Modelos de Flujo: Revisión

Carlos E. Martínez-Rodríguez

Julio 2024

Contents

I Contenido **5**

1 Definiciones Básicas **5**

2 Procesos Harris Recurrente **12**

3 Modelo de Flujo **13**

II Material **33**

3.1 Modelo de Flujo . . . 33
3.2 Modelo de Flujo . . . 37
3.3 Modelo de Flujo . . . 48
3.4 Modelo de Flujo . . . 50
3.5 Modelo de Flujo . . . 52
3.6 Modelo de Flujo . . . 55
3.7 Modelo de Flujo . . . 65
3.8 Modelo de Flujo . . . 67

4 Proceso de Estados Markoviano para el Sistema **78**
4.1 Proceso de Estados Markoviano para el Sistema . . . 79

5 Procesos de Estados de Markov **79**
5.1 Procesos de Estados de Markov . . . 81
5.2 Procesos de Estados de Markov . . . 82
5.3 Procesos de Estados de Markov . . . 83

6 Teoría General de Procesos Estocásticos **85**
6.1 Teoría General de Procesos Estocásticos . . . 85
6.2 Teoría General de Procesos Estocásticos . . . 85
6.3 Teoría General de Procesos Estocásticos . . . 85

7 Propiedades de Markov **86**
7.1 Propiedades de Markov . . . 86
7.2 Propiedades de Markov . . . 87
7.3 Propiedades de Markov . . . 88
7.4 Propiedades de Markov . . . 88
7.5 Propiedades de Markov . . . 89
7.6 Propiedades de Markov . . . 90
7.7 Propiedades de Markov . . . 90
7.8 Propiedades de Markov . . . 91
7.9 Propiedades de Markov . . . 92

7.10 Propiedades de Markov 92
7.11 Propiedades de Markov 93

8 Primer Condición de Regularidad 94
8.1 Primer Condición de Regularidad 94
8.2 Primer Condición de Regularidad 101
8.3 Primer Condición de Regularidad 108
8.4 Primer Condición de Regularidad 114
8.5 Primer Condición de Regularidad 115
8.6 Primer Condición de Regularidad 121
8.7 Primer Condición de Regularidad 122
8.8 Primer Condición de Regularidad 129
8.9 Primer Condición de Regularidad 132
8.10 Primer Condición de Regularidad 135
8.11 Primer Condición de Regularidad 136

9 Construcción del Modelo de Flujo 143
9.1 Construcción del Modelo de Flujo 146
9.2 Construcción del Modelo de Flujo 149
9.3 Construcción del Modelo de Flujo 152
9.4 Construcción de un Modelo de Flujo Límite 156

10 Estabilidad 159
10.1 Estabilidad 163
10.2 Estabilidad 167
10.3 Estabilidad 171

11 Procesos Fuerte de Markov 175
11.1 Procesos Fuerte de Markov 176
11.1.1 Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [98] 176
11.2 Procesos Fuerte de Markov 176
11.3 Procesos Fuerte de Markov 176
11.4 Procesos Fuerte de Markov 176
11.5 Procesos Fuerte de Markov 177

12 Procesos Harris Recurrentes Positivos 177
12.1 Procesos Harris Recurrentes Positivos 177
12.2 Procesos Harris Recurrentes Positivos 177

13 Construcción de un Modelo de Flujo Límite 178
13.1 Construcción de un Modelo de Flujo Límite 181
13.2 Construcción de un Modelo de Flujo Límite 185
13.3 Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad 189

14 Teorema 2.1 189
14.1 Teorema 2.1 191
14.2 Teorema 2.1 192
14.3 Teorema 2.1 194

15 Teorema 2.2 195
15.1 Teorema 2.2 195
15.2 Teorema 2.2 195
15.3 Teorema 2.2 196

16 Teorema 2.3 **196**
16.1 Teorema 2.3 . . . 196
16.2 Teorema 2.3 . . . 196
16.3 Teorema 2.3 . . . 196

17 Estabilidad de los Sistemas de Visitas Cíclicas **197**
17.1 Estabilidad de los Sistemas de Visitas Cíclicas . . . 198

18 Resultados principales **199**
18.1 Resultados principales . . . 199
18.2 Modelo de Flujo . . . 199
18.3 Procesos de Estados de Markov . . . 210
18.4 Teoría General de Procesos Estocásticos . . . 211
18.5 Propiedades de Markov . . . 211
18.6 Primer Condición de Regularidad . . . 212
18.7 Construcción del Modelo de Flujo . . . 213
18.8 Estabilidad . . . 216
18.9 Propiedades de Markov . . . 220
18.10 Primer Condición de Regularidad . . . 221
18.11 Procesos Fuerte de Markov . . . 227
18.11.1 Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [98] . . . 228
18.12 Procesos Harris Recurrentes Positivos . . . 228
18.13 Construcción de un Modelo de Flujo Límite . . . 228
18.14 Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad . . . 232
18.15 Teorema 2.1 . . . 232
18.16 Teorema 2.2 . . . 233
18.17 Teorema 2.3 . . . 233
18.18 Definiciones Básicas . . . 233
18.19 Preliminares . . . 238
18.20 Procesos Harris Recurrente . . . 239
18.21 Modelo de Flujo . . . 240
18.22 Procesos de Estados de Markov . . . 251
18.23 Teoría General de Procesos Estocásticos . . . 252
18.24 Propiedades de Markov . . . 253
18.25 Primer Condición de Regularidad . . . 253
18.26 Construcción del Modelo de Flujo . . . 254
18.27 Estabilidad . . . 257
18.28 Propiedades de Markov . . . 261
18.29 Primer Condición de Regularidad . . . 262
18.30 Procesos de Estados Markoviano para el Sistema . . . 269
18.31 Procesos Fuerte de Markov . . . 269
18.31.1 Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [98] . . . 269
18.32 Procesos Harris Recurrentes Positivos . . . 269
18.33 Construcción de un Modelo de Flujo Límite . . . 269
18.34 Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad . . . 273
18.35 Teorema 2.1 . . . 273
18.36 Teorema 2.2 . . . 275
18.37 Teorema 2.3 . . . 275
18.38 Definiciones Básicas . . . 276
18.39 Proceso de Estados Markoviano para el Sistema . . . 279
18.40 Procesos Fuerte de Markov . . . 279
18.41 Propiedades de Markov . . . 280
18.42 Primer Condición de Regularidad . . . 280
18.43 Propiedades de Markov . . . 283
18.44 Primer Condición de Regularidad . . . 284
18.45 Supuestos . . . 291

18.45.1 Supuestos Básicos 292
18.46 Procesos Harris Recurrente 292
18.47 Modelo de Flujo 293
18.47.1 Modelo de Flujo y Estabilidad 299
18.47.2 Resultados principales 300
18.47.3 Definiciones Generales 301
18.47.4 Definiciones y Descripción del Modelo 303
18.47.5 Políticas de Servicio 303
18.47.6 Proceso de Estados 303
18.47.7 Introducción 304
18.47.8 Colas Cíclicas 304
18.47.9 Resultados Previos 305
18.47.10 Teorema de Estabilidad: Descripción 306
18.48 Supuestos 307
18.48.1 Supuestos Básicos 308
18.49 Procesos Harris Recurrente 308
18.50 Modelo de Flujo 310
18.51 Modelo de Flujo 311
18.52 Estabilidad de los Sistemas de Visitas Cíclicas 314
18.53 Resultados principales 315
18.54 Supuestos 315
18.54.1 Supuestos Básicos 316
18.55 Procesos Harris Recurrente 317
18.56 Modelo de Flujo 318
18.57 Supuestos 320
18.57.1 Supuestos Básicos 321
18.58 Procesos Harris Recurrente 322
18.59 Modelo de Flujo 323
18.59.1 Supuestos Básicos 325
18.60 Procesos Harris Recurrente 325
18.61 Modelo de Flujo 327
18.62 Supuestos 328
18.62.1 Supuestos Básicos 330
18.63 Procesos Harris Recurrente 330
18.64 Modelo de Flujo 331

19 Preliminares: Modelos de Flujo **333**
19.1 Supuestos Básicos 334
19.2 Procesos Regenerativos 335
19.3 Preliminares 336
19.4 Procesos Harris Recurrente 337

20 Modelo de Flujo **339**
20.1 Teorá de Procesos Estocásticos y Medibilidad 341
20.2 Construcción del Modelo de Flujo 349
20.3 Ya revisado 407

21 Procesos de Renovación y Regenerativos **413**
21.1 Tiempo de Ciclo Promedio 423
21.2 Tiempos de Ciclo e Intervisita 423
21.3 Longitudes de la Cola en cualquier tiempo 427
21.4 Por resolver 428
21.5 Tiempos de Ciclo e Intervisita 429
21.6 Longitudes de la Cola en cualquier tiempo 434
21.7 Material por agregar 434
21.8 Propiedades de los Procesos de Renovación 447

22 Procesos Regenerativos **464**
22.1 Preliminares 467

Part I
Contenido

1 Definiciones Básicas

Definición 1. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 2. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 3. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 4. *Una función $f : X \to \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 5. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 6. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 7. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 8. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 9. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{1}$$

Nota 1. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (20.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{2}$$

Teorema 1. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \dots, m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{3}$$

en $\{T < \infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \dots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K} \left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 1 (Lema 3.1 [91])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 2 (Teorema 5.2 [91])**.** *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 3 (Teorema 5.1 [91])**.** *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 2 (Lema 5.2 [106])**.** *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{4}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 4 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106])**.** *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}\left(X_1\right] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r} \rightarrow \frac{1}{\mu^{r}}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$*..*

Proposición 2 (Proposicin 5.1 [95])**.** *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{5}$$

Proposición 3 (Proposición 5.3 [95])**.** *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_{x}\left[\int_{0}^{\tau_{C}(\delta)}\left(1+|X\left(t\right)|^{p}\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right) \tag{6}$$

Proposición 4 (Proposición 5.4 [95])**.** *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_{+}$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_{x}\left[\int_{0}^{\tau_{C}(\delta)}f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_{x}\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{7}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 5 (Teorema 5.5 [95])**.** *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds \leq k_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{8}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds \leq k_{p} \tag{9}$$

Teorema 6 (Teorema 6.2[95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^{t}\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_{p}} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q_t|^{p}\right] = \mathbb{E}_{\pi}\left[|Q_0|^{p}\right] < \infty$$

Teorema 7 (Teorema 6.3[95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^{t}(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_{f}=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_{x}[Q_t]-\mathbb{E}_{\pi}[Q_0]|=0}.$$

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0. \tag{10}$$

(S2.)
$$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N}, \tag{11}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right] \geq 0$.
- Se define
$$\delta^{*} := \sum_{j,j+1}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right]. \tag{12}$$
- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $\left(X(t)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^{0}(t), C(t)\right) \tag{13}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \left(\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\}\right)^{M} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}^{K}, \tag{14}$$

- $Q(t) = \left(Q_k(t), 1 \leq k \leq K\right)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = \left(A_k(t), 1 \leq k \leq K\right)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^{0}(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^{0}(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([94]).

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.

- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$.
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola. Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s\left(x\right) = N\left(x\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right] = \overline{N} > 0$.
2) $\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right] \leq \overline{N}$para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m} = r_{j,j^{'}}$.
- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}\left(1\right)\right] \geq 0$.
- Sea $\left\{p_j\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^{*} := \sum_{j,j^{'}} p_j r_{j,j^{'}}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}\left(i\right)\right]. \tag{15}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\left\{\xi_k\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_k\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_k\left(t\right)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k\left(t\right)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m, se denota por $B_m\left(t\right)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t; $B_m^{0}\left(t\right)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t, finalmente sea $C_m\left(t\right)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X\left(t\right)^{T} = \left(Q_k\left(t\right), A_k\left(t\right), B_m\left(t\right), B_m^{0}\left(t\right), C_m\left(t\right)\right) \tag{16}$$

para $k = 1,\ldots,K$ y $m = 1,2,\ldots,M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \left(\left\{1,2,\ldots,K\right\} \times \left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1,\ldots,\xi_K,\eta_1,\ldots,\eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{17}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{18}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto $A2)$ para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición 666.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente.

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(\omega)] = \overline{N} > 0$;
2) $\mathbb{E}[N(\omega)] \leq \overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\left\{p_j^m\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^* := \sum_{j,j^{'}} p_j^m r_{j,j^{'}}^{m} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(i)\right]. \tag{19}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_k\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_k\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^{K}\rho_k < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [105].

Si denotamos por

- $Q_k\left(t\right)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_k\left(t\right)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_m\left(t\right)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_m^0\left(t\right)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_m\left(t\right)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X\left(t\right)^T = \left(Q_k\left(t\right), A_k\left(t\right), B_m\left(t\right), B_m^0\left(t\right), C_m\left(t\right)\right), \tag{20}$$

para $k = 1,\ldots,K$ y $m = 1,2,\ldots,M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

A1) Los procesos $\xi_1,\ldots,\xi_K,\eta_1,\ldots,\eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p\geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_l\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1,\ldots,K \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1,\ldots,K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1,2,\ldots,K$ existe una función positiva $q_k\left(\cdot\right)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k\left(1\right)\geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{21}$$

$$P\left\{a\leq\sum_{i=1}^{j_k}\xi_k\left(i\right)\leq b\right\} \geq \int_a^b q_k\left(x\right)dx,\ 0\leq a < b. \tag{22}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición 666.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [94, 95].

2 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [98], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (27), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([98], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [95]

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [123]) en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x \{X(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la σ-algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D)$$

Definición 10. *Una medida no cero π en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ es* **invariante** *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbf{X}} P^t(x, D) \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 11. *El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 2. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [105]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama Proceso Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot) \pi(dx)$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente.

Definición 12. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [94]:

Lema 3 (Lema 3.1, Dai[94]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x\left(\tau_B<\infty\right)\equiv 1$ y que para algún $\delta>0$ se cumple que*

$$\sup\mathbb{E}_x\left[\tau_B\left(\delta\right)\right]<\infty, \tag{23}$$

donde $\tau_B\left(\delta\right)=inf\left\{t\geq\delta:X\left(t\right)\in B\right\}$. Entonces, X es un proceso Harris Recurrente Positivo.

Lema 4 (Lema 3.1, Dai [94]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B=\{|x|\leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k>0$.*

Teorema 8 (Teorema 3.1, Dai[94]). *Si existe un $\delta>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x\left(|x|\delta\right)|=0, \tag{24}$$

entonces la ecuación (20.358) se cumple para $B=\{|x|\leq k\}$ con algún $k>0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.

Nota 3. *En Meyn and Tweedie [116] muestran que si $P_x\left\{\tau_D<\infty\right\}\equiv 1$ incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

3 Modelo de Flujo

Dado el proceso $X=\left\{X\left(t\right),t\geq 0\right\}$ definido en (22.11) que describe la dinámica del sistema de visitas cíclicas, si $U\left(t\right)$ es el residual de los tiempos de llegada al tiempo t entre dos usuarios consecutivos y $V\left(t\right)$ es el residual de los tiempos de servicio al tiempo t para el usuario que estás siendo atendido por el servidor. Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados que puede tomar el proceso X.

Lema 5 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ con $|x_n|\rightarrow\infty$, conforme $n\rightarrow\infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}_k,$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}_k.$$

a) Conforme $n\rightarrow\infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+}, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t\geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_k\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_k\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea e es un vector de unos, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{cc} 1, & S\left(k\right)=i,\\ 0, & \text{en otro caso}. \end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema (533):

Teorema 9 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación, para casi todas las trayectorias muestrales* ω *y cualquier sucesión de estados iniciales* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, *con* $|x_n| \to \infty$, *existe una subsucesión* $\left\{x_{n_j}\right\}$ *con* $|x_{n_j}| \to \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{25}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \ \ u.o.c. \tag{26}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{27}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{28}$$

$$\overline{T}(t) \ \ \textit{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{29}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \ \ \textit{es no decreciente,} \tag{30}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{31}$$

$$\textit{Condiciones en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{32}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 5 (Proposición 4.2, Dai [94]). *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de 20.347 y suponga que cuando* $x \to \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. *El flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^{0}(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^{0}(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^{0}(t)\right] = t.$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t).$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \rho_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^{0}(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^{0}(t).$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^{0}(t),$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 6 (Lema 3.1, Chen [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Lema 7 (Lema 5.2, Gut [106]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r, \tag{33}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$.

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 10 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo, Gut [106]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$.

Proposición 6 (Proposición 5.1, Dai y Sean [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{34}$$

Proposición 7 (Proposición 5.3, Dai y Sean [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right). \tag{35}$$

Proposición 8 (Proposición 5.4, Dai y Sean [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right],$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{36}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 11 (Teorema 5.5, Dai y Sean [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\}, \tag{37}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p. \tag{38}$$

Teorema 12 (Teorema 6.2 Dai y Sean [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_{p}}\rightarrow 0,$$

para $t\rightarrow\infty$ y $x\in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q_{t}|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q_{0}|^{p}\right]<\infty,$$

donde

$$\parallel P^{t}\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f}=sup_{|g\leq f|}|\int\pi\left(dy\right)g\left(y\right)-\int P^{t}\left(x,dy\right)g\left(y\right)|,$$

para $x\in\mathbb{X}$.

Teorema 13 (Teorema 6.3, Dai y Sean [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)}\left|P^{t}\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right|_{f}=0,$$

para $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{t}\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{0}\right]\right|=0.$$

Proposición 9 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_{0}>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0. \tag{39}$$

Teorema 14 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_{p} tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\}, \tag{40}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 15 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right), \tag{41}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 16 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$|Q\left(T\right)|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ T\geq0, \tag{42}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{43}$$

Demostración 1 (Teorema 534)**.** *La demostración de este teorema se da a continuación:*

i) Utilizando la proposición 127 se tiene que la proposición 128 es cierta para $f(x) = 1 + |x|^p$.

i) es consecuencia directa del Teorema 526.

iii) ver la demostración dada en Dai y Sean [95] páginas 1901-1902.

iv) ver Dai y Sean [95] páginas 1902-1903 ó [117].

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i). \tag{3.44}$$

suponiendo que el estado inicial de la red es $x = (q, a, b) \in X$, entonces para cada k

$$E_k^x(t) := \max\{n \geq 0 : A_k^x(0) + \psi_k(1) + \cdots + \psi_k(n-1) \leq t\} \tag{3.45}$$

$$S_k^x(t) := \max\{n \geq 0 : B_k^x(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(n-1) \leq t\} \tag{3.46}$$

Sea $T_k^x(t)$ el tiempo acumulado que el servidor $s(k)$ ha utilizado en los usuarios de la clase k en el intervalo $[0, t]$. Entonces se tienen las siguientes ecuaciones:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{k} \Phi_k^l S_l^x(T_l^x) - S_k^x(T_k^x) \tag{3.47}$$

$$Q^x(t) = (Q_1^x(t), \ldots, Q_K^x(t))^{'} \geq 0, \tag{3.48}$$

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))^{'} \geq 0, \text{ es no decreciente} \tag{3.49}$$

$$I_i^x(t) = t - \sum_{k \in C_i} T_k^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{3.50}$$

$$\int_0^\infty \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{3.51}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } (Q^x(\cdot), T^x(\cdot)) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{3.52}$$

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \tag{3.53}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola. Si se hace $|q| \to \infty$ y se mantienen las componentes restantes fijas, de la condición inicial x, cualquier punto límite del proceso normalizado $\overline{Q}^x$ es una solución del siguiente modelo de flujo, ver [94].

Definición 13. *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $(Q^x(\cdot), T^x(\cdot))$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk} \mu_l \overline{T}_l(t) \tag{3.54}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{3.55}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{3.56}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k\in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{3.57}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempot cuando } \sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{3.58}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } (Q^x(\cdot), T^x(\cdot)) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{3.59}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 14. *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P'\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{3.60}$$

Definición 15. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en [91].

Lema 1. *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|overlinex| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Supuestos necesarios sobre la red

Supuestos 1. *A1) $\psi_1, \ldots, \psi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\psi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\psi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{3.61}$$
$$P(\psi_k(1) + \ldots \psi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\, dx0 \text{ y} \tag{3.62}$$
$$\int_0^\infty q_k(x)\, dx > 0 \tag{3.63}$$

El argumento dado en [**?**] en el lema 71 se puede aplicar para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños.Entonces la condición $A3$) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 17. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] ds \leq \kappa_p \tag{3.64}$$

donde p es el entero dado por A2). Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right]=\mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right]\leq\kappa_r \tag{3.65}$$

para $r=1,\ldots,p$ *y* $k=1,\ldots,K$.

iii) EL primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right]|=0. \tag{3.66}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right)ds=\mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \tag{3.67}$$

$\mathbb{P}$-*c.s., para* $r=1,\ldots,p$ *y* $k=1,\ldots,K$.

Demostración 2. *La demostración de este resultado se da aplicando los teoremas 484, 526, 527 y 487*

Definimos un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada. Bajo cualquier *preemptive buffer priority* disciplina de servicio, el estado $\mathbb{X}(t)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}\left(t\right)=\left(Q_k\left(t\right),A_l\left(t\right),B_k\left(t\right):k=1,2,\ldots,K,l\in\mathcal{A}\right) \tag{3.68}$$

donde $Q_k\left(t\right)$ es la longitud de la cola para los usuarios de la clase k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k\left(t\right)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio. Los tiempos de arribo residuales, que son iguales al tiempo que queda hasta que el próximo usuario de la clase k llega, se denotan por $A_k\left(t\right)$. Tanto $B_k\left(t\right)$ como $A_k\left(t\right)$ se suponen continuos por la derecha.

Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x=(q,a,b)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x=(q,a,b)\in\mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x|=|q|+|a|+|b|$. En [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$\left(\left(\Omega,\mathcal{F}\right),\mathcal{F}_t,\mathbb{X}\left(t\right),\theta_t,P_x\right)$$

es un proceso de Borel Derecho en el espacio de estadio medible $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X=\{\mathbb{X}\left(t\right),t\geq0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, est definida en $(\Omega,\mathcal{F})$ y est adaptado a $\{\mathcal{F}_t,t\geq0\}$; $\{P_x,x\in X\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega,\mathcal{F})$ tales que para todo $x\in X$

$$P_x\left\{\mathbb{X}\left(0\right)=x\right\}=1$$

y

$$E_x\left\{f\left(X\circ\theta_t\right)|\mathcal{F}_t\right\}=E_X\left(\tau\right)f\left(X\right)$$

en $\{\tau<\infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X\circ\theta_\tau\right)\left(w\right)=\left\{\mathbb{X}\left(\tau\left(w\right)+t,w\right),t\geq0\right\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la sigma algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x,D)$, $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t\geq0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t\left(x,D\right)=P_x\left(\mathbb{X}\left(t\right)\in D\right)$$

Definición 16. *Una medida no cero* π *en* $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ *es* invariante *para* X *si* π *es* σ*-finita y*

$$\pi\left(D\right)=\int_X P^t\left(x,D\right)\pi\left(dx\right)$$

para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, *con* $t\geq0$.

Definición 17. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

- Si X es Harris recurrente, entonces una única medida invariante π existe ([105]).
- Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama *Harris recurrente positiva.*
- Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria y hacemos

  $$P_\pi(\cdot) [= \int_X P_x(\cdot)\, \pi(dx)$$

  y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, as, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π

Definición 18. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.[1]

El modelo está compuesto por c colas de capacidad infinita, etiquetadas de 1 a c las cuales son atendidas por s servidores. Los servidores atienden de acuerdo a una cadena de Markov independiente $\left(X_n^i\right)_n$ con $1 \leq i \leq s$ y $n \in \{1, 2, \ldots, c\}$ con la misma matriz de transición $r_{k,l}$ y única medida invariante (p_k). Cada servidor permanece atendiendo en la cola un periodo llamado de visita y determinada por la política de servicio asignada a la cola.

Los usuarios llegan a la cola k con una tasa λ_k y son atendidos a una razón μ_k. Las sucesiones de tiempos de interarribo $(\tau_k(n))_n$, la de tiempos de servicio $\left(\sigma_k^i(n)\right)_n$ y la de tiempos de cambio $\left(\sigma_{k,l}^{0,i}(n)\right)_n$ requeridas en la cola k para el servidor i son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas con distribución general independiente de i, con media $\sigma_k = \frac{1}{\mu_k}$, respectivamente $\sigma_{k,l}^0 = \frac{1}{\mu_{k,l}^0}$, e independiente de las cadenas de Markov $\left(X_n^i\right)_n$. Además se supone que los tiempos de interarribo se asume son acotados, para cada $\rho_k = \lambda_k \sigma_k < s$ para asegurar la estabilidad de la cola k cuando opera como una cola $M/GM/1$.

Una política de servicio determina el número de usuarios que serán atendidos sin interrupción en periodo de servicio por los servidores que atienden a la cola. Para un solo servidor esta se define a través de una función f donde $f(x, a)$ es el número de usuarios que son atendidos sin interrupción cuando el servidor llega a la cola y encuentra x usuarios esperando dado el tiempo transcurrido de interarribo a. Sea $v(x, a)$ la duración del periodo de servicio para una sola condición inicial (x, a).

Las políticas de servicio consideradas satisfacen las siguientes propiedades:

i) Hay conservación del trabajo, es decir

$$v(x, a) = \sum_{l=1}^{f(x,a)} \sigma(l)$$

con $f(0, a) = v(0, a) = 0$, donde $(\sigma(l))_l$ es una sucesión independiente e idénticamente distribuida de los tiempos de servicio solicitados.

ii) La selección de usuarios para se atendidos es independiente de sus correspondientes tiempos de servicio y del pasado hasta el inicio del periodo de servicio. Así las distribución (f, v) no depende del orden en el cuál son atendidos los usuarios.

[1]En [116] muestran que si $P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ solamente para uno conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris recurrente

iii) La política de servicio es monótona en el sentido de que para cada $a \geq 0$ los números $f(x, a)$ son monótonos en distribución en x y su límite en distribución cuando $x \to \infty$ es una variable aleatoria F^{*0} que no depende de a.

iv) El número de usuarios atendidos por cada servidor es acotado por $f^{min}(x)$ de la longitud de la cola x que además converge monótonamente en distribución a F^* cuando $x \to \infty$

El sistema de colas se describe por medio del proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ como se define a continuación. El estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = (Q(t), P(t), A(t), R(t), C(t))$$

donde

- $Q(t) = (Q_k(t))_{k=1}^{c}$, número de usuarios en la cola k al tiempo t.
- $P(t) = \left(P^i(t)\right)_{i=1}^{s}$, es la posición del servidor i.
- $A(t) = (A_k(t))_{k=1}^{c}$, es el residual del tiempo de arribo en la cola k al tiempo t.
- $R(t) = \left(R_k^i(t), R_{k,l}^{0,i}(t)\right)_{k,l,i=1}^{c,c,s}$, el primero es el residual del tiempo de servicio del usuario atendido por servidor i en la cola k al tiempo t, la segunda componente es el residual del tiempo de cambio del servidor i de la cola k a la cola l al tiempo t.
- $C(t) = \left(C_k^i(t)\right)_{k,i=1}^{c,s}$, es la componente correspondiente a la cola k y al servidor i que está determinada por la política de servicio en la cola k y que hace al proceso $X(t)$ un proceso de Markov.

Todos los procesos definidos arriba se suponen continuos por la derecha.

El proceso X tiene la propiedad fuerte de Markov y su espacio de estados es el espacio producto

$$\mathcal{X} = \mathbb{N}^c \times E^s \times \mathbb{R}_+^c \times \mathbb{R}_+^{cs} \times \mathbb{R}_+^{c^2 s} \times \mathcal{C}$$

donde $E = \{1, 2, \ldots, c\}^2 \cup \{1, 2, \ldots, c\}$ y $\mathcal{C}$ depende de las políticas de servicio.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1. $$lim_{x\to\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0 \tag{3.69}$$

2. $$\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N} \tag{3.70}$$

   para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j'}^m = r_{j,j'}$
- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^* := \sum_{j,j^{'}} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right]. \tag{3.71}$$

El *token passing ring* es una estación de un solo servidor con K clases de usuarios. Cada clase tiene su propio regulador en la estación. Los usuarios llegan al regulador con razón α_k y son atendidos con taza μ_k.

La red se puede modelar como un Proceso de Markov con espacio de estados continuo, continuo en el tiempo:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t), B_k^0(t), C(t) : k = 1, \dots, K, l \in \mathcal{A}\right) \tag{3.72}$$

donde $Q_k(t), B_k(t)$ y $A_k(t)$ se define como en 20.210, $B_k^0(t)$ es el tiempo residual de cambio de la clase k a la clase $k+1\,(modK)$; $C(t)$ indica el número de servicios que han sido comenzados y/o completados durante la sesión activa del buffer.

Los parámetros cruciales son la carga nominal de la cola k: $\beta_k = \alpha_k/\mu_k$ y la carga total es $\rho_0 = \sum \beta_k$, la media total del tiempo de cambio en un ciclo del token está definido por

$$u^0 = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}\left[\eta_k^0(1)\right] = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\mu_k^0} \tag{3.73}$$

El proceso de la longitud de la cola $Q_k^x(t)$ y el proceso de acumulación del tiempo de servicio $T_k^x(t)$ para el buffer k y para el estado inicial x se definen como antes. Sea $T_k^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el token tarda en cambiar del buffer k al $k+1 \mod K$. Suponga que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^{x,0}(|x|t)\right) \tag{3.74}$$

cuando $|x| \to \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t), \overline{T}^0(t)\right)$ es un flujo límite retrasado del token ring.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado

Proposición 10. *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ *un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando* $x \to \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \dots, K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K} \left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 2. *El proceso estocástico* Φ *es un proceso de markov fuerte, temporalmente homogéneo, con trayectorias muestrales continuas por la derecha, cuyo espacio de estados* Y *es igual a* $X \times \mathbb{R}$

Proposición 11. *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{3.75}$$

Lema 3. *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max\left(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t\right)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{3.76}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 18. *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{3.77}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 19. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$|\left|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right||_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{3.78}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 20. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\left|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right||_f=0. \tag{3.79}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 21. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds=\pi(f):=\int f(x)\,\pi(dx) \tag{3.80}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1.
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]=\overline{N}>0 \tag{3.81}$$

2.
$$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]\leq\overline{N} \tag{3.82}$$

para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}=r_{j,j^{'}}$
- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}\left(1\right)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}\right\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.
- Finalmente, se define
$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}r_{j,j^{'}}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}\left(1\right)\right]. \tag{3.83}$$

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cualesL legan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola. Sea x el número de usuarios en la cola esperando por servicio y $N\left(x\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política dada y fija mientras el servidor permanece dando servicio, entonces se asume que:

(S1.)
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]=\overline{N}>0. \tag{3.84}$$

(S2.)
$$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]\leq\overline{N}, \tag{3.85}$$

para cualquier valor de x.

El tiempo que tarda un servidor en volver a dar servicio después de abandonar la cola inmediata anterior y llegar a la próxima se llama tiempo de traslado o de cambio de cola, al momento de la n-ésima visita del servidor a la cola j se genera una sucesión de variables aleatorias $\delta_{j,j+1}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con la propiedad de que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]\geq0$.

Se define
$$\delta^{*}:=\sum_{j,j+1}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]. \tag{3.86}$$

Los tiempos entre arribos a la cola k, son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos. Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho<1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Para el caso más sencillo podemos definir un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada, el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}\left(t\right)=\left(Q_{k}\left(t\right),A_{l}\left(t\right),B_{k}\left(t\right):k=1,2,\ldots,K,l\in\mathcal{A}\right), \tag{3.87}$$

donde $Q_{k}\left(t\right)$ es la longitud de la cola k para los usuarios esperando servicio, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_{k}\left(t\right)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio.

Los tiempos entre arribos residuales, que son el tiempo que queda hasta que el próximo usuario llega a la cola para recibir servicio, se denotan por $A_k(t)$. Tanto $B_k(t)$ como $A_k(t)$ se suponen continuos por la derecha [**?**].

Sea $\mathcal{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x = (q, a, b)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = (q, a, b) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x\| = |q| + |a| + |b|$. En [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de *Borel Derecho* en el espacio de estados medible $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(\mathbb{X}(t) \in D).$$

Definición 19. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_X P^t(x, D)\,\pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 20. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

Definición 21. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

Nota 4. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π ([105]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso a la medida se le llama ***Harris recurrente positiva****.*

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria; se define

$$P_\pi(\cdot) = \int_X P_x(\cdot)\,\pi(dx).$$

Se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, así, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π.

iv) En [116] se muestra que si $P_x\{\tau_D < \infty\} = 1$ incluso para solamente un conjunto pequeño, entonces el proceso de Harris es recurrente.

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \big(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\big) \tag{3.88}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{3.89}$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([94]).

Dada una condición inicial $x \in \mathcal{X}$, $Q_k^x(t)$ es la longitud de la cola k al tiempo t y $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en atender a los usuarios de la cola k. De igual manera se define $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en cambiar de cola para volver a atender a los usuarios.

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \tag{3.90}$$

$$\overline{T}_m^x(t) = \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \tag{3.91}$$

$$\overline{T}_m^{x,0}(t) = \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t). \tag{3.92}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola, al conjunto de todos los posibles flujos límite se le llamará **modelo de flujo**, ([**?**]).

Definición 22. *Un flujo límite para un sistema de visitas bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{3.93}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{3.94}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{3.95}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ param} = 1, 2, \ldots, M \tag{3.96}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en (20.216)-(20.219) se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Definición 23. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.

- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ para $m=1,2,\ldots,M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x,0}\left(|x|t\right)\right) \tag{3.97}$$

para $m=1,2,\ldots,M$, cuando $x\rightarrow\infty$, ver [99]. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}_{m}\left(t\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(t\right)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [99, 94, 95].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\lambda_{k}t-\sum_{m=1}^{M}\mu_{k}\overline{T}_{m,k}\left(t\right), \tag{3.98}$$

para $k=1,2,\ldots,K$.

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K. \tag{3.99}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente,} \tag{3.100}$$

para $k=1,2,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$.

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^{0}\left(t\right)+\overline{T}_{m,k}\left(t\right)=t \text{ para } m=1,2,\ldots,M. \tag{3.101}$$

Definición 24 (Definición 4.1, Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ *en (20.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.348)-(20.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 25. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta>0$ que depende de μ,λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv 0$.*

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 22 (Teorema 4.2, Dai [94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right). \tag{3.102}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 26 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_{0} tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$, con $t\geq t_{0}$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.*

Lema 4 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por (20.348)-(20.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 23 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{3.103}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{3.104}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{3.105}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{3.106}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 24 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{3.107}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 534.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 532

Teorema 25. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots,)$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,\ m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots,\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty|\mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{3.108}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v\in K} M_v = \left\{(v,\zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\right\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{\cup_{v\in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E,\mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0,1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v\in K} \partial^* M_v. \tag{3.109}$$

y

$$\partial^* M_v = \left\{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t},\zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t,\zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\right\}. \tag{3.110}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t,\zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{3.111}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t,\mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v,\zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf\left\{t > 0 : \phi_v(t,\zeta) \in \partial^* M_v\right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v,\zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s,\zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0,\epsilon)$. La medida de transición $Q(A;\mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E,\mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n,\mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \left\{\begin{array}{ll} \\ exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s,\mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{array}\right. \tag{3.112}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N,Z) con distribuición $Q(\cdot;\phi_n(T_1,\mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[2]

$$\mathbf{x}_t = (v_t,\zeta_t) = \left\{\begin{array}{ll} (n, \phi_n(t,\mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N,\mathbf{Z}), & t = t_1. \end{array}\right.$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

[2] Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

Supuestos 2 (Supuesto 3.1, Davis [98]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0,t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[N_t\right] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{3.113}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 27. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 28. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 29. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \textit{ es compacto en } E\right\}. \tag{3.114}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 26. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 30. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*[3]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B). \tag{3.115}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[4] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{3.117}$$

Definición 31. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t (P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 5. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\right\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{3.118}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

[3] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[4]
$$\mathbb{P}\left\{H | \mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H | X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{3.116}$$

Definición 32. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 33 (HD1). *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 34. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) *$(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) *$(\theta_t)_{t\geq 0}$ es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{3.119}$$

iii) *Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.*

Definición 35 (HD2). *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 36. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) *$\mathbf{X}$ es una realización continua por la derecha, 656, de (P_t).*

ii) *$\mathbf{X}$ satisface la condicion HD2, 657, relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) *$\mathcal{G}_t$ es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 8 (Lema 4.2, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{3.120}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{3.121}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{3.122}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 9 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{3.123}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j\in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{3.124}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$

$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^{x}(t) = Q^{x}(0) + E^{x}(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}(t)\right)\right) - S^{x}\left(T^{x}(t)\right), \tag{3.125}$$

$$Q^{x}(t) \geq 0, \tag{3.126}$$

$$T^{x}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^{x}(t) \text{ es no decreciente}, \tag{3.127}$$

$$I^{x}(t) = et - CT^{x}(t) \text{ es no decreciente} \tag{3.128}$$

$$\int_{0}^{\infty} \left(CQ^{x}(t)\right) dI_{i}^{x}(t) = 0, \tag{3.129}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^{x}(\cdot), \overline{T}^{x}(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{3.130}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso}. \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 27 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{3.131}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \; u.o.c. \tag{3.132}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I - P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{3.133}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{3.134}$$

$$\overline{T}(t) \textit{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{3.135}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \textit{ es no decreciente}, \tag{3.136}$$

$$\int_{0}^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{3.137}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{3.138}$$

Part II
Material

3.1 Modelo de Flujo

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 12. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 10 (Lema 3.1 [91])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 28 (Teorema 5.1 [91])**.** *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$, *para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 11 (Lema 5.2 [106])**.** *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r}\tag{3.139}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 29 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106])**.** *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r}\rightarrow\frac{1}{\mu^{r}}$, *cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$..

Proposición 13 (Proposición 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0. \tag{3.140}$$

Proposición 14 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1+|X\left(t\right)|^p\right)dt\right]\leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right) \tag{3.141}$$

Proposición 15 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V\left(x\right):=\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right]+\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right]\leq\frac{1}{t}V\left(x\right)+k, \tag{3.142}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 30 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{3.143}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq k_p \tag{3.144}$$

Teorema 31 (Teorema 6.2 [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right]<\infty$$

Teorema 32 (Teorema 6.3 [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_x\left[Q_t\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q_0\right]\right|=0.$$

Proposición 16 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{3.145}$$

Lema 5 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{3.146}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 33 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{3.147}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 34 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p}, \ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{3.148}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x[|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 35 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{3.149}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 36 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{3.150}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 37 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \ T \geq 0, \tag{3.151}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{3.152}$$

Definición 37. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X,\mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A\in\mathcal{F}$.*

Definición 38. *Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X=\bigcup_{n\geq 1}X_n$ con $X_n\in\mathcal{F}$ y $\mu(X_n)<\infty$.*

Definición 39. *Sea X el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b)\in\mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 40. *Una función $f:X\rightarrow\mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x\in X: f(x)>\alpha\}$$

pertenece a $\mathcal{F}$. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha,\infty))=\{x\in X: f(x)>\alpha\}\in\mathcal{F}.$$

Definición 41. *Sean $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$, $i=1,2,\ldots,$ espacios medibles y $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1,\omega_2,\ldots,)$ tales que $\omega_i\in\Omega_i$, $i=1,2,\ldots,$. Si $B^n\subset\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$, definimos $B_n=\{\omega\in\Omega:(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_i$.*

Definición 42. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t\geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t\geq 0$, si para $s<t$ implica que $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s\leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s\leq t$ sea Borel medible.*

Definición 43. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t\geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s)\subset\mathcal{F}(t)$ para $s\leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T:\Omega\rightarrow[0,\infty]$ tal que $\{T\leq t\}\in\mathcal{F}(t)$ para cada $t\geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t\geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t)=\mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 44. *Sea $X(t), t\geq 0$ proceso estocástico, con (S,χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s,t\in I$, I conjunto de índices, $s<t$, se tiene que $\mathcal{F}(s)\subset\mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 45. *Sea $X(t), t\geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t),\mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B\in\chi$, y $s,t\in I$, $s<t$ se cumple que*

$$P\{X(t)\in B|\mathcal{F}(s)\}=P\{X(t)\in B|X(s)\}. \tag{3.153}$$

Nota 6. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t)=\mathcal{F}_0(t)=\mathcal{F}(X(r), r\leq t),$$

entonces la ecuación (20.299) se puede escribir como

$$P\{X(t)\in B|X(r), r\leq s\}=P\{X(t)\in B|X(s)\} \tag{3.154}$$

3.2 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x\in$ X, sea $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}_m(\cdot),\overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m=1,2,\ldots,M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t),\frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t),\frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{3.155}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{3.156}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{3.157}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{3.158}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$,

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{3.159}$$

De acuerdo a Dai [94], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (20.348)-(20.351), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 46 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en (20.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.348)-(20.351) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, *se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.348-20.351 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 38 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \tag{3.160}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 47 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 6 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 20.348-20.351 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 39 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p, \tag{3.161}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{3.162}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)\right] = 0. \tag{3.163}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right)ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{3.164}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 40 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{3.165}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 534.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 532

Teorema 41. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p\left(m, n, x, B\right) \rightarrow p_{mn}\left(x, B\right)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\left\{X\left(T\right) \in B, T < \infty|\mathcal{F}\left(S\right)\right\} = p\left(S, T, X\left(s\right), B\right) \tag{3.166}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v\in K}M_v = \left\{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\right\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{\cup_{v\in K}A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \to \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \to [0,1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{3.167}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{3.168}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{3.169}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \to \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{3.170}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[5]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 3 (Supuesto 3.1, Davis [98]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{3.171}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 48. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

[5]Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

Definición 49. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 50. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{3.172}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 42. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 51. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*[6]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B). \tag{3.173}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[7] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \; f \in b\mathcal{E}. \tag{3.175}$$

Definición 52. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t (P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 7. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{3.176}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 53. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \to X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 54 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

[6] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[7]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{3.174}$$

Definición 55. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E,\mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t,s\geq 0$,*

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s} \text{ y } X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{3.177}$$

iii) Para cualquier $x\in E$,$\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}=1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.

Definición 56 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha>0$ y cualquier $f\in S^{\alpha}$, el proceso $t\rightarrow f\left(X_t\right)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 57. *Un sistema $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de (P_t).*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 12 (Lema 4.2, Dai[94])**.** *Sea $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ con $|x_n|\rightarrow\infty$, conforme $n\rightarrow\infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n\rightarrow\infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^{k}\left(\left[|x_n|t\right]\right)\rightarrow P_{k}^{'}t, \text{ u.o.c.,} \tag{3.178}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow \alpha_{k}\left(t-\overline{U}_{k}\right)^{+}, \text{ u.o.c.,} \tag{3.179}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow \mu_{k}\left(t-\overline{V}_{k}\right)^{+}, \text{ u.o.c.,} \tag{3.180}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_{k}=1/m_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$.

