Sistemas de Visita: Revisión

Polling Systems: Review

Carlos E. Martínez-Rodríguez

Julio-Agosto 2024

Resumen

Abstract

Índice

Introducción

Introduction

1. Sistemas de Visitas

Los *Sistemas de Visitas* fueron introducidos a principios de los años 50, ver [85, 87, 113, 119, 131, 121], con un problema relacionado con las personas encargadas de la revisión y reparación de máquinas; más adelante fueron utilizados para estudiar problemas de control de señales de tráfico. A partir de ese momento el campo de aplicación ha crecido considerablemente, por ejemplo en: comunicación en redes de computadoras, robótica, tráfico y transporte, manufactura, producción, distribución de correo, sistema de salud pública, etc.

Un modelo de colas es un modelo matemático que describe la situación en la que uno o varios usuarios solicitan de un servicio a una instancia, computadora o persona. Aquellos usuarios que no son atendidos inmediatamente toman un lugar en una cola en espera de servicio. Un sistema de visitas consiste en modelos de colas conformadas por varias colas y un solo servidor que las visita en algún orden para atender a los usuarios que se encuentran esperando por servicio.

Uno de los principales objetivos de este tipo de sistemas es tratar de mejorar el desempeño del sistema de visitas. Una de medida de desempeño importante es el tiempo de respuesta del sistema, así como los tiempos promedios de espera en una fila y el tiempo promedio total que tarda en ser realizada una operación completa a lo largo de todo el sistema. Algunas medidas de desempeño para los usuarios son los valores promedio de espera para ser atendidos, de servicio, de permanencia total en el sistema; mientras que para el servidor son los valores promedio de permanencia en una cola atendiendo, de traslado entre las colas, de duración del ciclo entre dos visitas consecutivas a la misma cola, entre otras medidas de desempeño estudiadas en la literatura.

Los sistemas de visitas pueden dividirse en dos clases:

i) hay varios servidores y los usuarios que llegan al sistema eligen un servidor de entre los que están presentes.

ii) hay uno o varios servidores que son comunes a todas las colas, estos visitan a cada una de las colas y atienden a los usuarios que están presentes al momento de la visita del servidor.

Los usuarios llegan a las colas de manera tal que los tiempos entre arribos son independientes e idénticamente distribuidos. En la mayoría de los modelos de visitas cíclicas, la capacidad de almacenamiento es infinita, es decir la cola puede acomodar a una cantidad infinita de usuarios a la vez. Los tiempos de servicio en una cola son usualmente considerados como muestra de una distribución de probabilidad que caracteriza a la cola, además se acostumbra considerarlos mutuamente independientes e independientes del estado actual del sistema.

La ruta de atención del servidor, es el orden en el cual el servidor visita las colas determinado por un mecanismo que puede depender del estado actual del sistema (dinámico) o puede ser independiente del estado del sistema (estático). El mecanismo más utilizado es el cíclico. Para modelar sistemas en los cuales ciertas colas son visitadas con mayor frecuencia que otras, las colas cíclicas se han extendido a colas periódicas, en las cuales el servidor visita la cola conforme a una orden de servicio de longitud finita.

El *orden de visita* se entiende como la regla utilizada por el servidor para elegir la próxima cola. Este servicio puede ser dinámico o estático:

i) Para el caso *estático* la regla permanece invariante a lo largo del curso de la operación del sistema.

ii) Para el caso *dinámico* la cola que se elige para servicio en el momento depende de un conocimiento total o parcial del estado del sistema.

Dentro de los ordenes de tipo estático hay varios, los más comunes son:

i) *cíclico*: Si denotamos por $\{Q_i\}_{i=1}^N$ al conjunto de colas a las cuales el servidor visita en el orden

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_N, Q_1, Q_2, \dots, Q_N.$$

ii) *periódico*: el servidor visita las colas en el orden:

$$Q_{T(1)}, Q_{T(2)}, \dots, Q_{T(M)}, Q_{T(1)}, \dots, Q_{T(M)}$$

caracterizada por una tabla de visitas

$$\left(T\left(1\right), T\left(2\right), \dots, T\left(M\right)\right),$$

con $M \geq N$, $T\left(i\right) \in \{1, 2, \dots, N\}$ e $i = \overline{1, M}$. Hay un caso especial, *colas tipo elevador* donde las colas son atendidas en el orden

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_N, Q_1, Q_2, \dots, Q_{N-1}, Q_N, Q_{N-1}, \dots, Q_1,$$

.

iii) *aleatorio*: la cola Q_i es elegida para ser atendida con probabilidad p_i, $i = \overline{1, N}$, $\sum_{i=1}^N p_i = 1$. Una posible variación es que después de atender Q_i el servidor se desplaza a Q_j con probabilidad p_{ij}, con $i, j = \overline{1, N}$, $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$, para $i = \overline{1, N}$.

El servidor usualmente incurrirá en tiempos de traslado para ir de una cola a otra. Un sistema de visitas puede expresarse en un par de parámetros: el número de colas, que usualmente se denotará por N, y el tráfico característico de las colas, que consiste de los procesos de arribo y los procesos de servicio caracteriza a estos sistemas.

La disciplina de servicio especifica el número de usuarios que son atendidos durante la visita del servidor a la cola; estas pueden ser clasificadas en límite de usuarios atendidos y en usuarios atendidos en un tiempo límite, poniendo restricciones en la cantidad de tiempo utilizado por el servidor en una visita a la cola. Alternativamente pueden ser clasificadas en políticas exhaustivas y políticas cerradas, dependiendo en si los usuarios que llegaron a la cola mientras el servidor estaba dando servicio son candidatos para ser atendidos por el servidor que se encuentra en la cola dando servicio. En la política exhaustiva estos usuarios son candidatos para ser atendidos mientras que en la cerrada no lo son. De estas dos políticas se han creado híbridos los cuales pueden revisarse en [87].

La disciplina de la cola especifica el orden en el cual los usuarios presentes en la cola son atendidos. La más común es la *First-In-First-Served*. Las políticas más comunes son las de tipo exhaustivo que consiste en que el servidor continuará trabajando hasta que la cola quede vacía; y la política cerrada, bajo la cual serán atendidos exactamente aquellos que estaban presentes al momento en que llegó el servidor a la cola.

Las políticas de servicio deben de satisfacer las siguientes propiedades:

i) No dependen de los procesos de servicio anteriores.

ii) La selección de los usuarios para ser atendidos es independiente del tiempo de servicio requerido y de los posibles arribos futuros.

iii) las políticas de servicio que son aplicadas, es decir, el número de usuarios en la cola que serán atendidos durante la visita del servidor a la misma; éstas pueden ser clasificadas por la cantidad de usuarios atendidos y por el número de usuarios atendidos en un intervalo de tiempo determinado. Las principales políticas de servicio para las cuales se han desarrollado aplicaciones son: la exhaustiva, la cerrada y la k-límite, ver [113, 131, 121]. De estas políticas se han creado híbridos los cuales pueden revisarse en Boon and Van der Mei [87].

iv) Una política de servicio es asignada a cada etapa independiente de la cola que se está atendiendo, no necesariamente es la misma para todas las etapas.

v) El servidor da servicio de manera constante.

vi) La política de servicio se asume monótona (ver [104]).

Las principales políticas deterministas de servicio son:

i) *Cerrada* donde solamente los usuarios presentes al comienzo de la etapa son considerados para ser atendidos.

ii) *Exhaustiva* en la que tanto los usuarios presentes al comienzo de la etapa como los que arriban mientras se está dando servicio son considerados para ser atendidos.

iii) k_i-limited: el número de usuarios por atender en la cola i estácotado por k_i.

iv) *tiempo limitado* la cola es atendida solo por un periodo de tiempo fijo.

Nota 1.1. *a) Una etapa es el periodo de tiempo durante el cual el servidor atiende de manera continua en una sola cola.*

b) Un ciclo es el periodo necesario para terminar l etapas.

Boxma y Groenendijk [86] enuncian la Ley de Pseudo-Conservación para la política exhaustiva como

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i \mathbb{E} W_i = \rho \frac{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{E}\left[\delta_i^{(2)}\left(1\right)\right]}{2\left(1-\rho\right)} + \rho \frac{\delta^{(2)}}{2\delta} + \frac{\delta}{2\left(1-\rho\right)} \left[\rho^2 - \sum_{i=1}^{N} \rho_i^2\right], \tag{1.1}$$

donde $\delta = \sum_{i=1}^{N} \delta_i\left(1\right)$ y $\delta_i^{(2)}$ denota el segundo momento de los tiempos de traslado entre colas del servidor, $\delta^{(2)}$ es el segundo momento de los tiempos de traslado entre las colas de todo el sistema, finalmente $\rho = \sum_{i=1}^{N} \rho_i$. Por otro lado, se tiene que

$$\mathbb{E}W_i = \frac{\mathbb{E}I_i^2}{2\mathbb{E}I_i} + \frac{\lambda_i \mathbb{E}\left[\eta_i^{(2)}(1)\right]}{2(1-\rho_i)}, \tag{1.2}$$

con I_i definido como el periódo de intervisita, es decir el tiempo entre una salida y el próximo arribo del servidor a la cola Q_i, dado por $I_i = C_i - V_i$, donde C_i es la longitud del ciclo, definido como el tiempo entre dos instantes de visita consecutivos a la cola Q_i y V_i es el periodo de visita, definido como el tiempo que el servidor utiliza en atender a los usuarios de la cola Q_i.

$$\mathbb{E}I_i = \frac{(1-\rho_i)}{1-\rho}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left[\delta_i(1)\right], \tag{1.3}$$

con

$$\mathbb{E}I_i^2 = \mathbb{E}\left[\delta_{i-1}^{(2)}(1)\right] - \left(\mathbb{E}\left[\delta_{i-1}(1)\right]\right)^2 + \frac{1-\rho_i}{\rho_i}\sum_{j=1,j\neq i}^{N} r_{ij} + \left(\mathbb{E}I_i\right)^2, \tag{1.4}$$

donde el conjunto de valores $\{r_{ij} : i, j = 1, 2, \ldots, N\}$ representan la covarianza del tiempo para las colas i y j; para sistemas con servicio exhaustivo, el tiempo de estación para la cola i se define como el intervalo de tiempo entre instantes sucesivos cuando el servidor abandona la cola $i-1$ y la cola i. Hideaki Takagi [131] proporciona expresiones cerradas para calcular r_{ij}, éstas implican resolver un sistema de N^2 ecuaciones lineales;

$$\begin{aligned}
r_{ij} &= \tfrac{\rho_i}{1-\rho_i}\left(\textstyle\sum_{m=i+1}^{N} r_{jm} + \sum_{m=1}^{j-1} r_{jm} + \sum_{m=j}^{i-1} r_{jm}\right), \ j<i,\\
r_{ij} &= \tfrac{\rho_i}{1-\rho_i}\left(\textstyle\sum_{m=i+1}^{j-1} r_{jm} + \sum_{m=j}^{N} r_{jm} + \sum_{m=1}^{i-1} r_{jm}\right), \ j>i,\\
r_{ij} &= \tfrac{\mathbb{E}\left[\delta_{i-1}^{(2)}(1)\right] - \left(\mathbb{E}\left[\delta_{i-1}(1)\right]\right)^2}{(1-\rho_i)^2} + \tfrac{\lambda_i \mathbb{E}\left[\eta_i(1)^{(2)}\right]}{(1-\rho_i)^3} + \tfrac{\rho_i}{1-\rho_i}\textstyle\sum_{j=i,j=1}^{N} r_{ij}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Para el caso de la Política Cerrada la Ley de Pseudo-Conservación se expresa en los siguientes términos.

$$\sum_{i=1}^{N}\rho_i \mathbb{E}W_i = \rho\frac{\sum_{i=1}^{N}\lambda_i \mathbb{E}\left[\delta_i(1)^{(2)}\right]}{2(1-\rho)} + \rho\frac{\delta^{(2)}}{2\delta} + \frac{\delta}{2(1-\rho)}\left[\rho^2 + \sum_{i=1}^{N}\rho_i^2\right], \tag{1.6}$$

el tiempo de espera promedio para los usuarios en la cola Q_1 se puede determinar por medio de

$$\mathbb{E}W_i = \frac{(1+\rho_i)\,\mathbb{E}C_i^2}{2\mathbb{E}C_i}, \tag{1.7}$$

donde C_i denota la longitud del ciclo para la cola Q_i, definida como el tiempo entre dos instantes consecutivos de visita en Q_i, cuyo segundo momento está dado por

$$\mathbb{E}C_i^2 = \frac{1}{\rho_i}\sum_{j=1,j\neq i}^{N} r_{ij} + \sum_{j=1}^{N} r_{ij} + \left(\mathbb{E}C\right)^2, \tag{1.8}$$

con

$$\mathbb{E}C = \frac{\delta}{1-\rho},$$

donde r_{ij} representa la covarianza del tiempo de estación para las colas i y j, pero el tiempo de estación para la cola i para la política cerrada se define como el intervalo de tiempo entre instantes sucesivos cuando el servidor visita la cola i y la cola $i+1$. El conjunto $\{r_{ij} : i, j = 1, 2, \ldots, N\}$ se calcula resolviendo un sistema de N^2 ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}
r_{ij} &= \rho_i\left(\textstyle\sum_{m=i}^{N} r_{jm} + \sum_{m=1}^{j-1} r_{jm} + \sum_{m=j}^{i-1} r_{mj}\right), \ j<i,\\
r_{ij} &= \rho_i\left(\textstyle\sum_{m=i}^{j-1} r_{jm} + \sum_{m=j}^{N} r_{jm} + \sum_{m=1}^{i-1} r_{mj}\right), \ j>i,\\
r_{ij} &= r_{i-1}^{(2)} - \left(r_{i-1}^{(1)}\right)^2 + \lambda_i b_i^{(2)}\mathbb{E}C_i + \rho_i\textstyle\sum_{j=1,j\neq i}^{N} r_{ij} + \rho_i^2\sum_{i=j,j=1}^{N} r_{ij}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Finalmente, Takagi [131] proponen una aproximación para los tiempos de espera de los usuarios en cada una de las colas:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\frac{\rho_i}{\rho}\left(1-\frac{\lambda_i\delta}{1-\rho}\right)\mathbb{E}\left[W_i\right]=\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i\mathbb{E}\left[\eta_i(1)^{(2)}\right]}{2(1-\rho)}\\
&+\frac{\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}\left[\delta_i^2\right]-\left(\mathbb{E}[\delta_i(1)]\right)^2}{2\delta}+\frac{\delta\left(\rho-\sum_{i=1}^{N}\rho_i^2\right)}{2\rho(1-\rho)}+\frac{\delta\sum_{i=1}^{N}\rho_i^2}{\rho(1-\rho)},
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}W_i\cong\frac{1-\rho+\rho_i}{1-\rho-\lambda_i\delta}\times\frac{1-\rho}{\rho(1-\rho)+\sum_{i=1}^{N}\rho_i^2}\\
&\times\left[\frac{\rho}{2(1-\rho)}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\mathbb{E}\left[\eta_i\left(1\right)^{(2)}\right]+\frac{\rho\Delta^2}{2\delta}+\frac{\delta}{2(1-\rho)}\sum_{i=1}^{N}\rho_i\left(1+\rho_i\right).\right]
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

donde $\Delta^2=\sum_{i=1}^{N}\delta_i^2$. El modelo está compuesto por c colas de capacidad infinita, etiquetadas de 1 a c las cuales son atendidas por s servidores. Los servidores atienden de acuerdo a una cadena de Markov independiente $\left(X_n^i\right)_n$ con $1\leq i\leq s$ y $n\in\{1,2,\ldots,c\}$ con la misma matriz de transición $r_{k,l}$ y única medida invariante (p_k). Cada servidor permanece atendiendo en la cola un periodo llamado de visita y determinada por la política de servicio asignada a la cola.

