R. (1998). Stability of Multi-server Polling Models. Institute National de Recherche en Informatique et en Automatique.

[27] Meyn, S. P., and Tweedie, R. L. (1993). *Markov Chains and Stochastic Stability.* Springer-Verlag.

[28] Meyn, S. P., and Down, D. (1994). Stability of Generalized Jackson Networks. *The Annals of Applied Probability.*

[29] van der Mei, R. D., and Borst, S. C. (1997). Analysis of Multiple-server Polling Systems by Means of the Power-Series Algorithm. *Stochastic Models*, 13(2), 339-369.

[30] Meyn, S. P. (1995). Transience of Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models. *The Annals of Applied Probability*, 5(4), 946-957.

[31] Adan, I. J. B. F., van Leeuwaarden, J. S. H., and Winands, E. M. M. (2006). On the Application of Rouche's Theorem in Queueing Theory. *Operations Research Letters*, 34(3), 355-360.

[32] Roubos, A. (2007). *Polling Systems and their Applications.* Vrije Universiteit Amsterdam.

[33] Saavedra, B. P. (2011). Informe Técnico del Microsimulador. Departamento de Matemáticas.

[34] Vishnevskii, V. M., and Semenova, O. V. (2006). Mathematical Methods to Study the Polling Systems. *Automation and Remote Control*, 67(2), 173-220.

[35] Serfozo, R. (2009). *Basics of Applied Stochastic Processes.* Springer-Verlag.

[36] Sharpe, M. (1998). *General Theory of Markov Processes.* Academic.

[37] Sigman, K. (1990). The Stability of Open Queueing Networks. *Stochastic Processes and their Applications*, 35(1), 11-15.

[38] Sidi, M., and Levy, H. (1990). Customer Routing in Polling Systems. In P. King, I. Mitrani, and R. Pooley (Eds.), *Proceedings Performance '90.* North-Holland, Amsterdam.

[39] Sidi, M., and Levy, H. (1991). Polling Systems with Simultaneous Arrivals. *IEEE Transactions on Communications*, 39(6), 823-827.

[40] Sigman, K., Thorisson, H., and Wolff, R. W. (1994). A Note on the Existence of Regeneration Times. *Journal of Applied Probability*, 31, 1116-1122.

[41] Stidham, S. Jr. (1972). Regenerative Processes in the Theory of Queues, with Applications to the Alternating Priority Queue. *Advances in Applied Probability*, 4(3), 542-577.

[42] Takagi, H. (1986). *Analysis of Polling Systems.* Cambridge: MIT Press.

[43] Takagi, H., and Kleinrock. (1986). Analysis of Polling Systems. Cambridge: MIT Press.

[44] Takagi, H. (1988). Queueing Analysis of Polling Models. *ACM Computing Surveys*, 20(1), 5-28.

[45] Thorisson, H. (2000). *Coupling, Stationarity, and Regeneration.* Probability and its Applications. Springer-Verlag.

[46] Winands, E. M. M., Adan, I. J. B. F., and van Houtum, G. J. (2006). Mean Value Analysis for Polling Systems. *Queueing Systems*, 54, 35-44.

[47] James, G., Witten, D., Hastie, T., and Tibshirani, R. (2013). *An Introduction to Statistical Learning: with Applications in R.* Springer.

[48] Hosmer, D. W., Lemeshow, S., and Sturdivant, R. X. (2013). *Applied Logistic Regression* (3rd ed.). Wiley.

[49] Bishop, C. M. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning.* Springer.

[50] Harrell, F. E. (2015). *Regression Modeling Strategies: With Applications to Linear Models, Logistic and Ordinal Regression, and Survival Analysis.* Springer.

[51] R Documentation and Tutorials: `https://cran.r-project.org/manuals.html`

[52] Tutorials on R-bloggers: `https://www.r-bloggers.com/`

[53] Coursera: *Machine Learning* by Andrew Ng.

[54] edX: *Data Science and Machine Learning Essentials* by Microsoft.

[55] Ross, S. M. (2014). *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists.* Academic Press.

[56] DeGroot, M. H., and Schervish, M. J. (2012). *Probability and Statistics* (4th ed.). Pearson.

[57] Hogg, R. V., McKean, J., and Craig, A. T. (2019). *Introduction to Mathematical Statistics* (8th ed.). Pearson.

[58] Kleinbaum, D. G., and Klein, M. (2010). *Logistic Regression: A Self-Learning Text* (3rd ed.). Springer.

[59] Wasserman, L. (2004). *All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference.* Springer.

[60] Probability and Statistics Tutorials on Khan Academy: `https://www.khanacademy.org/math/statistics-probability`

[61] Online Statistics Education: `http://onlinestatbook.com/`

[62] Peng, C. Y. J., Lee, K. L., and Ingersoll, G. M. (2002). *An Introduction to Logistic Regression Analysis and Reporting.* The Journal of Educational Research.

[63] Agresti, A. (2007). *An Introduction to Categorical Data Analysis* (2nd ed.). Wiley.

[64] Han, J., Pei, J., and Kamber, M. (2011). *Data Mining: Concepts and Techniques.* Morgan Kaufmann.

[65] Data Cleaning and Preprocessing on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/data-cleaning-and-preprocessing`

[66] Molinaro, A. M., Simon, R., and Pfeiffer, R. M. (2005). *Prediction Error Estimation: A Comparison of Resampling Methods.* Bioinformatics.

[67] Evaluating Machine Learning Models on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/evaluating-machine-learning-models`

[68] Practical Guide to Logistic Regression in R on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/practical-guide-to-logistic-regression-in-r`

[69] Coursera: *Statistics with R* by Duke University.

[70] edX: *Data Science: Probability* by Harvard University.

[71] Coursera: *Logistic Regression* by Stanford University.

[72] edX: *Data Science: Inference and Modeling* by Harvard University.

[73] Coursera: *Data Science: Wrangling and Cleaning* by Johns Hopkins University.

[74] edX: *Data Science: R Basics* by Harvard University.

[75] Coursera: *Regression Models* by Johns Hopkins University.

[76] edX: *Data Science: Statistical Inference* by Harvard University.

[77] An Introduction to Survival Analysis on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/an-introduction-to-survival-analysis`

[78] Multinomial Logistic Regression on DataCamp: `https://www.datacamp.com/community/tutorials/multinomial-logistic-regression-R`

[79] Coursera: *Survival Analysis* by Johns Hopkins University.

[80] edX: *Data Science: Statistical Inference and Modeling for High-throughput Experiments* by Harvard University.

[81] Sigman, K., and Wolff, R. W. (1993). A Review of Regenerative Processes. *SIAM Review*, 38(2), 269-288.