Lema 13 (Lema 4.3, Dai[94])**.** *Sea $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ con $|x_n|\rightarrow\infty$, conforme $n\rightarrow\infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}_{k}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}_{k}.$$

a) Conforme $n\rightarrow\infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_{k}-t\right)^{+}, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_{k}-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{3.181}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{3.182}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{3.183}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{3.184}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \tag{3.185}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{3.186}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{3.187}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^{x}\left(\cdot\right),\overline{T}^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{3.188}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{cc} 1, & S\left(k\right)=i,\\ 0, & \text{en otro caso}. \end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 43 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right),U^{x_{n_j}}\left(0\right),V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(0\right),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{3.189}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right) \;\; u.o.c. \tag{3.190}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{3.191}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0, \tag{3.192}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{3.193}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente,} \tag{3.194}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0, \tag{3.195}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{3.196}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 17. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ y $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 14 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 44 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$*, para toda* $t \geq t_0$.

Lema 15 (Lema 5.2 [106]). *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$*, y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$*, entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{3.197}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 45 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \to \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \to \frac{1}{\mu^r}$*, cuando* $t \to \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 18 (Proposición 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{3.198}$$

Proposición 19 (Proposición 5.3 [95]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{3.199}$$

Proposición 20 (Proposición 5.4 [95]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X*, sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$*, y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right]+\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right]\leq\frac{1}{t}V\left(x\right)+k, \tag{3.200}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 46 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{3.201}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq k_p \tag{3.202}$$

Teorema 47 (Teorema 6.2 [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right]<\infty$$

Teorema 48 (Teorema 6.3 [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_x\left[Q_t\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q_0\right]\right|=0.$$

Proposición 21 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{3.203}$$

Lema 7 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{3.204}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 49 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{3.205}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 50 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{3.206}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[\left|Q\left(t\right)\right|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[\left|Q\left(0\right)\right|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 51 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{3.207}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]\right|=0.$$

Teorema 52 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_{X})$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{3.208}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(\left|f\right|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 53 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$\left|Q\left(T\right)\right|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ T\geq0, \tag{3.209}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $\left|Q\left(0\right)\right|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $\left|x\right|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{3.210}$$

Definición 58. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X,\mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A\in\mathcal{F}$.*

Definición 59. *Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X=\bigcup_{n\geq1}X_{n}$ con $X_{n}\in\mathcal{F}$ y $\mu\left(X_{n}\right)<\infty$.*

Definición 60. *Sea X el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b)\in\mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 61. *Una función $f:X\rightarrow\mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\left\{x\in X:f\left(x\right)>\alpha\right\}$$

pertenece a $\mathcal{F}$. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}\left(\left(\alpha,\infty\right)\right)=\left\{x\in X:f\left(x\right)>\alpha\right\}\in\mathcal{F}.$$

Definición 62. *Sean $(\Omega_{i},\mathcal{F}_{i})$, $i=1,2,\ldots,$ espacios medibles y $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_{i}$ el conjunto de todas las sucesiones $\left(\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\right)$ tales que $\omega_{i}\in\Omega_{i}$, $i=1,2,\ldots,$. Si $B^{n}\subset\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_{i}$, definimos $B_{n}=\left\{\omega\in\Omega:\left(\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\omega_{n}\right)\in B^{n}\right\}$. Al conjunto B_{n} se le llama* cilindro *con base B^{n}, el cilindro es llamado medible si $B^{n}\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_{i}$.*

Definición 63. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 64. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 65. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 66. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{3.211}$$

Nota 8. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (20.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{3.212}$$

3.3 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{3.213}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$, ver [99]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [99, 94, 95].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{3.214}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{3.215}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{3.216}$$

para $k=1,2,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$.

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}^{0}_{m,k}\left(t\right)+\overline{T}_{m,k}\left(t\right)=t \text{ para } m=1,2,\ldots,M. \tag{3.217}$$

Definición 67 (Definición 4.1, Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ en (20.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.348)-(20.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 68. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta>0$ que depende de μ,λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv 0$.*

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 54 (Teorema 4.2, Dai [94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right). \tag{3.218}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 69 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$, con $t\geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.*

Lema 8 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por (20.348)-(20.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0>0$ tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$ para cualquier $t\geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 55 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x\in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}, \tag{3.219}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right]\leq\kappa_{r}, \tag{3.220}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)\right]|=0. \tag{3.221}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-}c.s. \tag{3.222}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 56 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_{j}}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_{s}}\right)\delta^{*} \tag{3.223}$$

i) Si $\rho<1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 534.*

ii) Si $\rho>1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 532*

3.4 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x\in\mathbb{X}$, sea

- $Q_{k}^{x}\left(t\right)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^{x}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ para $m=1,2,\ldots,M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x,0}\left(|x|t\right)\right) \tag{3.224}$$

para $m=1,2,\ldots,M$, cuando $x\rightarrow\infty$, ver [99]. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}_{m}\left(t\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(t\right)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [99, 94, 95].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\lambda_{k}t-\sum_{m=1}^{M}\mu_{k}\overline{T}_{m,k}\left(t\right), \tag{3.225}$$

para $k=1,2,\ldots,K$.

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K. \tag{3.226}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right)=0,\ \text{y}\ \overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right)\ \text{es no decreciente}, \tag{3.227}$$

para $k=1,2,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$.

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^{0}\left(t\right)+\overline{T}_{m,k}\left(t\right)=t \text{ para } m=1,2,\ldots,M. \tag{3.228}$$

Definición 70 (Definición 4.1, Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ *en (20.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.348)-(20.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 71. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 57 (Teorema 4.2, Dai [94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right). \tag{3.229}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 72 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$.

Lema 9 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por (20.348)-(20.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 58 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p*, y para cada condición inicial* $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p, \tag{3.230}$$

donde p *es el entero dado en (A2).*

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{3.231}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$*. Donde* π *es la probabilidad invariante para* X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}*:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)\right]| = 0. \tag{3.232}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right)ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{3.233}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 59 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js}\overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{3.234}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 534.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 532

3.5 Modelo de Flujo

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Sea x el número de usuarios en la cola esperando por servicio y $N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política dada y fija mientras el servidor permanece dando servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0. \tag{3.235}$$

(S2.)

$$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N}, \tag{3.236}$$

para cualquier valor de x.

El tiempo que tarda un servidor en volver a dar servicio después de abandonar la cola inmediata anterior y llegar a la próxima se llama tiempo de traslado o de cambio de cola, al momento de la n-ésima visita del servidor a la cola j se genera una sucesión de variables aleatorias $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con la propiedad de que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right] \geq 0$.

Se define

$$\delta^* := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right]. \tag{3.237}$$

Los tiempos entre arribos a la cola k, son de la forma $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos. Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Para el caso más sencillo podemos definir un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada, el estado $\mathbb{X}(t)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}(t) = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t) : k = 1, 2, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right), \tag{3.238}$$

donde $Q_k(t)$ es la longitud de la cola k para los usuarios esperando servicio, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k(t)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio.

Los tiempos entre arribos residuales, que son el tiempo que queda hasta que el próximo usuario llega a la cola para recibir servicio, se denotan por $A_k(t)$. Tanto $B_k(t)$ como $A_k(t)$ se suponen continuos por la derecha [?].

Sea $\mathcal{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x = (q, a, b)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = (q, a, b) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x\| = |q| + |a| + |b|$. En [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de *Borel Derecho* en el espacio de estados medible $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(\mathbb{X}(t) \in D).$$

Definición 73. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_X P^t(x, D)\,\pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 74. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

Definición 75. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

Nota 9. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π ([105]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso a la medida se le llama ***Harris recurrente positiva****.*

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria; se define

$$P_\pi(\cdot) = \int_X P_x(\cdot)\,\pi(dx).$$

Se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, así, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π.

iv) En [116] se muestra que si $P_x\{\tau_D < \infty\} = 1$ incluso para solamente un conjunto pequeño, entonces el proceso de Harris es recurrente.

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\right) \tag{3.239}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{3.240}$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([94]).

Dada una condición inicial $x \in \mathcal{X}$, $Q_k^x(t)$ es la longitud de la cola k al tiempo t y $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en atender a los usuarios de la cola k. De igual manera se define $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en cambiar de cola para volver a atender a los usuarios.

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \tag{3.241}$$

$$\overline{T}_m^x(t) = \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \tag{3.242}$$

$$\overline{T}_m^{x,0}(t) = \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t). \tag{3.243}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola, al conjunto de todos los posibles flujos límite se le llamará **modelo de flujo**, ([**?**]).

Definición 76. *Un flujo límite para un sistema de visitas bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{3.244}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{3.245}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{3.246}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ param} = 1, 2, \ldots, M \tag{3.247}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en (20.216)-(20.219) se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Definición 77. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

3.6 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in X$, sea $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{3.248}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{3.249}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{3.250}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{3.251}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$,

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{3.252}$$

De acuerdo a Dai [94], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (20.348)-(20.351), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 78 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en (20.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.348)-(20.351) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, *se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.348-20.351 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 60 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t) \tag{3.253}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 79 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 10 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 20.348-20.351 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 61 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p*, y para cada condición inicial* $x \in X$

$$limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p, \tag{3.254}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{3.255}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$*. Donde* π *es la probabilidad invariante para* $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}*:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right] = 0. \tag{3.256}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{3.257}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 62 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{3.258}$$

i) Si $\rho < 1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 534.*

ii) Si $\rho < 1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 532*

Teorema 63. *Sea* $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ *Proceso de Markov con espacio de estados* (S_0, χ_0) *generado por una distribuición inicial* P_o *y probabilidad de transición* p_{mn}*, para* $m, n = 0, 1, \ldots,\ m < n$*, que por notación se escribirá como* $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$*. Sea S tiempo de paro relativo a la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_n$*. Sea T función medible,* $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$*. Supóngase que* $T \geq S$*, entonces T es tiempo de paro. Si* $B \in \chi_0$*, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty|\mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{3.259}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v\in K} M_v = \left\{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\right\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{\cup_{v\in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v\in K} \partial^* M_v. \tag{3.260}$$

y

$$\partial^* M_v = \left\{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\right\}. \tag{3.261}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{3.262}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf\left\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \\ exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{3.263}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[8]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

[8]Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

Supuestos 4 (Supuesto 3.1, Davis [98])**.** *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0,t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[N_t\right] < \infty \text{ para toda } t. \tag{3.264}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 80. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 81. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 82. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{3.265}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 64. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 83. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*[9]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B). \tag{3.266}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[10] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{3.268}$$

Definición 84. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 10. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\right\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{3.269}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

[9] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[10]

$$\mathbb{P}\left\{H | \mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H | X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{3.267}$$

Definición 85. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t\rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 86 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}^*$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso E-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *tal que* $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 87. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E,\mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso E-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t,s\geq 0$,

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s}\text{ y }X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{3.270}$$

iii) Para cualquier $x\in E,\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}=1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.

Definición 88 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha>0$ *y cualquier* $f\in S^\alpha$*, el proceso* $t\rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 89. *Un sistema* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 16 (Lema 4.2, Dai[94])**.** *Sea* $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ *con* $|x_n|\rightarrow\infty$*, conforme* $n\rightarrow\infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0)=\overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n\rightarrow\infty$*, casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t])\rightarrow P_k^{'}t,\text{ u.o.c.}, \tag{3.271}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+,\text{ u.o.c.}, \tag{3.272}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+,\text{ u.o.c.}, \tag{3.273}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k=1/m_k=1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$.

Lema 17 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^{+}, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{3.274}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{3.275}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)^{'},$$

$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^{x}(t)=Q^{x}(0)+E^{x}(t)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}(t)\right)\right)-S^{x}\left(T^{x}(t)\right), \tag{3.276}$$

$$Q^{x}(t)\geq 0, \tag{3.277}$$

$$T^{x}(0)=0,\ \text{y}\ \overline{T}^{x}(t)\ \text{ es no decreciente}, \tag{3.278}$$

$$I^{x}(t)=et-CT^{x}(t)\ \text{ es no decreciente} \tag{3.279}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(CQ^{x}(t)\right)dI_{i}^{x}(t)=0, \tag{3.280}$$

$$\text{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}^{x}(\cdot),\overline{T}^{x}(\cdot)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{3.281}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\begin{cases}1, & S(k)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 65 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0),U^{x_{n_j}}(0),V^{x_{n_j}}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(0),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{3.282}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)\ \textit{u.o.c.} \tag{3.283}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t)=Q(0)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}(t)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{3.284}$$

$$\overline{Q}(t)\geq 0, \tag{3.285}$$

$$\overline{T}(t)\ \textit{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{3.286}$$

$$\overline{I}(t)=et-C\overline{T}(t)\ \textit{ es no decreciente}, \tag{3.287}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right)d\overline{I}(t)=0, \tag{3.288}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}(\cdot)\right)\textit{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{3.289}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 22. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}(0),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}(0),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}(0),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}(0),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0)=\overline{T}^0(0)=0$.

ii) Para todo $t\geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t)+\overline{T}_k^0(t)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_k(t)=\overline{Q}_k(0)+\alpha_k t-\mu_k\overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t)=\beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_k^0\overline{T}_k^0(t)=\mu_j^0\overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_k\dot{\overline{T}}_k(t)=l_k\mu_k^0\dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t)>0$.

Lema 18 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 66 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α,μ,T,U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t)=0$, para toda $t\geq t_0$.*

Lema 19 (Lema 5.2 [106]). *Sea $\{\xi(k):k\in\mathbb{Z}\}$ sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t)=max\left\{n\geq 1:\xi(1)+\cdots+\xi(n-1)\leq t\right\}.$$

Si $E[\xi(1)]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{3.290}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r:t\geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 67 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). *Sea $0<\mu<\mathbb{E}(X_1]\leq\infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r\rightarrow\frac{1}{\mu^r}$, cuando $t\rightarrow\infty$ para todo $r>0$..

Proposición 23 (Proposición 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right]=0. \tag{3.291}$$

Proposición 24 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{3.292}$$

Proposición 25 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V(x)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f(X(s))\, ds\right] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{3.293}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 68 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{3.294}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \tag{3.295}$$

Teorema 69 (Teorema 6.2 [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 70 (Teorema 6.3 [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_x\left[Q_t\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_0\right]\right| = 0.$$

Proposición 26 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{3.296}$$

Lema 11 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{3.297}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 71 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95])**.** *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{3.298}$$

para $t > 0$ *y* $x \in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 72 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{3.299}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 73 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con* $f(x) = f_1(x)$ *se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{3.300}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0.$$

Teorema 74 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea* ν *cualquier distribución de probabilidad en* $(X, \mathcal{B}_X)$, *y* π *la distribución estacionaria de* X.

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{3.301}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *con* $\pi(|f|) < \infty$, *la ecuación anterior se cumple.*

Teorema 75 (Teorema 2.2, Down [99])**.** *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{3.302}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, *con* $|Q(0)| = 1$. *Entonces para cualquier* $0 < q \leq 1$, *existe* $B < 0$ *tal que para cualquier* $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\} \geq q. \tag{3.303}$$

Definición 90. *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{F}$ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* X, *la pareja* $(X, \mathcal{F})$ *es llamado espacio medible. Un subconjunto* A *de* X *es llamado medible, o medible con respecto a* $\mathcal{F}$, *si* $A \in \mathcal{F}$.

Definición 91. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *espacio de medida. Se dice que la medida* μ *es* σ*-finita si se puede escribir* $X = \bigcup_{n\geq1}X_n$ *con* $X_n \in \mathcal{F}$ *y* $\mu(X_n) < \infty$.

Definición 92. *Sea X el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 93. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a $\mathcal{F}$. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 94. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 95. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 96. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 97. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 98. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{3.304}$$

Nota 11. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (20.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{3.305}$$

3.7 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{3.306}$$

para $m=1,2,\ldots,M$, cuando $x\rightarrow\infty$, ver [99]. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}_{m}\left(t\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(t\right)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [99, 94, 95].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\lambda_{k}t-\sum_{m=1}^{M}\mu_{k}\overline{T}_{m,k}\left(t\right), \tag{3.307}$$

para $k=1,2,\ldots,K$.

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K. \tag{3.308}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente,} \tag{3.309}$$

para $k=1,2,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$.

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^{0}\left(t\right)+\overline{T}_{m,k}\left(t\right)=t \text{ para } m=1,2,\ldots,M. \tag{3.310}$$

Definición 99 (Definición 4.1, Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ *en (20.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.348)-(20.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 100. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta>0$ que depende de μ,λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv0$.*

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 76 (Teorema 4.2, Dai [94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right). \tag{3.311}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 101 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_{0} tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$, con $t\geq t_{0}$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.*

Lema 12 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por (20.348)-(20.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_{0}>0$ tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$ para cualquier $t\geq t_{0}$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 77 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces* *i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p, \tag{3.312}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{3.313}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)\right]| = 0. \tag{3.314}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right)ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{3.315}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 78 (Teorema 2.3, Down [99])**.** *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{3.316}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 534.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 532

3.8 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in$ X, sea $Q_k^x\left(t\right)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^x\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}_m\left(\cdot\right), \overline{T}_m^0\left(\cdot\right)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x\left(|x|t\right), \frac{1}{|x|}T_m^x\left(|x|t\right), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}\left(|x|t\right)\right) \tag{3.317}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}_m\left(t\right), \overline{T}_m^0\left(t\right)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k\left(t\right) = \overline{Q}_k\left(0\right) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^M \mu_k\overline{T}_{m,k}\left(t\right) \tag{3.318}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{3.319}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{3.320}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$,

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}^0_{m,k}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{3.321}$$

De acuerdo a Dai [94], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (20.348)-(20.351), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 102 (Definición 4.1, , Dai [94])**.** *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en (20.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.348)-(20.351) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.348-20.351 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 79 (Teorema 4.2, Dai[94])**.** *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x| t) \tag{3.322}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 103 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95])**.** *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 13 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95])**.** *Si el modelo de flujo definido por 20.348-20.351 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 80 (Teorema 2.1, Down [99])**.** *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p*, y para cada condición inicial* $x \in X$

$$limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p \right] ds \leq \kappa_p, \tag{3.323}$$

donde p *es el entero dado en (A2).*

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right]\leq\kappa_{r}, \tag{3.324}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)\right]=0. \tag{3.325}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-}c.s. \tag{3.326}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 81 (Teorema 2.3, Down [99])**.** *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_{j}}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_{s}}\right)\delta^{*} \tag{3.327}$$

i) Si $\rho<1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 534.

ii) Si $\rho<1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 532

Teorema 82. *Sea $(X_{n},\mathcal{F}_{n},n=0,1,\ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_{0},χ_{0}) generado por una distribuición inicial P_{o} y probabilidad de transición p_{mn}, para $m,n=0,1,\ldots,$ $m<n$, que por notación se escribirá como $p\left(m,n,x,B\right)\rightarrow p_{mn}\left(x,B\right)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_{n}$. Sea T función medible, $T:\Omega\rightarrow\left\{0,1,\ldots,\right\}$. Supóngase que $T\geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B\in\chi_{0}$, entonces*

$$P\left\{X\left(T\right)\in B,T<\infty|\mathcal{F}\left(S\right)\right\}=p\left(S,T,X\left(s\right),B\right) \tag{3.328}$$

en $\left\{T<\infty\right\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d:K\rightarrow\mathbb{N}$ función. Para $v\in K$, M_{v} es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E=\cup_{v\in K}M_{v}=\left\{(v,\zeta):v\in K,\zeta\in M_{v}\right\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E}=\left\{\cup_{v\in K}A_{v}:A_{v}\in\mathcal{M}_{v}\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_{v}. Entonces $(E,\mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_{t}=(v_{t},\zeta_{t})$. La distribución de $(\mathbf{x}_{t})$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_{v},v\in K)$.

ii) Una función medible $\lambda:E\rightarrow\mathbb{R}_{+}$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0,1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v\in K}\partial^* M_v. \tag{3.329}$$

y

$$\partial^* M_v = \left\{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t},\zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t,\zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\right\}. \tag{3.330}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t,\zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{3.331}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t,\mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v,\zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf\left\{t > 0 : \phi_v(t,\zeta) \in \partial^* M_v\right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v,\zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v,\phi_v(s,\zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0,\epsilon)$. La medida de transición $Q(A;\mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E,\mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n,\mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n,\phi_n(s,\mathbf{z}))\,ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{3.332}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N,Z) con distribuición $Q(\cdot;\phi_n(T_1,\mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[11]

$$\mathbf{x}_t = (v_t,\zeta_t) = \begin{cases} (n,\phi_n(t,\mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N,\mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 5 (Supuesto 3.1, Davis [98]). *Sea* $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t\geq t)}$ *el número de saltos en* $[0,t]$. *Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{3.333}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 104. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 105. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

[11] Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

Definición 106. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{3.334}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 83. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 107. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*[12]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B). \tag{3.335}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[13] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{3.337}$$

Definición 108. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 12. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\right\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{3.338}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 109. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 110 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

[12] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[13]

$$\mathbb{P}\left\{H | \mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H | X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{3.336}$$

Definición 111. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{3.339}$$

iii) Para cualquier $x \in E$,$\mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 112 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^{\alpha}$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 113. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de (P_t).*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 20 (Lema 4.2, Dai[94])**.** *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{3.340}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{3.341}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{3.342}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 21 (Lema 4.3, Dai[94])**.** *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right) =_k^x\left(0\right) + E_k^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{3.343}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x\left(t\right) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x\left(t\right)\right) dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{3.344}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right) = \left(T_1^x\left(t\right), \ldots, T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$

$$I^x\left(t\right) = \left(I_1^x\left(t\right), \ldots, I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x\left(t\right) = Q^x\left(0\right) + E^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S^x\left(T^x\left(t\right)\right), \tag{3.345}$$

$$Q^x\left(t\right) \geq 0, \tag{3.346}$$

$$T^x\left(0\right) = 0, \text{ y } \overline{T}^x\left(t\right) \text{ es no decreciente}, \tag{3.347}$$

$$I^x\left(t\right) = et - CT^x\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{3.348}$$

$$\int_0^{\infty}\left(CQ^x\left(t\right)\right) dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{3.349}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{3.350}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 84 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{3.351}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{3.352}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I - P)' M^{-1} \left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{3.353}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{3.354}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{3.355}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{3.356}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{3.357}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{3.358}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 27. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K \left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \le k \le K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \le k \le K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 22 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 85 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$*, para toda* $t \ge t_0$.

Lema 23 (Lema 5.2 [106]). *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$*, y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \ge 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \le t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$*, entonces para cualquier entero* $r \ge 1$

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{3.359}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\ge\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \ge 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 86 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \le \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \to \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \to \frac{1}{\mu^r}$*, cuando* $t \to \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 28 (Proposición 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{3.360}$$

Proposición 29 (Proposición 5.3 [95]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \le C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{3.361}$$

Proposición 30 (Proposición 5.4 [95]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X*, sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$*, y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{3.362}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 87 (Teorema 5.5 [95])**.** *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{3.363}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{3.364}$$

Teorema 88 (Teorema 6.2 [95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 89 (Teorema 6.3 [95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_x\left[Q_t\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_0\right]\right| = 0.$$

Proposición 31 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95])**.** *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{3.365}$$

Lema 14 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [95])**.** *Sea $\{\zeta\left(k\right) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E\left(t\right) = max\left(n \geq 1 : \zeta\left(1\right) + \cdots + \zeta\left(n-1\right) \leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{3.366}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 90 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95])**.** *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{3.367}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 91 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{3.368}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[\left|Q\left(t\right)\right|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[\left|Q\left(0\right)\right|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 92 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{3.369}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]\right|=0.$$

Teorema 93 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_{X}\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{3.370}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(\left|f\right|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 94 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$\left|Q\left(T\right)\right|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ T\geq0, \tag{3.371}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $\left|Q\left(0\right)\right|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $\left|x\right|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{3.372}$$

Definición 114. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $\left(X,\mathcal{F}\right)$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A\in\mathcal{F}$.*

Definición 115. *Sea $\left(X,\mathcal{F},\mu\right)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X=\bigcup_{n\geq1}X_{n}$ con $X_{n}\in\mathcal{F}$ y $\mu\left(X_{n}\right)<\infty$.*

Definición 116. *Sea X el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $\left(a,b\right)\in\mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 117. *Una función $f:X\rightarrow\mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\left\{x\in X:f\left(x\right)>\alpha\right\}$$

pertenece a $\mathcal{F}$. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}\left(\left(\alpha,\infty\right)\right)=\left\{x\in X:f\left(x\right)>\alpha\right\}\in\mathcal{F}.$$

Definición 118. *Sean $\left(\Omega_{i},\mathcal{F}_{i}\right)$, $i=1,2,\ldots,$ espacios medibles y $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_{i}$ el conjunto de todas las sucesiones $\left(\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\right)$ tales que $\omega_{i}\in\Omega_{i}$, $i=1,2,\ldots,$. Si $B^{n}\subset\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_{i}$, definimos $B_{n}=\left\{\omega\in\Omega:\left(\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\omega_{n}\right)\in B^{n}\right\}$. Al conjunto B_{n} se le llama* cilindro *con base B^{n}, el cilindro es llamado medible si $B^{n}\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_{i}$.*

Definición 119. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 120. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 121. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 122. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{3.373}$$

Nota 13. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (20.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{3.374}$$

4 Proceso de Estados Markoviano para el Sistema

Sean $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ el tiempo residual de arribos a la cola k, para cada servidor m, sea $H_m(t)$ par ordenado que consiste en la cola que está siendo atendida y la política de servicio que se está utilizando. $B_m(t)$ los tiempos de servicio residuales, $B_m^0(t)$ el tiempo residual de traslado, $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H_m(t)$.

El proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{4.1}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{4.2}$$
$$P(\xi_k(1) + \ldots \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\, dx0 \text{ y} \tag{4.3}$$
$$\int_0^\infty q_k(x)\, dx > 0 \tag{4.4}$$

4.1 Proceso de Estados Markoviano para el Sistema

Sean $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ el tiempo residual de arribos a la cola k, para cada servidor m, sea $H_m(t)$ par ordenado que consiste en la cola que está siendo atendida y la política de servicio que se está utilizando. $B_m(t)$ los tiempos de servicio residuales, $B_m^0(t)$ el tiempo residual de traslado, $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H_m(t)$.

El proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{4.5}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{4.6}$$
$$P(\xi_k(1) + \ldots \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\, dx0 \text{ y} \tag{4.7}$$
$$\int_0^\infty q_k(x)\, dx > 0 \tag{4.8}$$

5 Procesos de Estados de Markov

Teorema 95. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{5.1}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{\bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0,1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{5.2}$$

y

$$\partial^* M_v = \left\{ z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v \right\}. \tag{5.3}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{5.4}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf \left\{ t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v \right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \\ exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds \right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{5.5}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 6 (Supuesto 3.1, Davis [98]). *Sea* $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ *el número de saltos en* $[0, t]$. *Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{5.6}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[14] se cumple para cualquier tiempo de paro.

[14] Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

5.1 Procesos de Estados de Markov

Teorema 96. *Sea* $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ *Proceso de Markov con espacio de estados* (S_0, χ_0) *generado por una distribuición inicial* P_o *y probabilidad de transición* p_{mn}*, para* $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$*, que por notación se escribirá como* $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$*. Sea* S *tiempo de paro relativo a la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_n$*. Sea* T *función medible,* $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$*. Supóngase que* $T \geq S$*, entonces* T *es tiempo de paro. Si* $B \in \chi_0$*, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{5.7}$$

en $\{T < \infty\}$*.*

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{ \bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v \right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{5.8}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{5.9}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{5.10}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{5.11}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 7 (Supuesto 3.1, Davis [98]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{5.12}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[15] se cumple para cualquier tiempo de paro.

5.2 Procesos de Estados de Markov

Teorema 97. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \to p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \to \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{5.13}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \to \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{ \bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v \right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \to \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \to [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{5.14}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{5.15}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

[15] Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{5.16}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \to \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{5.17}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 8 (Supuesto 3.1, Davis [98]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{5.18}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[16] se cumple para cualquier tiempo de paro.

5.3 Procesos de Estados de Markov

Teorema 98. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \to p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \to \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{5.19}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \to \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

[16]Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{ \bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v \right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \to \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \to [0,1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{5.20}$$

y

$$\partial^* M_v = \left\{ z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v \right\}. \tag{5.21}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{5.22}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf \left\{ t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v \right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \to \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds \right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{5.23}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 9 (Supuesto 3.1, Davis [98]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{5.24}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[17] se cumple para cualquier tiempo de paro.

[17] Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

6 Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 123. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda\left(E\right) = sup\left\{\lambda\left(K\right) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{6.1}$$

Definición 124. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $\left(E, \mathcal{B}\left(E\right)\right)$ es regular interior o cerrada,* tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 99. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en $\left(E, \mathcal{B}\left(E\right)\right)$ es cerrada.*

6.1 Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 125. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda\left(E\right) = sup\left\{\lambda\left(K\right) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{6.2}$$

Definición 126. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $\left(E, \mathcal{B}\left(E\right)\right)$ es regular interior o cerrada,* tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 100. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en $\left(E, \mathcal{B}\left(E\right)\right)$ es cerrada.*

6.2 Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 127. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda\left(E\right) = sup\left\{\lambda\left(K\right) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{6.3}$$

Definición 128. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $\left(E, \mathcal{B}\left(E\right)\right)$ es regular interior o cerrada,* tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 101. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en $\left(E, \mathcal{B}\left(E\right)\right)$ es cerrada.*

6.3 Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 129. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda\left(E\right) = sup\left\{\lambda\left(K\right) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{6.4}$$

Definición 130. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $\left(E, \mathcal{B}\left(E\right)\right)$ es regular interior o cerrada,* tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 102. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en $\left(E, \mathcal{B}\left(E\right)\right)$ es cerrada.*

7 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[18], $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 131. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{19}. \tag{7.1}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[20] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{7.3}$$

Definición 132. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}^{21}.$$

Nota 14. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{7.4}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

7.1 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 133. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{22}. \tag{7.5}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov [23] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{7.7}$$

[18] qué se quiere decir con el término: más general?

[19] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[20]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{7.2}$$

[21] Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

[22] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[23]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{7.6}$$

Definición 134. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_sf)(x),\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 15. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_sf(X_t)\ \ t,s\geq 0,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{7.8}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

7.2 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X,\mathcal{G},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I\subset\mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r): r\in I, r\leq t, f\in\mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[24], $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 135. *Una familia* $(P_{s,t})$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *indexada por pares* $s,t\in I$*, con* $s\leq t$ *es una función de transición en* $(E,\mathcal{E})$*, si para todo* $r\leq s<t$ *en* I *y todo* $x\in E$*,* $B\in\mathcal{E}$

$$P_{r,t}(x,B) = \int_E P_{r,s}(x,dy)\,P_{s,t}(y,B)\,^{25}. \tag{7.9}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E,\mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[26] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t)|\mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t)\ \ s\leq t\in I,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{7.11}$$

Definición 136. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_sf)(x),\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}^{27}.$$

Nota 16. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_sf(X_t)\ \ t,s\geq 0,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{7.12}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

---

[24] qué se quiere decir con el término: más general?

[25] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[26]

$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H|X_t\}\ \ H\in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{7.10}$$

[27] Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

7.3 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma \{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 137. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{28}. \tag{7.13}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[29] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \ \ s \leq t \in I, \ f \in b\mathcal{E}. \tag{7.15}$$

Definición 138. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \ t, s \geq 0, \ x \in E \ f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 17. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \ \ t, s \geq 0, \ f \in b\mathcal{E}. \tag{7.16}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

7.4 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma \{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 139. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{30}. \tag{7.17}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[31] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \ \ s \leq t \in I, \ f \in b\mathcal{E}. \tag{7.19}$$

[28] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[29]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \ \ H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{7.14}$$

[30] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[31]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \ \ H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{7.18}$$

Definición 140. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x),\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 18. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t}=P_{t-s}$*.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t)\ t,s\geq 0,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{7.20}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

7.5 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X,\mathcal{G},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I\subset\mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r): r\in I, rleqt, f\in\mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 141. *Una familia* $(P_{s,t})$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *indexada por pares* $s,t\in I$*, con* $s\leq t$ *es una función de transición en* $(E,\mathcal{E})$*, si para todo* $r\leq s<t$ *en* I *y todo* $x\in E$*,* $B\in\mathcal{E}$

$$P_{r,t}(x,B) = \int_E P_{r,s}(x,dy)\,P_{s,t}(y,B)^{32}. \tag{7.21}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E,\mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[33] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t)|\mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t)\ s\leq t\in I,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{7.23}$$

Definición 142. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x),\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 19. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t}=P_{t-s}$*.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t)\ t,s\geq 0,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{7.24}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

[32] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[33]

$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H|X_t\}\ H\in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{7.22}$$

7.6 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 143. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{34}. \tag{7.25}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[35] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t)|\mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{7.27}$$

Definición 144. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_sf)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 20. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_sf(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{7.28}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

7.7 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 145. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{36}. \tag{7.29}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[37] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t)|\mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{7.31}$$

[34] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[35]

$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H|X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{7.26}$$

[36] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[37]

$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H|X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{7.30}$$

Definición 146. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_sf)(x),\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 21. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_sf(X_t)\ t,s\geq 0,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{7.32}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

7.8 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X,\mathcal{G},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I\subset\mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r): r\in I, r\leq t, f\in\mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[38], $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 147. *Una familia* $(P_{s,t})$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *indexada por pares* $s,t\in I$*, con* $s\leq t$ *es una función de transición en* $(E,\mathcal{E})$*, si para todo* $r\leq s<t$ *en* I *y todo* $x\in E$*,* $B\in\mathcal{E}$

$$P_{r,t}(x,B) = \int_E P_{r,s}(x,dy)\,P_{s,t}(y,B)\,^{39}. \tag{7.33}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E,\mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[40] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t)|\mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t)\ s\leq t\in I,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{7.35}$$

Definición 148. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_sf)(x),\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}^{41}.$$

Nota 22. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_sf(X_t)\ t,s\geq 0,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{7.36}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

[38] qué se quiere decir con el término: más general?

[39] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[40]

$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H|X_t\}\ H\in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{7.34}$$

[41] Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

7.9 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[42], $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 149. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{43}. \tag{7.37}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[44] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{7.39}$$

Definición 150. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}^{45}.$$

Nota 23. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{7.40}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

7.10 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 151. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{46}. \tag{7.41}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov [47] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{7.43}$$

[42] qué se quiere decir con el término: más general?

[43] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[44]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{7.38}$$

[45] Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

[46] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[47]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{7.42}$$

Definición 152. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_sf)(x),\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 24. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_sf(X_t)\ t,s\geq 0,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{7.44}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

7.11 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X,\mathcal{G},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I\subset\mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r): r\in I, rleqt, f\in\mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 153. *Una familia* $(P_{s,t})$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *indexada por pares* $s,t\in I$, *con* $s\leq t$ *es una función de transición en* $(E,\mathcal{E})$, *si para todo* $r\leq s<t$ *en* I *y todo* $x\in E$, $B\in\mathcal{E}$

$$P_{r,t}(x,B) = \int_E P_{r,s}(x,dy)\,P_{s,t}(y,B)\,^{48}. \tag{7.45}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E,\mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[49] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t)|\mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t)\ s\leq t\in I,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{7.47}$$

Definición 154. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_sf)(x),\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 25. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_sf(X_t)\ t,s\geq 0,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{7.48}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

[48] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[49]
$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H|X_t\}\ H\in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{7.46}$$

8 Primer Condición de Regularidad

Definición 155. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 156 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 157. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E, \mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{8.1}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 158 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 159. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

8.1 Primer Condición de Regularidad

Definición 160. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 161 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* $/P_t)$ *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 162. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E, \mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$*,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{8.2}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$*.*

Definición 163 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \to f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 164. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de* (P_t)*.*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a* $\mathcal{G}_t$*.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 24 (Lema 4.2, Dai[94])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$*, casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \to P_k' t, \text{ u.o.c.,} \tag{8.3}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{8.4}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{8.5}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$*.*

Lema 25 (Lema 4.3, Dai[94])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right) =_k^x\left(0\right) + E_k^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{8.6}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x\left(t\right) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x\left(t\right)\right) dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{8.7}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right) = \left(T_1^x\left(t\right), \ldots, T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$
$$I^x\left(t\right) = \left(I_1^x\left(t\right), \ldots, I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x\left(t\right) = Q^x\left(0\right) + E^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S^x\left(T^x\left(t\right)\right), \tag{8.8}$$

$$Q^x\left(t\right) \geq 0, \tag{8.9}$$

$$T^x\left(0\right) = 0, \text{ y } \overline{T}^x\left(t\right) \text{ es no decreciente}, \tag{8.10}$$

$$I^x\left(t\right) = et - CT^x\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{8.11}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x\left(t\right)\right) dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{8.12}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^{x}(\cdot), \overline{T}^{x}(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{8.13}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 103 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales* ω *y cualquier sucesión de estados iniciales* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$*, con* $|x_n| \to \infty$*, existe una subsucesión* $\{x_{n_j}\}$ *con* $|x_{n_j}| \to \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{8.14}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \quad u.o.c. \tag{8.15}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{8.16}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{8.17}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{8.18}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{8.19}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{8.20}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{8.21}$$

Definición 165 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en 20.325 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.326)-(20.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Teorema 104 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{8.22}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 166 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t)=0$, *con* $t\geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)|=1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 15 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0>0$ *tal que* $\overline{Q}(t)=0$ *para cualquier* $t\geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}|=|\overline{Q}(0)|+|\overline{A}(0)|+|\overline{B}(0)|\leq 1$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 32. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^0\right)$ *un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0),\frac{1}{|x|}A_k^x(0),\frac{1}{|x|}B_k^x(0),\frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_k(0),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0)=\overline{T}^0(0)=0$.

ii) Para todo $t\geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t)+\overline{T}_k^0(t)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_k(t)=\overline{Q}_k(0)+\alpha_k t-\mu_k\overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t)=\beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_k^0\overline{T}_k^0(t)=\mu_j^0\overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_k\dot{\overline{T}}_k(t)=l_k\mu_k^0\dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t)>0$.

Lema 26 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 105 (Teorema 5.2 [91]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 106 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α,μ,T,U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t)=0$, *para toda* $t\geq t_0$.

Lema 27 (Lema 5.2 [106]). *Sea* $\{\xi(k):k\in\mathbb{Z}\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0,\infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t)=max\{n\geq 1:\xi(1)+\cdots+\xi(n-1)\leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{8.23}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 107 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r} \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 33 (Proposicin 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{8.24}$$

Proposición 34 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{8.25}$$

Proposición 35 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{8.26}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 108 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{8.27}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{8.28}$$

Teorema 109 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 110 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 36 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{8.29}$$

Lema 16 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{8.30}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 111 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{8.31}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 112 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{8.32}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 113 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{8.33}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 114 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{8.34}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *con* $\pi\left(|f|\right) < \infty$*, la ecuación anterior se cumple.*

Teorema 115 (Teorema 2.2, Down [99])**.** *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_0, c_0 \geq 0$*,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\, T \geq 0, \tag{8.35}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$*, con* $|Q\left(0\right)| = 1$*. Entonces para cualquier* $0 < q \leq 1$*, existe* $B < 0$ *tal que para cualquier* $|x| \geq B$*,*

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\} \geq q. \tag{8.36}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\left\{\xi_k\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)\right]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$,
- también se define $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.

8.2 Primer Condición de Regularidad

Definición 167. *Un proceso estocástico* $\left(X_t\right)_{t\in I}$ *definido en* $\left(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}\right)$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \rightarrow X_t\left(w\right)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E*.*

Definición 168 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* $/P_t)$ *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ *y* $P_t\left(b\mathcal{E}^*\right) \subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\left(X_t\right)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $\left(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P}\right)$ *tal que* $X = \left(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P}\right)$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* $\left(P_t\right)$ *y distribución inicial* μ*.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo $\left(P_t\right)$. $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 169. *Sea* E *espacio de Radón,* $\left(P_t\right)$ *semigrupo de Markov en* $\left(E, \mathcal{E}\right)$*. La colección* $\mathbf{X} = \left(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x\right)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* $\left(P_t\right)$ *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $\left(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t\right)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $\left(\mathcal{G}_t\right)$*;*

ii) $\left(\theta_t\right)_{t\geq0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$*,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{8.37}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\} = 1$*, y el proceso* $\left(X_t\right)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición* $\left(P_t\right)$ *relativo a* $\left(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x\right)$*.*

Definición 170 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^{\alpha}$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 171. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de (P_t).*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 28 (Lema 4.2, Dai[94])**.** *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{8.38}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{8.39}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{8.40}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 29 (Lema 4.3, Dai[94])**.** *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l (S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{8.41}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{8.42}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))^{'},$$
$$I^x(t) = (I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t))^{'}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t)))^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l (S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \tag{8.43}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{8.44}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{8.45}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{8.46}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{8.47}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{8.48}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 116 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales* ω *y cualquier sucesión de estados iniciales* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$*, con* $|x_n| \to \infty$*, existe una subsucesión* $\left\{x_{n_j}\right\}$ *con* $|x_{n_j}| \to \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{8.49}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{8.50}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{8.51}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{8.52}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{8.53}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{8.54}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{8.55}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{8.56}$$

Definición 172 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en 20.325 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.326)-(20.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Teorema 117 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{8.57}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 173 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 17 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 37. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 30 (Lema 3.1 [91])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 118 (Teorema 5.2 [91])**.** *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 119 (Teorema 5.1 [91])**.** *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$, *para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 31 (Lema 5.2 [106])**.** *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r} \tag{8.58}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 120 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106])**.** *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces* *a)* $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$*, cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 38 (Proposicin 5.1 [95])**.** *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{8.59}$$

Proposición 39 (Proposición 5.3 [95])**.** *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$*,* $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$*.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p)\, dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{8.60}$$

Proposición 40 (Proposición 5.4 [95])**.** *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$*, y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt\right]$$

para $x \in X$*. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{8.61}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$*.*

Teorema 121 (Teorema 5.5 [95])**.** *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{8.62}$$

para $t \geq 0$*,* $x \in X$*. En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \tag{8.63}$$

Teorema 122 (Teorema 6.2[95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$*. En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x[|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 123 (Teorema 6.3[95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f(x) = f_1(x)$*, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f = 0},$$

para $x \in X$*. En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 41 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{8.64}$$

Lema 18 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\left\{\zeta\left(k\right):k\in F\right\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $\left(0,\infty\right)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{8.65}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 124 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{8.66}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 125 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{8.67}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 126 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{8.68}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 127 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_{X}\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{8.69}$$

$\mathbb{P}$*-c.s.*

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 128 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0,c_0\geq0$,*

$$|Q\left(T\right)|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ T\geq0, \tag{8.70}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{8.71}$$

8.3 Primer Condición de Regularidad

Definición 174. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 175 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* $/P_t)$ *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E, *existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, *y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 176. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E, \mathcal{E})$. *La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X, *es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{8.72}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, *y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 177 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$, *el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 178. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 32 (Lema 4.2, Dai[94])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'} t, \text{ u.o.c.,} \tag{8.73}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{8.74}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{8.75}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 33 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{8.76}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j\in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{8.77}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$

$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = \left(S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t))\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^{x}(t) = Q^{x}(0) + E^{x}(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}(t)\right)\right) - S^{x}\left(T^{x}(t)\right), \tag{8.78}$$

$$Q^{x}(t) \geq 0, \tag{8.79}$$

$$T^{x}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^{x}(t) \text{ es no decreciente}, \tag{8.80}$$

$$I^{x}(t) = et - CT^{x}(t) \text{ es no decreciente} \tag{8.81}$$

$$\int_{0}^{\infty} \left(CQ^{x}(t)\right) dI_{i}^{x}(t) = 0, \tag{8.82}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^{x}(\cdot), \overline{T}^{x}(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{8.83}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{array} \right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 129 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{8.84}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{8.85}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I - P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{8.86}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{8.87}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{8.88}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{8.89}$$

$$\int_{0}^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{8.90}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{8.91}$$

Definición 179 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en 20.325 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.326)-(20.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 130 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t)=\frac{1}{|x|}Q^{x}(|x|t) \tag{8.92}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 180 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95])**.** *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t)=0$, con $t\geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)|=1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 19 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95])**.** *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0>0$ tal que $\overline{Q}(t)=0$ para cualquier $t\geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}(0)|+|\overline{A}(0)|+|\overline{B}(0)|\leq 1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 42. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}(0),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}(0),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}(0),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}(0),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^{0}(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0)=\overline{T}^{0}(0)=0$.

ii) Para todo $t\geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}(t)+\overline{T}_{k}^{0}(t)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}(t)=\overline{Q}_{k}(0)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}(t)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}(t)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}(t)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}(t)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}(t)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}(t)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}(t)$$

para $\overline{Q}_{k}(t)>0$.