Los usuarios llegan a la cola k con una tasa λ_k y son atendidos a una razón μ_k. Las sucesiones de tiempos de inter-arribo $\left(\tau_k\left(n\right)\right)_n$, la de tiempos de servicio $\left(\sigma_k^i\left(n\right)\right)_n$ y la de tiempos de cambio $\left(\sigma_{k,l}^{0,i}\left(n\right)\right)_n$ requeridas en la cola k para el servidor i son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas con distribución general independiente de i, con media $\sigma_k=\frac{1}{\mu_k}$, respectivamente $\sigma_{k,l}^0=\frac{1}{\mu_{k,l}^0}$, e independiente de las cadenas de Markov $\left(X_n^i\right)_n$. Además se supone que los tiempos de interarribo se asume son acotados, para cada $\rho_k=\lambda_k\sigma_k<s$ para asegurar la estabilidad de la cola k cuando opera como una cola $M/GM/1$.

Una política de servicio determina el número de usuarios que serán atendidos sin interrupción en periodo de servicio por los servidores que atienden a la cola. Para un solo servidor esta se define a través de una función f donde $f\left(x,a\right)$ es el número de usuarios que son atendidos sin interrupción cuando el servidor llega a la cola y encuentra x usuarios esperando dado el tiempo transcurrido de interarribo a. Sea $v\left(x,a\right)$ la du ración del periodo de servicio para una sola condición inicial (x,a). Las políticas de servicio consideradas satisfacen las siguientes propiedades:

i) Hay conservación del trabajo, es decir

$$
v\left(x,a\right)=\sum_{l=1}^{f(x,a)}\sigma\left(l\right)
\tag{1.12}
$$

con $f\left(0,a\right)=v\left(0,a\right)=0$, donde $\left(\sigma\left(l\right)\right)_l$ es una sucesión independiente e idénticamente distribuida de los tiempos de servicio solicitados.

ii) La selección de usuarios para se atendidos es independiente de sus correspondientes tiempos de servicio y del pasado hasta el inicio del periodo de servicio. Así las distribución (f,v) no depende del orden en el cuál son atendidos los usuarios.

iii) La política de servicio es monótona en el sentido de que para cada $a\geq0$ los números $f\left(x,a\right)$ son monótonos en distribución en x y su límite en distribución cuando $x\rightarrow\infty$ es una variable aleatoria F^{*0} que no depende de a.

iv) El número de usuarios atendidos por cada servidor es acotado por $f^{min}\left(x\right)$ de la longitud de la cola x que además converge monótonamente en distribución a F^* cuando $x\rightarrow\infty$.

Un sistema de visitas o sistema de colas consiste en un cierto número de filas o colas atendidas por un solo servidor en un orden determinado, estos se puede aplicar en situaciones en las cuales varios tipos de usuarios intentan tener acceso a una fuente en común que está disponible para un solo tipo de usuario a la vez.

2. Función Generadora de Probabilidades

Teorema 2.1 (Teorema de Continuidad)**.** *Supóngase que* $\{X_n,n=1,2,3,\ldots\}$ *son variables aleatorias finitas, no negativas con valores enteros tales que* $P\left(X_n=k\right)=p_k^{(n)}$*, para* $n=1,2,3,\ldots$*,* $k=0,1,2,\ldots$*, con* $\sum_{k=0}^{\infty}p_k^{(n)}=1$*, para*

$n = 1, 2, 3, \ldots$. Sea g_n la Función Generadora de Probabilidades (FGP) para la variable aleatoria X_n. Entonces existe una sucesión $\{p_k\}$ tal que

$$lim_{n\rightarrow\infty} p_k^{(n)} = p_k \text{ para } 0 < s < 1. \tag{2.1}$$

En este caso, $g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$. Además

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \text{ si y sólo si } lim_{s\uparrow 1} g(s) = 1. \tag{2.2}$$

Teorema 2.2. *Sea N una variable aleatoria con valores enteros no negativos finita tal que $P(N = k) = p_k$, para $k = 0, 1, 2, \ldots,$ y*

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = P(N < \infty) = 1. \tag{2.3}$$

Sea Φ la FGP de N tal que

$$g(s) = \mathbb{E}\left[s^N\right] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k, \tag{2.4}$$

con $g(1) = 1$. Si $0 \leq p_1 \leq 1$ y

$$\mathbb{E}[N] = g^{'}(1) \leq 1, \tag{2.5}$$

entonces no existe solución de la ecuación $g(s) = s$ en el intervalo $[0, 1)$. Si $\mathbb{E}[N] = g^{'}(1) > 1$, lo cual implica que $0 \leq p_1 < 1$, entonces existe una única solución de la ecuación $g(s) = s$ en el intervalo $[0, 1)$.

Teorema 2.3. *Si X y Y tienen PGF G_X y G_Y respectivamente, entonces,*

$$G_X(s) = G_Y(s)$$

para toda s, sí y sólo sí

$$P(X = k)) = P(Y = k), \tag{2.6}$$

para toda $k = 0, 1, \ldots,$., es decir, si y sólo si X y Y tienen la misma distribución de probabilidad.

Teorema 2.4. *Para cada n fijo, sea la sucesión de probabilidades $\{a_{0,n}, a_{1,n}, \ldots,\}$, tales que $a_{k,n} \geq 0$ para toda $k = 0, 1, 2, \ldots,$ y $\sum_{k\geq 0} a_{k,n} = 1$, y sea $G_n(s)$ la correspondiente función generadora, $G_n(s) = \sum_{k\geq 0} a_{k,n} s^k$. De modo que para cada valor fijo de k*

$$lim_{n\rightarrow\infty} a_{k,n} = a_k, \tag{2.7}$$

es decir converge en distribución, es necesario y suficiente que para cada valor fijo $s \in [0,)$,

$$lim_{n\rightarrow\infty} G_n(s) = G(s), \tag{2.8}$$

donde $G(s) = \sum_{k\geq 0} p_k s^k$, para cualquier la función generadora del límite de la sucesión.

Teorema 2.5 (Teorema de Abel)**.** *Sea $G(s) = \sum_{k\geq 0} a_k s^k$ para cualquier $\{p_0, p_1, \ldots,\}$, tales que $p_k \geq 0$ para toda $k = 0, 1, 2, \ldots,$. Entonces $G(s)$ es continua por la derecha en $s = 1$, es decir*

$$lim_{s\uparrow 1} G(s) = \sum_{k\geq 0} p_k = G(s), \tag{2.9}$$

sin importar si la suma es finita o no.

Nota 2.1. *El radio de Convergencia para cualquier FGP es $R \geq 1$, entonces, el Teorema de Abel nos dice que aún en el peor escenario, cuando $R = 1$, aún se puede confiar en que la FGP será continua en $s = 1$, en contraste, no se puede asegurar que la FGP será continua en el límite inferior $-R$, puesto que la FGP es simétrica alrededor del cero: la FGP converge para todo $s \in (-R, R)$, y no lo hace para $s < -R$ o $s > R$. Además nos dice que podemos escribir $G_X(1)$ como una abreviación de $lim_{s\uparrow 1} G_X(s)$.*

Entonces si suponemos que la diferenciación término a término está permitida, entonces

$$G_X^{'}(s) = \sum_{x=1}^{\infty} x s^{x-1} p_x \tag{2.10}$$

el Teorema de Abel nos dice que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(X) = \lim_{s\uparrow 1} G_X^{'}(s): \\ &\mathbb{E}[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x p_x = G_X^{'}(1) = \lim_{s\uparrow 1} G_X^{'}(s), \end{aligned} \tag{2.11}$$

dado que el Teorema de Abel se aplica a

$$G_X^{'}(s) = \sum_{x=1}^{\infty} x s^{x-1} p_x, \tag{2.12}$$

estableciendo así que $G_X^{'}(s)$ es continua en $s = 1$. Sin el Teorema de Abel no se podría asegurar que el límite de $G_X^{'}(s)$ conforme $s \uparrow 1$ sea la respuesta correcta para $\mathbb{E}[X]$.

Nota 2.2. *La FGP converge para todo $|s| < R$, para algún R. De hecho la FGP converge absolutamente si $|s| < R$. La FGP además converge uniformemente en conjuntos de la forma $\left\{s : |s| < R^{'}\right\}$, donde $R^{'} < R$, es decir, $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\forall s$, con $|s| < R^{'}$, y $\forall n \geq n_0$,*

$$\left|\sum_{x=0}^{n} s^x \mathbb{P}(X = x) - G_X(s)\right| < \epsilon. \tag{2.13}$$

De hecho, la convergencia uniforme es la que nos permite diferenciar término a término:

$$G_X(s) = \mathbb{E}\left[s^X\right] = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \mathbb{P}(X = x), \tag{2.14}$$

y sea $s < R$.

1.

$$G_X^{'}(s) = \frac{d}{ds}\left(\sum_{x=0}^{\infty} s^x \mathbb{P}(X = x)\right) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{d}{ds}\left(s^x \mathbb{P}(X = x)\right) = \sum_{x=0}^{n} x s^{x-1} \mathbb{P}(X = x). \tag{2.15}$$

2.

$$\int_a^b G_X(s)\, ds = \int_a^b \left(\sum_{x=0}^{\infty} s^x \mathbb{P}(X = x)\right) ds = \sum_{x=0}^{\infty}\left(\int_a^b s^x \mathbb{P}(X = x)\, ds\right) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{s^{x+1}}{x+1} \mathbb{P}(X = x), \tag{2.16}$$

para $-R < a < b < R$.

Teorema 2.6 (Teorema de Convergencia Monótona para FGP)**.** *Sean X y X_n variables aleatorias no negativas, con valores en los enteros, finitas, tales que*

$$lim_{n\to\infty} G_{X_n}(s) = G_X(s)$$

para $0 \leq s \leq 1$, entonces

$$lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k),$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

El teorema anterior requiere del siguiente lema:

Lema 2.1. *Sean* $a_{n,k} \in \mathbb{Z}^{+}$, $n \in \mathbb{N}$ *constantes no negativas con* $\sum_{k\geq 0} a_{k,n} \leq 1$. *Supóngase que para* $0 \leq s \leq 1$, *se tiene*

$$a_n(s) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} s^k \rightarrow a(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k. \tag{2.17}$$

Entonces

$$a_{0,n} \rightarrow a_0. \tag{2.18}$$

Consideremos un sistema que consta de únicamente un servidor y una sola cola, a la cual los usuarios arriban conforme a un proceso poisson cuya tasa promedio de llegada es $1/\lambda$; la tasa promedio con la cual el servidor da servicio es $1/\mu$, además los tiempos entre arribos y los tiempos de servicio son independientes entre sí. Se define la carga de tráfico $\rho := \frac{\lambda}{\mu}$, para este modelo existe un teorema que nos dice la relación que hay entre el valor de ρ y la estabilidad de la cola:

Proposición 2.1. *La cola* $M/M/1$ *con carga de tráfico* ρ, *es estable si y sólo si* $\rho < 1$.

Este teorema nos permite determinar las principales medidas de desempeño: Tiempo de espera en el sistema, W, el número esperado de clientes en el sistema, L, además de los tiempos promedio e espera tanto en la cola como de servicio, s representa el tiempo de servicio para un cliente:

$$\begin{array}{l} L = \frac{\rho}{1-\rho}, \\ W = \frac{1}{\mu-\lambda}, \\ W_q = \mathbb{E}[s] \frac{\rho}{1-\rho}, \text{ y} \\ L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \end{array} \tag{2.19}$$

Esta es la idea general, poder determinar la principales medidas de desempeño para un sistema de colas o sistema de visitas, para este fin es necesario realizar los siguientes supuestos. En teoría de colas hay casos particulares, para los cuales es posible determinar específicamente medidas de desempeño del sistema bajo condiciones de estabilidad, tales como los tiempos promedio de espera y de servicio, tanto en el sistema como en cada una de las colas.