Lema 34 (Lema 3.1 [91])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 131 (Teorema 5.2 [91]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 132 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 35 (Lema 5.2 [106]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{8.93}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 133 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \to \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \to \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \to \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 43 (Proposicin 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{8.94}$$

Proposición 44 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X(t)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{8.95}$$

Proposición 45 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{8.96}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 134 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{8.97}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq k_p \tag{8.98}$$

Teorema 135 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \to 0$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 136 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\to\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 46 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{8.99}$$

Lema 20 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{8.100}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 137 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{8.101}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 138 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p}, \; t \to \infty, x \in X. \tag{8.102}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 139 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\to\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{8.103}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\to\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 140 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{8.104}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 141 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\; T \geq 0, \tag{8.105}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{8.106}$$

8.4 Primer Condición de Regularidad

Definición 181. *Un proceso estocástico $\left(X_t\right)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t\left(w\right)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 182 (HD1). *Un semigrupo de Markov $\left(P_t\right)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t\left(b\mathcal{E}^*\right) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $\left(X_t\right)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $\left(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P}\right)$ tal que $X = \left(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P}\right)$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición $\left(P_t\right)$ y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo $\left(P_t\right)$. $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 183. *Sea E espacio de Radón, $\left(P_t\right)$ semigrupo de Markov en $\left(E, \mathcal{E}\right)$. La colección $\mathbf{X} = \left(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x\right)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición $\left(P_t\right)$ en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $\left(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t\right)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $\left(\mathcal{G}_t\right)$;

ii) $\left(\theta_t\right)_{t\geq 0}$ es una colección de operadores shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{8.107}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\} = 1$, y el proceso $\left(X_t\right)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición $\left(P_t\right)$ relativo a $\left(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x\right)$.

Definición 184 (HD2). *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f\left(X_t\right)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 185. *Un sistema $\mathbf{X} = \left(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x\right)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición $\left(P_t\right)$ provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ es una realización continua por la derecha, 656, de $\left(P_t\right)$.

ii) $\mathbf{X}$ satisface la condicion HD2, 657, relativa a $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ es aumentado y continuo por la derecha.

8.5 Primer Condición de Regularidad

Definición 186. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t\rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 187 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* $/P_t)$ *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E, *existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$, *y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *tal que* $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0=x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 188. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E,\mathcal{E})$. *La colección* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$;

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X, *es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t,s\geq 0$,

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s} \text{ y } X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{8.108}$$

iii) Para cualquier $x\in E,\mathbf{P}^x\{X_0=x\}=1$, *y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.

Definición 189 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha>0$ *y cualquier* $f\in S^\alpha$, *el proceso* $t\rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 190. *Un sistema* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 36 (Lema 4.2, Dai[94])**.** *Sea* $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ *con* $|x_n|\rightarrow\infty$, *conforme* $n\rightarrow\infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0)=\overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n\rightarrow\infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t])\rightarrow P_k^{'}t, \text{ u.o.c.,} \tag{8.109}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{8.110}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{8.111}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k=1/m_k=1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 37 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+}, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_k\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_k\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S^{x}_{l}\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T^{x}_{l}\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S^{x}_{l}\left(T^{x}_{l}\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi^{x}_{l}\left(S^{x}_{l}\left(T^{x}_{l}\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q^{x}_{k}\left(t\right)=^{x}_{k}\left(0\right)+E^{x}_{k}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^{l}_{k}\left(S^{x}_{l}\left(T^{x}_{l}\left(t\right)\right)\right)-S^{x}_{k}\left(T^{x}_{k}\left(t\right)\right) \tag{8.112}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I^{x}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_{i}}T^{x}_{k}\left(t\right).$$

Entonces $I^{x}_{i}\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_{0}^{\infty}\left(\sum_{k\in C_{i}}Q^{x}_{k}\left(t\right)\right)dI^{x}_{i}\left(t\right)=0, \tag{8.113}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^{x}\left(t\right)=\left(T^{x}_{1}\left(t\right),\ldots,T^{x}_{K}\left(t\right)\right)^{'},$$
$$I^{x}\left(t\right)=\left(I^{x}_{1}\left(t\right),\ldots,I^{x}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^{x}\left(T^{x}\left(t\right)\right)=\left(S^{x}_{1}\left(T^{x}_{1}\left(t\right)\right),\ldots,S^{x}_{K}\left(T^{x}_{K}\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^{x}(t)=Q^{x}(0)+E^{x}(t)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}(t)\right)\right)-S^{x}\left(T^{x}(t)\right), \tag{8.114}$$

$$Q^{x}(t)\geq 0, \tag{8.115}$$

$$T^{x}(0)=0,\ \text{y}\ \overline{T}^{x}(t)\ \text{ es no decreciente}, \tag{8.116}$$

$$I^{x}(t)=et-CT^{x}(t)\ \text{ es no decreciente} \tag{8.117}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(CQ^{x}(t)\right)dI_{i}^{x}(t)=0, \tag{8.118}$$

$$\text{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}^{x}(\cdot),\overline{T}^{x}(\cdot)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{8.119}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{ll}1, & S(k)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 142 (Teorema 4.1, Dai [94])**.** *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0),U^{x_{n_j}}(0),V^{x_{n_j}}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(0),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{8.120}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)\ \textit{ u.o.c.} \tag{8.121}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t)=Q(0)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-(I-P)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}(t)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{8.122}$$

$$\overline{Q}(t)\geq 0, \tag{8.123}$$

$$\overline{T}(t)\ \textit{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{8.124}$$

$$\overline{I}(t)=et-C\overline{T}(t)\ \textit{ es no decreciente}, \tag{8.125}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right)d\overline{I}(t)=0, \tag{8.126}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}(\cdot)\right)\textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{8.127}$$

Definición 191 (Definición 4.1, , Dai [94])**.** *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}(\cdot)\right)$ en 20.325 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.326)-(20.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta>0$ que depende de μ,α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot+\delta)\equiv 0$.*

Teorema 143 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{8.128}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 192 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_{0} tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$, con $t\geq t_{0}$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 21 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_{0}>0$ tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$ para cualquier $t\geq t_{0}$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 47. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ y $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 38 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 144 (Teorema 5.2 [91]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 145 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 39 (Lema 5.2 [106]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{8.129}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 146 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 48 (Proposicin 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{8.130}$$

Proposición 49 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{8.131}$$

Proposición 50 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{8.132}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 147 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{8.133}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{8.134}$$

Teorema 148 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right]<\infty$$

Teorema 149 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 51 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{8.135}$$

Lema 22 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta\left(k\right):k\in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq 1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{8.136}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t\geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 150 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{8.137}$$

para $t>0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 151 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_p}, \; t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{8.138}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 152 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x)=f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_f=0. \tag{8.139}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 153 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds=\pi(f):=\int f(x)\,\pi(dx) \tag{8.140}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 154 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0,c_0\geq0$,*

$$|Q(T)|\geq\epsilon_0T-c_0,\;T\geq0, \tag{8.141}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{8.142}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k=1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_k=1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$,
- también se define $\rho_k:=\lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho<1$ para cuestiones de estabilidad.

8.6 Primer Condición de Regularidad

Definición 193. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t\rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 194 (HD1). *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 195. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{8.143}$$

iii) Para cualquier $x \in E$,$\mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 196 (HD2). *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \to f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 197. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de (P_t).*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

8.7 Primer Condición de Regularidad

Definición 198. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \to X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 199 (HD1). *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 200. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{8.144}$$

iii) *Para cualquier* $x \in E, \mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 201 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \to f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 202. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 40 (Lema 4.2, Dai[94])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$*, casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{8.145}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{8.146}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{8.147}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 41 (Lema 4.3, Dai[94])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) *Conforme* $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) *Para cada* $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l (S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{8.148}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{8.149}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))^{'},$$
$$I^x(t) = (I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t))^{'}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t)))^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l (S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \tag{8.150}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{8.151}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{8.152}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{8.153}$$

$$\int_0^{\infty} (CQ^x(t)) \, dI_i^x(t) = 0, \tag{8.154}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{8.155}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 155 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{8.156}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \ \ u.o.c. \tag{8.157}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{8.158}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{8.159}$$

$$\overline{T}(t) \ \ \text{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{8.160}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \ \ \text{es no decreciente}, \tag{8.161}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{8.162}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{8.163}$$

Definición 203 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en 20.325 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.326)-(20.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 156 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{8.164}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 204 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 23 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 52. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 42 (Lema 3.1 [91])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 157 (Teorema 5.2 [91])**.** *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 158 (Teorema 5.1 [91])**.** *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$, *para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 43 (Lema 5.2 [106])**.** *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r}\tag{8.165}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 159 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106])**.** *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 53 (Proposicin 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{8.166}$$

Proposición 54 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p)\, dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{8.167}$$

Proposición 55 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{8.168}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 160 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{8.169}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \tag{8.170}$$

Teorema 161 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 162 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]| = 0}.$$

Proposición 56 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{8.171}$$

Lema 24 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{8.172}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 163 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{8.173}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 164 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x \in X. \tag{8.174}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 165 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{8.175}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 166 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{8.176}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 167 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{8.177}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{8.178}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$,
- también se define $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.

8.8 Primer Condición de Regularidad

Definición 205. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 206 (HD1). *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 207. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{8.179}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 208 (HD2). *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 209. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de (P_t).*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Definición 210. *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{F}$ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* X*, la pareja* $(X, \mathcal{F})$ *es llamado espacio medible. Un subconjunto* A *de* X *es llamado medible, o medible con respecto a* $\mathcal{F}$*, si* $A \in \mathcal{F}$.

Definición 211. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *espacio de medida. Se dice que la medida* μ *es* σ*-finita si se puede escribir* $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ *con* $X_n \in \mathcal{F}$ *y* $\mu(X_n) < \infty$.

Definición 212. *Sea* X *el conjunto de los úmeros reales* $\mathbb{R}$*. El álgebra de Borel es la* σ*-álgebra* B *generada por los intervalos abiertos* $(a, b) \in \mathbb{R}$*. Cualquier conjunto en* B *es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 213. *Una función* $f : X \rightarrow \mathbb{R}$*, es medible si para cualquier número real* α *el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X*. Equivalentemente, se dice que* f *es medible si*

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 214. *Sean* $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$*,* $i = 1, 2, \ldots,$ *espacios medibles y* $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ *el conjunto de todas las sucesiones* $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ *tales que* $\omega_i \in \Omega_i$*,* $i = 1, 2, \ldots,$*. Si* $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$*, definimos* $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$*. Al conjunto* B_n *se le llama* cilindro *con base* B^n*, el cilindro es llamado medible si* $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.

Definición 215. *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de* σ*-álgebras* $\mathcal{F}_t$*, para* $t \geq 0$*, si para* $s < t$ *implica que* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$*, y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}_t$*-medible para cada* t*. Si no se especifica* $\mathcal{F}_t$ *entonces se toma* $\mathcal{F}_t$ *como* $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$*, la más pequeña* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω *que hace que cada* $X(s)$*, con* $s \leq t$ *sea Borel medible.*

Definición 216. *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ *familia creciente de sub* σ*-álgebras. es decir,* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *para* $s \leq t$*. Un tiempo de paro para* $\mathcal{F}(t)$ *es una función* $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ *tal que* $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ *para cada* $t \geq 0$*. Un tiempo de paro para el proceso estocástico* $X(t), t \geq 0$ *es un tiempo de paro para las* σ*-álgebras* $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.

Definición 217. *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, con* (S, χ) *espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a* $\{\mathcal{F}(t)\}$*, es decir, si para cualquier* $s, t \in I$*,* I *conjunto de índices,* $s < t$*, se tiene que* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}(t)$*-medible,*

Definición 218. *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a* $\mathcal{F}(t)$ *o que* $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ *es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto* $B \in \chi$*, y* $s, t \in I$*,* $s < t$ *se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{8.180}$$

Nota 26. *Si se dice que* $\{X(t)\}$ *es un Proceso de Markov sin mencionar* $\mathcal{F}(t)$*, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (20.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{8.181}$$

Teorema 168. *Sea* $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ *Proceso de Markov con espacio de estados* (S_0, χ_0) *generado por una distribuición inicial* P_o *y probabilidad de transición* p_{mn}*, para* $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$*, que por notación se escribirá como* $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$*. Sea* S *tiempo de paro relativo a la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_n$*. Sea* T *función medible,* $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$*. Supóngase que* $T \geq S$*, entonces* T *es tiempo de paro. Si* $B \in \chi_0$*, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{8.182}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{8.183}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{8.184}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{8.185}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf \{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{8.186}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[50]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

[50] Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

Supuestos 10 (Supuesto 3.1, Davis [98]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{8.187}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 219. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 220. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 221. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 222. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{8.188}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 169. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

8.9 Primer Condición de Regularidad

Definición 223. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 224 (HD1). *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 225. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) *$(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) *$(\theta_t)_{t \geq 0}$ es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{8.189}$$

iii) *Para cualquier $x \in E$,$\mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t \in I}$ tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.*

Definición 226 (HD2). *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 227. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Definición 228. *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{F}$ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* X*, la pareja* $(X, \mathcal{F})$ *es llamado espacio medible. Un subconjunto* A *de* X *es llamado medible, o medible con respecto a* $\mathcal{F}$*, si* $A \in \mathcal{F}$.

Definición 229. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *espacio de medida. Se dice que la medida* μ *es* σ*-finita si se puede escribir* $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ *con* $X_n \in \mathcal{F}$ *y* $\mu(X_n) < \infty$.

Definición 230. *Sea* X *el conjunto de los úmeros reales* $\mathbb{R}$*. El álgebra de Borel es la* σ*-álgebra* B *generada por los intervalos abiertos* $(a, b) \in \mathbb{R}$*. Cualquier conjunto en* B *es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 231. *Una función* $f : X \rightarrow \mathbb{R}$*, es medible si para cualquier número real* α *el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X*. Equivalentemente, se dice que* f *es medible si*

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 232. *Sean* $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$*,* $i = 1, 2, \ldots,$ *espacios medibles y* $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ *el conjunto de todas las sucesiones* $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ *tales que* $\omega_i \in \Omega_i$*,* $i = 1, 2, \ldots,$*. Si* $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$*, definimos* $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$*. Al conjunto* B_n *se le llama* cilindro *con base* B^n*, el cilindro es llamado medible si* $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.

Definición 233. *[TSP, Ash [?]] Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de* σ*-álgebras* $\mathcal{F}_t$*, para* $t \geq 0$*, si para* $s < t$ *implica que* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$*, y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}_t$*-medible para cada* t*. Si no se especifica* $\mathcal{F}_t$ *entonces se toma* $\mathcal{F}_t$ *como* $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$*, la más pequeña* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω *que hace que cada* $X(s)$*, con* $s \leq t$ *sea Borel medible.*

Definición 234. *[TSP, Ash [?]] Sea* $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ *familia creciente de sub* σ*-álgebras. es decir,* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *para* $s \leq t$*. Un tiempo de paro para* $\mathcal{F}(t)$ *es una función* $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ *tal que* $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ *para cada* $t \geq 0$*. Un tiempo de paro para el proceso estocástico* $X(t), t \geq 0$ *es un tiempo de paro para las* σ*-álgebras* $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.

Definición 235. *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, con* (S, χ) *espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a* $\{\mathcal{F}(t)\}$*, es decir, si para cualquier* $s, t \in I$*,* I *conjunto de índices,* $s < t$*, se tiene que* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}(t)$*-medible,*

Definición 236. *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a* $\mathcal{F}(t)$ *o que* $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ *es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto* $B \in \chi$*, y* $s, t \in I$*,* $s < t$ *se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{8.190}$$

Nota 27. *Si se dice que* $\{X(t)\}$ *es un Proceso de Markov sin mencionar* $\mathcal{F}(t)$*, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (20.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{8.191}$$

Teorema 170. *Sea* $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ *Proceso de Markov con espacio de estados* (S_0, χ_0) *generado por una distribuición inicial* P_o *y probabilidad de transición* p_{mn}*, para* $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$*, que por notación se escribirá como* $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$*. Sea* S *tiempo de paro relativo a la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_n$*. Sea* T *función medible,* $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$*. Supóngase que* $T \geq S$*, entonces* T *es tiempo de paro. Si* $B \in \chi_0$*, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{8.192}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v\in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v\in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v\in K} \partial^* M_v. \tag{8.193}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{8.194}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{8.195}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \left\{ \begin{array}{ll} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{array} \right. \tag{8.196}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[51]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \left\{ \begin{array}{ll} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{array} \right.$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

[51] Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

Supuestos 11 (Supuesto 3.1, Davis [98]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t\geq t)}$ el número de saltos en $[0,t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{8.197}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 237. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 238. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 239. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 240. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{8.198}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 171. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

8.10 Primer Condición de Regularidad

Definición 241. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 242 (HD1). *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 243. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{8.199}$$

iii) Para cualquier $x \in E$,$\mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 244 (HD2). *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 245. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

8.11 Primer Condición de Regularidad

Definición 246. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \to X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 247 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* $/P_t)$ *en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en E, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, *y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso E-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 248. *Sea E espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E, \mathcal{E})$. *La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso E-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$;

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{8.200}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, *y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 249 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$, *el proceso* $t \to f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 250. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 44 (Lema 4.2, Dai[94])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k\left([|x_n|t]\right)\rightarrow P_k^{'}t,\ u.o.c., \tag{8.201}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow \alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^{+},\ u.o.c., \tag{8.202}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow \mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^{+},\ u.o.c., \tag{8.203}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$.

Lema 45 (Lema 4.3, Dai[94])**.** *Sea* $\{x_n\}\subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n|\rightarrow\infty$*, conforme* $n\rightarrow\infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}_k.$$

a) Conforme $n\rightarrow\infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t\geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right)=_k^x\left(0\right)+E_k^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{8.204}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_i^x\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{8.205}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{8.206}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{8.207}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \tag{8.208}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{8.209}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{8.210}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{8.211}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 172 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{8.212}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \ \textit{u.o.c.} \tag{8.213}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I - P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{8.214}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{8.215}$$

$$\overline{T}(t) \textit{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{8.216}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \textit{ es no decreciente,} \tag{8.217}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{8.218}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{8.219}$$

Definición 251 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en 20.325 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.326)-(20.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta>0$ *que depende de* μ,α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv 0$.

Teorema 173 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{8.220}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 252 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$*, con* $t\geq t_{0}$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 25 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_{0}>0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$ *para cualquier* $t\geq t_{0}$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq 1$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 57. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 46 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 174 (Teorema 5.2 [91]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 175 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$, *para toda* $t \geq t_0$.

Lema 47 (Lema 5.2 [106]). *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{8.221}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) *Para cualquier* $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) *Las variables aleatorias* $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 176 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 58 (Proposicin 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{8.222}$$

Proposición 59 (Proposición 5.3 [95]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{8.223}$$

Proposición 60 (Proposición 5.4 [95]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{8.224}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 177 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{8.225}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{8.226}$$

Teorema 178 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 179 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 61 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{8.227}$$

Lema 26 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta\left(k\right) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E\left(t\right) = max\left(n \geq 1 : \zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right) \leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{8.228}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 180 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{8.229}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 181 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{8.230}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[\left|Q\left(t\right)\right|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[\left|Q\left(0\right)\right|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 182 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{8.231}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]\right|=0.$$

Teorema 183 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_{X}\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{8.232}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 184 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$\left|Q\left(T\right)\right|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ T\geq0, \tag{8.233}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $\left|Q\left(0\right)\right|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{8.234}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$,
- también se define $\rho_{k}:=\lambda_{k}/\mu_{k}$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho<1$ para cuestiones de estabilidad.

9 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 48 (Lema 4.2, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{9.1}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{9.2}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{9.3}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 49 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x(t)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_k^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{9.4}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_i^x(t)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x(t)\right)dI_i^x(t)=0, \tag{9.5}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x(t)=\left(T_1^x(t),\ldots,T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t)=\left(I_1^x(t),\ldots,I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right),\ldots,S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t)=Q^x(0)+E^x(t)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right)-S^x\left(T^x(t)\right), \tag{9.6}$$

$$Q^x(t)\geq 0, \tag{9.7}$$

$$T^x(0)=0,\ \text{y } \overline{T}^x(t)\ \text{ es no decreciente}, \tag{9.8}$$

$$I^x(t)=et-CT^x(t)\ \text{ es no decreciente} \tag{9.9}$$

$$\int_0^{\infty}\left(CQ^x(t)\right)dI_i^x(t)=0, \tag{9.10}$$

$$\text{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}^x(\cdot),\overline{T}^x(\cdot)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{9.11}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\begin{cases}1, & S(k)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 185 (Teorema 4.1, Dai [94])**.** *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0),U^{x_{n_j}}(0),V^{x_{n_j}}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(0),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{9.12}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)\ \ u.o.c. \tag{9.13}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t)=Q(0)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-(I-P)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}(t)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{9.14}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{9.15}$$

$$\overline{T}(t) \ \textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{9.16}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \ \textit{es no decreciente}, \tag{9.17}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{9.18}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{9.19}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 62. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K} \left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Teorema 186 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106])**.** *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 63 (Proposición 5.3 [95])**.** *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{9.20}$$

Proposición 64 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{9.21}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

9.1 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 50 (Lema 4.2, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'}t, \text{ u.o.c.}, \tag{9.22}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{9.23}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{9.24}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 51 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

y

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x(t)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_k^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{9.25}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{9.26}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))^{'},$$
$$I^x(t) = (I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t))^{'}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t)))^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \tag{9.27}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{9.28}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{9.29}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{9.30}$$

$$\int_0^{\infty} (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{9.31}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{9.32}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 187 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{9.33}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \ \ u.o.c. \tag{9.34}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{9.35}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{9.36}$$

$$\overline{T}(t) \ \ \textit{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{9.37}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \ \ \textit{es no decreciente,} \tag{9.38}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{9.39}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{9.40}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 65. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Teorema 188 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 66 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p)\, dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{9.41}$$

Proposición 67 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{9.42}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

9.2 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 52 (Lema 4.2, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'}t, \text{ u.o.c.}, \tag{9.43}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k\left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{9.44}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k\left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{9.45}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 53 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^+,\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x\left(t\right)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_k^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right)=Q_k^x\left(0\right)+E_k^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{9.46}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_i^x\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{9.47}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right)=\left(T_1^x\left(t\right),\ldots,T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$

$$I^x\left(t\right)=\left(I_1^x\left(t\right),\ldots,I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right),\ldots,S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x\left(t\right)=Q^x\left(0\right)+E^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S^x\left(T^x\left(t\right)\right), \tag{9.48}$$

$$Q^x\left(t\right)\geq 0, \tag{9.49}$$

$$T^{x}(0)=0,\ \text{y}\ \overline{T}^{x}(t)\ \text{ es no decreciente,} \tag{9.50}$$

$$I^{x}(t)=et-CT^{x}(t)\ \text{ es no decreciente} \tag{9.51}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(CQ^{x}(t)\right)dI_{i}^{x}(t)=0, \tag{9.52}$$

$$\text{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}^{x}(\cdot),\overline{T}^{x}(\cdot)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{9.53}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{ll}1, & S(k)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 189 (Teorema 4.1, Dai [94])**.** *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0),U^{x_{n_j}}(0),V^{x_{n_j}}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(0),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{9.54}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)\ \ u.o.c. \tag{9.55}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t)=Q(0)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-(I-P)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}(t)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{9.56}$$

$$\overline{Q}(t)\geq 0, \tag{9.57}$$

$$\overline{T}(t)\ \ \textit{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{9.58}$$

$$\overline{I}(t)=et-C\overline{T}(t)\ \ \textit{es no decreciente,} \tag{9.59}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right)d\overline{I}(t)=0, \tag{9.60}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}(\cdot)\right)\textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{9.61}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 68. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}(0),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}(0),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}(0),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}(0),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^{0}(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0)=\overline{T}^{0}(0)=0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k\left(t\right)+\overline{T}_k^0\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k\left(t\right)=\overline{Q}_k\left(0\right)+\alpha_k t-\mu_k\overline{T}_k\left(t\right)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k\left(t\right)=\beta_k$$

para $\overline{Q}_k\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_k^0\overline{T}_k^0\left(t\right)=\mu_j^0\overline{T}_j^0\left(t\right)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k\dot{\overline{T}}_k\left(t\right)=l_k\mu_k^0\dot{\overline{T}}_k^0\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_k\left(t\right)>0$.

Teorema 190 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106])**.** *Sea $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_1\right]\leq\infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r\rightarrow\frac{1}{\mu^r}$, cuando $t\rightarrow\infty$ para todo $r>0$..

Proposición 69 (Proposición 5.3 [95])**.** *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1}<\infty$, $\delta>0$ y un conjunto compacto $C\subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1+|X\left(t\right)|^p\right)dt\right]\leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right) \tag{9.62}$$

Proposición 70 (Proposición 5.4 [95])**.** *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta>0$, y un conjunto cerrado $C\subset X$*

$$V\left(x\right):=\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x\in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k<\infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right]+\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right]\leq\frac{1}{t}V\left(x\right)+k, \tag{9.63}$$

para $x\in X$ y $t>0$.

9.3 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 54 (Lema 4.2, Dai[94])**.** *Sea $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ con $|x_n|\rightarrow\infty$, conforme $n\rightarrow\infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n\rightarrow\infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k\left([|x_n|t]\right)\rightarrow P_k^{'}t,\ u.o.c., \tag{9.64}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow\alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{9.65}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow\mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{9.66}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$.

Lema 55 (Lema 4.3, Dai[94])**.** *Sea* $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ *con* $|x_n|\rightarrow\infty$, *conforme* $n\rightarrow\infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k\left(0\right)=\overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k\left(0\right)=\overline{V}_k.$$

a) Conforme $n\rightarrow\infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^+,\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^+.$$

b) Para cada $t\geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x\left(t\right)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_k^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right)=Q_k^x\left(0\right)+E_k^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{9.67}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_i^x\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{9.68}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^{x}(t)=\left(T_{1}^{x}(t),\ldots,T_{K}^{x}(t)\right)^{'},$$
$$I^{x}(t)=\left(I_{1}^{x}(t),\ldots,I_{K}^{x}(t)\right)^{'}$$

y

$$S^{x}\left(T^{x}(t)\right)=\left(S_{1}^{x}\left(T_{1}^{x}(t)\right),\ldots,S_{K}^{x}\left(T_{K}^{x}(t)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^{x}(t)=Q^{x}(0)+E^{x}(t)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}(t)\right)\right)-S^{x}\left(T^{x}(t)\right), \tag{9.69}$$

$$Q^{x}(t)\geq 0, \tag{9.70}$$

$$T^{x}(0)=0,\ \text{y}\ \overline{T}^{x}(t)\ \text{ es no decreciente,} \tag{9.71}$$

$$I^{x}(t)=et-CT^{x}(t)\ \text{ es no decreciente} \tag{9.72}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(CQ^{x}(t)\right)dI_{i}^{x}(t)=0, \tag{9.73}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^{x}(\cdot),\overline{T}^{x}(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{9.74}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\begin{cases}1, & S(k)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 191 (Teorema 4.1, Dai [94])**.** *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0),U^{x_{n_j}}(0),V^{x_{n_j}}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(0),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{9.75}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)\ \textit{u.o.c.} \tag{9.76}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t)=Q(0)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-(I-P)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}(t)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{9.77}$$

$$\overline{Q}(t)\geq 0, \tag{9.78}$$

$$\overline{T}(t)\ \textit{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{9.79}$$

$$\overline{I}(t)=et-C\overline{T}(t)\ \textit{ es no decreciente,} \tag{9.80}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right)d\overline{I}(t)=0, \tag{9.81}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{9.82}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 71. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$*.*

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$*.*

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$*.*

Teorema 192 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106])**.** *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$*. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$*.*

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r}\rightarrow\frac{1}{\mu^{r}}$*, cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$*..*

Proposición 72 (Proposición 5.3 [95])**.** *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1}<\infty$*,* $\delta>0$ *y un conjunto compacto* $C\subset X$*.*

$$\mathbb{E}_{x}\left[\int_{0}^{\tau_{C}(\delta)}\left(1+|X\left(t\right)|^{p}\right)dt\right]\leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right)\tag{9.83}$$

Proposición 73 (Proposición 5.4 [95])**.** *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X*, sea* $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ *y defina para alguna* $\delta>0$*, y un conjunto cerrado* $C\subset X$

$$V\left(x\right):=\mathbb{E}_{x}\left[\int_{0}^{\tau_{C}(\delta)}f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x\in X$*. Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C*, entonces existe* $k<\infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_{x}\left[V\left(x\right)\right]+\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right]\leq\frac{1}{t}V\left(x\right)+k,\tag{9.84}$$

para $x\in X$ *y* $t>0$*.*

9.4 Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X(t) = (Q(t), U(t), V(t)), \tag{9.85}$$

donde $Q(t)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U(t)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V(t)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U(t)$ como $V(t)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = (Q(0), U(0), V(0)) = (q, a, b)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \dots, K$ se define

$$\begin{aligned} E_l^x(t) &= max\{r : U_l(0) + \xi_l(1) + \cdots + \xi_l(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0, \\ S_k^x(t) &= max\{r : V_k(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0. \end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s-éima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \left\{\phi^k(n), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \dots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 56 (Lema 4.2, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{9.86}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{9.87}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{9.88}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 57 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t\geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right)=_k^x\left(0\right)+E_k^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right)\tag{9.89}$$

para $k=1,\dots,K$. Para $i=1,\dots,d$, sea

$$I_i^x\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0,\tag{9.90}$$

para $i=1,\dots,d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right)=\left(T_1^x\left(t\right),\dots,T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$
$$I^x\left(t\right)=\left(I_1^x\left(t\right),\dots,I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right),\dots,S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x\left(t\right)=Q^x\left(0\right)+E^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S^x\left(T^x\left(t\right)\right),\tag{9.91}$$

$$Q^x\left(t\right)\geq 0,\tag{9.92}$$

$$T^x(0)=0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \tag{9.93}$$

$$I^x(t)=et-CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{9.94}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t))\,dI_i^x(t)=0, \tag{9.95}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot),\overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{9.96}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\begin{cases} 1, & S(k)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 193 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\to\infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}|\to\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0),U^{x_{n_j}}(0),V^{x_{n_j}}(0)\right)\to\left(\overline{Q}(0),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{9.97}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\to\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{9.98}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t)=Q(0)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^+-(I-P)'M^{-1}\left(\overline{T}(t)-\overline{V}\right)^+, \tag{9.99}$$

$$\overline{Q}(t)\geq 0, \tag{9.100}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{9.101}$$

$$\overline{I}(t)=et-C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{9.102}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right)d\overline{I}(t)=0, \tag{9.103}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{9.104}$$

Definición 253 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}(\cdot)\right)$ en 20.325 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.326)-(20.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta>0$ que depende de μ,α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot+\delta)\equiv 0$.*

Teorema 194 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{9.105}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 254 (Definición 3.1, Dai y Meyn [95]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)'$ y $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)'$*

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk} \mu_l \overline{T}_l(t) \tag{9.106}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{9.107}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{9.108}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{9.109}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^{x}(t)\, dI_i^{x}(t) = 0 \tag{9.110}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}(\cdot), T^{x}(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{9.111}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 255 (Definición 3.2, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^{+} - \left(I - P'\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^{+} \tag{9.112}$$

Definición 256 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 27 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

10 Estabilidad

Definición 257 (Definición 3.2, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^{+} - \left(I - P'\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^{+} \tag{10.1}$$

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 258 (Definición 3.1, Dai y Meyn [95]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}\left(t\right) \tag{10.2}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{10.3}$$

$$\overline{T}_{k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente,} \tag{10.4}$$

$$\overline{I}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{k\in C_{i}}\overline{T}_{k}\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{10.5}$$

$$\overline{I}_{i}\left(\cdot\right) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0 \tag{10.6}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{10.7}$$

Lema 58 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 195 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α,μ,T,U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$*, para toda* $t\geq t_0$.

Proposición 74 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{10.8}$$

Lema 28 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea* $\left\{\zeta\left(k\right):k\in F\right\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $\left(0,\infty\right)$*, y sea* $E\left(t\right)=max\left(n\geq 1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$*. Si* $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$*, entonces para cualquier entero* $r\geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{10.9}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 196 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{10.10}$$

para $t>0$ *y* $x\in X$*. En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 197 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{10.11}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 198 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} \left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{10.12}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 199 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{10.13}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 200 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{10.14}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{10.15}$$

Definición 259. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 260. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 261. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 262. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 263. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^\infty \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^\infty \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^\infty \mathcal{F}_i$.*

Definición 264. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 265. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 266. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 267. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B|\mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B|X(s)\}. \tag{10.16}$$

Nota 28. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (20.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B|X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B|X(s)\} \tag{10.17}$$

Teorema 201. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty|\mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{10.18}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{10.19}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{10.20}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{10.21}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \to \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{10.22}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[52]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 12 (Supuesto 3.1, Davis [98]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{10.23}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 268. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 269. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 270. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 271. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{10.24}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 202. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

10.1 Estabilidad

Definición 272 (Definición 3.2, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{10.25}$$

[52] Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 273 (Definición 3.1, Dai y Meyn [95]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}\left(t\right) \tag{10.26}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{10.27}$$

$$\overline{T}_{k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente}, \tag{10.28}$$

$$\overline{I}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{k\in C_{i}}\overline{T}_{k}\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{10.29}$$

$$\overline{I}_{i}\left(\cdot\right) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0 \tag{10.30}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{10.31}$$

Lema 59 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 203 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* (α,μ,T,U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$*, para toda* $t\geq t_{0}$.

Proposición 75 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_{0}>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{10.32}$$

Lema 29 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea* $\left\{\zeta\left(k\right):k\in F\right\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $\left(0,\infty\right)$*, y sea* $E\left(t\right)=max\left(n\geq 1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$*. Si* $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$*, entonces para cualquier entero* $r\geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{10.33}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 204 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_{p} *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{10.34}$$

para $t>0$ *y* $x\in X$*. En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 205 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}}, \; t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{10.35}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 206 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} \left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{10.36}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 207 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{10.37}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 208 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{10.38}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{10.39}$$

Definición 274. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 275. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 276. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 277. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 278. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^\infty \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^\infty \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^\infty \mathcal{F}_i$.*

Definición 279. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 280. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 281. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 282. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B|\mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B|X(s)\}. \tag{10.40}$$

Nota 29. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (20.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B|X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B|X(s)\} \tag{10.41}$$

Teorema 209. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty|\mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{10.42}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{10.43}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{10.44}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{10.45}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v,\zeta)\in E$ existe un $\epsilon>0$ tal que la función $s\rightarrow\lambda\left(v,\phi_v\left(s,\zeta\right)\right)\in E$ es integrable para $s\in[0,\epsilon)$. La medida de transición $Q\left(A;\mathbf{x}\right)$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A\in\mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x}\in E\cup\Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E,\mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x}\in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x}=(n,\mathbf{z})\in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F\left(t\right)=\begin{cases} exp\left(-\int_0^t\lambda\left(n,\phi_n\left(s,\mathbf{z}\right)\right)ds\right), & t<t^*\left(\mathbf{x}\right),\\ 0, & t\geq t^*\left(\mathbf{x}\right)\end{cases}\tag{10.46}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}\left[T_1>t\right]=F\left(t\right)$, ahora sea la variable aleatoria (N,Z) con distribuición $Q\left(\cdot;\phi_n\left(T_1,\mathbf{z}\right)\right)$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t\leq T_1$ es[53]

$$\mathbf{x}_t=\left(v_t,\zeta_t\right)=\begin{cases}\left(n,\phi_n\left(t,\mathbf{z}\right)\right), & t<T_1,\\ \left(N,\mathbf{Z}\right), & t=t_1.\end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto T_2-T_1 lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1,T_2,\ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda,T_1>0$ y $T_1-T_2>0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 13 (Supuesto 3.1, Davis [98]). *Sea* $N_t:=\sum_t\mathbb{1}_{(t\geq t)}$ *el número de saltos en* $[0,t]$. *Entonces*

$$\mathbb{E}\left[N_t\right]<\infty \textit{ para toda } t.\tag{10.47}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 283. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 284. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 285. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 286. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda\left(E\right)=sup\left\{\lambda\left(K\right):K \textit{ es compacto en } E\right\}.\tag{10.48}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 210. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

10.2 Estabilidad

Definición 287 (Definición 3.2, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $\left(\overline{A}\left(0\right),\overline{B}\left(0\right)\right)\in\mathbb{R}_+^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=\overline{Q}\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{A}\left(0\right)\right)^+-\left(I-P^{'}\right)M\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{B}\left(0\right)\right)^+\tag{10.49}$$

[53]Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 288 (Definición 3.1, Dai y Meyn [95]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}\left(t\right) \tag{10.50}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{10.51}$$

$$\overline{T}_{k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente}, \tag{10.52}$$

$$\overline{I}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{k\in C_{i}}\overline{T}_{k}\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{10.53}$$

$$\overline{I}_{i}\left(\cdot\right) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0 \tag{10.54}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{10.55}$$

Lema 60 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 211 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* (α,μ,T,U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$*, para toda* $t\geq t_{0}$.

Proposición 76 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_{0}>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{10.56}$$

Lema 30 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea* $\left\{\zeta\left(k\right):k\in F\right\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $\left(0,\infty\right)$*, y sea* $E\left(t\right)=max\left(n\geq 1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$*. Si* $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$*, entonces para cualquier entero* $r\geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{10.57}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 212 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_{p} *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{10.58}$$

para $t>0$ *y* $x\in X$*. En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 213 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}}, \; t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{10.59}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 214 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{10.60}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 215 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{10.61}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 216 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{10.62}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\} \geq q. \tag{10.63}$$

Definición 289. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 290. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 291. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 292. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 293. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_i$.*

Definición 294. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 295. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 296. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 297. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B|\mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B|X(s)\}. \tag{10.64}$$

Nota 30. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (20.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B|X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B|X(s)\} \tag{10.65}$$

Teorema 217. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty|\mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{10.66}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{10.67}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{10.68}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{10.69}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v,\zeta)\in E$ existe un $\epsilon>0$ tal que la función $s\rightarrow\lambda\left(v,\phi_v\left(s,\zeta\right)\right)\in E$ es integrable para $s\in[0,\epsilon)$. La medida de transición $Q\left(A;\mathbf{x}\right)$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A\in\mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x}\in E\cup\Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E,\mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x}\in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x}=(n,\mathbf{z})\in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F\left(t\right)=\left\{\begin{array}{ll} exp\left(-\int_0^t\lambda\left(n,\phi_n\left(s,\mathbf{z}\right)\right)ds\right), & t<t^*\left(\mathbf{x}\right),\\ 0, & t\geq t^*\left(\mathbf{x}\right)\end{array}\right. \tag{10.70}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}\left[T_1>t\right]=F\left(t\right)$, ahora sea la variable aleatoria (N,Z) con distribuición $Q\left(\cdot;\phi_n\left(T_1,\mathbf{z}\right)\right)$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t\leq T_1$ es[54]

$$\mathbf{x}_t=\left(v_t,\zeta_t\right)=\left\{\begin{array}{ll} \left(n,\phi_n\left(t,\mathbf{z}\right)\right), & t<T_1,\\ \left(N,\mathbf{Z}\right), & t=t_1.\end{array}\right.$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto T_2-T_1 lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1,T_2,\ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1>0$ y $T_1-T_2>0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 14 (Supuesto 3.1, Davis [98])**.** *Sea $N_t:=\sum_t\mathbb{1}_{(t\geq t)}$ el número de saltos en $[0,t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[N_t\right]<\infty \textit{ para toda } t. \tag{10.71}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 298. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 299. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 300. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 301. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda\left(E\right)=sup\left\{\lambda\left(K\right):K \textit{ es compacto en } E\right\}. \tag{10.72}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 218. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

10.3 Estabilidad

Definición 302 (Definición 3.2, Dai y Meyn [95])**.** *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $\left(\overline{A}\left(0\right),\overline{B}\left(0\right)\right)\in\mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=\overline{Q}\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{A}\left(0\right)\right)^{+}-\left(I-P^{'}\right)M\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{B}\left(0\right)\right)^{+} \tag{10.73}$$

[54]Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 303 (Definición 3.1, Dai y Meyn [95]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}\left(t\right) \tag{10.74}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{10.75}$$

$$\overline{T}_{k}\left(0\right)=0,\ y\ \overline{T}_{k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente}, \tag{10.76}$$

$$\overline{I}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{k\in C_{i}}\overline{T}_{k}\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{10.77}$$

$$\overline{I}_{i}\left(\cdot\right) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0 \tag{10.78}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{10.79}$$

Lema 61 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 219 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$*, para toda* $t\geq t_{0}$.