En teoría de colas hay casos particulares, para los cuales es posible determinar específicamente medidas de desempeño del sistema bajo condiciones de estabilidad, tales como los tiempos promedio de espera y de servicio, tanto en el sistema como en cada una de las colas. Se considerarán intervalos de tiempo de la forma $[t, t+1]$. Los usuarios arriban por paquetes de manera independiente del resto de las colas. Se define el grupo de usuarios que llegan a cada una de las colas del sistema 1, caracterizadas por Q_1 y Q_2 respectivamente, en el intervalo de tiempo $[t, t+1]$ por $X_1(t), X_2(t)$.

Para cada uno de los procesos anteriores se define su Función Generadora de Probabilidades (FGP):

$$P_1(z_1) = \mathbb{E}\left[z_1^{X_1(t)}\right], \quad P_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{X_2(t)}\right]. \tag{2.20}$$

Con primer momento definidos por

$$\begin{array}{l} \mu_1 = \mathbb{E}[X_1(t)] = P_1^{(1)}(1), \\ \mu_2 = \mathbb{E}[X_2(t)] = P_2^{(1)}(1). \end{array} \tag{2.21}$$

En lo que respecta al servidor, en términos de los tiempos de visita a cada una de las colas, se denotarán por τ_1, τ_2 para Q_1, Q_2 respectivamente; y a los tiempos en que el servidor termina de atender en las colas Q_1, Q_2, se les denotará por $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2$ respectivamente. Entonces, los tiempos de servicio están dados por las diferencias $\overline{\tau}_1 - \tau_1, \overline{\tau}_2 - \tau_2$ para Q_1, Q_2.

Análogamente los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por $\tau_2 - \overline{\tau}_1, \tau_1 - \overline{\tau}_2$. La FGP para estos tiempos de traslado están dados por

$$R_1(z_1)=\mathbb{E}\left[z_1^{\tau_2-\overline{\tau}_1}\right],\quad R_2(z_2)=\mathbb{E}\left[z_2^{\tau_1-\overline{\tau}_2}\right],\tag{2.22}$$

y al igual que como se hizo con anterioridad

$$r_1=R_1^{(1)}(1)=\mathbb{E}\left[\tau_2-\overline{\tau}_1\right],\quad r_2=R_2^{(1)}(1)=\mathbb{E}\left[\tau_1-\overline{\tau}_2\right].\tag{2.23}$$

Sean α_1,α_2 el número de usuarios que arriban en grupo a la cola Q_1 y Q_2 respectivamente. Sus FGP's están definidas como

$$A_1(z)=\mathbb{E}\left[z^{\alpha_1(t)}\right],\quad A_2(z)=\mathbb{E}\left[z^{\alpha_2(t)}\right].\tag{2.24}$$

Su primer momento está dado por

$$\lambda_1=\mathbb{E}\left[\alpha_1(t)\right]=A_1^{(1)}(1),\quad \lambda_2=\mathbb{E}\left[\alpha_2(t)\right]=A_2^{(1)}(1).\tag{2.25}$$

Sean β_1,β_2 el número de usuarios que arriban en el grupo α_1,α_2 a la cola Q_1 y Q_2, respectivamente, de igual manera se definen sus F'GPs

$$B_1(z)=\mathbb{E}\left[z^{\beta_1(t)}\right],\quad B_2(z)=\mathbb{E}\left[z^{\beta_2(t)}\right],\tag{2.26}$$

con

$$b_1=\mathbb{E}\left[\beta_1(t)\right]=B_1^{(1)}(1),\quad b_2=\mathbb{E}\left[\beta_2(t)\right]=B_2^{(1)}(1).\tag{2.27}$$

La distribución para el número de grupos que arriban al sistema en cada una de las colas se definen por:

$$P_1(z_1)=A_1\left[B_1(z_1)\right]=\mathbb{E}\left[B_1(z_1)^{\alpha_1(t)}\right],\quad P_2(z_1)=A_1\left[B_1(z_1)\right]=\mathbb{E}\left[B_1(z_1)^{\alpha_1(t)}\right],\tag{2.28}$$

entonces

$$\begin{aligned}P_1^{(1)}(1)&=\mathbb{E}\left[\alpha_1(t)\,B_1^{(1)}(1)\right]=B_1^{(1)}(1)\,\mathbb{E}\left[\alpha_1(t)\right]=\lambda_1 b_1\\ P_2^{(1)}(1)&=\mathbb{E}\left[\alpha_2(t)\,B_2^{(1)}(1)\right]=B_2^{(1)}(1)\,\mathbb{E}\left[\alpha_2(t)\right]=\lambda_2 b_2.\end{aligned}\tag{2.29}$$

De lo desarrollado hasta ahora se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}\right]=\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}\right]=\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)+X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{z_2^{L_2(\tau_1)}\right\}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\\&=\mathbb{E}\left[\left\{z_2^{L_2(\tau_1)}\right\}\left\{P_2(z_2)\right\}^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{z_2^{L_2(\tau_1)}\right\}\left\{\theta_1(P_2(z_2))\right\}^{L_1(\tau_1)}\right]=F_1\left(\theta_1(P_2(z_2)),z_2\right)\end{aligned}$$

es decir

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}\right]=F_1\left(\theta_1(P_2(z_2)),z_2\right).\tag{2.30}$$

Procediendo de manera análoga para $\overline{\tau}_2$:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}\right]=\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}\right]=\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)+X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{z_1^{L_1(\tau_2)}\right\}\left\{z_1^{X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right\}\right]\\&=\mathbb{E}\left[\left\{z_1^{L_1(\tau_2)}\right\}\left\{P_1(z_1)\right\}^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{z_1^{L_1(\tau_2)}\right\}\left\{\theta_2(P_1(z_1))\right\}^{L_2(\tau_2)}\right]=F_2\left(z_1,\theta_2(P_1(z_1))\right)\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}\right]=F_2\left(z_1,\theta_2(P_1(z_1))\right)\tag{2.31}$$

Ahora, para el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}_1, \tau_2]$ y $[\overline{\tau}_2, \tau_1]$, los arribos de los usuarios modifican el número de usuarios que llegan a las colas, es decir, los procesos $L_1(t)$ y $L_2(t)$. La PGF para el número de arribos a todas las estaciones durante el intervalo $[\overline{\tau}_1, \tau_2]$ cuya distribución está especificada por la distribución compuesta $R_1(\mathbf{z}), R_2(\mathbf{z})$:

$$R_1(\mathbf{z}) = R_1\left(\prod_{i=1}^{2} P(z_i)\right) = \mathbb{E}\left[\left\{\prod_{i=1}^{2} P(z_i)\right\}^{\tau_2-\overline{\tau}_1}\right]$$
$$R_2(\mathbf{z}) = R_2\left(\prod_{i=1}^{2} P(z_i)\right) = \mathbb{E}\left[\left\{\prod_{i=1}^{2} P(z_i)\right\}^{\tau_1-\overline{\tau}_2}\right]$$

Dado que los eventos en $[\tau_1, \overline{\tau}_1]$ y $[\overline{\tau}_1, \tau_2]$ son independientes, la PGF conjunta para el número de usuarios en el sistema al tiempo $t = \tau_2$ la PGF conjunta para el número de usuarios en el sistema están dadas por

$$\begin{aligned}
F_1(\mathbf{z}) &= R_2\left(\prod_{i=1}^{2} P(z_i)\right) F_2(z_1, \theta_2(P_1(z_1)))\\
F_2(\mathbf{z}) &= R_1\left(\prod_{i=1}^{2} P(z_i)\right) F_1(\theta_1(P_2(z_2)), z_2)
\end{aligned}$$

Entonces debemos de determinar las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
f_1(1) = \tfrac{\partial F_1(\mathbf{z})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1}, \quad f_1(2) = \tfrac{\partial F_1(\mathbf{z})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1},\\
f_2(1) = \tfrac{\partial F_2(\mathbf{z})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1}, \quad f_2(2) = \tfrac{\partial F_2(\mathbf{z})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1},
\end{aligned}$$

calculando las derivadas parciales

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_1(\mathbf{z})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1} &= R_1^{(1)}(1) P_1^{(1)}(1)\\
\frac{\partial R_1(\mathbf{z})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1} &= R_1^{(1)}(1) P_2^{(1)}(1)\\
\frac{\partial R_2(\mathbf{z})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1} &= R_2^{(1)}(1) P_1^{(1)}(1)\\
\frac{\partial R_2(\mathbf{z})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1} &= R_2^{(1)}(1) P_2^{(1)}(1)
\end{aligned}$$

igualando a cero

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_1} F_1(\theta_1(P_2(z_2)), z_2) &= 0\\
\frac{\partial}{\partial z_2} F_1(\theta_1(P_2(z_2)), z_2) &= \frac{\partial F_1}{\partial z_2} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\theta_1^{(1)} P_2^{(1)}(1)\\
\frac{\partial}{\partial z_1} F_2(z_1, \theta_2(P_1(z_1))) &= \frac{\partial F_2}{\partial z_1} + \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\theta_2^{(1)} P_1^{(1)}(1)\\
\frac{\partial}{\partial z_2} F_2(z_1, \theta_2(P_1(z_1))) &= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto de las dos secciones anteriores se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial z_1} &= \frac{\partial R_2}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1} + \frac{\partial F_2}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1} = R_2^{(1)}(1)\,P_1^{(1)}(1) + f_2(1) + f_2(2)\,\theta_2^{(1)}(1)\,P_1^{(1)}(1)\\
\frac{\partial F_1}{\partial z_2} &= \frac{\partial R_2}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1} + \frac{\partial F_2}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1} = R_2^{(1)}(1)\,P_2^{(1)}(1)\\
\frac{\partial F_2}{\partial z_1} &= \frac{\partial R_1}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1} = R_1^{(1)}(1)\,P_1^{(1)}(1)\\
\frac{\partial F_2}{\partial z_2} &= \frac{\partial R_1}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1} + \frac{\partial F_1}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1} = R_1^{(1)}(1)\,P_2^{(1)}(1) + f_1(1)\,\theta_1^{(1)}(1)\,P_2^{(1)}(1)
\end{aligned}
$$

El cual se puede escribir en forma equivalente:

$$
\begin{aligned}
f_1(1) &= r_2\mu_1 + f_2(1) + f_2(2)\,\frac{\mu_1}{1-\mu_2}\\
f_1(2) &= r_2\mu_2\\
f_2(1) &= r_1\mu_1\\
f_2(2) &= r_1\mu_2 + f_1(2) + f_1(1)\,\frac{\mu_2}{1-\mu_1}
\end{aligned}
$$

De donde:

$$
\begin{aligned}
f_1(1) &= \mu_1\left[r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\mu_2}\right] + f_2(1)\\
f_2(2) &= \mu_2\left[r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right] + f_1(2)
\end{aligned}
$$

Resolviendo para $f_1(1)$:

$$
\begin{aligned}
f_1(1) &= r_2\mu_1 + f_2(1) + f_2(2)\,\frac{\mu_1}{1-\mu_2} = r_2\mu_1 + r_1\mu_1 + f_2(2)\,\frac{\mu_1}{1-\mu_2}\\
&= \mu_1(r_2+r_1) + f_2(2)\,\frac{\mu_1}{1-\mu_2} = \mu_1\left(r + \frac{f_2(2)}{1-\mu_2}\right),
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
f_2(2) &= \mu_2\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + f_1(2) = \mu_2\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + r_2\mu_2\\
&= \mu_2\left[r_1 + r_2 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right] = \mu_2\left[r + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right]\\
&= \mu_2 r + \mu_1\left(r + \frac{f_2(2)}{1-\mu_2}\right)\frac{\mu_2}{1-\mu_1}\\
&= \mu_2 r + \mu_2\frac{r\mu_1}{1-\mu_1} + f_2(2)\,\frac{\mu_1\mu_2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}\\
&= \mu_2\left(r + \frac{r\mu_1}{1-\mu_1}\right) + f_2(2)\,\frac{\mu_1\mu_2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}\\
&= \mu_2\left(\frac{r}{1-\mu_1}\right) + f_2(2)\,\frac{\mu_1\mu_2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
f_2(2) - f_2(2)\frac{\mu_1\mu_2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)} &= \mu_2\left(\frac{r}{1-\mu_1}\right)\\
f_2(2)\left(1 - \frac{\mu_1\mu_2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}\right) &= \mu_2\left(\frac{r}{1-\mu_1}\right)\\
f_2(2)\left(\frac{1-\mu_1-\mu_2+\mu_1\mu_2-\mu_1\mu_2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}\right) &= \mu_2\left(\frac{r}{1-\mu_1}\right)\\
f_2(2)\left(\frac{1-\mu}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}\right) &= \mu_2\left(\frac{r}{1-\mu_1}\right)
\end{aligned}
$$

por tanto

$$
\begin{aligned}
f_2(2) &= \frac{r\frac{\mu_2}{1-\mu_1}}{\frac{1-\mu}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}} = \frac{r\mu_2(1-\mu_1)(1-\mu_2)}{(1-\mu_1)(1-\mu)}\\
&= \frac{\mu_2(1-\mu_2)}{1-\mu}r = r\mu_2\frac{1-\mu_2}{1-\mu}.
\end{aligned}
$$

es decir

$$
f_2(2) = r\mu_2\frac{1-\mu_2}{1-\mu}. \tag{2.32}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
f_1(1) &= \mu_1 r + f_2(2)\frac{\mu_1}{1-\mu_2} = \mu_1 r + \left(\frac{\mu_2(1-\mu_2)}{1-\mu}r\right)\frac{\mu_1}{1-\mu_2}\\
&= \mu_1 r + \mu_1 r\left(\frac{\mu_2}{1-\mu}\right) = \mu_1 r\left[1+\frac{\mu_2}{1-\mu}\right]\\
&= r\mu_1\frac{1-\mu_1}{1-\mu}
\end{aligned}
$$

3. El problema de la ruina del jugador

Supongamos que se tiene un jugador que cuenta con un capital inicial de $\tilde{L}_0 \geq 0$ unidades, esta persona realiza una serie de dos juegos simultáneos e independientes de manera sucesiva, dichos eventos son independientes e idénticos entre sí para cada realización. Para $n \geq 0$ fijo, la ganancia en el n-ésimo juego es $\tilde{X}_n = X_n + Y_n$ unidades de las cuales se resta una cuota de 1 unidad por cada juego simultáneo, es decir, se restan dos unidades por cada juego realizado. En términos de la teoría de colas puede pensarse como el número de usuarios que llegan a una cola vía dos procesos de arribo distintos e independientes entre sí. Su Función Generadora de Probabilidades (FGP) está dada por $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{L}_0}\right]$ para $z \in \mathbb{C}$, además

$$
\tilde{P}(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{X}_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n+Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n}z^{Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right]\mathbb{E}\left[z^{Y_n}\right] = P(z)\check{P}(z),
$$

con $\tilde{\mu} = \mathbb{E}\left[\tilde{X}_n\right] = \tilde{P}[z] < 1$.

Sea $\tilde{L}_n$ el capital remanente después del n-ésimo juego. Entonces

$$
\tilde{L}_n = \tilde{L}_0 + \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \cdots + \tilde{X}_n - 2n.
$$

La ruina del jugador ocurre después del n-ésimo juego, es decir, la cola se vacía después del n-ésimo juego, entonces sea T definida como $T = min\left\{\tilde{L}_n = 0\right\}$. Si $\tilde{L}_0 = 0$, entonces claramente $T = 0$. En este sentido T puede interpretarse como la longitud del periodo de tiempo que el servidor ocupa para dar servicio en la cola, comenzando con $\tilde{L}_0$ grupos de usuarios presentes en la cola, quienes arribaron conforme a un proceso dado por $\tilde{P}(z)$.

Sea $g_{n,k}$ la probabilidad del evento de que el jugador no caiga en ruina antes del n-ésimo juego, y que además tenga un capital de k unidades antes del n-ésimo juego, es decir, dada $n \in \{1, 2, \ldots\}$ y $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

$$g_{n,k} := P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1, \ldots, n, \tilde{L}_n = k\right\}, \tag{3.1}$$

la cual además se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
g_{n,k} &= P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1, \ldots, n, \tilde{L}_n = k\right\} = \sum_{j=1}^{k+1} g_{n-1,j} P\left\{\tilde{X}_n = k - j + 1\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1\right\} = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1, Y_n = l\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1 | Y_n = l\right\} P\left\{Y_n = l\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n = k - j - l + 1\right\} P\left\{Y_n = l\right\},
\end{aligned}$$

es decir

$$g_{n,k} = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n = k - j - l + 1\right\} P\left\{Y_n = l\right\}. \tag{3.2}$$

Además

$$g_{0,k} = P\left\{\tilde{L}_0 = k\right\}. \tag{3.3}$$

Se definen las siguientes FGP:

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k} z^k, \text{ para } n = 0, 1, \ldots, \tag{3.4}$$

y

$$G(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z) w^n, z, w \in \mathbb{C}. \tag{3.5}$$

En particular para $k = 0$,

$$g_{n,0} = G_n(0) = P\left\{\tilde{L}_j > 0, \text{ para } j < n, \text{ y } \tilde{L}_n = 0\right\} = P\left\{T = n\right\},$$

además

$$G(0, w) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(0) w^n = \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{T = n\right\} w^n = \mathbb{E}\left[w^T\right]$$

la cuál resulta ser la FGP del tiempo de ruina T.

Proposición 3.1. *Sean $z, w \in \mathbb{C}$ y sea $n \geq 0$ fijo. Para $G_n(z)$ y $G(z, w)$ definidas como en (3.4) y (3.5) respectivamente, se tiene que*

$$G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z). \tag{3.6}$$

Además

$$G(z, w) = \frac{zF(z) - wP(z)G(0, w)}{z - wR(z)}, \tag{3.7}$$

con un único polo en el círculo unitario, además, el polo es de la forma $z = \theta(w)$ y satisface que *i)* $\tilde{\theta}(1)=1$,

ii) $\tilde{\theta}^{(1)}(1)=\frac{1}{1-\tilde{\mu}}$,

iii) $\tilde{\theta}^{(2)}(1)=\frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}+\frac{\tilde{\sigma}}{(1-\tilde{\mu})^3}$.

Finalmente, además se cumple que

$$\mathbb{E}\left[w^T\right]=G(0,w)=F\left[\tilde{\theta}(w)\right]. \tag{3.8}$$

Demostración. Multiplicando las ecuaciones (3.2) y (3.3) por el término z^k:

$$\begin{aligned}
g_{n,k}z^k &= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\left\{X_n=k-j-l+1\right\}P\left\{Y_n=l\right\}z^k,\\
g_{0,k}z^k &= P\left\{\tilde{L}_0=k\right\}z^k,
\end{aligned}$$

ahora sumamos sobre k

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}g_{n,k}z^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\left\{X_n=k-j-l+1\right\}P\left\{Y_n=l\right\}z^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\left\{X_n=k-(j+l-1)\right\}P\left\{Y_n=l\right\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}z^{k+(j+l-1)-(j+l-1)}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\left\{X_n=k-(j+l-1)\right\}P\left\{Y_n=l\right\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}z^{j-1}P\left\{X_n=k-(j+l-1)\right\}z^{k-(j+l-1)}P\left\{Y_n=l\right\}z^l\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{k=j+l-1}^{\infty}P\left\{X_n=k-(j+l-1)\right\}z^{k-(j+l-1)}P\left\{Y_n=l\right\}z^l\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{l=1}^{j}\sum_{k=j+l-1}^{\infty}P\left\{X_n=k-(j+l-1)\right\}z^{k-(j+l-1)}P\left\{Y_n=l\right\}z^l\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j}P\left\{X_n=k-(j+l-1)\right\}z^{k-(j+l-1)}P\left\{Y_n=l\right\}z^l\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j}P\left\{X_n=k-(j+l-1)\right\}z^{k-(j+l-1)}\sum_{l=1}^{j}P\left\{Y_n=l\right\}z^l\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{l=1}^{\infty}P\left\{Y_n=l\right\}z^l\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j}P\left\{X_n=k-(j+l-1)\right\}z^{k-(j+l-1)}\\
&= \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z)-G_{n-1}(0)\right]\check{P}(z)\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j}P\left\{X_n=k-(j+l-1)\right\}z^{k-(j+l-1)}\\
&= \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z)-G_{n-1}(0)\right]\check{P}(z)P(z)=\frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z)-G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z),
\end{aligned}$$

es decir la ecuación (3.4) se puede reescribir como

$$G_n(z)=\frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z)-G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z). \tag{3.9}$$

Por otra parte recordemos la ecuación (3.4)

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k} z^k, \text{ entonces } \frac{G_n(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} g_{n,k} z^{k-1},$$

por lo tanto utilizando la ecuación (3.9):

$$\begin{aligned} G(z,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z) w^n = G_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(z) w^n = F(z) + \sum_{n=0}^{\infty} [G_n(z) - G_n(0)] w^n \frac{\tilde{P}(z)}{z} \\ &= F(z) + \frac{w}{z} \sum_{n=0}^{\infty} [G_n(z) - G_n(0)] w^{n-1} \tilde{P}(z) \end{aligned}$$

es decir

$$G(z,w) = F(z) + \frac{w}{z}[G(z,w) - G(0,w)]\tilde{P}(z),$$

entonces

$$\begin{aligned} G(z,w) = F(z) + \frac{w}{z}[G(z,w) - G(0,w)]\tilde{P}(z) &= F(z) + \frac{w}{z}\tilde{P}(z) G(z,w) - \frac{w}{z}\tilde{P}(z) G(0,w) \\ &\Leftrightarrow \\ G(z,w)\left\{1 - \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\right\} &= F(z) - \frac{w}{z}\tilde{P}(z) G(0,w), \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$G(z,w) = \frac{zF(z) - w\tilde{P}(z) G(0,w)}{1 - w\tilde{P}(z)}. \tag{3.10}$$

Ahora $G(z,w)$ es analítica en $|z| = 1$. Sean z, w tales que $|z| = 1$ y $|w| \leq 1$, como $\tilde{P}(z)$ es FGP

$$|z - \left(z - w\tilde{P}(z)\right)| < |z| \Leftrightarrow |w\tilde{P}(z)| < |z|$$

es decir, se cumplen las condiciones del Teorema de Rouché y por tanto, z y $z - w\tilde{P}(z)$ tienen el mismo número de ceros en $|z| = 1$. Sea $z = \tilde{\theta}(w)$ la solución única de $z - w\tilde{P}(z)$, es decir

$$\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) = 0, \tag{3.11}$$

con $|\tilde{\theta}(w)| < 1$. Cabe hacer mención que $\tilde{\theta}(w)$ es la FGP para el tiempo de ruina cuando $\tilde{L}_0 = 1$. Considerando la ecuación (3.11)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)|_{w=1} - \frac{\partial}{\partial w}\left\{w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}|_{w=1} = \tilde{\theta}^{(1)}(w)|_{w=1} - \frac{\partial}{\partial w} w\left\{\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}|_{w=1} \\ &- w\frac{\partial}{\partial w}\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)|_{w=1} = \tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) - w\left\{\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial\tilde{\theta}(w)} \cdot \frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}|_{w=1}\right\} \\ &= \tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right) \cdot \tilde{\theta}^{(1)}(1), \end{aligned}$$

luego

$$\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) = \tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right) \cdot \tilde{\theta}^{(1)}(1) = \tilde{\theta}^{(1)}(1)\left(1 - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\right),$$

por tanto

$$\tilde{\theta}^{(1)}(1) = \frac{\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{\left(1 - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\right)} = \frac{1}{1 - \tilde{\mu}}.$$

Ahora determinemos el segundo momento de $\tilde{\theta}(w)$, nuevamente consideremos la ecuación (3.11):

$$0 = \tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\} \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}\right\}$$

luego se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w) - \frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w) - \frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\}\\
=\;& \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w} - \left[\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) + w\frac{\partial}{\partial w}P\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\}\\
=\;& \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w} - \left(\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) + w\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial w}\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}\right]\right\}\\
=\;& \frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}^{(1)}(w) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right\}\\
=\;& \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w) - \frac{\partial}{\partial w}\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) - \frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right]\\
=\;& \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w) - \frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial\tilde{\theta}(w)}\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w} - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w) - w\frac{\partial\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w)\\
-\;& w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\frac{\partial\tilde{\theta}^{(1)}(w)}{\partial w}\\
=\;& \tilde{\theta}^{(2)}(w) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w) - w\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\left(\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right)^2\\
-\;& w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(2)}(w)\\
=\;& \tilde{\theta}^{(2)}(w) - 2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w) - w\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\left(\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right)^2 - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(2)}(w)\\
=\;& \tilde{\theta}^{(2)}(w)\left[1 - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right] - \tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right) + 2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(2)}(w) & \left[1 - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right] - \tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right) + 2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right] = 0\\
\tilde{\theta}^{(2)}(w) &= \frac{\tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right) + 2P^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]}{1 - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}\\
&= \frac{\tilde{\theta}^{(1)}(w)\,w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{1 - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)} + \frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{1 - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}
\end{aligned}$$

si evaluamos la expresión anterior en $w = 1$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(2)}(1) &= \frac{\left(\tilde{\theta}^{(1)}(1)\right)^2\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{1 - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)} + \frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(1)\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{1 - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)} = \frac{\left(\tilde{\theta}^{(1)}(1)\right)^2\tilde{P}^{(2)}(1)}{1 - \tilde{P}^{(1)}(1)} + \frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(1)\tilde{P}^{(1)}(1)}{1 - \tilde{P}^{(1)}(1)}\\
&= \frac{\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}}\right)^2\tilde{P}^{(2)}(1)}{1 - \tilde{\mu}} + \frac{2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}}\right)\tilde{\mu}}{1 - \tilde{\mu}} = \frac{\tilde{P}^{(2)}(1)}{(1 - \tilde{\mu})^3} + \frac{2\tilde{\mu}}{(1 - \tilde{\mu})^2} = \frac{\sigma^2 - \tilde{\mu} + \tilde{\mu}^2}{(1 - \tilde{\mu})^3} + \frac{2\tilde{\mu}}{(1 - \tilde{\mu})^2}\\
&= \frac{\sigma^2 - \tilde{\mu} + \tilde{\mu}^2 + 2\tilde{\mu}(1 - \tilde{\mu})}{(1 - \tilde{\mu})^3}
\end{aligned}$$

es decir

$$\tilde{\theta}^{(2)}(1) = \frac{\sigma^2}{(1 - \tilde{\mu})^3} + \frac{\tilde{\mu}}{(1 - \tilde{\mu})^2}.$$

$\square$

Corolario 3.1. *El tiempo de ruina del jugador tiene primer y segundo momento dados por*

$$\mathbb{E}\left[T\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{1-\tilde{\mu}} \quad (3.12)$$

$$Var\left[T\right] = \frac{Var\left[\tilde{L}_0\right]}{\left(1-\tilde{\mu}\right)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{\left(1-\tilde{\mu}\right)^3}. \quad (3.13)$$

Se considerarán intervalos de tiempo de la forma $[t, t+1]$. Los usuarios arriban por paquetes de manera independiente del resto de las colas. Se define el grupo de usuarios que llegan a cada una de las colas del sistema 1, caracterizadas por Q_1 y Q_2 respectivamente, en el intervalo de tiempo $[t, t+1]$ por $X_1(t), X_2(t)$.