Proposición 77 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_{0}>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{10.80}$$

Lema 31 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea* $\left\{\zeta\left(k\right):k\in F\right\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $\left(0,\infty\right)$*, y sea* $E\left(t\right)=max\left(n\geq 1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$*. Si* $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$*, entonces para cualquier entero* $r\geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{10.81}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 220 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_{p} *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{10.82}$$

para $t>0$ *y* $x\in X$*. En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 221 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{10.83}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 222 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} \left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{10.84}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 223 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\, ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{10.85}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 224 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\; T \geq 0, \tag{10.86}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{10.87}$$

Definición 304. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 305. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 306. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 307. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 308. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 309. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 310. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 311. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 312. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B|\mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B|X(s)\}. \tag{10.88}$$

Nota 31. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (20.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B|X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B|X(s)\} \tag{10.89}$$

Teorema 225. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty|\mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{10.90}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{10.91}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{10.92}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{10.93}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v,\zeta)\in E$ existe un $\epsilon>0$ tal que la función $s\rightarrow\lambda\left(v,\phi_{v}\left(s,\zeta\right)\right)\in E$ es integrable para $s\in[0,\epsilon)$. La medida de transición $Q\left(A;\mathbf{x}\right)$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A\in\mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x}\in E\cup\Gamma^{*}$ y es una medida de probabilidad en $(E,\mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x}\in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_{t})$ comenzando en $\mathbf{x}=(n,\mathbf{z})\in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F\left(t\right)=\left\{\begin{array}{ll}\\ exp\left(-\int_{0}^{t}\lambda\left(n,\phi_{n}\left(s,\mathbf{z}\right)\right)ds\right), & t<t^{*}\left(\mathbf{x}\right),\\ 0, & t\geq t^{*}\left(\mathbf{x}\right)\end{array}\right. \tag{10.94}$$

Sea T_{1} una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}\left[T_{1}>t\right]=F\left(t\right)$, ahora sea la variable aleatoria (N,Z) con distribuición $Q\left(\cdot;\phi_{n}\left(T_{1},\mathbf{z}\right)\right)$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_{t})$ para $t\leq T_{1}$ es[55]

$$\mathbf{x}_{t}=\left(v_{t},\zeta_{t}\right)=\left\{\begin{array}{ll} \left(n,\phi_{n}\left(t,\mathbf{z}\right)\right), & t<T_{1},\\ \left(N,\mathbf{Z}\right), & t=t_{1}.\end{array}\right.$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_{1}}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_{2}-T_{1}$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_{2}}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_{t}$ con tiempos de salto $T_{1},T_{2},\ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda,T_{1}>0$ y $T_{1}-T_{2}>0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 15 (Supuesto 3.1, Davis [98]). *Sea $N_{t}:=\sum_{t}\mathbb{1}_{(t\geq t)}$ el número de saltos en $[0,t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[N_{t}\right]<\infty \textit{ para toda } t. \tag{10.95}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 313. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 314. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 315. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 316. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda\left(E\right)=sup\left\{\lambda\left(K\right):K \textit{ es compacto en } E\right\}. \tag{10.96}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 226. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

11 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X=\left\{X\left(t\right),t\geq0\right\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [108].

[55] Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

11.1 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X = \{X(t), t \geq 0\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [108].

11.1.1 Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [98]

.

11.2 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X = \{X(t), t \geq 0\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [108].

11.3 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho, Sharpe [123], en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$.

Se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable.

Definición 317. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 318. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 319. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 320. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{11.1}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 227. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

11.4 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho, Sharpe [123], en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$.

Se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable.

Definición 321. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 322. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 323. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 324. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup \{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{11.2}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 228. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

11.5 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X = \{X(t), t \geq 0\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [108].

12 Procesos Harris Recurrentes Positivos

Sea el proceso de Markov $X = \{X(t), t \geq 0\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] y Meyn y Down [118] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

12.1 Procesos Harris Recurrentes Positivos

Sea el proceso de Markov $X = \{X(t), t \geq 0\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] y Meyn y Down [118] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

12.2 Procesos Harris Recurrentes Positivos

Sea el proceso de Markov $X = \{X(t), t \geq 0\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] y Meyn y Down [118] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

13 Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X(t) = (Q(t), U(t), V(t)), \tag{13.1}$$

donde $Q(t)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U(t)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V(t)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U(t)$ como $V(t)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = (Q(0), U(0), V(0)) = (q, a, b)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \ldots, K$ se define

$$\begin{aligned} E_l^x(t) &= max\left\{r : U_l(0) + \xi_l(1) + \cdots + \xi_l(r-1) \leq t\right\} \;\; t \geq 0, \\ S_k^x(t) &= max\left\{r : V_k(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(r-1) \leq t\right\} \;\; t \geq 0. \end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s-éima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \left\{\phi^k(n), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \ldots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 62 (Lema 4.2, Dai[94])**.** *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \; u.o.c., \tag{13.2}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \; u.o.c., \tag{13.3}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \; u.o.c., \tag{13.4}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 63 (Lema 4.3, Dai[94])**.** *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t\geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right)=_k^x\left(0\right)+E_k^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{13.5}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_i^x\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_{0}^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{13.6}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right)=\left(T_1^x\left(t\right),\ldots,T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$

$$I^x\left(t\right)=\left(I_1^x\left(t\right),\ldots,I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right),\ldots,S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x\left(t\right)=Q^x\left(0\right)+E^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S^x\left(T^x\left(t\right)\right), \tag{13.7}$$

$$Q^x\left(t\right)\geq 0, \tag{13.8}$$

$$T^x(0)=0,\ \text{y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \tag{13.9}$$

$$I^x(t)=et-CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{13.10}$$

$$\int_0^{\infty}(CQ^x(t))\,dI_i^x(t)=0, \tag{13.11}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot),\overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{13.12}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{ll}1, & S(k)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 229 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\to\infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}|\to\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0),U^{x_{n_j}}(0),V^{x_{n_j}}(0)\right)\to\left(\overline{Q}(0),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{13.13}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\to\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)\ \ u.o.c. \tag{13.14}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t)=Q(0)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-(I-P)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}(t)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{13.15}$$

$$\overline{Q}(t)\geq 0, \tag{13.16}$$

$$\overline{T}(t)\ \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{13.17}$$

$$\overline{I}(t)=et-C\overline{T}(t)\ \text{ es no decreciente,} \tag{13.18}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right)d\overline{I}(t)=0, \tag{13.19}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{13.20}$$

Definición 325 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}(\cdot)\right)$ en 20.325 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.326)-(20.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta>0$ que depende de μ,α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot+\delta)\equiv 0$.*

Teorema 230 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|}Q^{x}(|x|t) \tag{13.21}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 326 (Definición 3.1, Dai y Meyn [95])**.** *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk}\mu_l \overline{T}_l(t) \tag{13.22}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{13.23}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{13.24}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{13.25}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{13.26}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{13.27}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 327 (Definición 3.2, Dai y Meyn [95])**.** *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^{+} - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^{+} \tag{13.28}$$

Definición 328 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95])**.** *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 32 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95])**.** *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

13.1 Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X(t) = \left(Q(t), U(t), V(t)\right), \tag{13.29}$$

donde $Q(t)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U(t)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V(t)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U(t)$ como $V(t)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = (Q(0), U(0), V(0)) = (q, a, b)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \ldots, K$ se define

$$\begin{aligned}
E_l^x(t) &= max\left\{r : U_l(0) + \xi_l(1) + \cdots + \xi_l(r-1) \leq t\right\} \;\; t \geq 0, \\
S_k^x(t) &= max\left\{r : V_k(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(r-1) \leq t\right\} \;\; t \geq 0.
\end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s-éima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \left\{\phi^k(n), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \ldots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 64 (Lema 4.2, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \; u.o.c., \tag{13.30}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \; u.o.c., \tag{13.31}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \; u.o.c., \tag{13.32}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 65 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \; u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{13.33}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{13.34}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$

$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{13.35}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{13.36}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \tag{13.37}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{13.38}$$

$$\int_0^{\infty}\left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{13.39}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x\left(\cdot\right), \overline{T}^x\left(\cdot\right)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{13.40}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S\left(k\right) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 231 (Teorema 4.1, Dai [94])**.** *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right), U^{x_{n_j}}\left(0\right), V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right) \to \left(\overline{Q}\left(0\right), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{13.41}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right) \ \ u.o.c. \tag{13.42}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right) = Q\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - \left(I - P\right)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{13.43}$$

$$\overline{Q}\left(t\right) \geq 0, \tag{13.44}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \ \textit{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{13.45}$$

$$\overline{I}\left(t\right) = et - C\overline{T}\left(t\right) \ \textit{ es no decreciente,} \tag{13.46}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right) d\overline{I}\left(t\right) = 0, \tag{13.47}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{13.48}$$

Definición 329 (Definición 4.1, , Dai [94])**.** *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ en 20.325 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.326)-(20.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.*

Teorema 232 (Teorema 4.2, Dai[94])**.** *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x\left(t\right) = \frac{1}{|x|} Q^x\left(|x|t\right) \tag{13.49}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 330 (Definición 3.1, Dai y Meyn [95]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}\left(t\right) \tag{13.50}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{13.51}$$

$$\overline{T}_{k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente,} \tag{13.52}$$

$$\overline{I}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{k\in C_{i}}\overline{T}_{k}\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{13.53}$$

$$\overline{I}_{i}\left(\cdot\right) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0 \tag{13.54}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{13.55}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 331 (Definición 3.2, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}\left(0\right),\overline{B}\left(0\right)\right)\in\mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=\overline{Q}\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{A}\left(0\right)\right)^{+}-\left(I-P^{'}\right)M\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{B}\left(0\right)\right)^{+} \tag{13.56}$$

Definición 332 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$, *con* $t\geq t_{0}$, *para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 33 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_{0}>0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$ *para cualquier* $t\geq t_{0}$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq 1$.

13.2 Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X\left(t\right)=\left(Q\left(t\right),U\left(t\right),V\left(t\right)\right), \tag{13.57}$$

donde $Q\left(t\right)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U\left(t\right)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V\left(t\right)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U\left(t\right)$ como $V\left(t\right)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x=\left(Q\left(0\right),U\left(0\right),V\left(0\right)\right)=\left(q,a,b\right)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l\in\mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k=1,\ldots,K$ se define

$$\begin{aligned}E_{l}^{x}\left(t\right)&=max\left\{r:U_{l}\left(0\right)+\xi_{l}\left(1\right)+\cdots+\xi_{l}\left(r-1\right)\leq t\right\}\ \ t\geq 0,\\S_{k}^{x}\left(t\right)&=max\left\{r:V_{k}\left(0\right)+\eta_{k}\left(1\right)+\cdots+\eta_{k}\left(r-1\right)\leq t\right\}\ \ t\geq 0.\end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s-éima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \left\{\phi^k(n), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \ldots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 66 (Lema 4.2, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \rightarrow P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{13.58}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{13.59}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{13.60}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 67 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x(T_l^x(t))\right) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{13.61}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{13.62}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = \left(S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t))\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x(T_l^x(t))\right) - S^x(T^x(t)), \tag{13.63}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{13.64}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{13.65}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{13.66}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{13.67}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{13.68}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 233 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales* ω *y cualquier sucesión de estados iniciales* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, *con* $|x_n| \to \infty$, *existe una subsucesión* $\left\{x_{n_j}\right\}$ *con* $|x_{n_j}| \to \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right), U^{x_{n_j}}\left(0\right), V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right) \to \left(\overline{Q}\left(0\right), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{13.69}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right) \text{ u.o.c.} \tag{13.70}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}\left(t\right) = Q\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - \left(I - P\right)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{13.71}$$

$$\overline{Q}\left(t\right) \geq 0, \tag{13.72}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{13.73}$$

$$\overline{I}\left(t\right) = et - C\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente,} \tag{13.74}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right) d\overline{I}\left(t\right) = 0, \tag{13.75}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{13.76}$$

Definición 333 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en 20.325 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.326)-(20.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, *se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.

Teorema 234 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{13.77}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 334 (Definición 3.1, Dai y Meyn [95]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right) = \left(\overline{Q}_1\left(t\right), \ldots, \overline{Q}_K\left(t\right)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}\left(t\right) = \left(\overline{T}_1\left(t\right), \ldots, \overline{T}_K\left(t\right)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_k\left(t\right) = \overline{Q}_k\left(0\right) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k\left(t\right) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk}\mu_l \overline{T}_l\left(t\right) \tag{13.78}$$

$$\overline{Q}_k\left(t\right) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{13.79}$$

$$\overline{T}_k\left(0\right) = 0, \text{ y } \overline{T}_k\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente,} \tag{13.80}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k\in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{13.81}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{13.82}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } (Q^x(\cdot), T^x(\cdot)) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{13.83}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 335 (Definición 3.2, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{13.84}$$

Definición 336 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 34 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

13.3 Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad

14 Teorema 2.1

El resultado principal de Down [99] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 235 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, *y para cada condición inicial* $x \in X$

$$lim_{t\to\infty} \sup \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{14.1}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{14.2}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$. *Donde* π *es la probabilidad invariante para* $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\to\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right] = 0. \tag{14.3}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{14.4}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

Proposición 78 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right]=0 \tag{14.5}$$

Lema 35 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{14.6}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 236 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{14.7}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 237 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\to\infty, x\in X. \tag{14.8}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 238 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\to\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_f=0. \tag{14.9}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\to\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 239 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds=\pi(f):=\int f(x)\,\pi(dx) \tag{14.10}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

14.1 Teorema 2.1

El resultado principal de Down [99] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 240 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \sup \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{14.11}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{14.12}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right] = 0. \tag{14.13}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{14.14}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

Proposición 79 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{14.15}$$

Lema 36 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{14.16}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 241 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{14.17}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 242 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{14.18}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[\left|Q\left(t\right)\right|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[\left|Q\left(0\right)\right|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 243 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{14.19}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 244 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_{X}\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{14.20}$$

$\mathbb{P}$*-c.s.*

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

14.2 Teorema 2.1

El resultado principal de Down [99] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 245 (Teorema 2.1, Down [99])**.** *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_{p}, y para cada condición inicial $x\in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\sup\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[\left|Q\left(s\right)\right|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}, \tag{14.21}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right]\leq\kappa_{r}, \tag{14.22}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]=0. \tag{14.23}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-c.s.} \tag{14.24}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$.

Proposición 80 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{14.25}$$

Lema 37 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea* $\{\zeta(k):k\in F\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $(0,\infty)$, *y sea* $E(t)=max\left(n\geq 1:\zeta(1)+\cdots+\zeta(n-1)\leq t\right)$. *Si* $\mathbb{E}\left[\zeta(1)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{14.26}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r:t\geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 246 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{14.27}$$

para $t>0$ *y* $x\in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 247 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{14.28}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 248 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con* $f(x)=f_1(x)$ *se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_f=0. \tag{14.29}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 249 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea* ν *cualquier distribución de probabilidad en* $(X,\mathcal{B}_X)$, *y* π *la distribución estacionaria de* X.

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds=\pi(f):=\int f(x)\,\pi(dx) \tag{14.30}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ *con* $\pi(|f|)<\infty$, *la ecuación anterior se cumple.*

14.3 Teorema 2.1

El resultado principal de Down [99] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 250 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \sup \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{14.31}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x \left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{14.32}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x \left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi \left[Q(0)\right] = 0. \tag{14.33}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{14.34}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

Proposición 81 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{14.35}$$

Lema 38 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{14.36}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 251 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p \left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{14.37}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 252 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\, t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{14.38}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 253 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{14.39}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 254 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_{X}\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{14.40}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

15 Teorema 2.2

Teorema 255 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$|Q\left(T\right)|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\, T\geq0, \tag{15.1}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{15.2}$$

15.1 Teorema 2.2

Teorema 256 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$|Q\left(T\right)|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\, T\geq0, \tag{15.3}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{15.4}$$

15.2 Teorema 2.2

Teorema 257 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$|Q\left(T\right)|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\, T\geq0, \tag{15.5}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{15.6}$$

15.3 Teorema 2.2

Teorema 258 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{15.7}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, *con* $|Q(0)| = 1$. *Entonces para cualquier* $0 < q \leq 1$, *existe* $B < 0$ *tal que para cualquier* $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{15.8}$$

16 Teorema 2.3

Teorema 259 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{16.1}$$

i) Si $\rho < 1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 476.*

ii) Si $\rho < 1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 532*

16.1 Teorema 2.3

Teorema 260 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{16.2}$$

i) Si $\rho < 1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 476.*

ii) Si $\rho < 1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 532*

16.2 Teorema 2.3

Teorema 261 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{16.3}$$

i) Si $\rho < 1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 476.*

ii) Si $\rho < 1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 532*

16.3 Teorema 2.3

Teorema 262 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{16.4}$$

i) Si $\rho < 1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 476.*

ii) Si $\rho < 1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 532*

17 Estabilidad de los Sistemas de Visitas Cíclicas

Es necesario realizar los siguientes supuestos, ver ([?]) y ([95]):

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}\\
\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.
\end{aligned}$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k\left(1\right) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{17.1}$$

$$P\left(\xi_k\left(1\right) + \ldots \xi_k\left(j_k\right) \in dx\right) \geq q_k\left(x\right) dx0 \text{ y} \tag{17.2}$$

$$\int_0^\infty q_k\left(x\right) dx > 0 \tag{17.3}$$

En [?] ser da un argumento para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños. Entonces la condición A3) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 263. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right] ds \leq \kappa_p \tag{17.4}$$

donde p es el entero dado por A2).

Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \leq \kappa_r \tag{17.5}$$

para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right]| = 0. \tag{17.6}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right) ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \tag{17.7}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

Teorema 264. *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \text{ con } T \geq 0, \tag{17.8}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{17.9}$$

17.1 Estabilidad de los Sistemas de Visitas Cíclicas

Es necesario realizar los siguientes supuestos, ver ([?]) y ([95]):

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.\end{aligned}$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k\left(1\right) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{17.10}$$

$$P\left(\xi_k\left(1\right) + \ldots \xi_k\left(j_k\right) \in dx\right) \geq q_k\left(x\right) dx0 \text{ y} \tag{17.11}$$

$$\int_0^\infty q_k\left(x\right) dx > 0 \tag{17.12}$$

En [?] ser da un argumento para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños. Entonces la condición A3) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 265. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right] ds \leq \kappa_p \tag{17.13}$$

donde p es el entero dado por A2).

Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \leq \kappa_r \tag{17.14}$$

para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t \to \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right]| = 0. \tag{17.15}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r\left(s\right) ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \tag{17.16}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

Teorema 266. *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \text{ con } T \geq 0, \tag{17.17}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \to \infty\right\} \geq q. \tag{17.18}$$

18 Resultados principales

En el caso particular de un modelo con un solo servidor, $M = 1$, se tiene que si se define

Definición 337.

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + \max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\overline{\overline{N}}} \right) \delta^*. \tag{18.1}$$

entonces

Teorema 267. *i) Si $\rho < 1$, entonces la red es estable, es decir el teorema (488) se cumple.*

ii) De lo contrario, es decir, si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, el teorema (489).

18.1 Resultados principales

En el caso particular de un modelo con un solo servidor, $M = 1$, se tiene que si se define

Definición 338.

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + \max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\overline{\overline{N}}} \right) \delta^*. \tag{18.2}$$

entonces

Teorema 268. *i) Si $\rho < 1$, entonces la red es estable, es decir el teorema (488) se cumple.*

ii) De lo contrario, es decir, si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, el teorema (489).

18.2 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathrm{X}$, sea $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t) \right) \tag{18.3}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{18.4}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{18.5}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{18.6}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$,

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{18.7}$$

De acuerdo a Dai [94], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (20.348)-(20.351), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 339 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en (20.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.348)-(20.351) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.348-20.351 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 269 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{18.8}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 340 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 39 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 20.348-20.351 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 270 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p*, y para cada condición inicial* $x \in X$

$$limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds \leq \kappa_p, \tag{18.9}$$

donde p *es el entero dado en (A2).*

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_k\left(t\right)^{r}\right] = \mathbb{E}_{\pi}\left[Q_k\left(0\right)^{r}\right] \leq \kappa_r, \tag{18.10}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$*. Donde* π *es la probabilidad invariante para* $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}*:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_k\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_{\pi}\left[Q_k\left(0\right)\right] = 0. \tag{18.11}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds = \mathbb{E}_{\pi}\left[Q_k\left(0\right)^{r}\right], \ \mathbb{P}_{x}\text{-c.s.} \tag{18.12}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 271 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{18.13}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 534.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 532

Teorema 272. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{18.14}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{18.15}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{18.16}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{18.17}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v,\zeta)\in E$ existe un $\epsilon>0$ tal que la función $s\rightarrow\lambda\left(v,\phi_{v}\left(s,\zeta\right)\right)\in E$ es integrable para $s\in[0,\epsilon)$. La medida de transición $Q\left(A;\mathbf{x}\right)$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A\in\mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x}\in E\cup\Gamma^{*}$ y es una medida de probabilidad en $(E,\mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x}\in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_{t})$ comenzando en $\mathbf{x}=(n,\mathbf{z})\in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F\left(t\right)=\left\{\begin{array}{ll}exp\left(-\int_{0}^{t}\lambda\left(n,\phi_{n}\left(s,\mathbf{z}\right)\right)ds\right), & t<t^{*}\left(\mathbf{x}\right),\\ 0, & t\geq t^{*}\left(\mathbf{x}\right)\end{array}\right. \tag{18.18}$$

Sea T_{1} una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}\left[T_{1}>t\right]=F\left(t\right)$, ahora sea la variable aleatoria (N,Z) con distribuición $Q\left(\cdot;\phi_{n}\left(T_{1},\mathbf{z}\right)\right)$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_{t})$ para $t\leq T_{1}$ es[56]

$$\mathbf{x}_{t}=\left(v_{t},\zeta_{t}\right)=\left\{\begin{array}{ll}\left(n,\phi_{n}\left(t,\mathbf{z}\right)\right), & t<T_{1},\\ \left(N,\mathbf{Z}\right), & t=t_{1}.\end{array}\right.$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_{1}}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_{2}-T_{1}$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_{2}}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_{t}$ con tiempos de salto $T_{1},T_{2},\ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda,T_{1}>0$ y $T_{1}-T_{2}>0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 16 (Supuesto 3.1, Davis [98]). *Sea $N_{t}:=\sum_{t}\mathbb{1}_{(t\geq t)}$ el número de saltos en $[0,t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[N_{t}\right]<\infty \text{ para toda } t. \tag{18.19}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 341. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 342. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 343. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda\left(E\right)=sup\left\{\lambda\left(K\right):K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{18.20}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 273. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X,\mathcal{G},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I\subset\mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f\left(X_{r}\right):r\in I,r\leq t,f\in\mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_{t})$ tal que (X_{t}) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 344. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ indexada por pares $s,t\in I$, con $s\leq t$ es una función de transición en $(E,\mathcal{E})$, si para todo $r\leq s<t$ en I y todo $x\in E$, $B\in\mathcal{E}$*[57]

$$P_{r,t}\left(x,B\right)=\int_{E}P_{r,s}\left(x,dy\right)P_{s,t}\left(y,B\right). \tag{18.21}$$

[56] Revisar página 362, y 364 de Davis [98].
[57] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E,\mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[58] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_t\right)|\mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t}f\left(X_t\right)\ \ s\leq t\in I,\ \ f\in b\mathcal{E}. \tag{18.23}$$

Definición 345. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f\left(x\right) = P_t\left(P_s f\right)\left(x\right),\ \ t,s\geq 0,\ \ x\in E\ \ f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 32. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_{t+s}\right)|\mathcal{G}_t\right\} = P_s f\left(X_t\right)\ \ t,s\geq 0,\ \ f\in b\mathcal{E}. \tag{18.24}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 346. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t\rightarrow X_t\left(w\right)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 347 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}^*$ *y* $P_t\left(b\mathcal{E}^*\right)\subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 348. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E,\mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X} = (\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t,s\geq 0$,

$$\theta_t\circ\theta_s = \theta_{t+s}\ \ y\ X_t\circ\theta_t = X_{t+s}; \tag{18.25}$$

iii) Para cualquier $x\in E,\mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.

Definición 349 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f\in S^\alpha$*, el proceso* $t\rightarrow f\left(X_t\right)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 350. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de* (P_t).

---

[58]
$$\mathbb{P}\left\{H|\mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H|X_t\right\}\ \ H\in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{18.22}$$

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 68 (Lema 4.2, Dai[94]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k ([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'} t, \ u.o.c., \tag{18.26}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n} (|x_n|t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{18.27}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n} (|x_n|t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{18.28}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 69 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n} (|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n} (|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n} (|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n} (|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l (S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{18.29}$$

para $k=1,\dots,K$. Para $i=1,\dots,d$, sea

$$I_i^x(t)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x(t)\right)dI_i^x(t)=0, \tag{18.30}$$

para $i=1,\dots,d$.

Hacer

$$T^x(t)=\left(T_1^x(t),\dots,T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t)=\left(I_1^x(t),\dots,I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right),\dots,S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t)=Q^x(0)+E^x(t)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right)-S^x\left(T^x(t)\right), \tag{18.31}$$

$$Q^x(t)\geq 0, \tag{18.32}$$

$$T^x(0)=0,\ \text{y } \overline{T}^x(t)\ \text{ es no decreciente}, \tag{18.33}$$

$$I^x(t)=et-CT^x(t)\ \text{ es no decreciente} \tag{18.34}$$

$$\int_0^{\infty}\left(CQ^x(t)\right)dI_i^x(t)=0, \tag{18.35}$$

$$\text{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}^x(\cdot),\overline{T}^x(\cdot)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{18.36}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\begin{cases}1, & S(k)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 274 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0),U^{x_{n_j}}(0),V^{x_{n_j}}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(0),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{18.37}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)\ \ u.o.c. \tag{18.38}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{\prime}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{18.39}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0, \tag{18.40}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\ \textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{18.41}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right)\ \textit{es no decreciente}, \tag{18.42}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0, \tag{18.43}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)\textit{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{18.44}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 82. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 70 (Lema 3.1 [91])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 275 (Teorema 5.1 [91])**.** *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$*, para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 71 (Lema 5.2 [106]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{18.45}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 276 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 83 (Proposición 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{18.46}$$

Proposición 84 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{18.47}$$

Proposición 85 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{18.48}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 277 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{18.49}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p \tag{18.50}$$

Teorema 278 (Teorema 6.2 [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^{t}\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_{p}}\rightarrow 0$$

para $t\rightarrow\infty$ y $x\in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q_{t}|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q_{0}|^{p}\right]<\infty$$

Teorema 279 (Teorema 6.3 [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^{t}(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_{f}=0},$$

para $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{t}\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{0}\right]\right|=0.$$

Proposición 86 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_{0}>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{18.51}$$

Lema 40 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [95]). *Sea $\left\{\zeta\left(k\right):k\in F\right\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $\left(0,\infty\right)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq 1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{18.52}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 280 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_{p} tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{18.53}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 281 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{18.54}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 282 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{18.55}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 283 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_o^t f(X(s))\, ds = \pi(f) := \int f(x)\, \pi(dx) \tag{18.56}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 284 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{18.57}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{18.58}$$

Definición 351. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 352. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 353. *Sea X el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 354. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a $\mathcal{F}$. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 355. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 356. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 357. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 358. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 359. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{18.59}$$

Nota 33. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (20.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{18.60}$$

18.3 Procesos de Estados de Markov

Teorema 285. *Sea* $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ *Proceso de Markov con espacio de estados* (S_0, χ_0) *generado por una distribuición inicial* P_o *y probabilidad de transición* p_{mn}*, para* $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$*, que por notación se escribirá como* $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$*. Sea* S *tiempo de paro relativo a la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_n$*. Sea* T *función medible,* $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$*. Supóngase que* $T \geq S$*, entonces* T *es tiempo de paro. Si* $B \in \chi_0$*, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{18.61}$$

en $\{T < \infty\}$*.*

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{ \bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v \right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{18.62}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{18.63}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{18.64}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf \{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) \, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{18.65}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot;\phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 17 (Supuesto 3.1, Davis [98])**.** *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{18.66}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[59] se cumple para cualquier tiempo de paro.

18.4 Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 360. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \textit{ es compacto en } E\}. \tag{18.67}$$

Definición 361. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight*.*

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 286. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

18.5 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[60], $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 362. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)\,^{61}. \tag{18.68}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[62] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{18.70}$$

[59] Revisar página 362, y 364 de Davis [98].
[60] qué se quiere decir con el término: más general?
[61] Ecuación de Chapman-Kolmogorov
[62]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{18.69}$$

Definición 363. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E, \mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x),\ t, s \geq 0,\ x \in E\ f \in b\mathcal{E}^{63}.$$

Nota 34. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t)\ t, s \geq 0,\ f \in b\mathcal{E}. \tag{18.71}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

18.6 Primer Condición de Regularidad

Definición 364. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \to X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 365 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 366. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E, \mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{18.72}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 367 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \to f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 368. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

[63] Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

18.7 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 72 (Lema 4.2, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{18.73}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{18.74}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{18.75}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 73 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x(t)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_k^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{18.76}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_i^x\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{18.77}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right)=\left(T_1^x\left(t\right),\ldots,T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$
$$I^x\left(t\right)=\left(I_1^x\left(t\right),\ldots,I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right),\ldots,S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x\left(t\right)=Q^x\left(0\right)+E^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S^x\left(T^x\left(t\right)\right), \tag{18.78}$$

$$Q^x\left(t\right)\geq 0, \tag{18.79}$$

$$T^x\left(0\right)=0,\text{ y }\overline{T}^x\left(t\right)\text{ es no decreciente}, \tag{18.80}$$

$$I^x\left(t\right)=et-CT^x\left(t\right)\text{ es no decreciente} \tag{18.81}$$

$$\int_0^{\infty}\left(CQ^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{18.82}$$

$$\text{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}^x\left(\cdot\right),\overline{T}^x\left(\cdot\right)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{18.83}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{ll}1, & S\left(k\right)=i,\\ 0, & \text{en otro caso}.\end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 287 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right),U^{x_{n_j}}\left(0\right),V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(0\right),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{18.84}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)\ \textit{u.o.c.} \tag{18.85}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+},\tag{18.86}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0,\tag{18.87}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\ \textit{es no decreciente y comienza en cero},\tag{18.88}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right)\ \textit{es no decreciente},\tag{18.89}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0,\tag{18.90}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)\textit{ especficas de la disciplina de la cola},\tag{18.91}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 87. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Teorema 288 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106])**.** *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r}\rightarrow\frac{1}{\mu^{r}}$, *cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$..

Proposición 88 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{18.92}$$

Proposición 89 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{18.93}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

18.8 Estabilidad

Definición 369 (Definición 3.2, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{18.94}$$

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 370 (Definición 3.1, Dai y Meyn [95]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ y $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$*

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk} \mu_l \overline{T}_l(t) \tag{18.95}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{18.96}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{18.97}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{18.98}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{18.99}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{18.100}$$

Lema 74 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 289 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Proposición 90 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0 \tag{18.101}$$

Lema 41 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^{r}. \tag{18.102}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 290 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^{p}\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{18.103}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^{p}\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 291 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x \in X. \tag{18.104}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^{p}\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^{p}\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 292 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f} = 0. \tag{18.105}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 293 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{18.106}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 294 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{18.107}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{18.108}$$

Definición 371. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 372. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 373. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 374. *Una función $f : X \to \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 375. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 376. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 377. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 378. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 379. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{18.109}$$

Nota 35. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (20.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{18.110}$$

Teorema 295. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \to p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \to \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{18.111}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \to \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v\in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \to \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \to [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v\in K} \partial^* M_v. \tag{18.112}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{18.113}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{18.114}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf \{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \to \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{18.115}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[64]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 18 (Supuesto 3.1, Davis [98])**.** *Sea* $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ *el número de saltos en* $[0, t]$. *Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{18.116}$$

[64] Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 380. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 381. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 382. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 383. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{18.117}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 296. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

18.9 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 384. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{65}. \tag{18.118}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[66] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \; f \in b\mathcal{E}. \tag{18.120}$$

Definición 385. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \; t, s \geq 0, \; x \in E \; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 36. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \; f \in b\mathcal{E}. \tag{18.121}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

[65] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[66]
$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{18.119}$$

18.10 Primer Condición de Regularidad

Definición 386. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 387 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* $/P_t)$ *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E, *existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, *y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 388. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E, \mathcal{E})$. *La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X, *es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{18.122}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, *y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 389 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$, *el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 390. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 75 (Lema 4.2, Dai[94])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'} t, \text{ u.o.c.,} \tag{18.123}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{18.124}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{18.125}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 76 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_k\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_k\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S^{x}_{l}\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T^{x}_{l}\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S^{x}_{l}\left(T^{x}_{l}\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi^{x}_{l}\left(S^{x}_{l}\left(T^{x}_{l}\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q^{x}_{k}\left(t\right)=^{x}_{k}\left(0\right)+E^{x}_{k}\left(t\right)+\sum^{K}_{l=1}\Phi^{l}_{k}\left(S^{x}_{l}\left(T^{x}_{l}\left(t\right)\right)\right)-S^{x}_{k}\left(T^{x}_{k}\left(t\right)\right) \tag{18.126}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I^{x}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_{i}}T^{x}_{k}\left(t\right).$$

Entonces $I^{x}_{i}\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int^{\infty}_{0}\left(\sum_{k\in C_{i}}Q^{x}_{k}\left(t\right)\right)dI^{x}_{i}\left(t\right)=0, \tag{18.127}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^{x}\left(t\right)=\left(T^{x}_{1}\left(t\right),\ldots,T^{x}_{K}\left(t\right)\right)^{'},$$

$$I^{x}\left(t\right)=\left(I^{x}_{1}\left(t\right),\ldots,I^{x}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^{x}\left(T^{x}\left(t\right)\right)=\left(S^{x}_{1}\left(T^{x}_{1}\left(t\right)\right),\ldots,S^{x}_{K}\left(T^{x}_{K}\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{18.128}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{18.129}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{18.130}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{18.131}$$

$$\int_0^{\infty} \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{18.132}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{18.133}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso}. \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 297 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{18.134}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{18.135}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I - P)' M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{18.136}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{18.137}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{18.138}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente}, \tag{18.139}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{18.140}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{18.141}$$

Definición 391 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en 20.325 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.326)-(20.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 298 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t)=\frac{1}{|x|}Q^{x}(|x|t) \tag{18.142}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 392 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t)=0$, con $t\geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)|=1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 42 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0>0$ tal que $\overline{Q}(t)=0$ para cualquier $t\geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}(0)|+|\overline{A}(0)|+|\overline{B}(0)|\leq1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 91. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}(0),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}(0),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}(0),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}(0),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^{0}(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0)=\overline{T}^{0}(0)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}(t)+\overline{T}_{k}^{0}(t)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}(t)=\overline{Q}_{k}(0)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}(t)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}(t)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}(t)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}(t)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}(t)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}(t)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}(t)$$

para $\overline{Q}_{k}(t)>0$.

Lema 77 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 299 (Teorema 5.2 [91]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 300 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 78 (Lema 5.2 [106]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{18.143}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 301 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 92 (Proposicin 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{18.144}$$

Proposición 93 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{18.145}$$

Proposición 94 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{18.146}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 302 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{18.147}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq k_p \tag{18.148}$$

Teorema 303 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right]<\infty$$

Teorema 304 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]\right|=0}.$$

Proposición 95 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right]=0 \tag{18.149}$$

Lema 43 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{18.150}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 305 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{18.151}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 306 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{18.152}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 307 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{18.153}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 308 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_{X})$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{18.154}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 309 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$|Q\left(T\right)|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ T\geq0, \tag{18.155}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{18.156}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$,
- también se define $\rho_{k}:=\lambda_{k}/\mu_{k}$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho<1$ para cuestiones de estabilidad.

18.11 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X=\left\{X\left(t\right),t\geq0\right\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [108].

18.11.1 Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [98]

.

18.12 Procesos Harris Recurrentes Positivos

Sea el proceso de Markov $X = \{X(t), t \geq 0\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] y Meyn y Down [118] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

18.13 Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X(t) = (Q(t), U(t), V(t)), \tag{18.157}$$

donde $Q(t)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U(t)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V(t)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U(t)$ como $V(t)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = (Q(0), U(0), V(0)) = (q, a, b)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \ldots, K$ se define

$$\begin{aligned} E_l^x(t) &= max\{r : U_l(0) + \xi_l(1) + \cdots + \xi_l(r-1) \leq t\} \ \ t \geq 0, \\ S_k^x(t) &= max\{r : V_k(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(r-1) \leq t\} \ \ t \geq 0. \end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s-éima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \left\{\phi^k(n), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \ldots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 79 (Lema 4.2, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \ u.o.c., \tag{18.158}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \to \alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{18.159}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \to \mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{18.160}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$.

Lema 80 (Lema 4.3, Dai[94])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+,\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right) =_k^x \left(0\right) + E_k^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{18.161}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x\left(t\right) = t - \sum_{j\in C_i} T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k\in C_i} Q_k^x\left(t\right)\right) dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{18.162}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))',$$
$$I^x(t) = (I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t))'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \tag{18.163}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{18.164}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \tag{18.165}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{18.166}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{18.167}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{18.168}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 310 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales* ω *y cualquier sucesión de estados iniciales* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$*, con* $|x_n| \to \infty$*, existe una subsucesión* $\{x_{n_j}\}$ *con* $|x_{n_j}| \to \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{18.169}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \ \textit{u.o.c.} \tag{18.170}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I - P)' M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{18.171}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{18.172}$$

$$\overline{T}(t) \ \textit{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{18.173}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \ \textit{es no decreciente,} \tag{18.174}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{18.175}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{18.176}$$

Definición 393 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en 20.325 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.326)-(20.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta>0$ *que depende de* μ,α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv0$.

Teorema 311 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{18.177}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 394 (Definición 3.1, Dai y Meyn [95]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}\left(t\right) \tag{18.178}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{18.179}$$

$$\overline{T}_{k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente}, \tag{18.180}$$

$$\overline{I}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{k\in C_{i}}\overline{T}_{k}\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{18.181}$$

$$\overline{I}_{i}\left(\cdot\right) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0 \tag{18.182}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{18.183}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 395 (Definición 3.2, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}\left(0\right),\overline{B}\left(0\right)\right)\in\mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=\overline{Q}\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{A}\left(0\right)\right)^{+}-\left(I-P^{'}\right)M\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{B}\left(0\right)\right)^{+} \tag{18.184}$$

Definición 396 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$*, con* $t\geq t_{0}$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 44 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_{0}>0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$ *para cualquier* $t\geq t_{0}$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq1$.

18.14 Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad

18.15 Teorema 2.1

El resultado principal de Down [99] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 312 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \sup \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p \right] ds \leq \kappa_p, \tag{18.185}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x \left[Q_k(t)^r \right] = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right] \leq \kappa_r, \tag{18.186}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x \left[Q_k(t) \right] - \mathbb{E}_\pi \left[Q(0) \right] = 0. \tag{18.187}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right], \; \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{18.188}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

Proposición 96 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0 \tag{18.189}$$

Lema 45 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \tag{18.190}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 313 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p \right] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{18.191}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p \right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 314 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{18.192}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 315 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_f=0. \tag{18.193}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 316 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_X\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{18.194}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

18.16 Teorema 2.2

Teorema 317 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0,c_0\geq0$,*

$$|Q\left(T\right)|\geq\epsilon_0T-c_0,\ T\geq0, \tag{18.195}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{18.196}$$

18.17 Teorema 2.3

Teorema 318 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^K\rho_k+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{18.197}$$

i) Si $\rho<1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 476.

ii) Si $\rho<1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 532

18.18 Definiciones Básicas

Definición 397. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $\left(X,\mathcal{F}\right)$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A\in\mathcal{F}$.*

Definición 398. *Sea $\left(X,\mathcal{F},\mu\right)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X=\bigcup_{n\geq1}X_n$ con $X_n\in\mathcal{F}$ y $\mu\left(X_n\right)<\infty$.*

Definición 399. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 400. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha,\infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 401. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 402. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 403. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0,\infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 404. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S,χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s,t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 405. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s,t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{18.198}$$

Nota 37. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (20.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{18.199}$$

Teorema 319. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m,n,x,B) \rightarrow p_{mn}(x,B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots,\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{18.200}$$

en $\{T < \infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 97. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K} \left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 81 (Lema 3.1 [91])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 320 (Teorema 5.2 [91])**.** *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 321 (Teorema 5.1 [91])**.** *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$*, para toda* $t \geq t_0$.

Lema 82 (Lema 5.2 [106])**.** *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$*, y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$*, entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{18.201}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 322 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106])**.** *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$*, cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 98 (Proposicin 5.1 [95])**.** *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{18.202}$$

Proposición 99 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{18.203}$$

Proposición 100 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{18.204}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 323 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{18.205}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$Limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \tag{18.206}$$

Teorema 324 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \to 0$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t \to \infty} \mathbb{E}_x \left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi \left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 325 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t \to \infty} t^{(p-1)\left|P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot)\right|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t \to \infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]| = 0}.$$

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$lim_{x \to \infty} \mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0. \tag{18.207}$$

(S2.)

$$\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}, \tag{18.208}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)] \geq 0$.
- Se define
$$\delta^* := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)]. \tag{18.209}$$
- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\right) \tag{18.210}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1,2,\dots,K\} \times \{1,2,\dots,S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{18.211}$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([94])

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

18.19 Preliminares

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0$

2) $\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N}$para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j'}^{m} = r_{j,j'}$
- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^{*} := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(i)\right]. \tag{18.212}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m, se denota por $B_m(t)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t; $B_m^0(t)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t, finalmente sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{18.213}$$

para $k = 1,\dots,K$ y $m = 1,2,\dots,M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \left(\{1,2,\dots,K\} \times \{1,2,\dots,S\}\right)^M \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1,\dots,\xi_K,\eta_1,\dots,\eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1,\dots,K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{18.214}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx, \ 0 \leq a < b. \tag{18.215}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto $A2)$ para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición 666.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

18.20 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [98], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (27), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([98], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [95]

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [123]) en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t)|\mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la σ-algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D)$$

Definición 406. *Una medida no cero π en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ es* **invariante** *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbf{X}} P^t(x, D)\,\pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 407. *El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 38. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [105]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama Proceso Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}\left(\cdot\right)=\int_{\mathbf{X}}P_{x}\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right)$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente.

Definición 408. *Un conjunto $D\in\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t>0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, y un $\delta>0$ tal que*

$$P^{t}\left(x,A\right)\geq\delta\nu\left(A\right)$$

para $x\in D,A\in\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [94]:

Lema 83 (Lema 3.1, Dai[94])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_{x}\left(\tau_{B}<\infty\right)\equiv1$ y que para algún $\delta>0$ se cumple que*

$$\sup\mathbb{E}_{x}\left[\tau_{B}\left(\delta\right)\right]<\infty, \tag{18.216}$$

donde $\tau_{B}\left(\delta\right)=inf\left\{t\geq\delta:X\left(t\right)\in B\right\}$. Entonces, X es un proceso Harris Recurrente Positivo.

Lema 84 (Lema 3.1, Dai [94])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B=\left\{|x|\leq k\right\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k>0$.*

Teorema 326 (Teorema 3.1, Dai[94])**.** *Si existe un $\delta>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^{x}\left(|x|\delta\right)|=0, \tag{18.217}$$

entonces la ecuación (20.358) se cumple para $B=\left\{|x|\leq k\right\}$ con algún $k>0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.