4. Ecuaciones Centrales

Proposición 4.1. *Supongamos*

$$f_i(i) - f_j(i) = \mu_i\left[\sum_{k=j}^{i-1} r_k + \sum_{k=j}^{i-1}\frac{f_k(k)}{1-\mu_k}\right] \quad (4.1)$$

$$f_{i+1}(i) = r_i\mu_i, \quad (4.2)$$

Demostrar que

$$f_i(i) = \mu_i\left[\sum_{k=1}^{N} r_k + \sum_{k=1,k\neq i}^{N}\frac{f_k(k)}{1-\mu_k}\right].$$

En la Ecuación (4.2) hagamos $j = i+1$, entonces se tiene $f_j = r_i\mu_i$, lo mismo para (4.1)

$$\begin{aligned} f_i(i) &= r_i\mu_i + \mu_i\left[\sum_{k=j}^{i-1} r_k + \sum_{k=j}^{i-1}\frac{f_k(k)}{1-\mu_k}\right] \\ &= \mu_i\left[\sum_{k=j}^{i} r_k + \sum_{k=j}^{i-1}\frac{f_k(k)}{1-\mu_k}\right] \end{aligned}$$

entonces, tomando sobre todo valor de $1, \ldots, N$, tanto para antes de i como para después de i, entonces

$$f_i(i) = \mu_i\left[\sum_{k=1}^{N} r_k + \sum_{k=1,k\neq i}^{N}\frac{f_k(k)}{1-\mu_k}\right].$$

Ahora, supongamos nuevamente la ecuación (4.1)

$$\begin{aligned}
f_i(i) - f_j(i) &= \mu_i \left[\sum_{k=j}^{i-1} r_k + \sum_{k=j}^{i-1} \frac{f_k(k)}{1-\mu_k}\right]\\
&\Leftrightarrow\\
f_j(j) - f_i(j) &= \mu_j \left[\sum_{k=i}^{j-1} r_k + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{f_k(k)}{1-\mu_k}\right]\\
f_i(j) &= f_j(j) - \mu_j \left[\sum_{k=i}^{j-1} r_k + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{f_k(k)}{1-\mu_k}\right]\\
&= \mu_j(1-\mu_j)\frac{r}{1-\mu} - \mu_j \left[\sum_{k=i}^{j-1} r_k + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{f_k(k)}{1-\mu_k}\right]\\
&= \mu_j \left[(1-\mu_j)\frac{r}{1-\mu} - \sum_{k=i}^{j-1} r_k - \sum_{k=i}^{j-1} \frac{f_k(k)}{1-\mu_k}\right]\\
&= \mu_j \left[(1-\mu_j)\frac{r}{1-\mu} - \sum_{k=i}^{j-1} r_k - \frac{r}{1-\mu}\sum_{k=i}^{j-1} \mu_k\right]\\
&= \mu_j \left[\frac{r}{1-\mu}\left(1-\mu_j - \sum_{k=i}^{j-1} \mu_k\right) - \sum_{k=i}^{j-1} r_k\right]\\
&= \mu_j \left[\frac{r}{1-\mu}\left(1 - \sum_{k=i}^{j} \mu_k\right) - \sum_{k=i}^{j-1} r_k\right].
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
1 - \sum_{k=i}^{j} \mu_k &= 1 - \sum_{k=1}^{N} \mu_k + \sum_{k=j+1}^{i-1} \mu_k\\
&\Leftrightarrow\\
\sum_{k=i}^{j} \mu_k &= \sum_{k=1}^{N} \mu_k - \sum_{k=j+1}^{i-1} \mu_k\\
&\Leftrightarrow\\
\sum_{k=1}^{N} \mu_k &= \sum_{k=i}^{j} \mu_k + \sum_{k=j+1}^{i-1} \mu_k
\end{aligned}$$

Por tanto

$$f_i(j) = \mu_j \left[\frac{r}{1-\mu}\sum_{k=j+1}^{i-1} \mu_k + \sum_{k=j}^{i-1} r_k\right].$$

Teorema 4.1 (Teorema de Continuidad)**.** *Supóngase que* $\{X_n, n = 1, 2, 3, \ldots\}$ *son variables aleatorias finitas, no negativas con valores enteros tales que* $P(X_n = k) = p_k^{(n)}$*, para* $n = 1, 2, 3, \ldots$*,* $k = 0, 1, 2, \ldots$*, con* $\sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(n)} = 1$*, para* $n = 1, 2, 3, \ldots$*. Sea* g_n *la PGF para la variable aleatoria* X_n*. Entonces existe una sucesión* $\{p_k\}$ *tal que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} p_k^{(n)} = p_k \textit{ para } 0 < s < 1.$$

En este caso, $g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$*. Además*

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \textit{ si y sólo si } lim_{s\uparrow 1} g(s) = 1$$

Teorema 4.2. *Sea N una variable aleatoria con valores enteros no negativos finita tal que $P(N=k)=p_k$, para $k=0,1,2,\ldots,$ y $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = P(N<\infty)=1$. Sea Φ la PGF de N tal que $g(s)=\mathbb{E}\left[s^N\right]=\sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$ con $g(1)=1$. Si $0\leq p_1\leq 1$ y $\mathbb{E}[N]=g^{'}(1)\leq 1$, entonces no existe solución de la ecuación $g(s)=s$ en el intervalo $[0,1)$. Si $\mathbb{E}[N]=g^{'}(1)>1$, lo cual implica que $0\leq p_1<1$, entonces existe una única solución de la ecuación $g(s)=s$ en el intervalo $[0,1)$.*

Teorema 4.3. *Si X y Y tienen PGF G_X y G_Y respectivamente, entonces,*

$$G_X(s)=G_Y(s)$$

para toda s, si y sólo si

$$P(X=k))=P(Y=k)$$

para toda $k=0,1,\ldots,$, es decir, si y sólo si X y Y tienen la misma distribución de probabilidad.

Teorema 4.4. *Para cada n fijo, sea la sucesióin de probabilidades $\{a_{0,n},a_{1,n},\ldots,\}$, tales que $a_{k,n}\geq 0$ para toda $k=0,1,2,\ldots,$ y $\sum_{k\geq 0} a_{k,n}=1$, y sea $G_n(s)$ la correspondiente función generadora, $G_n(s)=\sum_{k\geq 0} a_{k,n}s^k$. De modo que para cada valor fijo de k*

$$lim_{n\rightarrow\infty} a_{k,n}=a_k,$$

es decir converge en distribución, es necesario y suficiente que para cada valor fijo $s\in[0,)$,

$$lim_{n\rightarrow\infty} G_n(s)=G(s),$$

donde $G(s)=\sum_{k\geq 0} p_k s^k$, para cualquier la función generadora del límite de la sucesión.

Teorema 4.5 (Teorema de Abel)**.** *Sea $G(s)=\sum_{k\geq 0} a_k s^k$ para cualquier $\{p_0,p_1,\ldots,\}$, tales que $p_k\geq 0$ para toda $k=0,1,2,\ldots,$. Entonces $G(s)$ es continua por la derecha en $s=1$, es decir*

$$lim_{s\uparrow 1} G(s)=\sum_{k\geq 0} p_k=G(),$$

sin importar si la suma es finita o no.

Nota 4.1. *El radio de Convergencia para cualquier PGF es $R\geq 1$, entonces, el Teorema de Abel nos dice que aún en el peor escenario, cuando $R=1$, aún se puede confiar en que la PGF será continua en $s=1$, en contraste, no se puede asegurar que la PGF será continua en el límite inferior $-R$, puesto que la PGF es simétrica alrededor del cero: la PGF converge para todo $s\in(-R,R)$, y no lo hace para $s<-R$ o $s>R$. Además nos dice que podemos escribir $G_X(1)$ como una abreviación de $lim_{s\uparrow 1} G_X(s)$.*

Entonces si suponemos que la diferenciación término a término está permitida, entonces

$$G_X^{'}(s) \quad = \quad \sum_{x=1}^{\infty} x s^{x-1} p_x$$

el Teorema de Abel nos dice que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \lim_{s\uparrow 1} G_X^{'}(s): \\
\mathbb{E}[X] &= = \sum_{x=1}^{\infty} x p_x = G_X^{'}(1) \\
&= \lim_{s\uparrow 1} G_X^{'}(s),
\end{aligned}$$

dado que el Teorema de Abel se aplica a

$$G_X^{'}(s) \quad = \quad \sum_{x=1}^{\infty} x s^{x-1} p_x,$$

estableciendo así que $G_X^{'}(s)$ es continua en $s=1$. Sin el Teorema de Abel no se podría asegurar que el límite de $G_X^{'}(s)$ conforme $s\uparrow 1$ sea la respuesta correcta para $\mathbb{E}[X]$.

Nota 4.2. *La PGF converge para todo $|s| < R$, para algún R. De hecho la PGF converge absolutamente si $|s| < R$. La PGF además converge uniformemente en conjuntos de la forma $\left\{s : |s| < R^{'}\right\}$, donde $R^{'} < R$, es decir, $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\forall s$, con $|s| < R^{'}$, y $\forall n \geq n_0$,*

$$|\sum_{x=0}^{n} s^x \mathbb{P}(X = x) - G_X(s)| < \epsilon.$$

De hecho, la convergencia uniforme es la que nos permite diferenciar término a término:

$$G_X(s) = \mathbb{E}\left[s^X\right] = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \mathbb{P}(X = x),$$

y sea $s < R$.

1.

$$\begin{aligned} G_X^{'}(s) &= \frac{d}{ds}\left(\sum_{x=0}^{\infty} s^x \mathbb{P}(X = x)\right) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{d}{ds}\left(s^x \mathbb{P}(X = x)\right) \\ &= \sum_{x=0}^{n} x s^{x-1} \mathbb{P}(X = x). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \int_a^b G_X(s)\, ds &= \int_a^b \left(\sum_{x=0}^{\infty} s^x \mathbb{P}(X = x)\right) ds = \sum_{x=0}^{\infty}\left(\int_a^b s^x \mathbb{P}(X = x)\, ds\right) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{s^{x+1}}{x+1} \mathbb{P}(X = x), \end{aligned}$$

para $-R < a < b < R$.

Teorema 4.6 (Teorema de Convergencia Monótona para PGF)**.** *Sean X y X_n variables aleatorias no negativas, con valores en los enteros, finitas, tales que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} G_{X_n}(s) = G_X(s)$$

para $0 \leq s \leq 1$, entonces

$$lim_{n\rightarrow\infty} P(X_n = k) = P(X = k),$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

El teorema anterior requiere del siguiente lema

Lema 4.1. *Sean $a_{n,k} \in \mathbb{Z}^+$, $n \in \mathbb{N}$ constantes no negativas con $\sum_{k\geq 0} a_{k,n} \leq 1$. Supóngase que para $0 \leq s \leq 1$, se tiene*

$$a_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} s^k \rightarrow a(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k.$$

Entonces

$$a_{0,n} \rightarrow a_0.$$

5. Redes de Jackson

Cuando se considera la cantidad de usuarios que llegan a cada uno de los nodos desde fuera del sistema más los que provienen del resto de los nodos, se dice que la red es abierta y recibe el nombre de *Red de Jackson Abierta*.

Si denotamos por $Q_1(t), Q_2(t), \ldots, Q_K(t)$ el número de usuarios presentes en la cola $1, 2, \ldots, K$ respectivamente al tiempo t, entonces se tiene la colección de colas $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_K\}$, donde después de que el usuario es atendido en la cola i, se traslada a la cola j con probabilidad p_{ij}. En caso de que un usuario decida volver a ser atendido en i, este permanecerá en la misma cola con probabilidad p_{ii}. Para considerar a los usuarios que entran al sistema por primera vez por i, más aquellos que provienen de otra cola, es necesario considerar un estado adicional 0, con probabilidad de transición $p_{00} = 0$, $p_{0j} \geq 0$ y $p_{j0} \geq 0$, para $j = 1, 2, \ldots, K$, entonces en general la probabilidad de transición de una cola a otra puede representarse por $P = (p_{ij})_{i,j=0}^{K}$.

Para el caso específico en el que en cada una de las colas los tiempos entre arribos y los tiempos de servicio sean exponenciales con parámetro de intensidad λ y media μ, respectivamente, con m servidores y sin restricciones en la capacidad de almacenamiento en cada una de las colas, en Chee-Hook y Boon-Hee [107], cap. 6, se muestra que el número de usuarios en las K colas, en el caso estacionario, puede determinarse por la ecuación (5.1) que a continuación se presenta, además de que la distribución límite de la misma es (5.2).

El número de usuarios en las K colas en su estado estacionario, ver [84], se define como

$$p_{q_1 q_2 \cdots q_K} = P\left[Q_1 = q_1, Q_2 = q_2, \ldots, Q_K = q_K\right]. \tag{5.1}$$

Jackson (1957), demostró que la distribución límite $p_{q_1 q_2 \cdots q_K}$ de (5.1) es

$$p_{q_1 q_2 \cdots q_K} = P_1(q_1) P_2(q_2) \cdots P_K(q_K), \tag{5.2}$$

donde

$$p_i(r) = \begin{cases} p_i(0) \frac{(\gamma_i/\mu_i)^r}{r!}, & r = 0, 1, 2, \ldots, m, \\ p_i(0) \frac{(\gamma_i/\mu_i)^r}{m! m^{r-m}}, & r = m, m+1, \ldots. \end{cases} \tag{5.3}$$

y

$$\gamma_i = \lambda_i + \sum p_{ji}\gamma_j, \;\; i = 1, 2, \ldots, K. \tag{5.4}$$

La relación (5.4) es importante puesto que considera no solamente los arribos externos si no que además permite considerar intercambio de clientes entre las distintas colas que conforman el sistema.

Dados λ_i y p_{ij}, la cantidad γ_i puede determinarse a partir de la ecuación (5.4) de manera recursiva. Además $p_i(0)$ puede determinarse utilizando la condición de normalidad

$$\sum_{q_1}\sum_{q_2}\cdots\sum_{q_K} p_{q_1 q_2 \cdots q_K} = 1.$$

Sin embargo las Redes de Jackson tienen el inconveniente de que no consideran el caso en que existan tiempos de traslado entre las colas.

6. Resultados Adicionales

6.1. Procesos de Renovación y Regenerativos

En Sigman, Thorison y Wolff [127] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 6.1. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1}X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k (X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 6.1. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*
  b) *$L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;*
  c) *$L = 1$ y $G = D$;*
  d) *$L = \infty$ y $G = M$.*

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;
  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;
  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 6.2. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$
  b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*
  c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$*
  d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 6.3. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Definición 6.1 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que* *i)* $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1+R_2+\cdots+R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 6.1. *La existencia de un primer tiempo de regeneración,* R_1*, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos* $R_1, R_2 \ldots,$ *que satisfacen la propiedad deseada [127].*

Nota 6.2. *Para la cola* $GI/GI/1$ *los usuarios arriban con tiempos* t_n *y son atendidos con tiempos de servicio* S_n*, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)*$T_n = t_n - t_{n-1}$*, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que* $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$*.*

Definición 6.2. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 6.3. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si* $X(t)$ *es regenerativo y se define el proceso* $Y(t)$ *por* $Y(t) = f(X(t))$ *para alguna función Borel medible* $f(\cdot)$*. Además* Y *es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que* X*.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k *de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de* $X(t)$*.*

Nota 6.4. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 6.5. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 6.6. *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \text{máx}\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 6.3. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$, *para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 6.4. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 6.5. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$, *es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$, S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 6.4. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$. *Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t, *además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] \quad = \quad \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,*entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 6.1. *Sea* $\{V(t), t \geq 0\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E} < \infty$, F *es no-aritmética, y para todo* $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $[0, \tau]$, *entonces* $V(t)$ *converge en distribución cuando* $t \rightarrow \infty$ *y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V(t)$ *cuando* $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 6.6. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{6.1}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 6.7. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, *para* $n \geq 1$, *son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F, *donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$. *Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 6.7. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 6.8. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 6.5 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 6.2. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 6.8. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)]\,,\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 6.3. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]\,.$$

Teorema 6.6 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N(t) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 6.4. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 6.9. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 6.7. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \ c.s. & (6.2)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \ c.s. & (6.3) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 6.2 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \tag{6.4}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\left\{Z(t) : t \geq 0\right\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 6.9. *Para el proceso $\left\{Z(t) : t \geq 0\right\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 6.8. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \ c.s. & (6.5)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \ c.s. & (6.6) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 6.3. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z(T_1) - Z(T_0)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \tag{6.7}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N(t) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \ \ t \ < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 6.5. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 6.10. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 6.9. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{6.8}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{6.9}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 6.4 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{6.10}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 6.10. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 6.10. *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{6.11}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{6.12}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 6.5. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{6.13}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 6.6. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 6.11. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 6.11. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{6.14}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{6.15}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 6.6 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{6.16}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 6.11. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 6.12. *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{6.17}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{6.18}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 6.7. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{6.19}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 6.7. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 6.12. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 6.13. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{6.20}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{6.21}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 6.8 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{6.22}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 6.12. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 6.14. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \;\; c.s. && (6.23)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \;\; c.s. && (6.24)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 6.9. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \;\; c.s. \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (6.25)$$

6.2. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \;\; t \;\; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 6.8. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 6.13. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 6.15. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \;\; c.s. && (6.26)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu, \;\; c.s. && (6.27)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 6.10 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{6.28}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 6.13. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 6.16. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \quad (6.29) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (6.30) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 6.11. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{6.31}$$

Definición 6.14. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{6.32}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 6.9. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 6.17 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 6.15. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 6.10. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 6.16. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 6.11. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 6.14. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 6.18. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 6.12 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1], \; t \geq 0,$$

Definición 6.17. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{6.33}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 6.18. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 6.15. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 6.19. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{6.34}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 6.20. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 6.16. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 6.12. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 6.1 (**Proceso Poisson**). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 6.17. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 6.19. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{6.35}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{6.36}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 6.13 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{6.37}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 6.21. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 6.20. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{6.38}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{6.39}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 6.14. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{6.40}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 6.22. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 6.13. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 6.23. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 6.14. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 6.18. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 6.21. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 6.15 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t)+1],\ t \geq 0,$$

Definición 6.24. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{6.41}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 6.15. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 6.22 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu,\ cuando\ t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 6.25. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 6.16. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 6.26. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 6.17. *La Transformada de Laplace* $\hat{U}(\alpha)$ *y* $\hat{F}(\alpha)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.

Nota 6.19. *Un proceso de renovación* $N(t)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, *para* $t \geq 0$.

Teorema 6.23. *Sea* $N(t)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ *es finita para cada* t. *Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N(t)$ *tal que* $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, *independiente de* n. *Entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 6.16 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación* $N(t)$,

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1]\,,\ t \geq 0,$$

Definición 6.27. *Sea* $h(t)$ *función de valores reales en* $\mathbb{R}$ *acotada en intervalos finitos e igual a cero para* $t < 0$ *La ecuación de renovación para* $h(t)$ *y la distribución* F *es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s)\,,\ t \geq 0, \tag{6.42}$$

donde $H(t)$ *es una función de valores reales. Esto es* $H = h + F \star H$. *Decimos que* $H(t)$ *es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para* $t < 0$.

Proposición 6.18. *La función* $U \star h(t)$ *es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 6.24 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Nota 6.20. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 6.25 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 6.19. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ \textit{donde}\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 6.28. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)]\,,\ \textit{para}\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 6.20. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 6.26 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 6.21. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 6.27 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 6.21. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 6.29. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 6.22. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 6.28 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 6.30. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 6.22. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 6.23. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 6.24. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 6.31. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 6.25. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 6.29 (Procesos Regenerativos). *Suponga que el proceso*

Definición 6.32 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 6.26. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{6.43}$$

Ejemplo 6.2 (Tiempos de recurrencia Poisson). *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (6.43) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 6.27. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 6.33. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 6.28. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 6.23. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 6.30. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\,ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 6.29. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 6.17. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 6.30. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 6.31. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 6.34 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 6.35. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 6.32. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 6.36. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 6.33. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 6.34. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 6.37 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 6.35. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 6.38. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 6.36. *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 6.39. *Se define el proceso estacionario, $\{V^{*}(t), t\geq 0\}$, para $\{V(t), t\geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\left\{V(t)\in A\right\}=\frac{1}{\mathbb{E}\left[X\right]}\int_{0}^{\infty}\mathbb{P}\left\{V(t+x)\in A|X>x\right\}(1-F(x))\,dx,$$

para todo $t\geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 6.40. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0,\lambda,2\lambda,\ldots$ para alguna $\lambda>0$ entera.*

Definición 6.41. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t\geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t\geq 0$ y para $w\in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t\geq 0\}$.*

Teorema 6.31. *Sea $\{V(t), t\geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}\left[X\right]<\infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^{*}(0)\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}(0)\right]<\infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V(s)\,ds\right]<\infty$,entonces

$$\frac{\int_{0}^{t}V(s)\,ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t\geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1,X_2,\ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t)\in A|X_1+X_2+\cdots+X_{R(t)}=s,\{V(\tau),\tau<s\}\right\}=\mathbb{P}\left\{V(t-s)\in A|X_1>t-s\right\},$$

para todo $0\leq s\leq t$, donde $R(t)=\max\left\{X_1+X_2+\cdots+X_j\leq t\right\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0,X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t\geq 0\}$, $[X_1,X_1+X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X=X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 6.42. *Se define el proceso estacionario, $\{V^{*}(t), t\geq 0\}$, para $\{V(t), t\geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\left\{V(t)\in A\right\}=\frac{1}{\mathbb{E}\left[X\right]}\int_{0}^{\infty}\mathbb{P}\left\{V(t+x)\in A|X>x\right\}(1-F(x))\,dx,$$

para todo $t\geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 6.43. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0,\lambda,2\lambda,\ldots$ para alguna $\lambda>0$ entera.*

Definición 6.44. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t\geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t\geq 0$ y para $w\in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t\geq 0\}$.*

Teorema 6.32. *Sea $\{V(t), t\geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}\left[X\right]<\infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además* *i)*

$$\mathbb{E}\left[V^{*}(0)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}(0)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$*.*

Para $\{X(t):t\geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n=T_n-T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Sean $T_1,T_2,\ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i)=0, L_2(T_i)=0, \hat{L}_1(T_i)=0$ y $\hat{L}_2(T_i)=0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$[1], se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\ \mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (**??**): $n\rightarrow t-\tau_i(m)$, $T\rightarrow\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)$, $L_n\rightarrow L_i(t)$ y $F(z)=\mathbb{E}\left[z^{L_0}\right]\rightarrow F_i(z)=\mathbb{E}\left[z^{L_i\tau_i(m)}\right]$, se puede ver que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right]=z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)} \tag{6.44}$$

[1] En Stidham[128] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}C_i^{(m)}\right]<\infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$, además, como $M_i>0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}\left[C_i\right]<\infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N}\mu_k<1$.

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \left\{P_i(z)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i(z)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{1-I_i\left[P_i(z)\right]}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\\ &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right]+\mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\}\\ &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}+\frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}\right\}\end{aligned}$$

es decir

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \tag{6.45}$$

Teorema 6.33. *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t, $A_j(t) = \{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\}$ para algún tiempo $t \geq 0$ y Q_j la cola j-ésima en la RSVC, para $j = 1, 2, 3, 4$. Existe un intervalo $I \neq \emptyset$ tal que para $T^* \in I$, tal que $\mathbb{P}\left\{A_1(T^*), A_2(Tt^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I\right\} > 0$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.

Sea $n > 0$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1(n) > 0$, entonces tenemos que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1(n)$.

Definamos el intervalo $I_1 \equiv [\overline{\tau}_1(n), \tau_2(n)]$ de longitud $\xi_1 = r_1(n)$. Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$\mathbb{P}\left\{A_1(t) | t \in I_1(n)\right\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)}. \tag{6.46}$$

Por otra parte, para la cola Q_2, el tiempo $\overline{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\overline{\tau}_2(n-1)) = 0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n. Entonces tenemos un sgundo intervalo $I_2 \equiv [\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$\mathbb{P}\left\{A_2(t) | t \in I_2(n)\right\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)}, \tag{6.47}$$

donde $\xi_2(n) = \tau_2(n) - \overline{\tau}_2(n-1)$.

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\right\} &= \mathbb{P}\left\{A_1(t) | t \in I_1(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_2(t) | t \in I_1(n)\right\} \\ &\geq \mathbb{P}\left\{A_1(t) | t \in I_1(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_2(t) | t \in I_2(n)\right\} \\ &= e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)} = e^{-\left[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)\right]}.\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\right\} = e^{-\left[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)\right]} > 0. \tag{6.48}$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC, se afirma que existe $m > 0$ tal que $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$.

Para Q_3 sea $I_3 = \left[\overline{\tau}_3(m), \tau_4(m)\right]$ con longitud $\xi_3(m) = r_3(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\left\{A_3(t) | t \in I_3(n)\right\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(n)}. \tag{6.49}$$

Análogamente que como se hizo para Q_2, tenemos que para Q_4 se tiene el intervalo $I_4 = \left[\overline{\tau}_4(m-1), \tau_4(m)\right]$ con longitud $\xi_4(m) = \tau_4(m) - \overline{\tau}_4(m-1)$, entonces

$$\mathbb{P}\left\{A_4(t) | t \in I_4(m)\right\} = e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(n)}. \tag{6.50}$$

Al igual que para el primer sistema, dado que $I_3(m) \subset I_4(m)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\xi_3(m) \leq \xi_4(m) &\Leftrightarrow -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\ -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m) &\Leftrightarrow e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} \\ \mathbb{P}\left\{A_4(t) | t \in I_3(m)\right\} &\geq \mathbb{P}\left\{A_4(t) | t \in I_4(m)\right\}\end{aligned}$$

Entonces, dado que los eventos A_3 y A_4 son independientes, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\right\} &= \mathbb{P}\left\{A_3(t) | t \in I_3(m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(t) | t \in I_3(m)\right\} \\ &\geq \mathbb{P}\left\{A_3(t) | t \in I_3(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(t) | t \in I_4(n)\right\} \\ &= e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)} e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} = e^{-\left[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)\right]}.\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\right\} = e^{-\left[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)\right]} > 0. \tag{6.51}$$

Por construcción se tiene que $I(n,m) \equiv I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$,entonces en particular se tienen las contenciones $I(n,m) \subseteq I_1(n)$ y $I(n,m) \subseteq I_3(m)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m} \equiv \ell\left(I(n,m)\right)$ tenemos que

$$\xi_{n,m} \leq \xi_1(n) \text{ y } \xi_{n,m} \leq \xi_3(m) \text{ entonces } -\xi_{n,m} \geq -\xi_1(n) \text{ y } -\xi_{n,m} \leq -\xi_3(m)$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{array}{ll} -\tilde{\mu}_1 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_1 \xi_1(n), & -\tilde{\mu}_2 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_2(n), \\ -\tilde{\mu}_3 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_3 \xi_3(m), & -\tilde{\mu}_4 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m). \end{array}$$

Sea $T^* \in I_{n,m}$, entonces dado que en particular $T^* \in I_1(n)$ se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2, en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4, es decir, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$, $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I_{n,m}$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4, por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left\{A_1(T^*), A_2(T^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I_{n,m}\right\} = \prod_{j=1}^{4} \mathbb{P}\left\{A_j(T^*) | T^* \in I_{n,m}\right\} \\ &\geq \mathbb{P}\left\{A_1(T^*) | T^* \in I_1(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_2(T^*) | T^* \in I_2(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_3(T^*) | T^* \in I_3(m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(T^*) | T^* \in I_4(m)\right\} \\ &= e^{-\mu_1 \xi_1(n)} e^{-\mu_2 \xi_2(n)} e^{-\mu_3 \xi_3(m)} e^{-\mu_4 \xi_4(m)} = e^{-\left[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n) + \tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)\right]} > 0.\end{aligned} \tag{6.52}$$

□

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [100] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}\left(D_n\right) = \mathbb{E}\left(T_n\right)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 6.34. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu\left(\mu+\theta\right)^{-1}\left[\delta\theta-\mu\left(1-\delta\right)\alpha\left(\theta\right)\right]\left[\theta-\mu\left(1-\delta\right)^{-1}\right]\\ \alpha\left(\theta\right) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right]\\ var\left(D_n\right) &= var\left(T_0\right)-\left(\tau^{-1}-\delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}\left(S_0\right)\right)^2\left(1-\delta\right)^{-1}.\end{aligned}$$

  Teorema 6.35. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 6.36. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

6.3. Resultados para Procesos de Salida

En Sigman, Thorison y Wolff [127] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X\left(t\right) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 6.24. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k\left(X, R\right) =_D \left(X, R\right).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 6.37. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) Los tiempos de servicio son identicamente cero;
  b) $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;
  c) $L = 1$ y $G = D$;
  d) $L = \infty$ y $G = M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
  b) $1 - e^{-\lambda t} * F\left(t\right)$, $t \geq 0$;

c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;

d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 6.38. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.