Nota 39. *En Meyn and Tweedie [116] muestran que si $P_{x}\left\{\tau_{D}<\infty\right\}\equiv1$ incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

18.21 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x\in\mathrm{X}$, sea $Q_{k}^{x}\left(t\right)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^{x}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ para $m=1,2,\ldots,M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x,0}\left(|x|t\right)\right) \tag{18.218}$$

para $m=1,2,\ldots,M$, cuando $x\rightarrow\infty$. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}_{m}\left(t\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(t\right)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\lambda_{k}t-\sum_{m=1}^{M}\mu_{k}\overline{T}_{m,k}\left(t\right) \tag{18.219}$$

para $k=1,2,\ldots,K$.

$$\overline{Q}_k\left(t\right)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{18.220}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente,} \tag{18.221}$$

para $k=1,2,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$,

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^{0}\left(t\right)+\overline{T}_{m,k}\left(t\right)=t \text{ para } m=1,2,\ldots,M. \tag{18.222}$$

De acuerdo a Dai [94], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (20.348)-(20.351), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 409 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en (20.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.348)-(20.351) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta>0$ *que depende de* μ,λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv 0$.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.348-20.351 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 327 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{18.223}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 410 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$*, con* $t\geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 46 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 20.348-20.351 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0>0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$ *para cualquier* $t\geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 328 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p*, y para cada condición inicial* $x\in X$

$$limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_p, \tag{18.224}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_k\left(0\right)^r\right]\leq\kappa_r, \tag{18.225}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_k\left(0\right)\right]=0. \tag{18.226}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_k\left(0\right)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{18.227}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 329 (Teorema 2.3, Down [99])**.** *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^K\rho_k+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{18.228}$$

i) Si $\rho<1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 534.

ii) Si $\rho<1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 532

Teorema 330. *Sea $(X_n,\mathcal{F}_n,n=0,1,\ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0,χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m,n=0,1,\ldots,$ $m<n$, que por notación se escribirá como $p\left(m,n,x,B\right)\rightarrow p_{mn}\left(x,B\right)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T:\Omega\rightarrow\{0,1,\ldots,\}$. Supóngase que $T\geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B\in\chi_0$, entonces*

$$P\left\{X\left(T\right)\in B,T<\infty|\mathcal{F}\left(S\right)\right\}=p\left(S,T,X\left(s\right),B\right) \tag{18.229}$$

en $\{T<\infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d:K\rightarrow\mathbb{N}$ función. Para $v\in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E=\cup_{v\in K}M_v=\left\{(v,\zeta):v\in K,\zeta\in M_v\right\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E}=\left\{\cup_{v\in K}A_v:A_v\in\mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E,\mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t=(v_t,\zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v,v\in K)$.

ii) Una función medible $\lambda:E\rightarrow\mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \to [0,1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{18.230}$$

y

$$\partial^* M_v = \left\{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t,\zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\right\}. \tag{18.231}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t,\zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{18.232}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v,\zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf\left\{t > 0 : \phi_v(t,\zeta) \in \partial^* M_v\right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v,\zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \to \lambda(v, \phi_v(s,\zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0,\epsilon)$. La medida de transición $Q(A;\mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E,\mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s,\mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{18.233}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N,Z) con distribuición $Q(\cdot;\phi_n(T_1,\mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[67]

$$\mathbf{x}_t = (v_t,\zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t,\mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 19 (Supuesto 3.1, Davis [98]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0,t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{18.234}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 411. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 412. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

[67] Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

Definición 413. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{18.235}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 331. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 414. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*[68]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B). \tag{18.236}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[69] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \; f \in b\mathcal{E}. \tag{18.238}$$

Definición 415. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 40. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{18.239}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 416. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \to X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 417 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

[68] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[69]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{18.237}$$

Definición 418. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E,\mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{18.240}$$

iii) Para cualquier $x \in E$,$\mathbf{P}^x \left\{X_0 = x\right\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 419 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \to f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 420. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de (P_t).*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 85 (Lema 4.2, Dai[94])**.** *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'} t, \text{ u.o.c.,} \tag{18.241}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{18.242}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{18.243}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 86 (Lema 4.3, Dai[94])**.** *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{18.244}$$

para $k = 1, \dots, K$. Para $i = 1, \dots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j\in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{18.245}$$

para $i = 1, \dots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \dots, T_K^x(t)\right)',$$

$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \dots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \dots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{18.246}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{18.247}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{18.248}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{18.249}$$

$$\int_0^{\infty}\left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{18.250}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{18.251}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 332 (Teorema 4.1, Dai [94])**.** *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{18.252}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{18.253}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I-P)' M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{18.254}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{18.255}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{18.256}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{18.257}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{18.258}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{18.259}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 101. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K \left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 87 (Lema 3.1 [91])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 333 (Teorema 5.1 [91])**.** *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 88 (Lema 5.2 [106])**.** *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{18.260}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 334 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106])**.** *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 102 (Proposición 5.1 [95])**.** *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{18.261}$$

Proposición 103 (Proposición 5.3 [95])**.** *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{18.262}$$

Proposición 104 (Proposición 5.4 [95])**.** *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right]+\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right]\leq\frac{1}{t}V\left(x\right)+k,\tag{18.263}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 335 (Teorema 5.5 [95])**.** *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\}\tag{18.264}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq k_p\tag{18.265}$$

Teorema 336 (Teorema 6.2 [95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right]<\infty$$

Teorema 337 (Teorema 6.3 [95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_x\left[Q_t\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q_0\right]\right|=0.$$

Proposición 105 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95])**.** *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0\tag{18.266}$$

Lema 47 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [95])**.** *Sea $\{\zeta\left(k\right):k\in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq 1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r.\tag{18.267}$$

Luego, bajo estas condiciones:

- *a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$*
- *b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r:t\geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.*

Teorema 338 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95])**.** *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\}\tag{18.268}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 339 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_{p}},\ t\to\infty, x\in X. \tag{18.269}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q(t)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q(0)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 340 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x)=f_{1}(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\to\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f}=0. \tag{18.270}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\to\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 341 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_{X})$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f(X(s))\,ds=\pi(f):=\int f(x)\,\pi(dx) \tag{18.271}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi(|f|)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 342 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$|Q(T)|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ T\geq0, \tag{18.272}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\{\mathbb{X}\to\infty\}\geq q. \tag{18.273}$$

Definición 421. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X,\mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A\in\mathcal{F}$.*

Definición 422. *Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X=\bigcup_{n\geq1}X_{n}$ con $X_{n}\in\mathcal{F}$ y $\mu(X_{n})<\infty$.*

Definición 423. *Sea X el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b)\in\mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 424. *Una función $f:X\to\mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x\in X:f(x)>\alpha\}$$

pertenece a $\mathcal{F}$. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha,\infty))=\{x\in X:f(x)>\alpha\}\in\mathcal{F}.$$

Definición 425. *Sean $(\Omega_{i},\mathcal{F}_{i})$, $i=1,2,\dots,$ espacios medibles y $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_{i}$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_{1},\omega_{2},\dots,)$ tales que $\omega_{i}\in\Omega_{i}$, $i=1,2,\dots,$. Si $B^{n}\subset\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_{i}$, definimos $B_{n}=\{\omega\in\Omega:(\omega_{1},\omega_{2},\dots,\omega_{n})\in B^{n}\}$. Al conjunto B_{n} se le llama* cilindro *con base B^{n}, el cilindro es llamado medible si $B^{n}\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_{i}$.*

Definición 426. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 427. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 428. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 429. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{18.274}$$

Nota 41. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (20.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{18.275}$$

18.22 Procesos de Estados de Markov

Teorema 343. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{18.276}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{ \bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v \right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{18.277}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{18.278}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{18.279}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf \{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \to \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{18.280}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 20 (Supuesto 3.1, Davis [98]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{18.281}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[70] se cumple para cualquier tiempo de paro.

18.23 Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 430. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \textit{ es compacto en } E\}. \tag{18.282}$$

Definición 431. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 344. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

[70] Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

18.24 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[71], $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 432. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{72}. \tag{18.283}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[73] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{18.285}$$

Definición 433. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}^{74}.$$

Nota 42. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{18.286}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

18.25 Primer Condición de Regularidad

Definición 434. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \to X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 435 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 436. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

[71] qué se quiere decir con el término: más general?

[72] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[73]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{18.284}$$

[74] Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$*,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{18.287}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$*.*

Definición 437 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \to f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 438. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de* (P_t)*.*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a* $\mathcal{G}_t$*.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

18.26 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 89 (Lema 4.2, Dai[94])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$*, casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k ([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{18.288}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n} (|x_n| t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{18.289}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n} (|x_n| t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{18.290}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$*.*

Lema 90 (Lema 4.3, Dai[94])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n} (|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n} (|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x\left(t\right)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_k^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right) = Q_k^x\left(0\right) + E_k^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{18.291}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x\left(t\right) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x\left(t\right)\right) dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{18.292}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right) = \left(T_1^x\left(t\right), \ldots, T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$

$$I^x\left(t\right) = \left(I_1^x\left(t\right), \ldots, I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x\left(t\right) = Q^x\left(0\right) + E^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S^x\left(T^x\left(t\right)\right), \tag{18.293}$$

$$Q^x\left(t\right) \geq 0, \tag{18.294}$$

$$T^x\left(0\right) = 0, \text{ y } \overline{T}^x\left(t\right) \text{ es no decreciente}, \tag{18.295}$$

$$I^x\left(t\right) = et - CT^x\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{18.296}$$

$$\int_0^{\infty}\left(CQ^x\left(t\right)\right) dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{18.297}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^{x}\left(\cdot\right),\overline{T}^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{18.298}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\begin{cases}1, & S\left(k\right)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 345 (Teorema 4.1, Dai [94])**.** *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\left\{x_{n}\right\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_{n}|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_{j}}\right\}$ con $|x_{n_{j}}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_{j}}|}\left(Q^{x_{n_{j}}}\left(0\right),U^{x_{n_{j}}}\left(0\right),V^{x_{n_{j}}}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(0\right),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{18.299}$$

$$\frac{1}{|x_{n_{j}}|}\left(Q^{x_{n_{j}}}\left(|x_{n_{j}}|t\right),T^{x_{n_{j}}}\left(|x_{n_{j}}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)\ \ \textit{u.o.c.} \tag{18.300}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{18.301}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0, \tag{18.302}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\ \ \textit{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{18.303}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right)\ \ \textit{es no decreciente,} \tag{18.304}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0, \tag{18.305}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{18.306}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 106. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ y $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Teorema 346 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$*, cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$*..*

Proposición 107 (Proposición 5.3 [95]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p)\, dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{18.307}$$

Proposición 108 (Proposición 5.4 [95]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X*, sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$*, y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt\right]$$

para $x \in X$*. Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C*, entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{18.308}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

18.27 Estabilidad

Definición 439 (Definición 3.2, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{18.309}$$

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 440 (Definición 3.1, Dai y Meyn [95]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk} \mu_l \overline{T}_l(t) \tag{18.310}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{18.311}$$

$$\overline{T}_k(0)=0,\ \ y\ \overline{T}_k(\cdot)\ \ es\ no\ decreciente, \tag{18.312}$$

$$\overline{I}_i(t)=t-\sum_{k\in C_i}\overline{T}_k(t)\ \ es\ no\ decreciente \tag{18.313}$$

$$\overline{I}_i(\cdot)\ \ se\ incrementa\ al\ tiempo\ t\ cuando\ \sum_{k\in C_i}Q_k^x(t)\,dI_i^x(t)=0 \tag{18.314}$$

$$condiciones\ adicionales\ sobre\ \left(Q^x(\cdot),T^x(\cdot)\right)\ referentes\ a\ la\ disciplina\ de\ servicio \tag{18.315}$$

Lema 91 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 347 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α,μ,T,U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t)=0$, para toda $t\geq t_0$.*

Proposición 109 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right]=0 \tag{18.316}$$

Lema 48 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k):k\in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t)=max\left(n\geq 1:\zeta(1)+\cdots+\zeta(n-1)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{18.317}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r:t\geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 348 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{18.318}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 349 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{18.319}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 350 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x)=f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_f=0. \tag{18.320}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 351 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{18.321}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 352 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{18.322}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{18.323}$$

Definición 441. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 442. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu\left(X_n\right) < \infty$.*

Definición 443. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 444. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\left\{x \in X : f\left(x\right) > \alpha\right\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}\left(\left(\alpha, \infty\right)\right) = \left\{x \in X : f\left(x\right) > \alpha\right\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 445. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$, definimos $B_n = \left\{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\right\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_i$.*

Definición 446. *[TSP, Ash [?]] Sea $X\left(t\right), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X\left(t\right)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}\left(X\left(s\right), s \leq t\right)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X\left(s\right)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 447. *[TSP, Ash [?]] Sea $\left\{\mathcal{F}\left(t\right), t \geq 0\right\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}\left(s\right) \subset \mathcal{F}\left(t\right)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}\left(t\right)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\left\{T \leq t\right\} \in \mathcal{F}\left(t\right)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X\left(t\right), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}\left(t\right) = \mathcal{F}\left(X\left(s\right)\right)$.*

Definición 448. *Sea $X\left(t\right), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\left\{\mathcal{F}\left(t\right)\right\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}\left(s\right) \subset \mathcal{F}\left(t\right)$ y $X\left(t\right)$ es $\mathcal{F}\left(t\right)$-medible,*

Definición 449. *Sea $X\left(t\right), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}\left(t\right)$ o que $\left\{X\left(t\right), \mathcal{F}\left(t\right)\right\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\left\{X\left(t\right) \in B|\mathcal{F}\left(s\right)\right\} = P\left\{X\left(t\right) \in B|X\left(s\right)\right\}. \tag{18.324}$$

Nota 43. *Si se dice que* $\{X(t)\}$ *es un Proceso de Markov sin mencionar* $\mathcal{F}(t)$, *se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (20.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{18.325}$$

Teorema 353. *Sea* $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots, \}$ *Proceso de Markov con espacio de estados* (S_0, χ_0) *generado por una distribuición inicial* P_o *y probabilidad de transición* p_{mn}, *para* $m, n = 0, 1, \dots,$ $m < n$, *que por notación se escribirá como* $p(m, n, x, B) \to p_{mn}(x, B)$. *Sea* S *tiempo de paro relativo a la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_n$. *Sea* T *función medible,* $T : \Omega \to \{0, 1, \dots, \}$. *Supóngase que* $T \geq S$, *entonces* T *es tiempo de paro. Si* $B \in \chi_0$, *entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{18.326}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \to \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \to \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \to [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{18.327}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{18.328}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{18.329}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \to \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda\left(n, \phi_n\left(s, \mathbf{z}\right)\right) ds\right), & t < t^*\left(\mathbf{x}\right), \\ 0, & t \geq t^*\left(\mathbf{x}\right) \end{cases} \tag{18.330}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[75]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 21 (Supuesto 3.1, Davis [98]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{18.331}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 450. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 451. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 452. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 453. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{18.332}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 354. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

18.28 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 454. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{76}. \tag{18.333}$$

[75] Revisar página 362, y 364 de Davis [98].
[76] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[77] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{18.335}$$

Definición 455. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t (P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 44. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{18.336}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

18.29 Primer Condición de Regularidad

Definición 456. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 457 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 458. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t \geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \;\; y \;\; X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{18.337}$$

iii) Para cualquier $x \in E$,$\mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t \in I}$ tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 459 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 460. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

[77]
$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{18.334}$$

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 92 (Lema 4.2, Dai[94]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'} t, \ u.o.c., \tag{18.338}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{18.339}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{18.340}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 93 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x \left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x \left(T_k^x(t)\right) \tag{18.341}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{18.342}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{18.343}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{18.344}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{18.345}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{18.346}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{18.347}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{18.348}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 355 (Teorema 4.1, Dai [94])**.** *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales* ω *y cualquier sucesión de estados iniciales* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$*, con* $|x_n| \to \infty$*, existe una subsucesión* $\{x_{n_j}\}$ *con* $|x_{n_j}| \to \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{18.349}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right) \;\; u.o.c. \tag{18.350}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}\left(t\right) = Q\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - \left(I - P\right)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{18.351}$$

$$\overline{Q}\left(t\right) \geq 0, \tag{18.352}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \;\; \textit{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{18.353}$$

$$\overline{I}\left(t\right) = et - C\overline{T}\left(t\right) \;\; \textit{es no decreciente,} \tag{18.354}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right) d\overline{I}\left(t\right) = 0, \tag{18.355}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{18.356}$$

Definición 461 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en 20.325 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.326)-(20.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.

Teorema 356 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{18.357}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 462 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 49 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 110. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 94 (Lema 3.1 [91])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 357 (Teorema 5.2 [91])**.** *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 358 (Teorema 5.1 [91])**.** *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$, *para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 95 (Lema 5.2 [106])**.** *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r}\tag{18.358}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 359 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106])**.** *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r} \rightarrow \frac{1}{\mu^{r}}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 111 (Proposicin 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{18.359}$$

Proposición 112 (Proposición 5.3 [95]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_{x}\left[\int_{0}^{\tau_{C}(\delta)}\left(1+|X\left(t\right)|^{p}\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right) \tag{18.360}$$

Proposición 113 (Proposición 5.4 [95]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_{+}$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_{x}\left[\int_{0}^{\tau_{C}(\delta)}f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_{x}\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{18.361}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 360 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds \leq k_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{18.362}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds \leq k_{p} \tag{18.363}$$

Teorema 361 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^{t}\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_{p}} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q_{t}|^{p}\right] = \mathbb{E}_{\pi}\left[|Q_{0}|^{p}\right] < \infty$$

Teorema 362 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_{1}\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^{t}(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_{f}=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_{x}[Q_{t}]-\mathbb{E}_{\pi}[Q_{0}]|=0}.$$

Proposición 114 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{18.364}$$

Lema 50 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{18.365}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 363 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{18.366}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 364 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{18.367}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x[|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 365 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{18.368}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 366 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{18.369}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 367 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{18.370}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{18.371}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\left\{\xi_k\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)\right]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$,
- también se define $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.

18.30 Procesos de Estados Markoviano para el Sistema

18.31 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [108].

18.31.1 Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [98]

.

18.32 Procesos Harris Recurrentes Positivos

Sea el proceso de Markov $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] y Meyn y Down [118] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

18.33 Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X\left(t\right) = \left(Q\left(t\right), U\left(t\right), V\left(t\right)\right), \tag{18.372}$$

donde $Q\left(t\right)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U\left(t\right)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V\left(t\right)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U\left(t\right)$ como $V\left(t\right)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = \left(Q\left(0\right), U\left(0\right), V\left(0\right)\right) = \left(q, a, b\right)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \dots, K$ se define

$$\begin{aligned}
E_l^x\left(t\right) &= max\left\{r : U_l\left(0\right) + \xi_l\left(1\right) + \cdots + \xi_l\left(r-1\right) \leq t\right\}\ \ t \geq 0,\\
S_k^x\left(t\right) &= max\left\{r : V_k\left(0\right) + \eta_k\left(1\right) + \cdots + \eta_k\left(r-1\right) \leq t\right\}\ \ t \geq 0.
\end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s-éima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \left\{\phi^k(n), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \ldots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 96 (Lema 4.2, Dai[94])**.** *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \ u.o.c., \tag{18.373}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{18.374}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{18.375}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 97 (Lema 4.3, Dai[94])**.** *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{18.376}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{18.377}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{18.378}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{18.379}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{18.380}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{18.381}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{18.382}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{18.383}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso}. \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 368 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right), U^{x_{n_j}}\left(0\right), V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right) \to \left(\overline{Q}\left(0\right), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{18.384}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right) \;\; u.o.c. \tag{18.385}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right) = Q\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - \left(I - P\right)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{18.386}$$

$$\overline{Q}\left(t\right) \geq 0, \tag{18.387}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \;\; \textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{18.388}$$

$$\overline{I}\left(t\right) = et - C\overline{T}\left(t\right) \;\; \textit{es no decreciente}, \tag{18.389}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right) = 0, \tag{18.390}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{18.391}$$

Definición 463 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ en 20.325 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.326)-(20.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.*

Teorema 369 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{18.392}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 464 (Definición 3.1, Dai y Meyn [95]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}\left(t\right) = \left(\overline{Q}_1\left(t\right), \ldots, \overline{Q}_K\left(t\right)\right)^{'}$ y $\overline{T}\left(t\right) = \left(\overline{T}_1\left(t\right), \ldots, \overline{T}_K\left(t\right)\right)^{'}$*

$$\overline{Q}_k\left(t\right) = \overline{Q}_k\left(0\right) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k\left(t\right) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk}\mu_l \overline{T}_l\left(t\right) \tag{18.393}$$

$$\overline{Q}_k\left(t\right) \geq 0 \;\textit{para}\; k = 1, 2, \ldots, K, \tag{18.394}$$

$$\overline{T}_k\left(0\right) = 0, \;\; y\; \overline{T}_k\left(\cdot\right) \;\; \textit{es no decreciente}, \tag{18.395}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k\in C_i}\overline{T}_k(t) \;\; es\; no\; decreciente \tag{18.396}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \;\; se\; incrementa\; al\; tiempo\; t\; cuando \; \sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{18.397}$$

$$condiciones\; adicionales\; sobre\; \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \; referentes\; a\; la\; disciplina\; de\; servicio \tag{18.398}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 465 (Definición 3.2, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{18.399}$$

Definición 466 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 51 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

18.34 Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad

18.35 Teorema 2.1

El resultado principal de Down [99] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 370 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, *y para cada condición inicial* $x \in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \sup \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{18.400}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{18.401}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$. *Donde* π *es la probabilidad invariante para* $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right] = 0. \tag{18.402}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right], \; \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{18.403}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

Proposición 115 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{18.404}$$

Lema 52 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta\left(k\right):k\in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{18.405}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r:t\geq1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 371 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{18.406}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 372 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{18.407}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q\left(0\right)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 373 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_f=0. \tag{18.408}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 374 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_X\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{18.409}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

18.36 Teorema 2.2

Teorema 375 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{18.410}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{18.411}$$

18.37 Teorema 2.3

Teorema 376 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{18.412}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 476.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 532

18.38 Definiciones Básicas

Definición 467. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 468. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 469. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 470. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 471. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 472. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 473. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 474. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 475. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{18.413}$$

Nota 45. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (20.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{18.414}$$

Teorema 377. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{18.415}$$

en $\{T < \infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 116. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{\left|x\right|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{\left|x\right|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{\left|x\right|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{\left|x\right|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 98 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 378 (Teorema 5.2 [91]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 379 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$, *para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 99 (Lema 5.2 [106]). *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r}\tag{18.416}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 380 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 117 (Proposicin 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{18.417}$$

Proposición 118 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{18.418}$$

Proposición 119 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{18.419}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 381 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{18.420}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{18.421}$$

Teorema 382 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c, \cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 383 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

18.39 Proceso de Estados Markoviano para el Sistema

Sean $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ el tiempo residual de arribos a la cola k, para cada servidor m, sea $H_m(t)$ par ordenado que consiste en la cola que está siendo atendida y la política de servicio que se está utilizando. $B_m(t)$ los tiempos de servicio residuales, $B_m^0(t)$ el tiempo residual de traslado, $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H_m(t)$.

El proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{18.422}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{18.423}$$
$$P(\xi_k(1) + \ldots \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\, dx0 \text{ y} \tag{18.424}$$
$$\int_0^\infty q_k(x)\, dx > 0 \tag{18.425}$$

18.40 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho, Sharpe [123], en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$.

Se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable.

Definición 476. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 477. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 478. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 479. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{18.426}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 384. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

18.41 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 480. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{78}. \tag{18.427}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov [79] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{18.429}$$

Definición 481. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 46. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{18.430}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

18.42 Primer Condición de Regularidad

Definición 482. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 483 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 484. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;

[78] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[79]
$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{18.428}$$

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$*,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{18.431}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$*.*

Definición 485 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \to f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 486. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de* (P_t)*.*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a* $\mathcal{G}_t$*.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Definición 487. *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{F}$ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* X*, la pareja* $(X, \mathcal{F})$ *es llamado espacio medible. Un subconjunto* A *de* X *es llamado medible, o medible con respecto a* $\mathcal{F}$*, si* $A \in \mathcal{F}$*.*

Definición 488. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *espacio de medida. Se dice que la medida* μ *es* σ*-finita si se puede escribir* $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ *con* $X_n \in \mathcal{F}$ *y* $\mu(X_n) < \infty$*.*

Definición 489. *Sea* X *el conjunto de los úmeros reales* $\mathbb{R}$*. El álgebra de Borel es la* σ*-álgebra* B *generada por los intervalos abiertos* $(a, b) \in \mathbb{R}$*. Cualquier conjunto en* B *es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 490. *Una función* $f : X \to \mathbb{R}$*, es medible si para cualquier número real* α *el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X*. Equivalentemente, se dice que* f *es medible si*

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 491. *Sean* $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$*,* $i = 1, 2, \ldots,$ *espacios medibles y* $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ *el conjunto de todas las sucesiones* $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ *tales que* $\omega_i \in \Omega_i$*,* $i = 1, 2, \ldots,$*. Si* $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$*, definimos* $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$*. Al conjunto* B_n *se le llama* cilindro *con base* B^n*, el cilindro es llamado medible si* $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$*.*

Definición 492. *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de* σ*-álgebras* $\mathcal{F}_t$*, para* $t \geq 0$*, si para* $s < t$ *implica que* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$*, y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}_t$*-medible para cada* t*. Si no se especifica* $\mathcal{F}_t$ *entonces se toma* $\mathcal{F}_t$ *como* $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$*, la más pequeña* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω *que hace que cada* $X(s)$*, con* $s \leq t$ *sea Borel medible.*

Definición 493. *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ *familia creciente de sub* σ*-álgebras. es decir,* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *para* $s \leq t$*. Un tiempo de paro para* $\mathcal{F}(t)$ *es una función* $T : \Omega \to [0, \infty]$ *tal que* $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ *para cada* $t \geq 0$*. Un tiempo de paro para el proceso estocástico* $X(t), t \geq 0$ *es un tiempo de paro para las* σ*-álgebras* $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$*.*

Definición 494. *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, con* (S, χ) *espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a* $\{\mathcal{F}(t)\}$*, es decir, si para cualquier* $s, t \in I$*,* I *conjunto de índices,* $s < t$*, se tiene que* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}(t)$*-medible,*

Definición 495. *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a* $\mathcal{F}(t)$ *o que* $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ *es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto* $B \in \chi$*, y* $s, t \in I$*,* $s < t$ *se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{18.432}$$

Nota 47. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (20.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{18.433}$$

Teorema 385. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{18.434}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{18.435}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{18.436}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{18.437}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t)=\begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda\left(n,\phi_n\left(s,\mathbf{z}\right)\right)ds\right), & t<t^*\left(\mathbf{x}\right),\\ 0, & t\geq t^*\left(\mathbf{x}\right)\end{cases} \tag{18.438}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}\left[T_1>t\right]=F\left(t\right)$, ahora sea la variable aleatoria $\left(N,Z\right)$ con distribuición $Q\left(\cdot;\phi_n\left(T_1,\mathbf{z}\right)\right)$. La trayectoria de $\left(\mathbf{x}_t\right)$ para $t\leq T_1$ es[80]

$$\mathbf{x}_t=\left(v_t,\zeta_t\right)=\begin{cases}\left(n,\phi_n\left(t,\mathbf{z}\right)\right), & t<T_1,\\ \left(N,\mathbf{Z}\right), & t=t_1.\end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto T_2-T_1 lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1,T_2,\ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda,T_1>0$ y $T_1-T_2>0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 22 (Supuesto 3.1, Davis [98]). *Sea $N_t:=\sum_t \mathbb{1}_{(t\geq t)}$ el número de saltos en $[0,t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[N_t\right]<\infty \textit{ para toda } t. \tag{18.439}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 496. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 497. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 498. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $\left(E,\mathcal{B}\left(E\right)\right)$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 499. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda\left(E\right)=sup\left\{\lambda\left(K\right):K \textit{ es compacto en } E\right\}. \tag{18.440}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 386. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $\left(E,\mathcal{B}\left(E\right)\right)$ es cerrada.*

18.43 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}\left(E\right)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $\left(X,\mathcal{G},\mathbb{P}\right)$ espacio de probabilidad, $I\subset\mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f\left(X_r\right):r\in I, rleqt,f\in\mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $\left(\mathcal{G}_t\right)$ tal que $\left(X_t\right)$ sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 500. *Una familia $\left(P_{s,t}\right)$ de kernels de Markov en $\left(E,\mathcal{E}\right)$ indexada por pares $s,t\in I$, con $s\leq t$ es una función de transición en $\left(E,\mathcal{E}\right)$, si para todo $r\leq s<t$ en I y todo $x\in E$, $B\in\mathcal{E}$*

$$P_{r,t}\left(x,B\right)=\int_E P_{r,s}\left(x,dy\right)P_{s,t}\left(y,B\right)^{81}. \tag{18.441}$$

[80] Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

[81] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[82] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f(X_t)|\mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t}f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{18.443}$$

Definición 501. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_sf)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 48. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\right\} = P_sf(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{18.444}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

18.44 Primer Condición de Regularidad

Definición 502. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 503 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 504. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \;\; y \;\; X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{18.445}$$

iii) Para cualquier $x \in E$,$\mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 505 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 506. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

[82]
$$\mathbb{P}\left\{H|\mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H|X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{18.442}$$

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 100 (Lema 4.2, Dai[94]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \ u.o.c., \tag{18.446}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{18.447}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{18.448}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 101 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{18.449}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{18.450}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{18.451}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{18.452}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{18.453}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{18.454}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{18.455}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{18.456}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 387 (Teorema 4.1, Dai [94])**.** *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{18.457}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right) \text{ u.o.c.} \tag{18.458}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}\left(t\right) = Q\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - \left(I - P\right)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{18.459}$$

$$\overline{Q}\left(t\right) \geq 0, \tag{18.460}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{18.461}$$

$$\overline{I}\left(t\right) = et - C\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente,} \tag{18.462}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right) d\overline{I}\left(t\right) = 0, \tag{18.463}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{18.464}$$

Definición 507 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en 20.325 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.326)-(20.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$*.*

Teorema 388 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|} Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{18.465}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 508 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$*.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 53 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$*.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 120. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 102 (Lema 3.1 [91])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 389 (Teorema 5.2 [91])**.** *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 390 (Teorema 5.1 [91])**.** *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$, *para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 103 (Lema 5.2 [106])**.** *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r}\tag{18.466}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 391 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106])**.** *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 121 (Proposicin 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{18.467}$$

Proposición 122 (Proposición 5.3 [95]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1+|X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right) \tag{18.468}$$

Proposición 123 (Proposición 5.4 [95]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{18.469}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 392 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{18.470}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{18.471}$$

Teorema 393 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 394 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 124 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{18.472}$$

Lema 54 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^{r}. \tag{18.473}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 395 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{18.474}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 396 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{18.475}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 397 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{18.476}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 398 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\, ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{18.477}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 399 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{18.478}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{18.479}$$

18.45 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]=\overline{N}>0$;

2) $\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(1)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}^{m}r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(i)\right]. \tag{18.480}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}(n)\right\}_{n\geq1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}(n)\right\}_{n\geq1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}<1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [105].

Si denotamos por

- $Q_{k}(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^{T}=\left(Q_{k}(t),A_{k}(t),B_{m}(t),B_{m}^{0}(t),C_{m}(t)\right), \tag{18.481}$$

para $k=1,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X}=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\})^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

18.45.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{18.482}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\, dx, \ 0 \leq a < b. \tag{18.483}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición 666.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [94, 95].

18.46 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [98], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [98], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [95], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [123]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [94, 108].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 509. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right)=\int_{\mathbb{X}}P^{t}\left(x,D\right)\pi\left(dx\right),$$

para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t\geq0$.

Definición 510. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu\left(D\right)>0$ y $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_{x}\left\{\tau_{D}<\infty\right\}\equiv1,$$

cuando $\tau_{D}=inf\left\{t\geq0:X_{t}\in D\right\}$.

Nota 49. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [105]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}\left(\cdot\right)=\int_{\mathbf{X}}P_{x}\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right),$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [95].

Definición 511. *Un conjunto $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t>0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta>0$ tal que*

$$P^{t}\left(x,A\right)\geq\delta\nu\left(A\right),$$

para $x\in D,A\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [94]:

Lema 104 (Lema 3.1, Dai [94])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_{x}\left(\tau_{B}<\infty\right)\equiv1$ y que para algún $\delta>0$ se cumple que*

$$\sup\mathbb{E}_{x}\left[\tau_{B}\left(\delta\right)\right]<\infty, \tag{18.484}$$

donde $\tau_{B}\left(\delta\right)=inf\left\{t\geq\delta:X\left(t\right)\in B\right\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 105 (Lema 3.1, Dai [94])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B=\left\{x\in\mathbb{X}:\left|x\right|\leq k\right\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k>0$.*

Teorema 400 (Teorema 3.1, Dai [94])**.** *Si existe un $\delta>0$ tal que*

$$lim_{\left|x\right|\rightarrow\infty}\frac{1}{\left|x\right|}\mathbb{E}\left|X^{x}\left(\left|x\right|\delta\right)\right|=0, \tag{18.485}$$

donde X^{x} se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (20.358) se cumple para $B=\left\{x\in\mathbb{X}:\left|x\right|\leq k\right\}$ con algún $k>0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

18.47 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x\in\mathbb{X}$, sea

- $Q_{k}^{x}\left(t\right)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^{x}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.

- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{18.486}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [99]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [99, 94, 95].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{18.487}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{18.488}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{18.489}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{18.490}$$

Definición 512 (Definición 4.1, Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (20.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.348)-(20.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 513. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, *se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 401 (Teorema 4.2, Dai [94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{18.491}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 514 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

Lema 55 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por (20.348)-(20.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 402 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{18.492}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{18.493}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{18.494}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{18.495}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 403 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{18.496}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 534.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 532

Dado el proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ definido en (22.11) que describe la dinámica del sistema de visitas cíclicas, si $U(t)$ es el residual de los tiempos de llegada al tiempo t entre dos usuarios consecutivos y $V(t)$ es el residual de los tiempos de servicio al tiempo t para el usuario que estás siendo atendido por el servidor. Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados que puede tomar el proceso X.

Lema 106 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k,$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t\geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea e es un vector de unos, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{ll}1, & S\left(k\right)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema (533):

Teorema 404 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset \mathbf{X}$, con $|x_n|\to\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\to\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right),U^{x_{n_j}}\left(0\right),V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right)\to\left(\overline{Q}\left(0\right),\overline{U},\overline{V}\right),\tag{18.497}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\to\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)\ u.o.c.\tag{18.498}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+},\tag{18.499}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0,\tag{18.500}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\ \text{es no decreciente y comienza en cero,}\tag{18.501}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right)\ \text{es no decreciente,}\tag{18.502}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0,\tag{18.503}$$

$$\text{Condiciones en }\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola,}\tag{18.504}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 125 (Proposición 4.2, Dai [94]). *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de 20.347 y suponga que cuando $x\to\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_k^x\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_k^x\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_k^{x,0}\left(0\right)\right)\to\left(\overline{Q}_k\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. El flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^{0}(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0)=\overline{T}^{0}(0)=0$.

ii) Para todo $t\geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}(t)+\overline{T}_{k}^{0}(t)\right]=t.$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}(t)=\overline{Q}_{k}(0)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}(t).$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}(t)=\rho_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}(t)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}(t)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}(t).$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}(t)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}(t),$$

para $\overline{Q}_{k}(t)>0$.

Lema 107 (Lema 3.1, Chen [91])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Lema 108 (Lema 5.2, Gut [106])**.** *Sea* $\{\xi(k):k\in\mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0,\infty)$*, y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t)=max\left\{n\geq 1:\xi(1)+\cdots+\xi(n-1)\leq t\right\}.$$

Si $E[\xi(1)]<\infty$*, entonces para cualquier entero* $r\geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E[\xi_{1}]}\right)^{r}, \tag{18.505}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$.

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 405 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo, Gut [106])**.** *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}(X_{1}]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r}\rightarrow\frac{1}{\mu^{r}}$*, cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$.

Proposición 126 (Proposición 5.1, Dai y Sean [95])**.** *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_{0}>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X(t_{0}|x|)|^{p+1}\right]=0. \tag{18.506}$$

Proposición 127 (Proposición 5.3, Dai y Sean [95])**.** *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1}<\infty$, $\delta>0$ *y un conjunto compacto* $C\subset X$.

$$\mathbb{E}_{x}\left[\int_{0}^{\tau_{C}(\delta)}\left(1+|X(t)|^{p}\right)dt\right]\leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right). \tag{18.507}$$

Proposición 128 (Proposición 5.4, Dai y Sean [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right],$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{18.508}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 406 (Teorema 5.5, Dai y Sean [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\}, \tag{18.509}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p. \tag{18.510}$$

Teorema 407 (Teorema 6.2 Dai y Sean [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0,$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty,$$

donde

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_f = sup_{|g\leq f|} | \int \pi(dy)\, g(y) - \int P^t(x,dy)\, g(y) |,$$

para $x \in \mathbb{X}$.

Teorema 408 (Teorema 6.3, Dai y Sean [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)} \left| P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \right|_f = 0,$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)} |\mathbb{E}_x [Q_t] - \mathbb{E}_\pi [Q_0]| = 0.$$

Proposición 129 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0. \tag{18.511}$$

Teorema 409 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\}, \tag{18.512}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 410 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_o^t f\left(X\left(s\right)\right) ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right) \pi\left(dx\right), \tag{18.513}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 411 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \; T \geq 0, \tag{18.514}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{18.515}$$

Demostración 3 (Teorema 534). *La demostración de este teorema se da a continuación:*

i) Utilizando la proposición 127 se tiene que la proposición 128 es cierta para $f\left(x\right) = 1 + |x|^p$.

i) es consecuencia directa del Teorema 526.

iii) ver la demostración dada en Dai y Sean [95] páginas 1901-1902.

iv) ver Dai y Sean [95] páginas 1902-1903 ó [117].

18.47.1 Modelo de Flujo y Estabilidad

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k\left(n\right) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k\left(i\right). \tag{18.516}$$

suponiendo que el estado inicial de la red es $x = (q, a, b) \in X$, entonces para cada k

$$E_k^x\left(t\right) := \max\left\{n \geq 0 : A_k^x\left(0\right) + \psi_k\left(1\right) + \cdots + \psi_k\left(n-1\right) \leq t\right\} \tag{18.517}$$

$$S_k^x\left(t\right) := \max\left\{n \geq 0 : B_k^x\left(0\right) + \eta_k\left(1\right) + \cdots + \eta_k\left(n-1\right) \leq t\right\} \tag{18.518}$$

Sea $T_k^x\left(t\right)$ el tiempo acumulado que el servidor $s\left(k\right)$ ha utilizado en los usuarios de la clase k en el intervalo $[0, t]$. Entonces se tienen las siguientes ecuaciones:

$$Q_k^x\left(t\right) = Q_k^x\left(0\right) + E_k^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{k} \Phi_k^l S_l^x\left(T_l^x\right) - S_k^x\left(T_k^x\right) \tag{18.519}$$

$$Q^x\left(t\right) = \left(Q_1^x\left(t\right), \ldots, Q_K^x\left(t\right)\right)^{'} \geq 0, \tag{18.520}$$

$$T^x\left(t\right) = \left(T_1^x\left(t\right), \ldots, T_K^x\left(t\right)\right)^{'} \geq 0, \text{ es no decreciente} \tag{18.521}$$

$$I_i^x\left(t\right) = t - \sum_{k\in C_i} T_k^x\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{18.522}$$

$$\int_0^\infty \sum_{k\in C_i} Q_k^x\left(t\right) dI_i^x\left(t\right) = 0 \tag{18.523}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x\left(\cdot\right), T^x\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{18.524}$$

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{18.525}$$

Cualquier límite $\overline{Q}\left(t\right)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola. Si se hace $|q|\rightarrow\infty$ y se mantienen las componentes restantes fijas, de la condición inicial x, cualquier punto límite del proceso normalizado $\overline{Q}^{x}$ es una solución del siguiente modelo de flujo, ver [94].

Definición 515. *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}\left(t\right) \tag{18.526}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{18.527}$$

$$\overline{T}_{k}\left(0\right)=0,\ \text{ y } \overline{T}_{k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente}, \tag{18.528}$$

$$\overline{I}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{k\in C_{i}}\overline{T}_{k}\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{18.529}$$

$$\overline{I}_{i}\left(\cdot\right) \text{ se incrementa al tiempot cuando } \sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0 \tag{18.530}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{18.531}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 516. *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}\left(0\right),\overline{B}\left(0\right)\right)\in\mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=\overline{Q}\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{A}\left(0\right)\right)^{+}-\left(I-P^{'}\right)M\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{B}\left(0\right)\right)^{+} \tag{18.532}$$

Definición 517. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$, *con* $t\geq t_{0}$, *para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.

El siguiente resultado se encuentra en [91].

Lema 56. *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_{0}>0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$ *para cualquier* $t\geq t_{0}$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|overlinex|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq 1$.

18.47.2 Resultados principales

Supuestos necesarios sobre la red

Supuestos 23. *A1)* $\psi_{1},\ldots,\psi_{K},\eta_{1},\ldots,\eta_{K}$ *son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) Para algún entero $p\geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\psi_{l}\left(1\right)^{p+1}\right]<\infty \text{ para } l\in\mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)^{p+1}\right]<\infty \text{ para } k=1,\ldots,K.$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\psi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{18.533}$$
$$P(\psi_k(1) + \ldots \psi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\,dx0 \text{ y} \tag{18.534}$$
$$\int_0^\infty q_k(x)\,dx > 0 \tag{18.535}$$

El argumento dado en [?] en el lema 71 se puede aplicar para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños.Entonces la condición $A3$) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 412. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] ds \leq \kappa_p \tag{18.536}$$

donde p es el entero dado por A2). Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r \tag{18.537}$$

para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

iii) EL primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0. \tag{18.538}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \tag{18.539}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

Demostración 4. *La demostración de este resultado se da aplicando los teoremas 484, 526, 527 y 487*

18.47.3 Definiciones Generales

Definimos un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada. Bajo cualquier *preemptive buffer priority* disciplina de servicio, el estado $\mathbb{X}(t)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}(t) = (Q_k(t), A_l(t), B_k(t) : k = 1, 2, \ldots, K, l \in \mathcal{A}) \tag{18.540}$$

donde $Q_k(t)$ es la longitud de la cola para los usuarios de la clase k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k(t)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio. Los tiempos de arribo residuales, que son iguales al tiempo que queda hasta que el próximo usuario de la clase k llega, se denotan por $A_k(t)$. Tanto $B_k(t)$ como $A_k(t)$ se suponen continuos por la derecha.

Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x = (q, a, b)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = (q, a, b) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x| = |q| + |a| + |b|$. En [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho en el espacio de estadio medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, est definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y est adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; $\{P_x, x \in X\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in X$

$$P_x \{\mathbb{X}(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{\mathbb{X}(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la sigma algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(\mathbb{X}(t) \in D)$$

Definición 518. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_X P^t(x, D) \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 519. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

- Si X es Harris recurrente, entonces una única medida invariante π existe ([105]).
- Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama *Harris recurrente positiva.*
- Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria y hacemos

  $$P_\pi(\cdot) [= \int_X P_x(\cdot) \pi(dx)$$

  y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, as, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π

Definición 520. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.[83]

[83]En [116] muestran que si $P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ solamente para uno conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris recurrente

18.47.4 Definiciones y Descripción del Modelo

El modelo está compuesto por c colas de capacidad infinita, etiquetadas de 1 a c las cuales son atendidas por s servidores. Los servidores atienden de acuerdo a una cadena de Markov independiente $\left(X_n^i\right)_n$ con $1 \leq i \leq s$ y $n \in \{1, 2, \ldots, c\}$ con la misma matriz de transición $r_{k,l}$ y única medida invariante (p_k). Cada servidor permanece atendiendo en la cola un periodo llamado de visita y determinada por la política de servicio asignada a la cola.

Los usuarios llegan a la cola k con una tasa λ_k y son atendidos a una razón μ_k. Las sucesiones de tiempos de interarribo $\left(\tau_k\left(n\right)\right)_n$, la de tiempos de servicio $\left(\sigma_k^i\left(n\right)\right)_n$ y la de tiempos de cambio $\left(\sigma_{k,l}^{0,i}\left(n\right)\right)_n$ requeridas en la cola k para el servidor i son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas con distribución general independiente de i, con media $\sigma_k = \frac{1}{\mu_k}$, respectivamente $\sigma_{k,l}^0 = \frac{1}{\mu_{k,l}^0}$, e independiente de las cadenas de Markov $\left(X_n^i\right)_n$. Además se supone que los tiempos de interarribo se asume son acotados, para cada $\rho_k = \lambda_k \sigma_k < s$ para asegurar la estabilidad de la cola k cuando opera como una cola $M/GM/1$.

18.47.5 Políticas de Servicio

Una política de servicio determina el número de usuarios que serán atendidos sin interrupción en periodo de servicio por los servidores que atienden a la cola. Para un solo servidor esta se define a través de una función f donde $f\left(x, a\right)$ es el número de usuarios que son atendidos sin interrupción cuando el servidor llega a la cola y encuentra x usuarios esperando dado el tiempo transcurrido de interarribo a. Sea $v\left(x, a\right)$ la duración del periodo de servicio para una sola condición inicial $\left(x, a\right)$.

Las políticas de servicio consideradas satisfacen las siguientes propiedades:

i) Hay conservación del trabajo, es decir

$$v\left(x, a\right) = \sum_{l=1}^{f(x,a)} \sigma\left(l\right)$$

con $f\left(0, a\right) = v\left(0, a\right) = 0$, donde $\left(\sigma\left(l\right)\right)_l$ es una sucesión independiente e idénticamente distribuida de los tiempos de servicio solicitados.

ii) La selección de usuarios para se atendidos es independiente de sus correspondientes tiempos de servicio y del pasado hasta el inicio del periodo de servicio. Así las distribución $\left(f, v\right)$ no depende del orden en el cuál son atendidos los usuarios.

iii) La política de servicio es monótona en el sentido de que para cada $a \geq 0$ los números $f\left(x, a\right)$ son monótonos en distribución en x y su límite en distribución cuando $x \rightarrow \infty$ es una variable aleatoria F^{*0} que no depende de a.

iv) El número de usuarios atendidos por cada servidor es acotado por $f^{min}\left(x\right)$ de la longitud de la cola x que además converge monótonamente en distribución a F^* cuando $x \rightarrow \infty$

18.47.6 Proceso de Estados

El sistema de colas se describe por medio del proceso de Markov $\left(X\left(t\right)\right)_{t\in\mathbb{R}}$ como se define a continuación. El estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X\left(t\right) = \left(Q\left(t\right), P\left(t\right), A\left(t\right), R\left(t\right), C\left(t\right)\right)$$

donde

- $Q\left(t\right) = \left(Q_k\left(t\right)\right)_{k=1}^c$, número de usuarios en la cola k al tiempo t.
- $P\left(t\right) = \left(P^i\left(t\right)\right)_{i=1}^s$, es la posición del servidor i.
- $A\left(t\right) = \left(A_k\left(t\right)\right)_{k=1}^c$, es el residual del tiempo de arribo en la cola k al tiempo t.
- $R\left(t\right) = \left(R_k^i\left(t\right), R_{k,l}^{0,i}\left(t\right)\right)_{k,l,i=1}^{c,c,s}$, el primero es el residual del tiempo de servicio del usuario atendido por servidor i en la cola k al tiempo t, la segunda componente es el residual del tiempo de cambio del servidor i de la cola k a la cola l al tiempo t.

- $C(t) = \left(C_k^i(t)\right)_{k,i=1}^{c,s}$, es la componente correspondiente a la cola k y al servidor i que está determinada por la política de servicio en la cola k y que hace al proceso $X(t)$ un proceso de Markov.

Todos los procesos definidos arriba se suponen continuos por la derecha.

El proceso X tiene la propiedad fuerte de Markov y su espacio de estados es el espacio producto

$$\mathcal{X} = \mathbb{N}^c \times E^s \times \mathbb{R}_+^c \times \mathbb{R}_+^{cs} \times \mathbb{R}_+^{c^2 s} \times \mathcal{C}$$

donde $E = \{1, 2, \ldots, c\}^2 \cup \{1, 2, \ldots, c\}$ y $\mathcal{C}$ depende de las políticas de servicio.

18.47.7 Introducción

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1. $$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0 \tag{18.541}$$

2. $$\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N} \tag{18.542}$$

   para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j'}^m = r_{j,j'}$
- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define
$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right]. \tag{18.543}$$

18.47.8 Colas Cíclicas

El *token passing ring* es una estación de un solo servidor con K clases de usuarios. Cada clase tiene su propio regulador en la estación. Los usuarios llegan al regulador con razón α_k y son atendidos con taza μ_k.

La red se puede modelar como un Proceso de Markov con espacio de estados continuo, continuo en el tiempo:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t), B_k^0(t), C(t) : k = 1, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right) \tag{18.544}$$

donde $Q_k(t), B_k(t)$ y $A_k(t)$ se define como en 20.210, $B_k^0(t)$ es el tiempo residual de cambio de la clase k a la clase $k+1\,(modK)$; $C(t)$ indica el número de servicios que han sido comenzados y/o completados durante la sesión activa del buffer.

Los parámetros cruciales son la carga nominal de la cola k: $\beta_k = \alpha_k/\mu_k$ y la carga total es $\rho_0 = \sum \beta_k$, la media total del tiempo de cambio en un ciclo del token está definido por

$$u^0 = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}\left[\eta_k^0(1)\right] = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\mu_k^0} \tag{18.545}$$

El proceso de la longitud de la cola $Q_k^x(t)$ y el proceso de acumulación del tiempo de servicio $T_k^x(t)$ para el buffer k y para el estado inicial x se definen como antes. Sea $T_k^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo

t que el token tarda en cambiar del buffer k al $k+1 \mod K$. Suponga que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^{x,0}(|x|t)\right) \tag{18.546}$$

cuando $|x| \to \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t), \overline{T}^0(t)\right)$ es un flujo límite retrasado del token ring.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado

Proposición 130. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \dots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

18.47.9 Resultados Previos

Lema 57. *El proceso estocástico Φ es un proceso de markov fuerte, temporalmente homogéneo, con trayectorias muestrales continuas por la derecha, cuyo espacio de estados Y es igual a $X \times \mathbb{R}$*

Proposición 131. *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{18.547}$$

Lema 58. *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{18.548}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 413. *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p \left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{18.549}$$

para $t > 0$ *y* $x \in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 414. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$|\left|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right||_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{18.550}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 415. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con* $f(x) = f_1(x)$ *se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\left|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right||_f = 0. \tag{18.551}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0.$$

Teorema 416. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea* ν *cualquier distribución de probabilidad en* $(X, \mathcal{B}_X)$, *y* π *la distribución estacionaria de* X.

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\, ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{18.552}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *con* $\pi(|f|) < \infty$, *la ecuación anterior se cumple.*

18.47.10 Teorema de Estabilidad: Descripción

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1.
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0 \tag{18.553}$$

2.
$$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N} \tag{18.554}$$

   para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m} = r_{j,j^{'}}$

- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right]. \qquad (18.555)$$

18.48 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(\omega)\right] = \overline{N} > 0$;
2) $\mathbb{E}\left[N(\omega)\right] \leq \overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j'}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}^{m}(n)$, con $\delta_{j,j'}^{m}(n)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}^{m}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\left\{p_j^m\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j^m r_{j,j'}^m \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}^m(i)\right]. \qquad (18.556)$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^{K}\rho_k < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [105].

Si denotamos por

- $Q_k(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;

- $B_m(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_m^0(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right), \tag{18.557}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

18.48.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{18.558}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{18.559}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición 666.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [94, 95].

18.49 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [98], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [98], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [95], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [123]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [94, 108].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 521. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D) \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 522. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 50. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [105]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot) \pi(dx),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [95].

Definición 523. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [94]:

Lema 109 (Lema 3.1, Dai [94])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{18.560}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 110 (Lema 3.1, Dai [94])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 417 (Teorema 3.1, Dai [94])**.** *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{18.561}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (20.358) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

18.50 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{18.562}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [99]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [99, 94, 95].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{18.563}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{18.564}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{18.565}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{18.566}$$

Definición 524 (Definición 4.1, Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (20.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.348)-(20.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 525. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 418 (Teorema 4.2, Dai [94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{18.567}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 526 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$*.*

Lema 59 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por (20.348)-(20.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$*.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 419 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p*, y para cada condición inicial* $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{18.568}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{18.569}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$*. Donde* π *es la probabilidad invariante para* X*.*

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}*:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{18.570}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{18.571}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$*.*

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 420 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{18.572}$$

i) Si $\rho < 1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 534.*

ii) Si $\rho > 1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 532*

18.51 Modelo de Flujo

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Sea x el número de usuarios en la cola esperando por servicio y $N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política dada y fija mientras el servidor permanece dando servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]=\overline{N}>0. \qquad (18.573)$$

(S2.)

$$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]\leq\overline{N}, \qquad (18.574)$$

para cualquier valor de x.

El tiempo que tarda un servidor en volver a dar servicio después de abandonar la cola inmediata anterior y llegar a la próxima se llama tiempo de traslado o de cambio de cola, al momento de la n-ésima visita del servidor a la cola j se genera una sucesión de variables aleatorias $\delta_{j,j+1}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con la propiedad de que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]\geq0$.

Se define

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j+1}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]. \qquad (18.575)$$

Los tiempos entre arribos a la cola k, son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos. Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho<1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Para el caso más sencillo podemos definir un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada, el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}\left(t\right)=\left(Q_{k}\left(t\right),A_{l}\left(t\right),B_{k}\left(t\right):k=1,2,\ldots,K,l\in\mathcal{A}\right), \qquad (18.576)$$

donde $Q_{k}\left(t\right)$ es la longitud de la cola k para los usuarios esperando servicio, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_{k}\left(t\right)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio.

Los tiempos entre arribos residuales, que son el tiempo que queda hasta que el próximo usuario llega a la cola para recibir servicio, se denotan por $A_{k}\left(t\right)$. Tanto $B_{k}\left(t\right)$ como $A_{k}\left(t\right)$ se suponen continuos por la derecha [**?**].

Sea $\mathcal{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$, y sea $x=\left(q,a,b\right)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $\left|q\right|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x=\left(q,a,b\right)\in\mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\left\|x\right\|=\left|q\right|+\left|a\right|+\left|b\right|$. En [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$\left(\left(\Omega,\mathcal{F}\right),\mathcal{F}_{t},\mathbb{X}\left(t\right),\theta_{t},P_{x}\right)$$

es un proceso de *Borel Derecho* en el espacio de estados medible $\left(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}}\right)$.

Sea $P^{t}\left(x,D\right)$, $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t\geq0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^{t}\left(x,D\right)=P_{x}\left(\mathbb{X}\left(t\right)\in D\right).$$

Definición 527. *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right)=\int_{X}P^{t}\left(x,D\right)\pi\left(dx\right),$$

para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t\geq0$.

Definición 528. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad* ν *en* $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$*, tal que si* $\nu(D) > 0$ *y* $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

Definición 529. *Un conjunto* $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ *es llamado pequeño si existe un* $t > 0$*, una medida de probabilidad* ν *en* $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*, y un* $\delta > 0$ *tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

Nota 51. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante* π *([105]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso a la medida se le llama ***Harris recurrente positiva****.*

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π *denota la ditribución estacionaria; se define*

$$P_\pi(\cdot) = \int_X P_x(\cdot)\,\pi(dx).$$

Se utiliza E_π *para denotar el operador esperanza correspondiente, así, el proceso* $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ *es un proceso estrictamente estacionario bajo* P_π.

iv) En [116] se muestra que si $P_x\{\tau_D < \infty\} = 1$ *incluso para solamente un conjunto pequeño, entonces el proceso de Harris es recurrente.*

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\right) \tag{18.577}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{18.578}$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([94]).

Dada una condición inicial $x \in \mathcal{X}$, $Q_k^x(t)$ es la longitud de la cola k al tiempo t y $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en atender a los usuarios de la cola k. De igual manera se define $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en cambiar de cola para volver a atender a los usuarios.

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t), \tag{18.579}$$

$$\overline{T}_{m}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} T_{m}^{x}(|x|t), \tag{18.580}$$

$$\overline{T}_{m}^{x,0}(t) = \frac{1}{|x|} T_{m}^{x,0}(|x|t). \tag{18.581}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola, al conjunto de todos los posibles flujos límite se le llamará **modelo de flujo**, ([?]).

Definición 530. *Un flujo límite para un sistema de visitas bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{18.582}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{18.583}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{18.584}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^{0}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ param} = 1, 2, \ldots, M \tag{18.585}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en (20.216)-(20.219) se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Definición 531. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

18.52 Estabilidad de los Sistemas de Visitas Cíclicas

Es necesario realizar los siguientes supuestos, ver ([?]) y ([95]):

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{18.586}$$

$$P(\xi_k(1) + \ldots \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\, dx 0 \text{ y} \tag{18.587}$$

$$\int_0^{\infty} q_k(x)\, dx > 0 \tag{18.588}$$

En [?] ser da un argumento para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños. Entonces la condición A3) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 421. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] ds \leq \kappa_p \tag{18.589}$$

donde p es el entero dado por A2).

Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r \tag{18.590}$$

para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0. \tag{18.591}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \tag{18.592}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

Teorema 422. *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \text{ con } T \geq 0, \tag{18.593}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{18.594}$$

18.53 Resultados principales

En el caso particular de un modelo con un solo servidor, $M = 1$, se tiene que si se define

Definición 532.

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + \max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\overline{N}}\right)\delta^*. \tag{18.595}$$

entonces

Teorema 423. *i) Si $\rho < 1$, entonces la red es estable, es decir el teorema (488) se cumple.*

ii) De lo contrario, es decir, si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, el teorema (489).

18.54 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right] = \overline{N} > 0$;

2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right] \leq \overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(1\right)\right] \geq 0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*} := \sum_{j,j^{'}} p_{j}^{m} r_{j,j^{'}}^{m} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(i\right)\right]. \tag{18.596}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k} = \lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^{K}\rho_{k} < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [105].

Si denotamos por

- $Q_{k}\left(t\right)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}\left(t\right)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}\left(t\right)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X\left(t\right)^{T} = \left(Q_{k}\left(t\right), A_{k}\left(t\right), B_{m}\left(t\right), B_{m}^{0}\left(t\right), C_{m}\left(t\right)\right), \tag{18.597}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \left(\left\{1, 2, \ldots, K\right\} \times \left\{1, 2, \ldots, S\right\}\right)^{M} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

18.54.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_{1}, \ldots, \xi_{K}, \eta_{1}, \ldots, \eta_{K}$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_{l}\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{18.598}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\, dx, \ 0 \leq a < b. \tag{18.599}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición 666.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [94, 95].

18.55 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [98], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [98], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [95], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [123]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [94, 108].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 533. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D)\, \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 534. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 52. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [105]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}\left(\cdot\right)=\int_{\mathbf{X}}P_{x}\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right),$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [95].

Definición 535. *Un conjunto $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t>0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta>0$ tal que*

$$P^{t}\left(x,A\right)\geq\delta\nu\left(A\right),$$

para $x\in D, A\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [94]:

Lema 111 (Lema 3.1, Dai [94]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_{x}\left(\tau_{B}<\infty\right)\equiv1$ y que para algún $\delta>0$ se cumple que*

$$\sup\mathbb{E}_{x}\left[\tau_{B}\left(\delta\right)\right]<\infty,\tag{18.600}$$

donde $\tau_{B}\left(\delta\right)=inf\left\{t\geq\delta:X\left(t\right)\in B\right\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 112 (Lema 3.1, Dai [94]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B=\left\{x\in\mathbb{X}:|x|\leq k\right\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k>0$.*

Teorema 424 (Teorema 3.1, Dai [94]). *Si existe un $\delta>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^{x}\left(|x|\delta\right)|=0,\tag{18.601}$$

donde X^{x} se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (20.358) se cumple para $B=\left\{x\in\mathbb{X}:|x|\leq k\right\}$ con algún $k>0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

18.56 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x\in\mathbb{X}$, sea

- $Q_{k}^{x}\left(t\right)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^{x}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ para $m=1,2,\ldots,M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x,0}\left(|x|t\right)\right)\tag{18.602}$$

para $m=1,2,\ldots,M$, cuando $x\rightarrow\infty$, ver [99]. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}_{m}\left(t\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(t\right)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [99, 94, 95].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{18.603}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{18.604}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{18.605}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}^{0}_{m,k}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{18.606}$$

Definición 536 (Definición 4.1, Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^{0}(\cdot)\right)$ *en (20.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.348)-(20.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 537. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 425 (Teorema 4.2, Dai [94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t). \tag{18.607}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 538 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 60 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por (20.348)-(20.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 426 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p \right] ds \leq \kappa_p, \tag{18.608}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right]\leq\kappa_{r}, \tag{18.609}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$. *Donde* π *es la probabilidad invariante para* X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}*:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)\right]|=0. \tag{18.610}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-}c.s. \tag{18.611}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 427 (Teorema 2.3, Down [99])**.** *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_{j}}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_{s}}\right)\delta^{*} \tag{18.612}$$

i) Si $\rho<1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 534.*

ii) Si $\rho>1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 532*

18.57 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N\left(\omega\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]=\overline{N}>0$;

2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(1\right)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.

- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j^m r_{j,j'}^m \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}^m (i)\right]. \tag{18.613}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [105].

Si denotamos por

- $Q_k(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_m(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_m^0(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right), \tag{18.614}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

18.57.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{18.615}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{18.616}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición 666.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3'$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [94, 95].

18.58 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [98], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [98], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [95], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [123]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x, x \in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1,$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right)|\mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right),$$

en $\left\{\tau < \infty\right\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [94, 108].

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right).$$

Definición 539. *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right) = \int_{\mathbb{X}} P^t\left(x, D\right)\pi\left(dx\right),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 540. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$, tal que si $\nu\left(D\right) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\left\{t \geq 0 : X_t \in D\right\}$.

Nota 53. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [105]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi\left(\cdot\right) = \int_{\mathbf{X}} P_x\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [95].

Definición 541. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t\left(x, A\right) \geq \delta\nu\left(A\right),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [94]:

Lema 113 (Lema 3.1, Dai [94]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x \left[\tau_B(\delta)\right] < \infty, \tag{18.617}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf \{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 114 (Lema 3.1, Dai [94]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 428 (Teorema 3.1, Dai [94]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{18.618}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (20.358) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

18.59 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{18.619}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$, ver [99]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [99, 94, 95].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{18.620}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{18.621}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{18.622}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{18.623}$$

Definición 542 (Definición 4.1, Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ *en (20.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.348)-(20.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 543. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 429 (Teorema 4.2, Dai [94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right). \tag{18.624}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 544 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$.

Lema 61 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por (20.348)-(20.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 430 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p*, y para cada condición inicial* $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds \leq \kappa_p, \tag{18.625}$$

donde p *es el entero dado en (A2).*

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right] = \mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right] \leq \kappa_r, \tag{18.626}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$*. Donde* π *es la probabilidad invariante para* X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}*:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)\right]| = 0. \tag{18.627}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds = \mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-c.s.} \tag{18.628}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 431 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{18.629}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 534.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 532

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

18.59.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\xi_l\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y}\\
\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k\left(1\right) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{18.630}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k\left(i\right) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k\left(x\right)dx, \; 0 \leq a < b. \tag{18.631}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición 666.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [94, 95].

18.60 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [98], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [98], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [95], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [123]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [94, 108].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 545. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D) \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 546. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 54. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [105]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot) \pi(dx),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [95].

Definición 547. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [94]:

Lema 115 (Lema 3.1, Dai [94])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{18.632}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 116 (Lema 3.1, Dai [94])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 432 (Teorema 3.1, Dai [94])**.** *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{18.633}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (20.358) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1)$-$A3)$, lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

18.61 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{18.634}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [99]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [99, 94, 95].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{18.635}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{18.636}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{18.637}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{18.638}$$

Definición 548 (Definición 4.1, Dai [94])**.** *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (20.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.348)-(20.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 549. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 433 (Teorema 4.2, Dai [94])**.** *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{18.639}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 550 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

Lema 62 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por (20.348)-(20.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 434 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p*, y para cada condición inicial* $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{18.640}$$

donde p *es el entero dado en (A2).*

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x \left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{18.641}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$*. Donde* π *es la probabilidad invariante para* X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}*:*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x \left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{18.642}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{18.643}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 435 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{18.644}$$

i) Si $\rho < 1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 534.*

ii) Si $\rho > 1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 532*

18.62 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]=\overline{N}>0$;

2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(1\right)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}^{m}r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(i\right)\right]. \tag{18.645}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}<1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [105].

Si denotamos por

- $Q_{k}\left(t\right)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}\left(t\right)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}\left(t\right)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X\left(t\right)^{T}=\left(Q_{k}\left(t\right),A_{k}\left(t\right),B_{m}\left(t\right),B_{m}^{0}\left(t\right),C_{m}\left(t\right)\right), \tag{18.646}$$

para $k=1,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X}=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

18.62.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \dots, \xi_K, \eta_1, \dots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \dots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \dots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{18.647}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{18.648}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición 666.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [94, 95].

18.63 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [98], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [98], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [95], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [123]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.
Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [94, 108].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 551. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D)\, \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 552. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 55. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [105]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\, \pi(dx),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [95].

Definición 553. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [94]:

Lema 117 (Lema 3.1, Dai [94])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{18.649}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 118 (Lema 3.1, Dai [94])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 436 (Teorema 3.1, Dai [94])**.** *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{18.650}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (20.358) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

18.64 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.

- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ para $m=1,2,\ldots,M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x,0}\left(|x|t\right)\right) \tag{18.651}$$

para $m=1,2,\ldots,M$, cuando $x\rightarrow\infty$, ver [99]. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}_{m}\left(t\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(t\right)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [99, 94, 95].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\lambda_{k}t-\sum_{m=1}^{M}\mu_{k}\overline{T}_{m,k}\left(t\right), \tag{18.652}$$

para $k=1,2,\ldots,K$.

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K. \tag{18.653}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente,} \tag{18.654}$$

para $k=1,2,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$.

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^{0}\left(t\right)+\overline{T}_{m,k}\left(t\right)=t \text{ para } m=1,2,\ldots,M. \tag{18.655}$$

Definición 554 (Definición 4.1, Dai [94])**.** *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ *en (20.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.348)-(20.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 555. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta>0$ *que depende de* μ,λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv 0$*.*

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 437 (Teorema 4.2, Dai [94])**.** *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right). \tag{18.656}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 556 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95])**.** *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$*, con* $t\geq t_{0}$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$*.*

Lema 63 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por (20.348)-(20.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 438 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{18.657}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{18.658}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{18.659}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{18.660}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 439 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{18.661}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 534.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 532

19 Preliminares: Modelos de Flujo

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]=\overline{N}>0$;

2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(1\right)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}^{m}r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(i\right)\right]. \tag{19.1}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}<1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [105].

Si denotamos por

- $Q_{k}\left(t\right)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}\left(t\right)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}\left(t\right)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X\left(t\right)^{T}=\left(Q_{k}\left(t\right),A_{k}\left(t\right),B_{m}\left(t\right),B_{m}^{0}\left(t\right),C_{m}\left(t\right)\right), \tag{19.2}$$

para $k=1,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X}=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

19.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_{1},\ldots,\xi_{K},\eta_{1},\ldots,\eta_{K}$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p\geq1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_{l}\left(1\right)^{p+1}\right]&<\infty \text{ para } l=1,\ldots,K \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)^{p+1}\right]&<\infty \text{ para } k=1,\ldots,K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{19.3}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{19.4}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición 666.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [94, 95].

19.2 Procesos Regenerativos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.
Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0. \tag{19.5}$$

(S2.)

$$\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}, \tag{19.6}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)] \geq 0$.
- Se define

$$\delta^* := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)]. \tag{19.7}$$

- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\right) \tag{19.8}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{19.9}$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([94])

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

19.3 Preliminares

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0$
2) $\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}$para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j'}^m = r_{j,j'}$
- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(i)\right]. \tag{19.10}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m, se denota por $B_m(t)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t; $B_m^0(t)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t, finalmente sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{19.11}$$

para $k = 1, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \dots, \xi_K, \eta_1, \dots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \dots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \dots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{19.12}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{19.13}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto $A2$) para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición 666.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3'$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

19.4 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [98], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (27), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([98], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [95]

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [123]) en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la σ-algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D)$$

Definición 557. *Una medida no cero π en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ es* **invariante** *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbf{X}} P^t(x, D) \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 558. *El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 56. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [105]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama Proceso Harris recurrente positivo*.*

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot) \pi(dx)$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente.

Definición 559. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [94]:

Lema 119 (Lema 3.1, Dai[94])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{19.14}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris Recurrente Positivo.

Lema 120 (Lema 3.1, Dai [94]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{|x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 440 (Teorema 3.1, Dai[94]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^{x}\left(|x|\delta\right)| = 0, \tag{19.15}$$

entonces la ecuación (20.358) se cumple para $B = \{|x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.

Nota 57. *En Meyn and Tweedie [116] muestran que si $P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1$ incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

20 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathrm{X}$, sea $Q_{k}^{x}\left(t\right)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^{x}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x,0}\left(|x|t\right)\right) \tag{20.1}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}_{m}\left(t\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(t\right)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right) = \overline{Q}_{k}\left(0\right) + \lambda_{k}t - \sum_{m=1}^{M}\mu_{k}\overline{T}_{m,k}\left(t\right) \tag{20.2}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{20.3}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente,} \tag{20.4}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$,

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^{0}\left(t\right) + \overline{T}_{m,k}\left(t\right) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{20.5}$$

De acuerdo a Dai [94], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (20.348)-(20.351), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 560 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ en (20.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.348)-(20.351) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.*

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.348-20.351 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 441 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{20.6}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 561 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 64 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 20.348-20.351 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0>0$ tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 442 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds \leq \kappa_{p}, \tag{20.7}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right] \leq \kappa_{r}, \tag{20.8}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)\right]=0. \tag{20.9}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-}c.s. \tag{20.10}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 443 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_k+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{20.11}$$

i) Si $\rho<1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 534.

ii) Si $\rho<1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 532

Teorema 444. *Sea $(X_n,\mathcal{F}_n,n=0,1,\ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0,χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m,n=0,1,\ldots,$ $m<n$, que por notación se escribirá como $p\left(m,n,x,B\right)\rightarrow p_{mn}\left(x,B\right)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T:\Omega\rightarrow\{0,1,\ldots,\}$. Supóngase que $T\geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B\in\chi_0$, entonces*

$$P\left\{X\left(T\right)\in B,T<\infty|\mathcal{F}\left(S\right)\right\}=p\left(S,T,X\left(s\right),B\right) \tag{20.12}$$

en $\{T<\infty\}$.

20.1 Teorá de Procesos Estocásticos y Medibilidad

Sea K conjunto numerable y sea $d:K\rightarrow\mathbb{N}$ función. Para $v\in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E=\cup_{v\in K}M_v=\left\{(v,\zeta):v\in K,\zeta\in M_v\right\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E}=\left\{\cup_{v\in K}A_v:A_v\in\mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E,\mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t=(v_t,\zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v,v\in K)$.

ii) Una función medible $\lambda:E\rightarrow\mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q:\mathcal{E}\times(E\cup\Gamma^*)\rightarrow[0,1]$ donde

$$\Gamma^*=\cup_{v\in K}\partial^*M_v. \tag{20.13}$$

y

$$\partial^*M_v=\left\{z\in\partial M_v:\phi_{\mathbf{v}}\left(\mathbf{t},\zeta\right)=\mathbf{z}\text{ para alguna }(t,\zeta)\in\mathbb{R}_+\times M_v\right\}. \tag{20.14}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v,v\in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z}\in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v\left(t,\zeta\right)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt}f\left(\zeta_t\right)=\mathcal{H}f\left(\zeta_t\right), \tag{20.15}$$

con $\zeta_0=\mathbf{z}$, para cualquier función suave $f:\mathbb{R}^d\rightarrow\mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H}=\mathcal{H}_v$ y $\zeta_t=\phi\left(t,\mathbf{z}\right)$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t>0$.

Para $\mathbf{x}=(v,\zeta)\in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x}=inf\left\{t>0:\phi_v\left(t,\zeta\right)\in\partial^*M_v\right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v,\zeta)\in E$ existe un $\epsilon>0$ tal que la función $s\rightarrow\lambda\left(v,\phi_v\left(s,\zeta\right)\right)\in E$ es integrable para $s\in[0,\epsilon)$. La medida de transición $Q\left(A;\mathbf{x}\right)$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A\in\mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x}\in E\cup\Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E,\mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x}\in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \\ exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{20.16}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[84]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 24 (Supuesto 3.1, Davis [98]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{20.17}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 562. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 563. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 564. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{20.18}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 445. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 565. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*[85]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B). \tag{20.19}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[86] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \quad s \leq t \in I, \; f \in b\mathcal{E}. \tag{20.21}$$

[84]Revisar página 362, y 364 de Davis [98].
[85]Ecuación de Chapman-Kolmogorov
[86]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \quad H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{20.20}$$

Definición 566. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E, \mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_sf)(x), \ t, s \geq 0, \ x \in E \ f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 58. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_sf(X_t) \ t, s \geq 0, \ f \in b\mathcal{E}. \tag{20.22}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 567. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \to X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 568 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 569. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E, \mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{20.23}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 570 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \to f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 571. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 121 (Lema 4.2, Dai[94])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y
$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n\rightarrow\infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^{k}\left(\left[|x_n|t\right]\right)\rightarrow P_{k}^{'}t,\ u.o.c., \tag{20.24}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow \alpha_{k}\left(t-\overline{U}_{k}\right)^{+},\ u.o.c., \tag{20.25}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow \mu_{k}\left(t-\overline{V}_{k}\right)^{+},\ u.o.c., \tag{20.26}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_{k}=1/m_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$.

Lema 122 (Lema 4.3, Dai[94])**.** *Sea $\{x_n\}\subset \mathbf{X}$ con $|x_n|\rightarrow\infty$, conforme $n\rightarrow\infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}_{k}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}_{k}.$$

a) Conforme $n\rightarrow\infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_{k}-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_{k}-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t\geq0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_{l}^{x}\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_{l}^{x}\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_{l}^{x}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_{k}^{x}\left(t\right)=_{k}^{x}\left(0\right)+E_{k}^{x}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_{k}^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)-S_{k}^{x}\left(T_{k}^{x}\left(t\right)\right) \tag{20.27}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_{i}^{x}\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_{i}}T_{k}^{x}\left(t\right).$$

Entonces $I_{i}^{x}\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t)=0, \tag{20.28}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x(t)=\left(T_1^x(t),\ldots,T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t)=\left(I_1^x(t),\ldots,I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right),\ldots,S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t)=Q^x(0)+E^x(t)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right)-S^x\left(T^x(t)\right), \tag{20.29}$$

$$Q^x(t)\geq 0, \tag{20.30}$$

$$T^x(0)=0,\ \text{y } \overline{T}^x(t)\ \text{ es no decreciente}, \tag{20.31}$$

$$I^x(t)=et-CT^x(t)\ \text{ es no decreciente} \tag{20.32}$$

$$\int_0^{\infty}\left(CQ^x(t)\right)dI_i^x(t)=0, \tag{20.33}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot),\overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{20.34}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\begin{cases}1, & S(k)=i,\\ 0, & \text{en otro caso}.\end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 446 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset \mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0),U^{x_{n_j}}(0),V^{x_{n_j}}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(0),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{20.35}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)\ \ \textit{u.o.c.} \tag{20.36}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t)=Q(0)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-(I-P)'M^{-1}\left(\overline{T}(t)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{20.37}$$

$$\overline{Q}(t)\geq 0, \tag{20.38}$$

$$\overline{T}(t)\ \textit{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{20.39}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \ \text{ es no decreciente}, \tag{20.40}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{20.41}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{20.42}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 132. *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ *un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando* $x \rightarrow \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K \left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 123 (Lema 3.1 [91])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 447 (Teorema 5.1 [91])**.** *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$*, para toda* $t \geq t_0$.

Lema 124 (Lema 5.2 [106])**.** *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$*, y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$*, entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{20.43}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t \geq \delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 448 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106])**.** *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 133 (Proposición 5.1 [95])**.** *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{20.44}$$

Proposición 134 (Proposición 5.3 [95])**.** *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{20.45}$$

Proposición 135 (Proposición 5.4 [95])**.** *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{20.46}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 449 (Teorema 5.5 [95])**.** *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{20.47}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{20.48}$$

Teorema 450 (Teorema 6.2 [95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 451 (Teorema 6.3 [95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_x\left[Q_t\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_0\right]\right| = 0.$$

Proposición 136 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{20.49}$$

Lema 65 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{20.50}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 452 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{20.51}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 453 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{20.52}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 454 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_f=0. \tag{20.53}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 455 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds=\pi(f):=\int f(x)\,\pi(dx) \tag{20.54}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 456 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)|\geq\epsilon_0 T-c_0,\ T\geq0, \tag{20.55}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{20.56}$$

20.2 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 125 (Lema 4.2, Dai[94]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$*, casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'} t, \; u.o.c., \tag{20.57}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \; u.o.c., \tag{20.58}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \; u.o.c., \tag{20.59}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 126 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \; u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x(t)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_k^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{20.60}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{20.61}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = \left(S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t))\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x(T_l^x(t))\right) - S^x(T^x(t)), \tag{20.62}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{20.63}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{20.64}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{20.65}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{20.66}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{20.67}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso}. \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 457 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{20.68}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{20.69}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{20.70}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0, \tag{20.71}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\ \textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{20.72}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right)\ \textit{es no decreciente}, \tag{20.73}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0, \tag{20.74}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en}\ \left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)\ \textit{especficas de la disciplina de la cola}, \tag{20.75}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 137. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Teorema 458 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106])**.** *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r}\rightarrow\frac{1}{\mu^{r}}$, *cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$..

Proposición 138 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{20.76}$$

Proposición 139 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{20.77}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Definición 572. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 573. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 574. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 575. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 576. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 577. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 578. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 579. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 580. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{20.78}$$

Nota 59. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (20.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{20.79}$$

Teorema 459. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{20.80}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{20.81}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{20.82}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{20.83}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{20.84}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[87]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 25 (Supuesto 3.1, Davis [98])**.** *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{20.85}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 581. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 582. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 583. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 584. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \textit{ es compacto en } E\}. \tag{20.86}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 460. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 585. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B)^{88}. \tag{20.87}$$

[87] Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

[88] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E,\mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[89] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_t\right)|\mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t}f\left(X_t\right)\ \ s\leq t\in I,\ \ f\in b\mathcal{E}. \tag{20.89}$$

Definición 586. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f\left(x\right) = P_t\left(P_s f\right)\left(x\right),\ \ t,s\geq 0,\ \ x\in E\ \ f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 60. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_{t+s}\right)|\mathcal{G}_t\right\} = P_s f\left(X_t\right)\ \ t,s\geq 0,\ \ f\in b\mathcal{E}. \tag{20.90}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 587. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t\rightarrow X_t\left(w\right)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 588 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}$ y $P_t\left(b\mathcal{E}^*\right)\subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ tal que $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 589. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E,\mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) *$(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) *$(\theta_t)_{t\geq 0}$ es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t,s\geq 0$,*

$$\theta_t\circ\theta_s = \theta_{t+s}\ \text{y}\ X_t\circ\theta_t = X_{t+s}; \tag{20.91}$$

iii) *Para cualquier $x\in E,\mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.*

Definición 590 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f\in S^\alpha$, el proceso $t\rightarrow f\left(X_t\right)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 591. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) *$\mathbf{X}$ es una realización continua por la derecha, 656, de (P_t).*

[89]
$$\mathbb{P}\left\{H|\mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H|X_t\right\}\ \ H\in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{20.88}$$

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 127 (Lema 4.2, Dai[94]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'} t, \ u.o.c., \tag{20.92}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{20.93}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{20.94}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 128 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{20.95}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_i^x(t)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x(t)\right)dI_i^x(t)=0, \tag{20.96}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x(t)=\left(T_1^x(t),\ldots,T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t)=\left(I_1^x(t),\ldots,I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right),\ldots,S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t)=Q^x(0)+E^x(t)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right)-S^x\left(T^x(t)\right), \tag{20.97}$$

$$Q^x(t)\geq 0, \tag{20.98}$$

$$T^x(0)=0,\ \text{y}\ \overline{T}^x(t)\ \text{es no decreciente}, \tag{20.99}$$

$$I^x(t)=et-CT^x(t)\ \text{es no decreciente} \tag{20.100}$$

$$\int_0^{\infty}\left(CQ^x(t)\right)dI_i^x(t)=0, \tag{20.101}$$

$$\text{Condiciones adicionales en}\ \left(\overline{Q}^x(\cdot),\overline{T}^x(\cdot)\right)\ \text{específicas de la disciplina de la cola}, \tag{20.102}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\begin{cases}1, & S(k)=i,\\ 0, & \text{en otro caso}.\end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 461 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0),U^{x_{n_j}}(0),V^{x_{n_j}}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(0),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{20.103}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)\ \ u.o.c. \tag{20.104}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1} \left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{20.105}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{20.106}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{20.107}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{20.108}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{20.109}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{20.110}$$

Definición 592 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en 20.325 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.326)-(20.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Teorema 462 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{20.111}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 593 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 66 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 140. *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando* $x \rightarrow \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$
$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$
$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$
$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$
para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j
$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$
$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$
para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 129 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 463 (Teorema 5.2 [91]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 464 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 130 (Lema 5.2 [106]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*
$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$
Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$
$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{20.112}$$
de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 465 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \to \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \to \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \to \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 141 (Proposicin 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*
$$lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{20.113}$$

Proposición 142 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{20.114}$$

Proposición 143 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{20.115}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 466 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{20.116}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \tag{20.117}$$

Teorema 467 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x \left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi \left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 468 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot)\right|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]| = 0}.$$

Proposición 144 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{20.118}$$

Lema 67 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \tag{20.119}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 469 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95])**.** *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{20.120}$$

para $t > 0$ *y* $x \in X$*. En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 470 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{20.121}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 471 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con* $f(x) = f_1(x)$ *se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{20.122}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0.$$

Teorema 472 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea* ν *cualquier distribución de probabilidad en* $(X, \mathcal{B}_X)$*, y* π *la distribución estacionaria de* X*.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{20.123}$$

$\mathbb{P}$*-c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *con* $\pi(|f|) < \infty$*, la ecuación anterior se cumple.*

Teorema 473 (Teorema 2.2, Down [99])**.** *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_0, c_0 \geq 0$*,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{20.124}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$*, con* $|Q(0)| = 1$*. Entonces para cualquier* $0 < q \leq 1$*, existe* $B < 0$ *tal que para cualquier* $|x| \geq B$*,*

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\} \geq q. \tag{20.125}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,

- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)\right]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$,
- también se define $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.

En Dai [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [108].

Sea el proceso de Markov $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] y Meyn y Down [118] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X\left(t\right) = \left(Q\left(t\right), U\left(t\right), V\left(t\right)\right), \tag{20.126}$$

donde $Q\left(t\right)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U\left(t\right)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V\left(t\right)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U\left(t\right)$ como $V\left(t\right)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = \left(Q\left(0\right), U\left(0\right), V\left(0\right)\right) = \left(q, a, b\right)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \ldots, K$ se define

$$\begin{aligned}
E_l^x\left(t\right) &= max\left\{r : U_l\left(0\right) + \xi_l\left(1\right) + \cdots + \xi_l\left(r-1\right) \leq t\right\} \;\; t \geq 0,\\
S_k^x\left(t\right) &= max\left\{r : V_k\left(0\right) + \eta_k\left(1\right) + \cdots + \eta_k\left(r-1\right) \leq t\right\} \;\; t \geq 0.
\end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k\left(n\right) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k\left(i\right).$$

donde $\phi^k\left(n\right)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s\left(k\right)$, la s-éima componente de $\phi^k\left(n\right)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k\left(n\right)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = \left(P_{kl}\right)$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k\left(n\right) = \left\{\phi^k\left(n\right), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1\left(n\right), \ldots, \phi^K\left(n\right)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 131 (Lema 4.2, Dai[94]). *Sea $\left\{x_n\right\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U\left(0\right) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V\left(0\right) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k\left([|x_n|t]\right) \rightarrow P_k^{'}t, \text{ } u.o.c., \tag{20.127}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+, \text{ } u.o.c., \tag{20.128}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+, \text{ } u.o.c., \tag{20.129}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$.

Lema 132 (Lema 4.3, Dai[94])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$*, conforme* $n \rightarrow \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ } u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right) =_k^x \left(0\right) + E_k^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{20.130}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x\left(t\right) = t - \sum_{j\in C_i} T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i} Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{20.131}$$

para $i=1,\dots,d$.