  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$

  d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 6.39. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [100] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 6.40. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu + \theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1 - \delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1 - \delta)^{-1}\right] \\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right) 2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2 (1 - \delta)^{-1}.
\end{aligned}$$

  Teorema 6.41. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 6.42. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

7. Aplicación a Teoría de Colas

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \ldots, L_N(t)]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j(\tau_i(m)) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}[C_i]$ como

$$\mathbb{E}[C_i] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}[M_i]}$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1 - \mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1 - P_i(z)} \\
&= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$
\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1-z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \\
&= \frac{\mu_i (1-\mu_i)}{f_i(i)} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1-z) P_i(z)}{1 - P_i(z)}
\end{aligned}
$$

Definición 7.1. *Sea L_i^*el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[L_i^*] &= f_i(i) && (7.1) \\
Var[L_i^*] &= f_i(i,i) + \mathbb{E}[L_i^*] - \mathbb{E}[L_i^*]^2 . && (7.2)
\end{aligned}
$$

Definición 7.2. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
S_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m) - \tau_i(m)}\right] = F_i(\theta(z)), \\
F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right], \\
P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right], \\
F_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right], \theta_i(z) - zP_i
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{1-\mu_i}, \\
Var[S_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{(1-\mu_i)^2} + \frac{\sigma^2 \mathbb{E}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^3}
\end{aligned}
$$

donde recordemos que

$$
Var[L_i^*] = f_i(i,i) + f_i(i) - f_i(i)^2 .
$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$
\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)}\right]
$$

entonces, si

$$
I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)}\right]
$$

se tienen que

$$
F_i(z) = I_i[P_i(z)]
$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= \mu_i \mathbb{E}\left[I_i\right]\\
Var\left[L_i^*\right] &= \mu_i^2 Var\left[I_i\right] + \sigma^2 \mathbb{E}\left[I_i\right]
\end{aligned}
$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$
\mathbb{E}\left[I_i\right] = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i},
$$

además

$$
Var\left[I_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i\left(i\right).
$$

Si $C_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$
C_i\left(z\right) = I_i\left[\theta_i\left(z\right)\right],
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}\\
Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \mu_i \mathbb{E}\left[C_i\right],\\
\mathbb{E}\left[I_i\right] &= \left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right]
\end{aligned}
$$

derivando con respecto a z

$$
\begin{aligned}
\frac{dQ_i\left(z\right)}{dz} &= \frac{\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)}\\
&- \frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)}\\
&- \frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)\left(P_i^{'}\left(z\right)-1\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)^2}\\
&+ \frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)}\\
&+ \frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)^2\left(P_i\left(z\right)-z\right)}
\end{aligned}
$$

Calculando el límite cuando $z \rightarrow 1^{+}$:

$$Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{dQ_i(z)}{dz} = \lim_{z\rightarrow 1} \frac{(1-F_i(z))\,P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} \quad (7.3)$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} \quad (7.4)$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)^2} \quad (7.5)$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} \quad (7.6)$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))^2\,(P_i(z)-z)} \quad (7.7)$$

Entonces:

$$\lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{(1-F_i(z))\,P_i(z)}{(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} = \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{\frac{d}{dz}[(1-F_i(z))\,P_i(z)]}{\frac{d}{dz}[(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))]}$$

$$= \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{-P_i(z)\,F_i^{'}(z)+(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))\,P_i^{'}(z)}$$

$$\lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} = \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}[(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)]}$$

$$= \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{-P_i(z)\,F_i^{'}(z)+(1-z)F_i^{'}(z)\,P_i^{'}(z)+(1-z)P_i(z)\,F_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))\,P_i^{'}(z)}$$

$$\lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)^2} = \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)^2\right]}$$

$$= \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{-(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(1-z)P_i(z)\,F_i^{'}(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)}{2\,(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2\,P_i^{'}(z)}$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{+(1-z)\,(1-F_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)P_i^{'}(z)}{2\,(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2\,P_i^{'}(z)}$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{+(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{''}(z)}{2\,(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2\,P_i^{'}(z)}$$

$$\lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} = \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}[(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)]}$$

$$= \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{-(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)-(1-z)F_i^{'}(z)\,P_i^{'}(z)+(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))\,P_i^{'}(z)}$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
=&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}'[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

En nuestra notación $V\left(t\right)\equiv C_{i}$ y $X_{i}=C_{i}^{(m)}$ para nuestra segunda definición, mientras que para la primera la notación es: $X\left(t\right)\equiv C_{i}$ y $R_{i}\equiv C_{i}^{(m)}$.

Definición 7.3. *Sea* L_{i}^{*}*el número de usuarios en la cola* Q_{i} *cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]&=f_{i}\left(i\right) &(7.8)\\
Var\left[L_{i}^{*}\right]&=f_{i}\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]-\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]^{2}. &(7.9)
\end{aligned}
$$

Definición 7.4. *El tiempo de Ciclo* C_{i} *es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por* $\tau_{i}\left(m+1\right)-\tau_{i}\left(m\right)$*, o equivalentemente* $\overline{\tau}_{i}\left(m+1\right)-\overline{\tau}_{i}\left(m\right)$ *bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 7.5. *El tiempo de intervisita* I_{i} *es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por* $\tau_{i}\left(m+1\right)-\overline{\tau}_{i}\left(m\right)$.

Recordemos las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
S_{i}\left(z\right)&=\mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_{i}(m)-\tau_{i}(m)}\right]=F_{i}\left(\theta\left(z\right)\right),\\
F\left(z\right)&=\mathbb{E}\left[z^{L_{0}}\right],\\
P\left(z\right)&=\mathbb{E}\left[z^{X_{n}}\right],\\
F_{i}\left(z\right)&=\mathbb{E}\left[z^{L_{i}\left(\tau_{i}\left(m\right)\right)}\right],\theta_{i}\left(z\right)-zP_{i}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_{i}\right]&=\frac{\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]}{1-\mu_{i}}=\frac{f_{i}\left(i\right)}{1-\mu_{i}},\\
Var\left[S_{i}\right]&=\frac{Var\left[L_{i}^{*}\right]}{\left(1-\mu_{i}\right)^{2}}+\frac{\sigma^{2}\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]}{\left(1-\mu_{i}\right)^{3}}
\end{aligned}
$$

donde recordemos que

$$
Var\left[L_{i}^{*}\right]=f_{i}\left(i,i\right)+f_{i}\left(i\right)-f_{i}\left(i\right)^{2}.
$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_{i}\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_{i} al tiempo $t=\tau_{i}\left(m+1\right)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $\left[\overline{\tau}\left(m\right),\tau_{i}\left(m+1\right)\right]$ se tiene que

$$
\mathbb{E}\left[z_{i}^{L_{i}\left(\tau_{i}\left(m+1\right)\right)}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{P_{i}\left(z_{i}\right)\right\}^{\tau_{i}\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)}\right]
$$

entonces, si

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i(z) = I_i[P_i(z)]$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[L_i^*] &= \mu_i \mathbb{E}[I_i]\\ Var[L_i^*] &= \mu_i^2 Var[I_i] + \sigma^2 \mathbb{E}[I_i]\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},$$

además

$$Var[I_i] = \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).$$

Si $C_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i(z) = I_i[\theta_i(z)],$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i]\,\mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)}\\ Var[C_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_i] &= \mu_i \mathbb{E}[C_i],\\ \mathbb{E}[I_i] &= (1-\mu_i)\,\mathbb{E}[C_i]\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \ldots, L_N(t)]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j(\tau_i(m)) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}[C_i]$ como

$$\mathbb{E}[C_i] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}[M_i]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Nota 7.1. *En Stidham[128] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Referencias

[1] Asmussen, S. (1987). *Applied Probability and Queues.* John Wiley and Sons.

[2] Bhat, N. (2008). *An Introduction to Queueing Theory: Modelling and Analysis in Applications.* Birkhauser.

[3] Boxma, J. O. (1987). Pseudoconservation Laws in Cyclic Service Systems. *Journal of Applied Probability*, 24, 949-964.

[4] Borovkov, A. A., and Schassberger, R. (1995). Ergodicity of a Polling Network. *Stochastic Processes and their Applications*, 50(2), 253-262.

[5] van den Bos, L., and Boon, M. (2013). *Networks of Polling Systems* (report). Eindhoven University of Technology.

[6] Boon, M. A. A., van der Mei, R. D., and Winands, E. M. M. (2011). Applications of Polling Systems. February 24, 2011.

[7] Ng, C. H., and Soong, B. H. (2008). *Queueing Modelling Fundamentals with Applications in Communications Networks.* John Wiley and Sons.

[8] Chen, H. (1995). Fluid Approximations and Stability of Multiclass Queueing Networks I: Work-conserving Disciplines. *Annals of Applied Probability.*

[9] Cooper, R. B. (1970). Queues Served in Cyclic Order: Waiting Times. *The Bell System Technical Journal*, 49, 399-413.

[10] Dai, J. G. (1995). On Positive Harris Recurrence of Multiclass Queueing Networks: A Unified Approach Via Fluid Limit Models. *The Annals of Applied Probability*, 5(1), 49-77.

[11] Dai, J. G., and Meyn, S. P. (1995). Stability and Convergence of Moments for Multiclass Queueing Networks Via Fluid Limit Models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(11), 1889-1904.

[12] Dai, J. G., and Weiss, G. (1996). Stability and Instability of Fluid Models for Reentrant Lines. *Mathematics of Operations Research*, 21(1), 115-134.

[13] Daley, D. J. (1968). The Correlation Structure of the Output Process of Some Single Server Queueing Systems. *The Annals of Mathematical Statistics*, 39(3), 1007-1019.

[14] Davis, M. H. A. (1984). Piecewise Deterministic Markov Processes: A General Class of Nondiffusion Stochastic Models. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 46(3), 353-388.

[15] Down, D. (1998). On the Stability of Polling Models with Multiple Servers. *Journal of Applied Probability*, 35(3), 925-935.

[16] Disney, R. L., Farrell, R. L., and Morais, P. R. (1973). A Characterization of $M/G/1$ Queues with Renewal Departure Processes. *Management Science*, 19(11), Theory Series, 1222-1228.

[17] Eisenberg, M. (1972). Queues with Periodic Service and Changeover Time. *Operations Research*, 20(2), 440-451.

[18] Fricker, C., and Jaïbi, M. R. (1994). Monotonicity and Stability of Periodic Polling Models. *Queueing Systems*, 15(1-4), 211-238.

[19] Getoor, R. K. (1979). Transience and Recurrence of Markov Processes. In J. Azema and M. Yor (Eds.), *Seminaire de Probabilités XIV* (pp. 397-409). New York: Springer-Verlag.

[20] Gut, A. (1995). *Stopped Random Walks: Limit Theorems and Applications*. Applied Probability.

[21] Kaspi, H., and Mandelbaum, A. (1992). Regenerative Closed Queueing Networks. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 39(4), 239-258.

[22] Kleinrock, L. (1975). *Queueing Systems: Theory, Volume 1*. Wiley-Interscience.

[23] Konheim, A. G., Levy, H., and Srinivasan, M. M. (1994). Descendant Set: An Efficient Approach for the Analysis of Polling Systems. *IEEE Transactions on Communications*, 42(2-4), 1245-1253.

[24] Lang, S. (1973). *Calculus of Several Variables*. Addison-Wesley Publishing Company.

[25] Levy, H., and Sidi, M. (1990). Polling Systems: Applications, Modeling, and Optimization. *IEEE Transactions on Communications*, 30(10), 1750-1760.

[26] Fricker, C., and Jaïbi, M. R. (1998). Stability of Multi-server Polling Models. Institute National de Recherche en Informatique et en Automatique.

[27] Meyn, S. P., and Tweedie, R. L. (1993). *Markov Chains and Stochastic Stability*. Springer-Verlag.

[28] Meyn, S. P., and Down, D. (1994). Stability of Generalized Jackson Networks. *The Annals of Applied Probability*.

[29] van der Mei, R. D., and Borst, S. C. (1997). Analysis of Multiple-server Polling Systems by Means of the Power-Series Algorithm. *Stochastic Models*, 13(2), 339-369.

[30] Meyn, S. P. (1995). Transience of Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models. *The Annals of Applied Probability*, 5(4), 946-957.

[31] Adan, I. J. B. F., van Leeuwaarden, J. S. H., and Winands, E. M. M. (2006). On the Application of Rouche's Theorem in Queueing Theory. *Operations Research Letters*, 34(3), 355-360.

[32] Roubos, A. (2007). *Polling Systems and their Applications*. Vrije Universiteit Amsterdam.

[33] Saavedra, B. P. (2011). Informe Técnico del Microsimulador. Departamento de Matemáticas.

[34] Vishnevskii, V. M., and Semenova, O. V. (2006). Mathematical Methods to Study the Polling Systems. *Automation and Remote Control*, 67(2), 173-220.

[35] Serfozo, R. (2009). *Basics of Applied Stochastic Processes.* Springer-Verlag.