Hacer

$$T^x(t)=\left(T_1^x(t),\dots,T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t)=\left(I_1^x(t),\dots,I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right),\dots,S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t)=Q^x(0)+E^x(t)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right)-S^x\left(T^x(t)\right), \tag{20.132}$$

$$Q^x(t)\geq 0, \tag{20.133}$$

$$T^x(0)=0,\ \text{y}\ \overline{T}^x(t)\ \text{ es no decreciente}, \tag{20.134}$$

$$I^x(t)=et-CT^x(t)\ \text{ es no decreciente} \tag{20.135}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right)dI_i^x(t)=0, \tag{20.136}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot),\overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{20.137}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\begin{cases}1, & S(k)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 474 (Teorema 4.1, Dai [94])**.** *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0),U^{x_{n_j}}(0),V^{x_{n_j}}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(0),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{20.138}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)\ \textit{u.o.c.} \tag{20.139}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t)=Q(0)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^+-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}(t)-\overline{V}\right)^+, \tag{20.140}$$

$$\overline{Q}(t)\geq 0, \tag{20.141}$$

$$\overline{T}(t)\ \textit{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{20.142}$$

$$\overline{I}(t)=et-C\overline{T}(t)\ \textit{ es no decreciente}, \tag{20.143}$$

$$\int_0^\infty\left(C\overline{Q}(t)\right)d\overline{I}(t)=0, \tag{20.144}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{20.145}$$

Definición 594 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en 20.325 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.326)-(20.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta>0$ *que depende de* μ,α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv0$.

Teorema 475 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{20.146}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 595 (Definición 3.1, Dai y Meyn [95]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}\left(t\right) \tag{20.147}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq0 \textit{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{20.148}$$

$$\overline{T}_{k}\left(0\right)=0,\ \textit{y } \overline{T}_{k}\left(\cdot\right) \textit{ es no decreciente}, \tag{20.149}$$

$$\overline{I}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{k\in C_{i}}\overline{T}_{k}\left(t\right) \textit{ es no decreciente} \tag{20.150}$$

$$\overline{I}_{i}\left(\cdot\right) \textit{ se incrementa al tiempo } t \textit{ cuando } \sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0 \tag{20.151}$$

$$\textit{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right) \textit{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{20.152}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 596 (Definición 3.2, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}\left(0\right),\overline{B}\left(0\right)\right)\in\mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=\overline{Q}\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{A}\left(0\right)\right)^{+}-\left(I-P^{'}\right)M\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{B}\left(0\right)\right)^{+} \tag{20.153}$$

Definición 597 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$*, con* $t\geq t_{0}$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 68 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_{0}>0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$ *para cualquier* $t\geq t_{0}$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq1$.

El resultado principal de Down [99] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 476 (Teorema 2.1, Down [99])**.** *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \sup \frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds \leq \kappa_{p}, \tag{20.154}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right]\leq\kappa_{r}, \tag{20.155}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]=0. \tag{20.156}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-}c.s. \tag{20.157}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$.

Proposición 145 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95])**.** *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{20.158}$$

Lema 69 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95])**.** *Sea $\left\{\zeta\left(k\right):k\in F\right\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $\left(0,\infty\right)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{20.159}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 477 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95])**.** *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{20.160}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 478 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{20.161}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[\left|Q\left(t\right)\right|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[\left|Q\left(0\right)\right|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 479 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{20.162}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]\right|=0.$$

Teorema 480 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_{X}\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{20.163}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(\left|f\right|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 481 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$\left|Q\left(T\right)\right|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ T\geq0, \tag{20.164}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $\left|Q\left(0\right)\right|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $\left|x\right|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{20.165}$$

Teorema 482 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_{j}}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_{s}}\right)\delta^{*} \tag{20.166}$$

i) Si $\rho<1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 476.

ii) Si $\rho<1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 532

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^{k}\left(n\right):=\sum_{i=1}^{n}\phi^{k}\left(i\right). \tag{20.167}$$

suponiendo que el estado inicial de la red es $x=\left(q,a,b\right)\in X$, entonces para cada k

$$E_{k}^{x}\left(t\right):=\max\left\{n\geq0:A_{k}^{x}\left(0\right)+\psi_{k}\left(1\right)+\cdots+\psi_{k}\left(n-1\right)\leq t\right\} \tag{20.168}$$

$$S_{k}^{x}\left(t\right):=\max\left\{n\geq0:B_{k}^{x}\left(0\right)+\eta_{k}\left(1\right)+\cdots+\eta_{k}\left(n-1\right)\leq t\right\} \tag{20.169}$$

Sea $T_{k}^{x}\left(t\right)$ el tiempo acumulado que el servidor $s\left(k\right)$ ha utilizado en los usuarios de la clase k en el intervalo $\left[0,t\right]$. Entonces se tienen las siguientes ecuaciones:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{k} \Phi_k^l S_l^x(T_l^x) - S_k^x(T_k^x) \tag{20.170}$$

$$Q^x(t) = (Q_1^x(t), \ldots, Q_K^x(t))^{'} \geq 0, \tag{20.171}$$

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))^{'} \geq 0, \text{ es no decreciente} \tag{20.172}$$

$$I_i^x(t) = t - \sum_{k \in C_i} T_k^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{20.173}$$

$$\int_0^\infty \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{20.174}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } (Q^x(\cdot), T^x(\cdot)) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{20.175}$$

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \tag{20.176}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola. Si se hace $|q| \to \infty$ y se mantienen las componentes restantes fijas, de la condición inicial x, cualquier punto límite del proceso normalizado $\overline{Q}^x$ es una solución del siguiente modelo de flujo, ver [94].

Definición 598. *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $(Q^x(\cdot), T^x(\cdot))$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk} \mu_l \overline{T}_l(t) \tag{20.177}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \textit{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{20.178}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \textit{ y } \overline{T}_k(\cdot) \textit{ es no decreciente}, \tag{20.179}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \textit{ es no decreciente} \tag{20.180}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \textit{ se incrementa al tiempot cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{20.181}$$

$$\textit{condiciones adicionales sobre } (Q^x(\cdot), T^x(\cdot)) \textit{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{20.182}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 599. *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{20.183}$$

Definición 600. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en [91].

Lema 70. *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|overlinex| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Supuestos necesarios sobre la red

Supuestos 26. *A1) $\psi_1, \ldots, \psi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\psi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\psi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{20.184}$$
$$P(\psi_k(1) + \ldots \psi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\, dx0 \text{ y} \tag{20.185}$$
$$\int_0^\infty q_k(x)\, dx > 0 \tag{20.186}$$

El argumento dado en [?] en el lema 71 se puede aplicar para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños.Entonces la condición $A3$) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 483. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] ds \leq \kappa_p \tag{20.187}$$

donde p es el entero dado por A2). Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r \tag{20.188}$$

para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

iii) EL primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\to\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0. \tag{20.189}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \tag{20.190}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

Demostración 5. *La demostración de este resultado se da aplicando los teoremas 484, 526, 527 y 487*

Definimos un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada. Bajo cualquier *preemptive buffer priority* disciplina de servicio, el estado $\mathbb{X}(t)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}(t) = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t) : k = 1, 2, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right) \tag{20.191}$$

donde $Q_k(t)$ es la longitud de la cola para los usuarios de la clase k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k(t)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio. Los tiempos de arribo residuales, que son iguales al tiempo que queda hasta que el próximo usuario de la clase k llega, se denotan por $A_k(t)$. Tanto $B_k(t)$ como $A_k(t)$ se suponen continuos por la derecha.

Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x = (q, a, b)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = (q, a, b) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x| = |q| + |a| + |b|$. En [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$\left((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}(t), \theta_t, P_x\right)$$

es un proceso de Borel Derecho en el espacio de estadio medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, est definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y est adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; $\{P_x, x \in X\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in X$

$$P_x\{\mathbb{X}(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t)|\mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{\mathbb{X}(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la sigma algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(\mathbb{X}(t) \in D)$$

Definición 601. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_X P^t(x, D)\, \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 602. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

- Si X es Harris recurrente, entonces una única medida invariante π existe ([105]).
- Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama *Harris recurrente positiva.*
- Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria y hacemos

  $$P_\pi(\cdot) [= \int_X P_x(\cdot)\, \pi(dx)$$

  y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, as, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π

Definición 603. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.[90]

El modelo está compuesto por c colas de capacidad infinita, etiquetadas de 1 a c las cuales son atendidas por s servidores. Los servidores atienden de acuerdo a una cadena de Markov independiente $\left(X_n^i\right)_n$ con $1 \leq i \leq s$ y $n \in \{1, 2, \ldots, c\}$ con la misma matriz de transición $r_{k,l}$ y única medida invariante (p_k). Cada servidor permanece atendiendo en la cola un periodo llamado de visita y determinada por la política de servicio asignada a la cola.

Los usuarios llegan a la cola k con una tasa λ_k y son atendidos a una razón μ_k. Las sucesiones de tiempos de interarribo $(\tau_k(n))_n$, la de tiempos de servicio $\left(\sigma_k^i(n)\right)_n$ y la de tiempos de cambio $\left(\sigma_{k,l}^{0,i}(n)\right)_n$ requeridas en la cola k para el servidor i son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas con distribución general independiente de i, con media $\sigma_k = \frac{1}{\mu_k}$, respectivamente $\sigma_{k,l}^0 = \frac{1}{\mu_{k,l}^0}$, e independiente de las cadenas de Markov $\left(X_n^i\right)_n$. Además se supone que los tiempos de interarribo se asume son acotados, para cada $\rho_k = \lambda_k \sigma_k < s$ para asegurar la estabilidad de la cola k cuando opera como una cola $M/GM/1$. Una política de servicio determina el número de usuarios que serán atendidos sin interrupción en periodo de servicio por los servidores que atienden a la cola. Para un solo servidor esta se define a través de una función f donde $f(x, a)$ es el número de usuarios que son atendidos sin interrupción cuando el servidor llega a la cola y encuentra x usuarios esperando dado el tiempo transcurrido de interarribo a. Sea $v(x, a)$ la duración del periodo de servicio para una sola condición inicial (x, a).

Las políticas de servicio consideradas satisfacen las siguientes propiedades:

i) Hay conservación del trabajo, es decir

$$v(x, a) = \sum_{l=1}^{f(x,a)} \sigma(l)$$

con $f(0, a) = v(0, a) = 0$, donde $(\sigma(l))_l$ es una sucesión independiente e idénticamente distribuida de los tiempos de servicio solicitados.

ii) La selección de usuarios para se atendidos es independiente de sus correspondientes tiempos de servicio y del pasado hasta el inicio del periodo de servicio. Así las distribución (f, v) no depende del orden en el cuál son atendidos los usuarios.

iii) La política de servicio es monótona en el sentido de que para cada $a \geq 0$ los números $f(x, a)$ son monótonos en distribución en x y su límite en distribución cuando $x \to \infty$ es una variable aleatoria F^{*0} que no depende de a.

iv) El número de usuarios atendidos por cada servidor es acotado por $f^{min}(x)$ de la longitud de la cola x que además converge monótonamente en distribución a F^* cuando $x \to \infty$

El sistema de colas se describe por medio del proceso de Markov $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$ como se define a continuación. El estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = (Q(t), P(t), A(t), R(t), C(t))$$

donde

- $Q(t) = (Q_k(t))_{k=1}^c$, número de usuarios en la cola k al tiempo t.
- $P(t) = \left(P^i(t)\right)_{i=1}^s$, es la posición del servidor i.
- $A(t) = (A_k(t))_{k=1}^c$, es el residual del tiempo de arribo en la cola k al tiempo t.

[90] En [116] muestran que si $P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ solamente para uno conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris recurrente

- $R(t) = \left(R_k^i(t), R_{k,l}^{0,i}(t)\right)_{k,l,i=1}^{c,c,s}$, el primero es el residual del tiempo de servicio del usuario atendido por servidor i en la cola k al tiempo t, la segunda componente es el residual del tiempo de cambio del servidor i de la cola k a la cola l al tiempo t.

- $C(t) = \left(C_k^i(t)\right)_{k,i=1}^{c,s}$, es la componente correspondiente a la cola k y al servidor i que está determinada por la política de servicio en la cola k y que hace al proceso $X(t)$ un proceso de Markov.

Todos los procesos definidos arriba se suponen continuos por la derecha.

El proceso X tiene la propiedad fuerte de Markov y su espacio de estados es el espacio producto

$$\mathcal{X} = \mathbb{N}^c \times E^s \times \mathbb{R}_+^c \times \mathbb{R}_+^{cs} \times \mathbb{R}_+^{c^2 s} \times \mathcal{C}$$

donde $E = \{1, 2, \ldots, c\}^2 \cup \{1, 2, \ldots, c\}$ y $\mathcal{C}$ depende de las políticas de servicio.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1. $$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0 \tag{20.192}$$

2. $$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N} \tag{20.193}$$

   para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j'}^m = r_{j,j'}$

- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.

- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.

- Finalmente, se define
$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right]. \tag{20.194}$$

El *token passing ring* es una estación de un solo servidor con K clases de usuarios. Cada clase tiene su propio regulador en la estación. Los usuarios llegan al regulador con razón α_k y son atendidos con taza μ_k.

La red se puede modelar como un Proceso de Markov con espacio de estados continuo, continuo en el tiempo:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t), B_k^0(t), C(t) : k = 1, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right) \tag{20.195}$$

donde $Q_k(t), B_k(t)$ y $A_k(t)$ se define como en 20.210, $B_k^0(t)$ es el tiempo residual de cambio de la clase k a la clase $k+1\,(modK)$; $C(t)$ indica el número de servicios que han sido comenzados y/o completados durante la sesión activa del buffer.

Los parámetros cruciales son la carga nominal de la cola k: $\beta_k = \alpha_k/\mu_k$ y la carga total es $\rho_0 = \sum \beta_k$, la media total del tiempo de cambio en un ciclo del token está definido por

$$u^0 = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}\left[\eta_k^0(1)\right] = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\mu_k^0} \tag{20.196}$$

El proceso de la longitud de la cola $Q_k^x(t)$ y el proceso de acumulación del tiempo de servicio $T_k^x(t)$ para el buffer k y para el estado inicial x se definen como antes. Sea $T_k^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo

t que el token tarda en cambiar del buffer k al $k+1 \mod K$. Suponga que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T^{x,0}\left(|x|t\right)\right) \tag{20.197}$$

cuando $|x|\rightarrow\infty$. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right),\overline{T}^{0}\left(t\right)\right)$ es un flujo límite retrasado del token ring.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado

Proposición 146. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ y $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 71. *El proceso estocástico Φ es un proceso de markov fuerte, temporalmente homogéneo, con trayectorias muestrales continuas por la derecha, cuyo espacio de estados Y es igual a $X\times\mathbb{R}$*

Proposición 147. *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_{0}>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{20.198}$$

Lema 72. *Sea $\left\{\zeta\left(k\right):k\in\digamma\right\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $\left(0,\infty\right)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{20.199}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 484. *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{20.200}$$

para $t>0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 485. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$||P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)||_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{20.201}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 486. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x)=f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}||P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)||_f=0. \tag{20.202}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 487. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f: X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{20.203}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f: X\leftarrow\mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x)=N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1. $$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right]=\overline{N}>0 \tag{20.204}$$

2. $$\mathbb{E}\left[N(x)\right]\leq\overline{N} \tag{20.205}$$

   para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^m = r_{j,j^{'}}$
- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right]\geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.

- Finalmente, se define

$$\delta^{*} := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}\left(1\right)\right]. \tag{20.206}$$

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Sea x el número de usuarios en la cola esperando por servicio y $N\left(x\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política dada y fija mientras el servidor permanece dando servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right] = \overline{N} > 0. \tag{20.207}$$

(S2.)

$$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right] \leq \overline{N}, \tag{20.208}$$

para cualquier valor de x.

El tiempo que tarda un servidor en volver a dar servicio después de abandonar la cola inmediata anterior y llegar a la próxima se llama tiempo de traslado o de cambio de cola, al momento de la n-ésima visita del servidor a la cola j se genera una sucesión de variables aleatorias $\delta_{j,j+1}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con la propiedad de que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right] \geq 0$.

Se define

$$\delta^{*} := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]. \tag{20.209}$$

Los tiempos entre arribos a la cola k, son de la forma $\left\{\xi_k\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos. Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Para el caso más sencillo podemos definir un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada, el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}\left(t\right) = \left(Q_k\left(t\right), A_l\left(t\right), B_k\left(t\right) : k = 1, 2, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right), \tag{20.210}$$

donde $Q_k\left(t\right)$ es la longitud de la cola k para los usuarios esperando servicio, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k\left(t\right)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio.

Los tiempos entre arribos residuales, que son el tiempo que queda hasta que el próximo usuario llega a la cola para recibir servicio, se denotan por $A_k\left(t\right)$. Tanto $B_k\left(t\right)$ como $A_k\left(t\right)$ se suponen continuos por la derecha [?].

Sea $\mathcal{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$, y sea $x = \left(q, a, b\right)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $\left|q\right|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = \left(q, a, b\right) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\left\|x\right\| = \left|q\right| + \left|a\right| + \left|b\right|$. En [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$\left(\left(\Omega, \mathcal{F}\right), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}\left(t\right), \theta_t, P_x\right)$$

es un proceso de *Borel Derecho* en el espacio de estados medible $\left(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}\right)$.

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(\mathbb{X}\left(t\right) \in D\right).$$

Definición 604. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_X P^t(x, D)\, \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 605. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

Definición 606. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

Nota 61. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π ([105]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso a la medida se le llama ***Harris recurrente positiva****.*

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria; se define

$$P_\pi(\cdot) = \int_X P_x(\cdot)\, \pi(dx).$$

Se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, así, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π.

iv) En [116] se muestra que si $P_x\{\tau_D < \infty\} = 1$ incluso para solamente un conjunto pequeño, entonces el proceso de Harris es recurrente.

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\right) \tag{20.211}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{20.212}$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([94]).

Dada una condición inicial $x \in \mathcal{X}$, $Q_k^x(t)$ es la longitud de la cola k al tiempo t y $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en atender a los usuarios de la cola k. De igual manera se define $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en cambiar de cola para volver a atender a los usuarios.

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \tag{20.213}$$

$$\overline{T}_m^x(t) = \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \tag{20.214}$$

$$\overline{T}_m^{x,0}(t) = \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t). \tag{20.215}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola, al conjunto de todos los posibles flujos límite se le llamará **modelo de flujo**, ([**?**]).

Definición 607. *Un flujo límite para un sistema de visitas bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{20.216}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \textit{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{20.217}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \textit{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \textit{ es no decreciente}, \tag{20.218}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \textit{ param} = 1, 2, \ldots, M \tag{20.219}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en (20.216)-(20.219) se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Definición 608. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Es necesario realizar los siguientes supuestos, ver ([**?**]) y ([95]):

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\xi_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y} \\
\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.
\end{aligned}$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{20.220}$$

$$P(\xi_k(1) + \ldots \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\, dx 0 \text{ y} \tag{20.221}$$

$$\int_0^\infty q_k(x)\, dx > 0 \tag{20.222}$$

En [?] ser da un argumento para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños. Entonces la condición A3) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 488. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] ds \leq \kappa_p \tag{20.223}$$

donde p es el entero dado por A2).

Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r \tag{20.224}$$

para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\to\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0. \tag{20.225}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \tag{20.226}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

Teorema 489. *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \text{ con } T \geq 0, \tag{20.227}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \to \infty\right\} \geq q. \tag{20.228}$$

En el caso particular de un modelo con un solo servidor, $M = 1$, se tiene que si se define

Definición 609.

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + \max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\overline{\overline{N}}}\right)\delta^*. \tag{20.229}$$

entonces

Teorema 490. *i) Si $\rho < 1$, entonces la red es estable, es decir el teorema (488) se cumple.*

ii) De lo contrario, es decir, si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, el teorema (489).

Proposición 148. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^{0}(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^{0}(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}(t) + \overline{T}_{k}^{0}(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_{k}(t) = \overline{Q}_{k}(0) + \alpha_{k}t - \mu_{k}\overline{T}_{k}(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}(t) = \beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}(t) = \mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}(t) = l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}(t)$$

para $\overline{Q}_{k}(t) > 0$.

Lema 133 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 491 (Teorema 5.2 [91]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 492 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$, *para toda* $t \geq t_0$.

Lema 134 (Lema 5.2 [106]). *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^{r} \tag{20.230}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 493 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r} \rightarrow \frac{1}{\mu^{r}}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 149 (Proposicin 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{20.231}$$

Proposición 150 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{20.232}$$

Proposición 151 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{20.233}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 494 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{20.234}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$Limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \tag{20.235}$$

Teorema 495 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x \left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi \left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 496 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$lim_{x\to\infty} \mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0. \tag{20.236}$$

(S2.)

$$\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}, \tag{20.237}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right] \geq 0$.
- Se define
$$\delta^* := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right]. \tag{20.238}$$
- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $\left(X(t)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\right) \tag{20.239}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times \left(\{1,2,\ldots,K\} \times \{1,2,\ldots,S\}\right)^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{20.240}$$

- $Q(t) = \left(Q_k(t), 1 \leq k \leq K\right)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = \left(A_k(t), 1 \leq k \leq K\right)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([94])

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 610. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ indexada por pares $s,t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E,\mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x,B) = \int_E P_{r,s}(x,dy)\, P_{s,t}(y,B)\,^{91}. \tag{20.241}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E,\mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[92] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t)|\mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t) \;\; s \leq t \in I,\; f \in b\mathcal{E}. \tag{20.243}$$

Definición 611. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_sf)(x),\;\; t,s \geq 0,\;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 62. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_sf(X_t) \;\; t,s \geq 0,\;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{20.244}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 612. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 613 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 614. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E,\mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t,s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{20.245}$$

iii) Para cualquier $x \in E$,$\mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.

[91] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[92]

$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H|X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{20.242}$$

Definición 615 (HD2). *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^{\alpha}$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 616. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de (P_t).*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 135 (Lema 4.2, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'}t, \text{ u.o.c.,} \tag{20.246}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k\left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{20.247}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k\left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{20.248}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 136 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{20.249}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{20.250}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))^{'},$$
$$I^x(t) = (I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t))^{'}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t)))^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \tag{20.251}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{20.252}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{20.253}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{20.254}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{20.255}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{20.256}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 497 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales* ω *y cualquier sucesión de estados iniciales* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$*, con* $|x_n| \to \infty$*, existe una subsucesión* $\left\{x_{n_j}\right\}$ *con* $|x_{n_j}| \to \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right), U^{x_{n_j}}\left(0\right), V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right) \to \left(\overline{Q}\left(0\right), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{20.257}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right) \;\; u.o.c. \tag{20.258}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}\left(t\right) = Q\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - \left(I - P\right)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{20.259}$$

$$\overline{Q}\left(t\right) \geq 0, \tag{20.260}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \;\; \textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{20.261}$$

$$\overline{I}\left(t\right) = et - C\overline{T}\left(t\right) \;\; \textit{es no decreciente}, \tag{20.262}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right) = 0, \tag{20.263}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{20.264}$$

Definición 617 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en 20.325 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.326)-(20.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$*.*

Teorema 498 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{20.265}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 618 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$*.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 73 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$*.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 152. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$*.*

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$*.*

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$*.*

Lema 137 (Lema 3.1 [91])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 499 (Teorema 5.2 [91])**.** *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 500 (Teorema 5.1 [91])**.** *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* (α,μ,T,U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$*, para toda* $t\geq t_{0}$*.*

Lema 138 (Lema 5.2 [106])**.** *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$*, y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$*, entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r}\tag{20.266}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$*,* $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 501 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106])**.** *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$*. entonces* *a)* $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$*.*

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$*, cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$*..*

Proposición 153 (Proposicin 5.1 [95])**.** *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{20.267}$$

Proposición 154 (Proposición 5.3 [95])**.** *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$*,* $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$*.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{20.268}$$

Proposición 155 (Proposición 5.4 [95])**.** *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X*, sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$*, y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$*. Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C*, entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{20.269}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$*.*

Teorema 502 (Teorema 5.5 [95])**.** *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{20.270}$$

para $t \geq 0$*,* $x \in X$*. En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{20.271}$$

Teorema 503 (Teorema 6.2[95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$*. En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 504 (Teorema 6.3[95])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$*, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$*. En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 156 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{20.272}$$

Lema 74 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta\left(k\right):k\in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq 1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{20.273}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r:t\geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 505 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{20.274}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 506 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{20.275}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q\left(0\right)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 507 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_f=0. \tag{20.276}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 508 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{20.277}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 509 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_0, c_0 \geq 0$*,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{20.278}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$*, con* $|Q(0)| = 1$*. Entonces para cualquier* $0 < q \leq 1$*, existe* $B < 0$ *tal que para cualquier* $|x| \geq B$*,*

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{20.279}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$,
- también se define $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.

Definición 619. *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{F}$ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* X*, la pareja* $(X, \mathcal{F})$ *es llamado espacio medible. Un subconjunto* A *de* X *es llamado medible, o medible con respecto a* $\mathcal{F}$*, si* $A \in \mathcal{F}$*.*

Definición 620. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *espacio de medida. Se dice que la medida* μ *es* σ*-finita si se puede escribir* $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ *con* $X_n \in \mathcal{F}$ *y* $\mu(X_n) < \infty$*.*

Definición 621. *Sea* X *el conjunto de los úmeros reales* $\mathbb{R}$*. El álgebra de Borel es la* σ*-álgebra* B *generada por los intervalos abiertos* $(a, b) \in \mathbb{R}$*. Cualquier conjunto en* B *es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 622. *Una función* $f : X \rightarrow \mathbb{R}$*, es medible si para cualquier número real* α *el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X*. Equivalentemente, se dice que* f *es medible si*

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 623. *Sean* $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$*,* $i = 1, 2, \ldots,$ *espacios medibles y* $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ *el conjunto de todas las sucesiones* $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ *tales que* $\omega_i \in \Omega_i$*,* $i = 1, 2, \ldots,$*. Si* $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$*, definimos* $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$*. Al conjunto* B_n *se le llama* cilindro *con base* B^n*, el cilindro es llamado medible si* $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$*.*

Definición 624. *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de* σ*-álgebras* $\mathcal{F}_t$*, para* $t \geq 0$*, si para* $s < t$ *implica que* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$*, y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}_t$*-medible para cada* t*. Si no se especifica* $\mathcal{F}_t$ *entonces se toma* $\mathcal{F}_t$ *como* $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$*, la más pequeña* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω *que hace que cada* $X(s)$*, con* $s \leq t$ *sea Borel medible.*

Definición 625. *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ *familia creciente de sub* σ*-álgebras. es decir,* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *para* $s \leq t$*. Un tiempo de paro para* $\mathcal{F}(t)$ *es una función* $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ *tal que* $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ *para cada* $t \geq 0$*. Un tiempo de paro para el proceso estocástico* $X(t), t \geq 0$ *es un tiempo de paro para las* σ*-álgebras* $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$*.*

Definición 626. *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, con* (S, χ) *espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a* $\{\mathcal{F}(t)\}$*, es decir, si para cualquier* $s, t \in I$*,* I *conjunto de índices,* $s < t$*, se tiene que* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}(t)$*-medible,*

Definición 627. *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a* $\mathcal{F}(t)$ *o que* $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ *es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto* $B \in \chi$*, y* $s, t \in I$*,* $s < t$ *se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{20.280}$$

Nota 63. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (20.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{20.281}$$

Teorema 510. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \to p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \to \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{20.282}$$

en $\{T < \infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 157. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 139 (Lema 3.1 [91])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 511 (Teorema 5.2 [91])**.** *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 512 (Teorema 5.1 [91])**.** *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 140 (Lema 5.2 [106]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{20.283}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) *Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$*

b) *Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.*

Teorema 513 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) *$\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.*

b) *$\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..*

Proposición 158 (Proposicin 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{20.284}$$

Proposición 159 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{20.285}$$

Proposición 160 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{20.286}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 514 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{20.287}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p \tag{20.288}$$

Teorema 515 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 516 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Sean $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ el tiempo residual de arribos a la cola k, para cada servidor m, sea $H_m(t)$ par ordenado que consiste en la cola que está siendo atendida y la política de servicio que se está utilizando. $B_m(t)$ los tiempos de servicio residuales, $B_m^0(t)$ el tiempo residual de traslado, $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H_m(t)$.

El proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{20.289}$$

para $k = 1, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \dots, \xi_K, \eta_1, \dots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \dots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \dots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{20.290}$$
$$P(\xi_k(1) + \dots \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\, dx0 \text{ y} \tag{20.291}$$
$$\int_0^\infty q_k(x)\, dx > 0 \tag{20.292}$$

En Dai [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho, Sharpe [123], en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$.

Se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable.

Definición 628. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 629. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 630. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 631. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{20.293}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 517. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 632. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B)\,^{93}. \tag{20.294}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov [94] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{20.296}$$

Definición 633. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 64. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{20.297}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 634. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 635 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

[93] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[94]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{20.295}$$

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 636. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E,\mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t,s\geq 0$,*

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s} \text{ y } X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{20.298}$$

iii) Para cualquier $x\in E$,$\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}=1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.

Definición 637 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha>0$ y cualquier $f\in S^\alpha$, el proceso $t\rightarrow f\left(X_t\right)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 638. *Un sistema $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 656, de (P_t).*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Definición 639. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X,\mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A\in\mathcal{F}$.*

Definición 640. *Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X=\bigcup_{n\geq 1}X_n$ con $X_n\in\mathcal{F}$ y $\mu\left(X_n\right)<\infty$.*

Definición 641. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b)\in\mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 642. *Una función $f:X\rightarrow\mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\left\{x\in X:f\left(x\right)>\alpha\right\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}\left(\left(\alpha,\infty\right)\right)=\left\{x\in X:f\left(x\right)>\alpha\right\}\in\mathcal{F}.$$

Definición 643. *Sean $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$, $i=1,2,\ldots,$ espacios medibles y $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1,\omega_2,\ldots,)$ tales que $\omega_i\in\Omega_i$, $i=1,2,\ldots,$. Si $B^n\subset\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$, definimos $B_n=\left\{\omega\in\Omega:(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\in B^n\right\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_i$.*

Definición 644. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X\left(t\right),t\geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t\geq 0$, si para $s<t$ implica que $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$, y $X\left(t\right)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}\left(X\left(s\right),s\leq t\right)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X\left(s\right)$, con $s\leq t$ sea Borel medible.*

Definición 645. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\left\{\mathcal{F}\left(t\right),t\geq 0\right\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}\left(s\right)\subset\mathcal{F}\left(t\right)$ para $s\leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}\left(t\right)$ es una función $T:\Omega\rightarrow[0,\infty]$ tal que $\left\{T\leq t\right\}\in\mathcal{F}\left(t\right)$ para cada $t\geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X\left(t\right),t\geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}\left(t\right)=\mathcal{F}\left(X\left(s\right)\right)$.*

Definición 646. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 647. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B|\mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B|X(s)\}. \tag{20.299}$$

Nota 65. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (20.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B|X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B|X(s)\} \tag{20.300}$$

Teorema 518. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T: \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty|\mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{20.301}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d: K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{20.302}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{20.303}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{20.304}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v,\zeta)\in E$ existe un $\epsilon>0$ tal que la función $s\rightarrow\lambda\left(v,\phi_v\left(s,\zeta\right)\right)\in E$ es integrable para $s\in[0,\epsilon)$. La medida de transición $Q\left(A;\mathbf{x}\right)$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A\in\mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x}\in E\cup\Gamma^{*}$ y es una medida de probabilidad en $(E,\mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x}\in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x}=(n,\mathbf{z})\in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F\left(t\right)=\left\{\begin{array}{ll} exp\left(-\int_0^t\lambda\left(n,\phi_n\left(s,\mathbf{z}\right)\right)ds\right), & t<t^{*}\left(\mathbf{x}\right),\\ 0, & t\geq t^{*}\left(\mathbf{x}\right)\end{array}\right. \tag{20.305}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}\left[T_1>t\right]=F\left(t\right)$, ahora sea la variable aleatoria (N,Z) con distribuición $Q\left(\cdot;\phi_n\left(T_1,\mathbf{z}\right)\right)$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t\leq T_1$ es[95]

$$\mathbf{x}_t=\left(v_t,\zeta_t\right)=\left\{\begin{array}{ll}\left(n,\phi_n\left(t,\mathbf{z}\right)\right), & t<T_1,\\ \left(N,\mathbf{Z}\right), & t=t_1.\end{array}\right.$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto T_2-T_1 lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1,T_2,\ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda,T_1>0$ y $T_1-T_2>0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 27 (Supuesto 3.1, Davis [98]). *Sea* $N_t:=\sum_t\mathbb{1}_{(t\geq t)}$ *el número de saltos en* $[0,t]$. *Entonces*

$$\mathbb{E}\left[N_t\right]<\infty \textit{ para toda } t. \tag{20.306}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 648. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 649. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 650. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 651. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda\left(E\right)=sup\left\{\lambda\left(K\right):K \textit{ es compacto en } E\right\}. \tag{20.307}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 519. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X,\mathcal{G},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I\subset\mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f\left(X_r\right):r\in I,rleqt,f\in\mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 652. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ indexada por pares $s,t\in I$, con $s\leq t$ es una función de transición en $(E,\mathcal{E})$, si para todo $r\leq s<t$ en I y todo $x\in E$, $B\in\mathcal{E}$*

$$P_{r,t}\left(x,B\right)=\int_E P_{r,s}\left(x,dy\right)P_{s,t}\left(y,B\right)^{96}. \tag{20.308}$$

[95] Revisar página 362, y 364 de Davis [98].
[96] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E,\mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[97] (20.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_t\right)|\mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t}f\left(X_t\right)\ \ s\leq t\in I,\ \ f\in b\mathcal{E}. \tag{20.310}$$

Definición 653. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f\left(x\right) = P_t\left(P_s f\right)\left(x\right),\ t,s\geq 0,\ \ x\in E\ \ f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 66. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (20.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_{t+s}\right)|\mathcal{G}_t\right\} = P_s f\left(X_t\right)\ \ t,s\geq 0,\ \ f\in b\mathcal{E}. \tag{20.311}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (20.311) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 654. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t\rightarrow X_t\left(w\right)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 655 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}$ y $P_t\left(b\mathcal{E}^*\right)\subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ tal que $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 656. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E,\mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) *$(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) *$(\theta_t)_{t\geq 0}$ es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t,s\geq 0$,*

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s}\ \text{y}\ X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{20.312}$$

iii) *Para cualquier $x\in E,\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}=1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (20.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.*

Definición 657 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha>0$ y cualquier $f\in S^\alpha$, el proceso $t\rightarrow f\left(X_t\right)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 658. *Un sistema $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) *$\mathbf{X}$ es una realización continua por la derecha, 656, de (P_t).*

[97]

$$\mathbb{P}\left\{H|\mathcal{G}_t\right\}=\mathbb{P}\left\{H|X_t\right\}\ \ H\in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{20.309}$$

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 657, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 141 (Lema 4.2, Dai[94]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k\left(\left[|x_n|t\right]\right) \to P_k^{'}t,\ u.o.c., \tag{20.313}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \to \alpha_k\left(t - \overline{U}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{20.314}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \to \mu_k\left(t - \overline{V}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{20.315}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$.

Lema 142 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+,\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right) =_k^x\left(0\right) + E_k^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{20.316}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_i^x\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{20.317}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right)=\left(T_1^x\left(t\right),\ldots,T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$
$$I^x\left(t\right)=\left(I_1^x\left(t\right),\ldots,I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right),\ldots,S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x\left(t\right)=Q^x\left(0\right)+E^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S^x\left(T^x\left(t\right)\right), \tag{20.318}$$

$$Q^x\left(t\right)\geq 0, \tag{20.319}$$

$$T^x\left(0\right)=0,\text{ y }\overline{T}^x\left(t\right)\text{ es no decreciente}, \tag{20.320}$$

$$I^x\left(t\right)=et-CT^x\left(t\right)\text{ es no decreciente} \tag{20.321}$$

$$\int_0^{\infty}\left(CQ^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{20.322}$$

$$\text{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}^x\left(\cdot\right),\overline{T}^x\left(\cdot\right)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{20.323}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{ll}1, & S\left(k\right)=i,\\ 0, & \text{en otro caso}.\end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 533:

Teorema 520 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right),U^{x_{n_j}}\left(0\right),V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(0\right),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{20.324}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)\;\; u.o.c. \tag{20.325}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{20.326}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0, \tag{20.327}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\text{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{20.328}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right)\text{ es no decreciente}, \tag{20.329}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0, \tag{20.330}$$

$$\text{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)\text{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{20.331}$$

Definición 659 (Definición 4.1, , Dai [94])**.** *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en 20.325 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.326)-(20.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta>0$ *que depende de* μ,α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv 0$*.*

Teorema 521 (Teorema 4.2, Dai[94])**.** *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{20.332}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 20.216-20.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 660 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95])**.** *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$*, con* $t\geq t_{0}$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$*.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 75 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95])**.** *Si el modelo de flujo definido por 20.216-20.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_{0}>0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$ *para cualquier* $t\geq t_{0}$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq 1$*.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 161. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de 20.197 y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^{0}(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0)=\overline{T}^{0}(0)=0$.

ii) Para todo $t\geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}(t)+\overline{T}_{k}^{0}(t)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}(t)=\overline{Q}_{k}(0)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}(t)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}(t)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}(t)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}(t)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}(t)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}(t)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}(t)$$

para $\overline{Q}_{k}(t)>0$.

Lema 143 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 522 (Teorema 5.2 [91]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 523 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α,μ,T,U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t)=0$*, para toda* $t\geq t_0$.

Lema 144 (Lema 5.2 [106]). *Sea* $\{\xi(k):k\in\mathbb{Z}\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0,\infty)$*, y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t)=max\{n\geq 1:\xi(1)+\cdots+\xi(n-1)\leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)]<\infty$*, entonces para cualquier entero* $r\geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E[\xi_{1}]}\right)^{r} \tag{20.333}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 524 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}(X_1]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r}\rightarrow\frac{1}{\mu^{r}}$*, cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$..

Proposición 162 (Proposicin 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X(t_{0}|x|)|^{p+1}\right]=0. \tag{20.334}$$

Proposición 163 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{20.335}$$

Proposición 164 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{20.336}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 525 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{20.337}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \tag{20.338}$$

Teorema 526 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x \left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi \left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 527 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]| = 0}.$$

Proposición 165 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{20.339}$$

Lema 76 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{20.340}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 528 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q(s)|^{p}\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{20.341}$$

para $t > 0$ *y* $x \in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q(s)|^{p}\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 529 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{20.342}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q(t)|^{p}\right] = \mathbb{E}_{\pi}\left[|Q(0)|^{p}\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 530 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con* $f(x) = f_1(x)$ *se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f} = 0. \tag{20.343}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q(0)\right]| = 0.$$

Teorema 531 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea* ν *cualquier distribución de probabilidad en* $(X,\mathcal{B}_X)$, *y* π *la distribución estacionaria de* X.

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{20.344}$$

$\mathbb{P}$*-c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_{+}$ *con* $\pi(|f|) < \infty$, *la ecuación anterior se cumple.*

Teorema 532 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{20.345}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, *con* $|Q(0)| = 1$. *Entonces para cualquier* $0 < q \leq 1$, *existe* $B < 0$ *tal que para cualquier* $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\} \geq q. \tag{20.346}$$

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_{k}^{x}(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^{x}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.

- $T_{m,k}^{x,0}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ para $m=1,2,\ldots,M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x,0}\left(|x|t\right)\right) \tag{20.347}$$

para $m=1,2,\ldots,M$, cuando $x\rightarrow\infty$, ver [99]. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}_{m}\left(t\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(t\right)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [99, 94, 95].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\lambda_{k}t-\sum_{m=1}^{M}\mu_{k}\overline{T}_{m,k}\left(t\right), \tag{20.348}$$

para $k=1,2,\ldots,K$.

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K. \tag{20.349}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente,} \tag{20.350}$$

para $k=1,2,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$.

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^{0}\left(t\right)+\overline{T}_{m,k}\left(t\right)=t \text{ para } m=1,2,\ldots,M. \tag{20.351}$$

Definición 661 (Definición 4.1, Dai [94])**.** *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ *en (20.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (20.348)-(20.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 662. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta>0$ *que depende de* μ,λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$, *se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv 0$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 533 (Teorema 4.2, Dai [94])**.** *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right). \tag{20.352}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 663 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95])**.** *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$, *con* $t\geq t_{0}$, *para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.

Lema 77 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por (20.348)-(20.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 534 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{20.353}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{20.354}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{20.355}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{20.356}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 535 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{20.357}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 534.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 532

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [98], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [98], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [95], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [123]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x \{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [94, 108].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 664. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D) \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 665. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 67. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [105]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot) \pi(dx),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [95].