[36] Sharpe, M. (1998). *General Theory of Markov Processes.* Academic.

[37] Sigman, K. (1990). The Stability of Open Queueing Networks. *Stochastic Processes and their Applications*, 35(1), 11-15.

[38] Sidi, M., and Levy, H. (1990). Customer Routing in Polling Systems. In P. King, I. Mitrani, and R. Pooley (Eds.), *Proceedings Performance '90.* North-Holland, Amsterdam.

[39] Sidi, M., and Levy, H. (1991). Polling Systems with Simultaneous Arrivals. *IEEE Transactions on Communications*, 39(6), 823-827.

[40] Sigman, K., Thorisson, H., and Wolff, R. W. (1994). A Note on the Existence of Regeneration Times. *Journal of Applied Probability*, 31, 1116-1122.

[41] Stidham, S. Jr. (1972). Regenerative Processes in the Theory of Queues, with Applications to the Alternating Priority Queue. *Advances in Applied Probability*, 4(3), 542-577.

[42] Takagi, H. (1986). *Analysis of Polling Systems.* Cambridge: MIT Press.

[43] Takagi, H., and Kleinrock. (1986). Analysis of Polling Systems. Cambridge: MIT Press.

[44] Takagi, H. (1988). Queueing Analysis of Polling Models. *ACM Computing Surveys*, 20(1), 5-28.

[45] Thorisson, H. (2000). *Coupling, Stationarity, and Regeneration.* Probability and its Applications. Springer-Verlag.

[46] Winands, E. M. M., Adan, I. J. B. F., and van Houtum, G. J. (2006). Mean Value Analysis for Polling Systems. *Queueing Systems*, 54, 35-44.

[47] James, G., Witten, D., Hastie, T., and Tibshirani, R. (2013). *An Introduction to Statistical Learning: with Applications in R.* Springer.

[48] Hosmer, D. W., Lemeshow, S., and Sturdivant, R. X. (2013). *Applied Logistic Regression* (3rd ed.). Wiley.

[49] Bishop, C. M. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning.* Springer.

[50] Harrell, F. E. (2015). *Regression Modeling Strategies: With Applications to Linear Models, Logistic and Ordinal Regression, and Survival Analysis.* Springer.

[51] R Documentation and Tutorials: `https://cran.r-project.org/manuals.html`

[52] Tutorials on R-bloggers: `https://www.r-bloggers.com/`

[53] Coursera: *Machine Learning* by Andrew Ng.

[54] edX: *Data Science and Machine Learning Essentials* by Microsoft.

[55] Ross, S. M. (2014). *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists.* Academic Press.

[56] DeGroot, M. H., and Schervish, M. J. (2012). *Probability and Statistics* (4th ed.). Pearson.

[57] Hogg, R. V., McKean, J., and Craig, A. T. (2019). *Introduction to Mathematical Statistics* (8th ed.). Pearson.

[58] Kleinbaum, D. G., and Klein, M. (2010). *Logistic Regression: A Self-Learning Text* (3rd ed.). Springer.

[59] Wasserman, L. (2004). *All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference.* Springer.

[60] Probability and Statistics Tutorials on Khan Academy: `https://www.khanacademy.org/math/statistics-probability`

[61] Online Statistics Education: `http://onlinestatbook.com/`

[62] Peng, C. Y. J., Lee, K. L., and Ingersoll, G. M. (2002). *An Introduction to Logistic Regression Analysis and Reporting*. The Journal of Educational Research.

[63] Agresti, A. (2007). *An Introduction to Categorical Data Analysis* (2nd ed.). Wiley.

[64] Han, J., Pei, J., and Kamber, M. (2011). *Data Mining: Concepts and Techniques*. Morgan Kaufmann.

[65] Data Cleaning and Preprocessing on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/data-cleaning-and-preprocessing`

[66] Molinaro, A. M., Simon, R., and Pfeiffer, R. M. (2005). *Prediction Error Estimation: A Comparison of Resampling Methods*. Bioinformatics.

[67] Evaluating Machine Learning Models on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/evaluating-machine-learning-models`

[68] Practical Guide to Logistic Regression in R on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/practical-guide-to-logistic-regression-in-r`

[69] Coursera: *Statistics with R* by Duke University.

[70] edX: *Data Science: Probability* by Harvard University.

[71] Coursera: *Logistic Regression* by Stanford University.

[72] edX: *Data Science: Inference and Modeling* by Harvard University.

[73] Coursera: *Data Science: Wrangling and Cleaning* by Johns Hopkins University.

[74] edX: *Data Science: R Basics* by Harvard University.

[75] Coursera: *Regression Models* by Johns Hopkins University.

[76] edX: *Data Science: Statistical Inference* by Harvard University.

[77] An Introduction to Survival Analysis on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/an-introduction-to-survival-analysis`

[78] Multinomial Logistic Regression on DataCamp: `https://www.datacamp.com/community/tutorials/multinomial-logistic-regression-R`

[79] Coursera: *Survival Analysis* by Johns Hopkins University.

[80] edX: *Data Science: Statistical Inference and Modeling for High-throughput Experiments* by Harvard University.

[81] Sigman, K., and Wolff, R. W. (1993). A Review of Regenerative Processes. *SIAM Review*, 38(2), 269-288.

[82] I.J.B.F. Adan, J.S.H. van Leeuwaarden, and E.M.M. Winands. On the application of Rouches theorem in queueing theory. Operations Research Letters, 34(3):355-360, 2006.

[83] Asmussen Soren, Applied Probability and Queues, John Wiley and Sons, 1987.

[84] Bhat Narayan, An Introduction to Queueing Theory Modelling and Analysis in Applications, Birkhauser, 2008.

[85] Boxma J. O., Analysis and Optimization of Polling Systems, Queueing, Performance and Control in ATM, pp. 173-183, 1991.

[86] Boxma J. O., Pseudoconservation Laws in Cyclic Service Systems, Journal of Applied Probability, vol. 24, 1987, pp. 949-964.

[87] Boon M.A.A., Van der Mei R.D. and Winands E.M.M., Applications of Polling Systems, 2011.

[88] Borovkov. A. A. and Schassberger R., Ergodicity of a Polling Network, Stochastic Processes and their Applications, vol. 50, no. 2, 1995, pp. 253-262.

[89] Laurent van den Bos and Marko Boon, Networks of Polling Systems (report), Eindhoven University of Technology, 2013.

[90] Chee-Hook Ng. y Boon-Hee Soong, Queueing Modelling Fundemantals with Applications in Communications Networks, John-Wiley and Sons, Ltd, 2008.

[91] Chen H., Fluid Approximations and Stability of Multiclass Queueing Networks I: Work-Conserving Disciplines, Annals Applied Probabability, vol. 5, no. 3, 1995, pp. 637-665.

[92] R.B. Cooper, G. Murray, Queues served in cyclic order (The Bell System Technical Journal, 48 (1969) 675-689).

[93] R.B. Cooper, Queues served in cyclic order: waiting times (The Bell System Technical Journal, 49 (1970) 399-413).

[94] Dai Jean G., On positive Harris Recurrence of Multiclass Queueing Networks: A Unified Approach Via Fluid Limit Models, The Annals of Applied Probability, vol. 5, No. 1, 1995, pp. 49-77.

[95] Dai Jim G. and Meyn Sean P., Stability and Convergence of Moments for Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models, IEEE transactions on Automatic Control, vol. 40, No. 11, 1995, pp. 1889-1904.

[96] Dai Jim G. and Weiss G., Stability and Inestability of Fluid Models for Reentrant Lines, Mathematics of Operation Research, vol. 21, no. 1, 1996, pp. 115-134.

[97] D.J. Daley, The correlation structure of the output process of some single server queueing systems, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 39. No. 3, pp. 1007-1019, 1968.

[98] Davis, M. H. A., Piecewise Deterministic Markov Processes: A General Class of Nondifussion Stochastic Models. Journal of Royal Statistics Society Serie B, vol. 46, no. 3, 1984, pp. 353-388.

[99] Down D., On the Stability of Polling Models with Multiple Servers, Journal of Applied Probability, vol. 35, no. 3, 1998, pp. 925-935.

[100] D.J. Daley, The correlation structure of the output process of some single server queueing systems, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 39. No. 3, pp. 1007-1019, 1968.

[101] Ralpjh L. Disney, Robert L. Farrell and Paulo Renato Morais, A Characterization of $M/G/1$ Queues with Renewal Departure Processes, Manage of Science, Vol. 19, No. 11, Theory Series, pp. 1222-1228, 1973.

[102] M. Eisenberg, Queues with periodic service and changeover time (Operations Research, 20 (2)(1972) 440-451).

[103] Fricker Christine and Jaïbi M.R., Monotonicity and Stability of Periodic Polling Models, Queueing Systems, vol. 15, no. 1-4, 1994, pp. 211-238.

[104] Fricker Christine and Jaïbi M.R., Stability of Multi-Server Polling Models, Institute National de Recherche en Informatique et en Automatique, Issue 3347, 1998.

[105] Getoor R. K., Transience and recurrence of Markov processes, Siminaire de Probabilitis XIV, J. Azema and M Yor, Eds. New York Springer-Verlag, 1979.

[106] Gut A., Stopped Random Walks: Limit Theorems and Applications, Applied Probability, 1995.

[107] Chee-Hook Ng. y Boon-Hee Soong, Queueing Modelling Fundemantals with Applications in Communications Networks, John-Wiley and Sons, Ltd, 2008.

[108] Kaspi H. and Mandelbaum A., Regenerative Closed Queueing Networks, Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, vol. 39, no. 4, 1992, pp. 239-258.

[109] A.G. Konheim, H. Levy, M.M. Srinivasan, Descendant set: an efficient approach for the analysis of polling systems (IEEE Transactions on Communications, 42 (2/3/4)(1994) 1245-1253).

[110] Leonard Kleinrock, Theory, Volume 1, Queueing Systems Wiley-Interscience, 1975,

[111] A. G. Konheim, h. Levy and M. M. Srinivasan. Descendant set: an efficient approach for the analysis of polling systems. IEEE Trabsanctions on Communications, 42(2-4): pp. 1245-1253, 1994.

[112] Serge Lang, Calculus of Several Variables, Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

[113] Levy Hanoch y Sidi Moshe , Polling Systems: Applications, Modeling, and Optimization, IEEE Transactions on Communications, vol. 30, no. 10, 1990, pp. 1750-1760.

[114] van der Mei, R.D. and Borst, S. C., Analysis of Multiple-Server Polling Systems by Means of the Power-Series Algorithm, Stochastic Models, vol. 13, no. 2, 1997, pp. 339-369.

[115] Meyn Sean P., Transience of Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models, The Annals of Applied Probability, vol. 5, no. 4, 1995, pp.946-957.

[116] Meyn S. P. and Tweedie R. L., Stability of Markovian Processes II:Continuous Time Processes and Sample Chains, Advanced Applied Pobability, vol. 25, 1993, pp. 487-517.

[117] Meyn S. P. and Tweedie R. L., Markov Chains and Stochastic Stability, 1993.

[118] Meyn, S.P. and Down, D., Stability of Generalized Jackson Networks, The Annals of Applied Probability, 1994.

[119] Roubos Alex, Polling Systems and their Applications, Vrije Universiteit Amsterdam, 2007.

[120] Saavedra B. P., Informe Técnico del Microsimulador, Departamento de Matemátias, 2011.

[121] Vishnevskii V.M. and Semenova O.V., Mathematical Methods to Study the Polling Systems, Automation and Remote Control, vol. 67, no. 2, 2006, pp. 173-220.

[122] Richard Serfozo, Basics of Applied Stochastic Processes, Springer-Verlag, 2009.

[123] Sharpe Michael , General Theory of Markov Processes. Boston, M.A. Academic, 1998.

[124] Sigman Karl, The Stability of Open Queueing Networks, Stochastic Processes and their Applications, vol. 35, no. 1, 1990, pp. 11-15.

[125] Sidi M. and Levy H., Customer Routing in Polling Systems, In: P. King, I. Mitrani, and R. Pooley (Eds.), Proceedings Performance '90, North-Holland, Amsterdam, 1990.

[126] Sidi M. and Levy H., Polling Systems with Simultaneus Arrivals. IEEE Transactions on Communications, vol. 39, no. 6, 1991, pp. 823-827.

[127] Karl Sigman, Hermann Thorisson and Ronald W. Wolff, A Note on the Existence of Regeneration Times, Journal of Applied Probability, vol. 31, pp. 1116-1122, 1994.

[128] Shaler Stidham, Jr., Regenerative Processes in the theory ow queues, with applications to the alternating priority queue, Advances in Applied Probability, Vol. 4, no. 3, 1972,pp. 542-577.

[129] Takagi H., Analysis of Polling Systems, Cambdrige: MIT Press, 1986

[130] Takagi H. and Kleinrock, Analysis of Polling Systems, Cambdrige: MIT Press, 1986

[131] Takagi Hideaki, Queueing Analysis of Polling Models, ACM computing Surveys, vol. 20, no. 1, 1988, pp. 5-28.

[132] Hermann Thorisson, Coupling, Stationarity, and Regeneration, Probability and its Applications, Springer-Verlag, 2000.

[133] E.M.M. Winands, I.J.B.F. Adan adn G.J. van Houtum, Mean value analysis for polling systems, Queueing Systems (2006), 54:35-44,

[134] Konheim, A.G. and Meister, B., Waiting Lines and Times in a System with Polling, J. ACM, 1974, vol. 21, n0. 3, pp. 470-490.

[135] Levy, H. and Kleinrock, L., Polling Systems with Zero Switch-over Periods: A General Method for Analysis the Expected DElay, Performance Evaluat., 1991, vol. 13, no. 2, pp. 97-107.

[136] Yechiali, U., Analysis and Control of Polling systems, in Performance Evaluation of Computer and Communications Systems, Donatiello, L. and Nelson R., Eds. Berlin: Springer Verlag, 1993, pp. 630-650.

Índice alfabético