Definición 666. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [94]:

Lema 145 (Lema 3.1, Dai [94])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x [\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{20.358}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 146 (Lema 3.1, Dai [94])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 536 (Teorema 3.1, Dai [94])**.** *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E} |X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{20.359}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (20.358) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

20.3 Ya revisado

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \ldots, L_N(t)]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j(\tau_i(m)) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}[C_i]$ como

$$\mathbb{E}[C_i] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}[M_i]}$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1 - \mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1 - P_i(z)} \\
&= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned} Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z} \cdot \frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \\ &= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)} \cdot \frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z} \cdot \frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \end{aligned}$$

Definición 667. *Sea L_i^* el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\mathbb{E}[L_i^*] = f_i(i) \qquad (20.360)$$

$$Var[L_i^*] = f_i(i,i) + \mathbb{E}[L_i^*] - \mathbb{E}[L_i^*]^2. \qquad (20.361)$$

Definición 668. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} S_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right] = F_i(\theta(z)), \\ F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right], \\ P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right], \\ F_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right], \theta_i(z) - zP_i \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{1-\mu_i}, \\ Var[S_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{(1-\mu_i)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^3} \end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var[L_i^*] = f_i(i,i) + f_i(i) - f_i(i)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i(z) = I_i[P_i(z)]$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L_i^*] &= \mu_i \mathbb{E}[I_i] \\
Var[L_i^*] &= \mu_i^2 Var[I_i] + \sigma^2 \mathbb{E}[I_i]
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},$$

además

$$Var[I_i] = \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).$$

Si $C_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i(z) = I_i[\theta_i(z)],$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i]\,\mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{\mu_i} \frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)} \\
Var[C_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2 (1-\mu_i)^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_i] &= \mu_i \mathbb{E}[C_i], \\
\mathbb{E}[I_i] &= (1-\mu_i)\,\mathbb{E}[C_i]
\end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))\,P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \\
&- \frac{(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \\
&- \frac{(1-z)(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} \\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}
\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z \rightarrow 1^{+}$:

$$
\begin{aligned}
Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{dQ_i(z)}{dz} &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - F_i(z)) P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1 - P_i(z))(P_i(z) - z)} && (20.362)\\
&- \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) P_i(z) F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1 - P_i(z))(P_i(z) - z)} && (20.363)\\
&- \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z)(1 - F_i(z)) P_i(z) \left(P_i^{'}(z) - 1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1 - P_i(z))(P_i(z) - z)^2} && (20.364)\\
&+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z)(1 - F_i(z)) P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1 - P_i(z))(P_i(z) - z)} && (20.365)\\
&+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z)(1 - F_i(z)) P_i(z) P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1 - P_i(z))^2 (P_i(z) - z)} && (20.366)
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - F_i(z)) P_i(z)}{(1 - P_i(z))(P_i(z) - z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz}[(1 - F_i(z)) P_i(z)]}{\frac{d}{dz}[(1 - P_i(z))(-z + P_i(z))]}\\
&= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-P_i(z) F_i^{'}(z) + (1 - F_i(z)) P_i^{'}(z)}{(1 - P_i(z))\left(-1 + P_i^{'}(z)\right) - (-z + P_i(z)) P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) P_i(z) F_i^{'}(z)}{(1 - P_i(z))(P_i(z) - z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz}\left[(1 - z) P_i(z) F_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}[(1 - P_i(z))(P_i(z) - z)]}\\
&= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-P_i(z) F_i^{'}(z) + (1 - z) F_i^{'}(z) P_i^{'}(z) + (1 - z) P_i(z) F_i^{''}(z)}{(1 - P_i(z))\left(-1 + P_i^{'}(z)\right) - (-z + P_i(z)) P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z)(1 - F_i(z)) P_i(z) \left(P_i^{'}(z) - 1\right)}{(1 - P_i(z))(P_i(z) - z)^2} = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz}\left[(1 - z)(1 - F_i(z)) P_i(z) \left(P_i^{'}(z) - 1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1 - P_i(z))(P_i(z) - z)^2\right]}\\
= &\lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-(1 - F_i(z)) P_i(z) \left(-1 + P_i^{'}(z)\right) - (1 - z) P_i(z) F_i^{'}(z) \left(-1 + P_i^{'}(z)\right)}{2(1 - P_i(z))(-z + P_i(z))\left(-1 + P_i^{'}(z)\right) - (-z + P_i(z))^2 P_i^{'}(z)}\\
+ &\lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{+(1 - z)(1 - F_i(z)) \left(-1 + P_i^{'}(z)\right) P_i^{'}(z)}{2(1 - P_i(z))(-z + P_i(z))\left(-1 + P_i^{'}(z)\right) - (-z + P_i(z))^2 P_i^{'}(z)}\\
+ &\lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{+(1 - z)(1 - F_i(z)) P_i(z) P_i^{''}(z)}{2(1 - P_i(z))(-z + P_i(z))\left(-1 + P_i^{'}(z)\right) - (-z + P_i(z))^2 P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z)(1 - F_i(z)) P_i^{'}(z)}{(1 - P_i(z))(P_i(z) - z)} = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz}\left[(1 - z)(1 - F_i(z)) P_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}[(1 - P_i(z))(P_i(z) - z)]}\\
= &\lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-(1 - F_i(z)) P_i^{'}(z) - (1 - z) F_i^{'}(z) P_i^{'}(z) + (1 - z)(1 - F_i(z)) P_i^{''}(z)}{(1 - P_i(z))\left(-1 + P_i^{'}(z)\right) - (-z + P_i(z)) P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\to 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)\right]}\\
= \lim_{z\to 1^{+}}&\frac{-(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)-(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)P_i'[z]}{(1-P_i(z))^2\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}\\
+ \lim_{z\to 1^{+}}&\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)^2+(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))^2\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

En nuestra notación $V(t)\equiv C_i$ y $X_i=C_i^{(m)}$ para nuestra segunda definición, mientras que para la primera la notación es: $X(t)\equiv C_i$ y $R_i\equiv C_i^{(m)}$.

Definición 669. *Sea L_i^{*}el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[L_i^{*}] &= f_i(i) && (20.367)\\
Var[L_i^{*}] &= f_i(i,i)+\mathbb{E}[L_i^{*}]-\mathbb{E}[L_i^{*}]^2. && (20.368)
\end{aligned}
$$

Definición 670. *El tiempo de Ciclo C_i es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1)-\tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 671. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
S_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right]=F_i(\theta(z)),\\
F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\
P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\
F_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right],\theta_i(z)-zP_i
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}[L_i^{*}]}{1-\mu_i}=\frac{f_i(i)}{1-\mu_i},\\
Var[S_i] &= \frac{Var[L_i^{*}]}{(1-\mu_i)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}[L_i^{*}]}{(1-\mu_i)^3}
\end{aligned}
$$

donde recordemos que

$$
Var[L_i^{*}] = f_i(i,i)+f_i(i)-f_i(i)^2.
$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t=\tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m),\tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$
\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right]=\mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]
$$

entonces, si

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i(z) = I_i[P_i(z)]$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[L_i^*] &= \mu_i \mathbb{E}[I_i]\\ Var[L_i^*] &= \mu_i^2 Var[I_i] + \sigma^2 \mathbb{E}[I_i]\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},$$

además

$$Var[I_i] = \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).$$

Si $C_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i(z) = I_i[\theta_i(z)],$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i]\mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)}\\ Var[C_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_i] &= \mu_i \mathbb{E}[C_i],\\ \mathbb{E}[I_i] &= (1-\mu_i)\mathbb{E}[C_i]\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \ldots, L_N(t)]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j(\tau_i(m)) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}[C_i]$ como

$$\mathbb{E}[C_i] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}[M_i]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Nota 68. *En Stidham[128] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ *contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que* $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$*, además, como* $M_i > 0$*, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que*

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Nota incompleta!!

21 Procesos de Renovación y Regenerativos

Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i\left(t\right)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i\left(z\right)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \left\{P_i\left(z\right)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i\left(z\right)}\\
&= \frac{1-I_i\left[P_i\left(z\right)\right]}{1-P_i\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

por tanto

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}
$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que
Sea

$$
Q_i\left(z\right) = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i\left(z\right)}{P_i\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}
$$

Consideremos una cola de la red de sistemas de visitas cíclicas fija, Q_l.

Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (**??**), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_l es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1\left(T_i\right)=0, L_2\left(T_i\right)=0, \hat{L}_1\left(T_i\right)=0$ y $\hat{L}_2\left(T_i\right)=0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 672. *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 673. *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 674. *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m=1,2,\ldots,M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

En nuestra notación $V\left(t\right)\equiv C_i$ y $X_i=C_i^{(m)}$ para nuestra segunda definición, mientras que para la primera la notación es: $X\left(t\right)\equiv C_i$ y $R_i\equiv C_i^{(m)}$.

Definición 675. *Sea L_i^*el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= f_i\left(i\right) && (21.1)\\
Var\left[L_i^*\right] &= f_i\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. && (21.2)
\end{aligned}
$$

Definición 676. *El tiempo de Ciclo C_i es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
S_i\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right]=F_i\left(\theta\left(z\right)\right),\\
F\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\
P\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\
F_i\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right], \theta_i\left(z\right)-zP_i
\end{aligned}
$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{1-\mu_i},\\
Var\left[S_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^3}
\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var\left[L_i^*\right] = f_i\left(i,i\right) + f_i\left(i\right) - f_i\left(i\right)^2.$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[I_i\right] = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i},$$

además

$$Var\left[I_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2}f_i\left(i\right).$$

Si $C_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)}\right]$el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i\left(z\right) = I_i\left[\theta_i\left(z\right)\right],$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}\\
Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[C_i\right],\\
\mathbb{E}\left[I_i\right] &= \left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right]
\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $\left[L_1\left(t\right),L_2\left(t\right),\ldots,L_N\left(t\right)\right]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j\left(\tau_i\left(m\right)\right)=0$ para $i=1,2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m=1,2,\ldots,M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}\left[C_i\right]$ como

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N}\mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i\left(z\right)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i\left(z\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i\left(t\right)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i\left(z\right)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i\left(z\right)}\\
&= \frac{1-I_i\left[P_i\left(z\right)\right]}{1-P_i\left(z\right)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\\
&= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2}\\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}
\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z\rightarrow 1^{+}$:

$$Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{dQ_i(z)}{dz} = \lim_{z\rightarrow 1}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \tag{21.3}$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \tag{21.4}$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} \tag{21.5}$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \tag{21.6}$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} \tag{21.7}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}[(1-F_i(z))P_i(z)]}{\frac{d}{dz}[(1-P_i(z))(-z+P_i(z))]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_i(z)F_i^{'}(z)+(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_i(z)F_i^{'}(z)+(1-z)F_i^{'}(z)P_i^{'}(z)+(1-z)P_i(z)F_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}} = \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}\right]}\\
=&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} = \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
=&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} = \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
=&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

Definición 677. *Sea L_{i}^{*}el número de usuarios en la cola Q_{i} cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right] &= f_{i}\left(i\right) && (21.8)\\
Var\left[L_{i}^{*}\right] &= f_{i}\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]-\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]^{2}. && (21.9)
\end{aligned}
$$

Definición 678. *El tiempo de Ciclo C_{i} es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_{i}\left(m+1\right)-\tau_{i}\left(m\right)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_{i}\left(m+1\right)-\overline{\tau}_{i}\left(m\right)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 679. *El tiempo de intervisita I_{i} es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_{i}\left(m+1\right)-\overline{\tau}_{i}\left(m\right)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
S_{i}\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_{i}(m)-\tau_{i}(m)}\right]=F_{i}\left(\theta\left(z\right)\right),\\
F\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_{0}}\right],\\
P\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{X_{n}}\right],\\
F_{i}\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_{i}\left(\tau_{i}(m)\right)}\right],\theta_{i}\left(z\right)-zP_{i}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{1-\mu_i}, \\
Var\left[S_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^3}
\end{aligned}
$$

donde recordemos que

$$
Var\left[L_i^*\right] = f_i\left(i,i\right) + f_i\left(i\right) - f_i\left(i\right)^2.
$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i\left(m+1\right) - \overline{\tau}\left(m\right)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i\left(m+1\right)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $\left[\overline{\tau}\left(m\right), \tau_i\left(m+1\right)\right]$ se tiene que

$$
\mathbb{E}\left[z_i^{L_i\left(\tau_i\left(m+1\right)\right)}\right] = \mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z_i\right)\right\}^{\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)}\right]
$$

entonces, si

$$
I_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)}\right]
$$

se tienen que

$$
F_i\left(z\right) = I_i\left[P_i\left(z\right)\right]
$$

para $i=1,2$, por tanto

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[I_i\right] \\
Var\left[L_i^*\right] &= \mu_i^2 Var\left[I_i\right] + \sigma^2\mathbb{E}\left[I_i\right]
\end{aligned}
$$

para $i=1,2$, por tanto

$$
\mathbb{E}\left[I_i\right] = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i},
$$

además

$$
Var\left[I_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i\left(i\right).
$$

Si $C_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)}\right]$el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$
C_i\left(z\right) = I_i\left[\theta_i\left(z\right)\right],
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)} \\
Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \mu_i \mathbb{E}\left[C_i\right], \\
\mathbb{E}\left[I_i\right] &= \left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right]
\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $\left[L_1\left(t\right), L_2\left(t\right), \ldots, L_N\left(t\right)\right]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j\left(\tau_i\left(m\right)\right) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}\left[C_i\right]$ como

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i\left(z\right)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i\left(m+1\right) - \tau_i\left(m\right)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i\left(m+1\right) - \tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right) - \tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i\left(z\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i\left(t\right)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i\left(z\right)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i\left(z\right)}\\ &= \frac{1-I_i\left[P_i\left(z\right)\right]}{1-P_i\left(z\right)}\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}Q_i\left(z\right) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i\left(z\right)}{P_i\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}\\ &= \frac{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}{f_i\left(i\right)}\cdot\frac{1-F_i\left(z\right)}{P_i\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}\end{aligned}$$

Sea $V_i\left(z\right)=\frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\frac{I_i(z)-1}{z-P_i(z)}$

$$\frac{\partial V_i\left(z\right)}{\partial z} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\left[\frac{I_i{'}\left(z\right)\left(z-P_i\left(z\right)\right)}{z-P_i\left(z\right)}-\frac{\left(I_i\left(z\right)-1\right)\left(1-P_i{'}\left(z\right)\right)}{\left(z-P_i\left(z\right)\right)^2}\right]$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$U_i\left(z\right)=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-P_i\left(z\right)}{z-P_i\left(z\right)}\cdot\frac{I_i\left(z\right)-1}{1-z}$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}V_i\left(z\right) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1-P_i\left(z\right)}{z-P_i\left(z\right)}\right)\frac{I_i\left(z\right)-1}{1-z}+\frac{1-P_i\left(z\right)}{z-P_i\left(z\right)}\frac{d}{dz}\left(\frac{I_i\left(z\right)-1}{1-z}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\left\{\frac{-P_i\left(z\right)\left(z-P_i\left(z\right)\right)-\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(1-P_i^{'}\left(z\right)\right)}{\left(z-P_i\left(z\right)\right)^2}\cdot\frac{I_i\left(z\right)-1}{1-z}\right\}\\ &+ \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\left\{\frac{1-P_i\left(z\right)}{z-P_i\left(z\right)}\cdot\frac{I_i^{'}\left(z\right)\left(1-z\right)+\left(I_i\left(z\right)-1\right)}{\left(1-z\right)^2}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_i(z)}{\partial z} &= \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])}{(1-z)^2\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}+\frac{(1-P_i[z])I_i^{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}-\frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])\,(1-P'[z])}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])^2}\\ &- \frac{(-1+I_i[z])P_i{}'[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}\end{aligned}$$

Sea

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)\,P_i(z)}{1-P_i(z)}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))\,P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)}\\ &- \frac{(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)}\\ &- \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)^2}\\ &+ \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)}\\ &+ \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))^2\,(P_i(z)-z)}\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z\rightarrow 1^+$:

$$Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{dQ_i(z)}{dz} = \lim_{z\rightarrow 1}\frac{(1-F_i(z))\,P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} \tag{21.10}$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} \tag{21.11}$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)^2} \tag{21.12}$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} \tag{21.13}$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))^2\,(P_i(z)-z)} \tag{21.14}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-F_i(z))\,P_i(z)}{(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-F_i(z))\,P_i(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\right]}\\ &= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{-P_i(z)\,F_i^{'}(z)+(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))\,P_i^{'}(z)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)\right]}\\ &= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{-P_i(z)\,F_i^{'}(z)+(1-z)F_i^{'}(z)\,P_i^{'}(z)+(1-z)P_i(z)\,F_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))\,P_i^{'}(z)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_i(z)\right)P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\left(1-P_i(z)\right)\left(P_i(z)-z\right)^2} &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\left(1-F_i(z)\right)P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_i(z)\right)\left(P_i(z)-z\right)^2\right]}\\
= \lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{-\left(1-F_i(z)\right)P_i(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)}{2\left(1-P_i(z)\right)\left(-z+P_i(z)\right)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-\left(-z+P_i(z)\right)^2P_i^{'}(z)}\\
+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{+(1-z)\left(1-F_i(z)\right)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)P_i^{'}(z)}{2\left(1-P_i(z)\right)\left(-z+P_i(z)\right)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-\left(-z+P_i(z)\right)^2P_i^{'}(z)}\\
+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{+(1-z)\left(1-F_i(z)\right)P_i(z)P_i^{''}(z)}{2\left(1-P_i(z)\right)\left(-z+P_i(z)\right)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-\left(-z+P_i(z)\right)^2P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_i(z)\right)P_i^{'}(z)}{\left(1-P_i(z)\right)\left(P_i(z)-z\right)} &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\left(1-F_i(z)\right)P_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_i(z)\right)\left(P_i(z)-z\right)\right]}\\
= \lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{-\left(1-F_i(z)\right)P_i^{'}(z)-(1-z)F_i^{'}(z)P_i^{'}(z)+(1-z)\left(1-F_i(z)\right)P_i^{''}(z)}{\left(1-P_i(z)\right)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-\left(-z+P_i(z)\right)P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_i(z)\right)P_i(z)P_i^{'}(z)}{\left(1-P_i(z)\right)^2\left(P_i(z)-z\right)} &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\left(1-F_i(z)\right)P_i(z)P_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_i(z)\right)^2\left(P_i(z)-z\right)\right]}\\
= \lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{-\left(1-F_i(z)\right)P_i(z)P_i^{'}(z)-(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)P_i^{'}[z]}{\left(1-P_i(z)\right)^2\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-2\left(1-P_i(z)\right)\left(-z+P_i(z)\right)P_i^{'}(z)}\\
+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{(1-z)\left(1-F_i(z)\right)P_i^{'}(z)^2+(1-z)\left(1-F_i(z)\right)P_i(z)P_i^{''}(z)}{\left(1-P_i(z)\right)^2\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-2\left(1-P_i(z)\right)\left(-z+P_i(z)\right)P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

21.1 Tiempo de Ciclo Promedio

Consideremos una cola de la red de sistemas de visitas cíclicas fija, Q_l.

Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (**??**), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_l es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 680. *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 681. *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 682. *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

En nuestra notación $V(t) \equiv C_i$ y $X_i = C_i^{(m)}$ para nuestra segunda definición, mientras que para la primera la notación es: $X(t) \equiv C_i$ y $R_i \equiv C_i^{(m)}$.

21.2 Tiempos de Ciclo e Intervisita

Definición 683. *Sea L_i^{*}el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= f_i\left(i\right) && (21.15)\\
Var\left[L_i^*\right] &= f_i\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. && (21.16)
\end{aligned}
$$

Definición 684. *El tiempo de Ciclo C_i es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 685. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
S_i\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right]=F_i\left(\theta\left(z\right)\right),\\
F\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\
P\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\
F_i\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right],\theta_i\left(z\right)-zP_i
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1-\mu_i}=\frac{f_i\left(i\right)}{1-\mu_i},\\
Var\left[S_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^3}
\end{aligned}
$$

donde recordemos que

$$
Var\left[L_i^*\right] = f_i\left(i,i\right)+f_i\left(i\right)-f_i\left(i\right)^2.
$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t=\tau_i\left(m+1\right)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $\left[\overline{\tau}\left(m\right),\tau_i\left(m+1\right)\right]$ se tiene que

$$
\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z_i\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]
$$

entonces, si

$$
I_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]
$$

se tienen que

$$
F_i\left(z\right)=I_i\left[P_i\left(z\right)\right]
$$

para $i=1,2$, por tanto

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[I_i\right]\\
Var\left[L_i^*\right] &= \mu_i^2 Var\left[I_i\right]+\sigma^2\mathbb{E}\left[I_i\right]
\end{aligned}
$$

para $i=1,2$, por tanto

$$\mathbb{E}\left[I_i\right] = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i},$$

además

$$Var\left[I_i\right] = \frac{Var\left[L_i^{*}\right]}{\mu_i^2}-\frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2}f_i\left(i\right).$$

Si $C_i\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i\left(z\right)=I_i\left[\theta_i\left(z\right)\right],$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right]=\frac{\mathbb{E}\left[L_i^{*}\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i}=\frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}\\ Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^{*}\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[C_i\right],\\ \mathbb{E}\left[I_i\right] &= \left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right]\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $\left[L_1\left(t\right),L_2\left(t\right),\ldots,L_N\left(t\right)\right]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j\left(\tau_i\left(m\right)\right)=0$ para $i=1,2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m=1,2,\ldots,M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}\left[C_i\right]$ como

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}C_i^{(m)}\right]<\infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$, además, como $M_i>0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}\left[C_i\right]<\infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N}\mu_k<1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) \quad = \quad \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i]<\infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right]\\ \mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) \quad = \quad \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right]=z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right]=\frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{1-I_i\left[P_i(z)\right]}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right] \quad = \quad \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

21.3 Longitudes de la Cola en cualquier tiempo

Sea

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1-z)P_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \\
&- \frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \\
&- \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} \\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}
\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z \to 1^+$:

$$Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z\to 1^+}\frac{dQ_i(z)}{dz} = \lim_{z\to 1}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \tag{21.17}$$

$$- \lim_{z\to 1^+}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \tag{21.18}$$

$$- \lim_{z\to 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} \tag{21.19}$$

$$+ \lim_{z\to 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \tag{21.20}$$

$$+ \lim_{z\to 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} \tag{21.21}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 1^+}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\to 1^+}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-F_i(z))P_i(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\right]} \\
&= \lim_{z\to 1^+}\frac{-P_i(z)F_i^{'}(z)+(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 1^+}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\to 1^+}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)\right]} \\
&= \lim_{z\to 1^+}\frac{-P_i(z)F_i^{'}(z)+(1-z)F_i^{'}(z)P_i^{'}(z)+(1-z)P_i(z)F_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}}=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}\right]}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}'[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

21.4 Por resolver

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial Q_{i}\left(z\right)}{\partial z}=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\right)\cdot\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}+\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\right)+\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}\right)\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}\cdot\frac{-F_{i}^{'}\left(z\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)}{\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}}\\
&+ \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-P_{i}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{i}^{(1)}\left(z\right) &= \frac{\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}-\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}\\
&- \frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}}+\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}\\
&+ \frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}
\end{aligned}$$

Sea $V_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\frac{I_i(z)-1}{z-P_i(z)}$

$$\frac{\partial V_i(z)}{\partial z} = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left[\frac{I_i{}'(z)(z-P_i(z))}{z-P_i(z)} - \frac{(I_i(z)-1)(1-P_i{}'(z))}{(z-P_i(z))^2}\right]$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$U_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\cdot\frac{I_i(z)-1}{1-z}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}V_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\right)\frac{I_i(z)-1}{1-z} + \frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\frac{d}{dz}\left(\frac{I_i(z)-1}{1-z}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{-P_i(z)(z-P_i(z))-(1-P_i(z))\left(1-P_i'(z)\right)}{(z-P_i(z))^2}\cdot\frac{I_i(z)-1}{1-z}\right\}\\
&+ \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\cdot\frac{I_i'(z)(1-z)+(I_i(z)-1)}{(1-z)^2}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_i(z)}{\partial z} &= \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])}{(1-z)^2\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])} + \frac{(1-P_i[z])I_i'[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])} - \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])(1-P'[z])}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])^2}\\
&- \frac{(-1+I_i[z])P_i{}'[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}
\end{aligned}$$

21.5 Tiempos de Ciclo e Intervisita

Definición 686. *Sea L_i^* el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L_i^*] &= f_i(i) &(21.22)\\
Var[L_i^*] &= f_i(i,i) + \mathbb{E}[L_i^*] - \mathbb{E}[L_i^*]^2. &(21.23)
\end{aligned}$$

Definición 687. *El tiempo de Ciclo C_i es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1)-\tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 688. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
S_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right] = F_i(\theta(z)),\\
F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\
P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\
F_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right], \theta_i(z) - zP_i
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{1-\mu_i},\\ Var\left[S_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^3}\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var\left[L_i^*\right] = f_i\left(i,i\right) + f_i\left(i\right) - f_i\left(i\right)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i\left(m+1\right) - \overline{\tau}\left(m\right)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i\left(m+1\right)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $\left[\overline{\tau}\left(m\right), \tau_i\left(m+1\right)\right]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i\left(\tau_i\left(m+1\right)\right)}\right] = \mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z_i\right)\right\}^{\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)}\right]$$

entonces, si

$$I_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)}\right]$$

se tienen que

$$F_i\left(z\right) = I_i\left[P_i\left(z\right)\right]$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[I_i\right]\\ Var\left[L_i^*\right] &= \mu_i^2 Var\left[I_i\right] + \sigma^2\mathbb{E}\left[I_i\right]\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\mathbb{E}\left[I_i\right] = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i},$$

además

$$Var\left[I_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i\left(i\right).$$

Si $C_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)}\right]$ el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i\left(z\right) = I_i\left[\theta_i\left(z\right)\right],$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}\\ Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \mu_i \mathbb{E}\left[C_i\right],\\
\mathbb{E}\left[I_i\right] &= \left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right]
\end{aligned}
$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $\left[L_1\left(t\right), L_2\left(t\right), \ldots, L_N\left(t\right)\right]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j\left(\tau_i\left(m\right)\right) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}\left[C_i\right]$ como

$$
\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}
$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.
$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$
\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,
$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$
\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.
$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i\left(z\right)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$
Q_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i\left(m+1\right) - \tau_i\left(m\right)\right]}
$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right] \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i\left(m+1\right) - \tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right] \mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right) - \tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}
$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \left\{P_i(z)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i(z)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)} \\
&= \frac{1-I_i\left[P_i(z)\right]}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]} \cdot \frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z} \cdot \frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \\
&= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)} \cdot \frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z} \cdot \frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \\
&- \frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \\
&- \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} \\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}
\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z \rightarrow 1^{+}$:

$$Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{dQ_i(z)}{dz} = \lim_{z\rightarrow 1}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \tag{21.24}$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \tag{21.25}$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} \tag{21.26}$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \tag{21.27}$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} \tag{21.28}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}[(1-F_i(z))P_i(z)]}{\frac{d}{dz}[(1-P_i(z))(-z+P_i(z))]}\\ &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_i(z)F_i^{'}(z)+(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)]}\\ &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_i(z)F_i^{'}(z)+(1-z)F_i^{'}(z)P_i^{'}(z)+(1-z)P_i(z)F_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}\end{aligned}$$

$$\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} = \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2\right]}$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-(1-F_i(z))P_i(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2P_i^{'}(z)}\\ &+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{+(1-z)(1-F_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)P_i^{'}(z)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2P_i^{'}(z)}\\ &+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{+(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{''}(z)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2P_i^{'}(z)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)]}\\ &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-(1-F_i(z))P_i^{'}(z)-(1-z)F_i^{'}(z)P_i^{'}(z)+(1-z)(1-F_i(z))P_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}\end{aligned}$$

$$
\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} = \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}'[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

21.6 Longitudes de la Cola en cualquier tiempo

Sea $V_{i}\left(z\right)=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{z-P_{i}\left(z\right)}$

$$
\frac{\partial V_{i}\left(z\right)}{\partial z} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left[\frac{I_{i}{'}\left(z\right)\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}-\frac{\left(I_{i}\left(z\right)-1\right)\left(1-P_{i}{'}\left(z\right)\right)}{\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}}\right]
$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$
U_{i}\left(z\right)=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\cdot\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}V_{i}\left(z\right) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\right)\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}+\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\frac{d}{dz}\left(\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left\{\frac{-P_{i}\left(z\right)\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)-\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(1-P_{i}^{'}\left(z\right)\right)}{\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}}\cdot\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}\right\}\\
&+ \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left\{\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\cdot\frac{I_{i}^{'}\left(z\right)\left(1-z\right)+\left(I_{i}\left(z\right)-1\right)}{\left(1-z\right)^{2}}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_{i}\left(z\right)}{\partial z} &= \frac{(-1+I_{i}[z])(1-P_{i}[z])}{(1-z)^{2}\mathbb{E}[I_{i}](z-P_{i}[z])}+\frac{(1-P_{i}[z])I_{i}^{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_{i}](z-P_{i}[z])}-\frac{(-1+I_{i}[z])(1-P_{i}[z])\left(1-P{'}[z]\right)}{(1-z)\mathbb{E}[I_{i}](z-P_{i}[z])^{2}}\\
&- \frac{(-1+I_{i}[z])P_{i}{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_{i}](z-P_{i}[z])}
\end{aligned}
$$

21.7 Material por agregar

Teorema 537. *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t, $A_j\left(t\right)=\left\{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\right\}$ para algún tiempo $t \geq 0$ y Q_j la cola j-ésima en la RSVC, para $j=1,2,3,4$. Existe un intervalo $I \neq \emptyset$ tal que para $T^{*}\in I$, tal que $\mathbb{P}\left\{A_1\left(T^{*}\right),A_2\left(Tt^{*}\right),A_3\left(T^{*}\right),A_4\left(T^{*}\right)|T^{*}\in I\right\}>0$.*

Proof. Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.

Sea $n\geq1$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j\left(\overline{\tau}_1\left(n\right)\right)=0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1\left(n\right)>0$, entonces tenemos que $\tau_2\left(n\right)=\overline{\tau}_1\left(n\right)+r_1\left(n\right)$.

Definamos el intervalo $I_1 \equiv [\overline{\tau}_1(n), \tau_2(n)]$ de longitud $\xi_1 = r_1(n)$.

Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$\mathbb{P}\{A_1(t)|t \in I_1(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_1\xi_1(n)}. \tag{21.29}$$

Por otra parte, para la cola Q_2 el tiempo $\overline{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\overline{\tau}_2(n-1)) = 0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n.

Entonces tenemos un sgundo intervalo $I_2 \equiv [\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$\mathbb{P}\{A_2(t)|t \in I_2(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_2\xi_2(n)}, \tag{21.30}$$
$$\xi_2(n) = \tau_2(n) - \overline{\tau}_2(n-1) \tag{21.31}$$

Ahora, dado que $I_1(n) \subset I_2(n)$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
\xi_1(n) \leq \xi_2(n) & \Leftrightarrow & -\xi_1(n) \geq -\xi_2(n) \\
-\tilde{\mu}_2\xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2\xi_2(n) & \Leftrightarrow & e^{-\tilde{\mu}_2\xi_1(n)} \geq e^{-\tilde{\mu}_2\xi_2(n)} \\
\mathbb{P}\{A_2(t)|t \in I_1(n)\} & \geq & \mathbb{P}\{A_2(t)|t \in I_2(n)\}.
\end{array}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t)|t \in I_1(n)\} & = & \mathbb{P}\{A_1(t)|t \in I_1(n)\}\mathbb{P}\{A_2(t)|t \in I_1(n)\} \\
& \geq & \mathbb{P}\{A_1(t)|t \in I_1(n)\}\mathbb{P}\{A_2(t)|t \in I_2(n)\} \\
& = & e^{-\tilde{\mu}_1\xi_1(n)}e^{-\tilde{\mu}_2\xi_2(n)} = e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)]}.
\end{array}$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t)|t \in I_1(n)\} = e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)]} > 0. \tag{21.32}$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC para algún $m \geq 1$ se tiene que $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$ por lo tanto se cumple cualquiera de los siguientes cuatro casos

a) $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \overline{\tau}_3(m)$

b) $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$

c) $\tau_4(m) < \tau_2(n) < \overline{\tau}_4(m)$

d) $\overline{\tau}_4(m) < \tau_2(n) < \tau_3(m+1)$

Sea el intervalo $I_3(m) \equiv [\tau_3(m), \overline{\tau}_3(m)]$ tal que $\tau_2(n) \in I_3(m)$, con longitud de intervalo $\xi_3 \equiv \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m)$, entonces se tiene que para Q_3

$$\mathbb{P}\{A_3(t)|t \in I_3(m)\} = e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(m)}. \tag{21.33}$$

mientras que para Q_4 consideremos el intervalo $I_4(m) \equiv [\tau_4(m-1), \overline{\tau}_3(m)]$, entonces por construcción $I_3(m) \subset I_4(m)$, por lo tanto

$$\begin{array}{rcl}
\xi_3(m) \leq \xi_4(m) & \Leftrightarrow & -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\
-\tilde{\mu}_4\xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4\xi_4(m) & \Leftrightarrow & e^{-\tilde{\mu}_4\xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(n)} \\
\mathbb{P}\{A_4(t)|t \in I_3(m)\} & \geq & \mathbb{P}\{A_4(t)|t \in I_4(m)\}.
\end{array}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t)|t \in I_3(m)\} & = & \mathbb{P}\{A_3(t)|t \in I_3(m)\}\mathbb{P}\{A_4(t)|t \in I_3(m)\} \\
& \geq & \mathbb{P}\{A_3(t)|t \in I_3(m)\}\mathbb{P}\{A_4(t)|t \in I_4(m)\} \\
& = & e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(m)}e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(m)} = e^{-(\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m))}.
\end{array}$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right), A_4\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\}\geq e^{-\left(\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m)\right)}>0. \tag{21.34}$$

Sea el intervalo $I_3\left(m\right)\equiv\left[\overline{\tau}_3\left(m\right),\tau_4\left(m\right)\right]$ con longitud $\xi_3\equiv\tau_4\left(m\right)-\overline{\tau}_3\left(m\right)$, entonces se tiene que para Q_3

$$\mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\}=e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(m)}. \tag{21.35}$$

mientras que para Q_4 consideremos el intervalo $I_4\left(m\right)\equiv\left[\overline{\tau}_4\left(m-1\right),\tau_4\left(m\right)\right]$, entonces por construcción $I_3\left(m\right)\subset I_4\left(m\right)$, y al igual que en el caso anterior se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
\xi_3\left(m\right)\leq\xi_4\left(m\right) & \Leftrightarrow & -\xi_3\left(m\right)\geq-\xi_4\left(m\right)\\
-\tilde{\mu}_4\xi_3\left(m\right)\geq-\tilde{\mu}_4\xi_4\left(m\right) & \Leftrightarrow & e^{-\tilde{\mu}_4\xi_3(m)}\geq e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(n)}\\
\mathbb{P}\left\{A_4\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\} & \geq & \mathbb{P}\left\{A_4\left(t\right)|t\in I_4\left(m\right)\right\}.
\end{array}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right), A_4\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\} & = & \mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\}\\
& \geq & \mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4\left(t\right)|t\in I_4\left(m\right)\right\}\\
& = & e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(m)}e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(m)}=e^{-\left(\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m)\right)}.
\end{array}$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right), A_4\left(t\right)|t\in I_4\left(m\right)\right\}\geq e^{-\left(\tilde{\mu}_3+\tilde{\mu}_4\right)\xi_3(m)}>0. \tag{21.36}$$

Para el intervalo $I_3\left(m\right)=\left[\tau_4\left(m\right),\overline{\tau}_4\left(m\right)\right]$, se tiene que este caso es análogo al caso (a).

Para el intevalo $I_3\left(m\right)\equiv\left[\overline{\tau}_4\left(m\right),\tau_4\left(m+1\right)\right]$, se tiene que es análogo al caso (b).

Por construcción se tiene que $I\left(n,m\right)\equiv I_1\left(n\right)\cap I_3\left(m\right)\neq\emptyset$,entonces en particular se tienen las contenciones $I\left(n,m\right)\subseteq I_1\left(n\right)$ y $I\left(n,m\right)\subseteq I_3\left(m\right)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m}\equiv\ell\left(I\left(n,m\right)\right)$ tenemos que

$$\begin{array}{c}
\xi_{n,m}\leq\xi_1\left(n\right)\text{ y }\xi_{n,m}\leq\xi_3\left(m\right)\text{ entonces}\\
-\xi_{n,m}\geq-\xi_1\left(n\right)\text{ y }-\xi_{n,m}\leq-\xi_3\left(m\right)
\end{array}$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{array}{ll}
-\tilde{\mu}_1\xi_{n,m}\geq-\tilde{\mu}_1\xi_1\left(n\right), & -\tilde{\mu}_2\xi_{n,m}\geq-\tilde{\mu}_2\xi_1\left(n\right)\geq-\tilde{\mu}_2\xi_2\left(n\right),\\
-\tilde{\mu}_3\xi_{n,m}\geq-\tilde{\mu}_3\xi_3\left(m\right), & -\tilde{\mu}_4\xi_{n,m}\geq-\tilde{\mu}_4\xi_3\left(m\right)\geq-\tilde{\mu}_4\xi_4\left(m\right).
\end{array}$$

Sea $T^*\in I\left(n,m\right)$, entonces dado que en particular $T^*\in I_1\left(n\right)$, se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2, en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4, es decir, $\tilde{\mu}_1=\mu_1$, $\tilde{\mu}_2=\mu_2$, $\tilde{\mu}_3=\mu_3$, $\tilde{\mu}_4=\mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I\left(n,m\right)$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4, por lo tanto tenemos que

$$\begin{array}{l}
\mathbb{P}\left\{A_1\left(T^*\right),A_2\left(T^*\right),A_3\left(T^*\right),A_4\left(T^*\right)|T^*\in I\left(n,m\right)\right\}\\
=\prod_{j=1}^{4}\mathbb{P}\left\{A_j\left(T^*\right)|T^*\in I\left(n,m\right)\right\}\\
\geq\mathbb{P}\left\{A_1\left(T^*\right)|T^*\in I_1\left(n\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_2\left(T^*\right)|T^*\in I_2\left(n\right)\right\}\\
\mathbb{P}\left\{A_3\left(T^*\right)|T^*\in I_3\left(m\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4\left(T^*\right)|T^*\in I_4\left(m\right)\right\}\\
=e^{-\mu_1\xi_1(n)}e^{-\mu_2\xi_2(n)}e^{-\mu_3\xi_3(m)}e^{-\mu_4\xi_4(m)}\\
=e^{-\left[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)+\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m)\right]}>0.
\end{array} \tag{21.37}$$

Ahora solo resta demostrar que para $n\geq1$, existe $m\geq1$ tal que se cumplen cualquiera de los cuatro casos arriba mencionados:

a) $\tau_3\left(m\right)<\tau_2\left(n\right)<\overline{\tau}_3\left(m\right)$

b) $\overline{\tau}_3\left(m\right)<\tau_2\left(n\right)<\tau_4\left(m\right)$

c) $\tau_4\left(m\right)<\tau_2\left(n\right)<\overline{\tau}_4\left(m\right)$

d) $\overline{\tau}_4\left(m\right)<\tau_2\left(n\right)<\tau_3\left(m+1\right)$

Consideremos nuevamente el primer caso. Supongamos que no existe $m \geq 1$, tal que $I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$, es decir, para toda $m \geq 1$, $I_1(n) \cap I_3(m) = \emptyset$, entonces se tiene que ocurren cualquiera de los dos casos

a) $\tau_2(n) \leq \tau_3(m)$: Recordemos que $\tau_2(m) = \overline{\tau}_1 + r_1(m)$ donde cada una de las variables aleatorias son tales que $\mathbb{E}[\overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n)] < \infty$, $\mathbb{E}[R_1] < \infty$ y $\mathbb{E}[\tau_3(m)] < \infty$, lo cual contradice el hecho de que no exista un ciclo $m \geq 1$ que satisfaga la condición deseada.

b) $\tau_2(n) \geq \overline{\tau}_3(m)$: por un argumento similar al anterior se tiene que no es posible que no exista un ciclo $m \geq 1$ tal que satisface la condición deseada.

Para el resto de los casos la demostración es análoga. Por lo tanto, se tiene que efectivamente existe $m \geq 1$ tal que $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$. $\square$

En Sigman, Thorison y Wolff [127] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 166. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k (X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 538. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*

  b) $L = 0$, *para cualquier proceso de servicio* S*;*

  c) $L = 1$ *y* $G = D$*;*

  d) $L = \infty$ *y* $G = M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ *son*

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$*;*

  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$*;*

  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$*;*

  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 539. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*

  c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para* $L < \infty$

d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 540. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Definición 689 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 69. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [127].*

Nota 70. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 690. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 71. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 72. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 73. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 74. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 691. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 692. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 693. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 541. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 1. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 694. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{21.38}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 695. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 75. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 76. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 542 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 167. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 696. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t) | T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 168. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t) \mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 543 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 169. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 77. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 544. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{21.39}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{21.40}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 2 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{21.41}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 697. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 545. *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (21.42) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (21.43) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 3. *Si* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación, y* $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{21.44}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\} \\ T_{N(t)} \leq & \ t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\} \\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 170. *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Nota 78. *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N\left(t\right)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$

Teorema 546. *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (21.45) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (21.46) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N /t) la cumple.

Corolario 4 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{21.47}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 698. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 547. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (21.48)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (21.49) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 5. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{21.50}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 171. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 79. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 548. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (21.51)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (21.52)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 6 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (21.53)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 699. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 549. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (21.54)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (21.55)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 7. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (21.56)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\
T_{N(t)} \leq \quad & t \quad < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\
P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)
\end{aligned}
$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$
\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)
$$

Proposición 172. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 80. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 550. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \qquad (21.57) \\
lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \qquad (21.58)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 8 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$
t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \qquad (21.59)
$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 700. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$
M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|
$$

Teorema 551. *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \qquad (21.60) \\
lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \qquad (21.61)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 9. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \qquad (21.62)
$$

21.8 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 173. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 81. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 552. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{21.63}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{21.64}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 10 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{21.65}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 701. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 553. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) = a, \text{ c.s.} \quad (21.66)$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (21.67)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 11. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (21.68)$$

Definición 702. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H\left(t\right) = h\left(t\right) + \int_{[0,t]} H\left(t-s\right) dF\left(s\right), \ t \geq 0, \quad (21.69)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 174. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 554 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 703. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 175. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 704. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF\left(t\right), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 176. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 82. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 555. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 12 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 705. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{21.70}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 706. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 83. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 707. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{21.71}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 708. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 84. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 177. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 1 (**Proceso Poisson**)**.** *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 85. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 556. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{21.72}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{21.73}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 13 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{21.74}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 709. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 557. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{21.75}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{21.76}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 14. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1}Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{21.77}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 710. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 178. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 711. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 179. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 86. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 558. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 15 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 712. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{21.78}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 180. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 559 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 713. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \;\; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 181. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 714. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 182. *La Transformada de Laplace* $\hat{U}(\alpha)$ *y* $\hat{F}(\alpha)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.

Nota 87. *Un proceso de renovación* $N(t)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, *para* $t \geq 0$.

Teorema 560. *Sea* $N(t)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ *es finita para cada* t. *Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N(t)$ *tal que* $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, *independiente de* n. *Entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 16 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación* $N(t)$,

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 715. *Sea* $h(t)$ *función de valores reales en* $\mathbb{R}$ *acotada en intervalos finitos e igual a cero para* $t < 0$ *La ecuación de renovación para* $h(t)$ *y la distribución* F *es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{21.79}$$

donde $H(t)$ *es una función de valores reales. Esto es* $H = h + F \star H$. *Decimos que* $H(t)$ *es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para* $t < 0$.

Proposición 183. *La función* $U \star h(t)$ *es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 561 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 88. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 562 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 184. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 716. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 185. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 563 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 89. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 564 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 186. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 717. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 187. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 565 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 718. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, *sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 90. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 91. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 92. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S, *espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 719. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, *sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 93. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 566 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 720 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación* $N(t)$, *los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t, *que es el tiempo desde la última renovación para* t.
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t, *residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t.
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t.

Nota 94. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n, *y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$. *Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{21.80}$$

Ejemplo 2 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ, *entonces de la expresión (21.80) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 95. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 721. *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 96. *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 188. *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 567. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación* N *es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante* $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\,ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 97. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 17. *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 98. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 99. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 722 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 723. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 100. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 724. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 101. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 102. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 725 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 103. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 726. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\overline{X} = lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du$$
$$\mathbb{P}(X_\infty \leq x) = lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 104. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 727. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 728. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 729. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 568. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\left\{X_{1},X_{2},\ldots\right\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right)\in A|X_{1}+X_{2}+\cdots+X_{R(t)}=s,\left\{V\left(\tau\right),\tau<s\right\}\right\}=\mathbb{P}\left\{V\left(t-s\right)\in A|X_{1}>t-s\right\},$$

para todo $0\leq s\leq t$, donde $R\left(t\right)=\max\left\{X_{1}+X_{2}+\cdots+X_{j}\leq t\right\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0,X_{1})$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$, $[X_{1},X_{1}+X_{2})$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X=X_{1}$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 730. *Se define el proceso estacionario, $\left\{V^{*}\left(t\right),t\geq0\right\}$, para $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ por*

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right)\in A\right\}=\frac{1}{\mathbb{E}\left[X\right]}\int_{0}^{\infty}\mathbb{P}\left\{V\left(t+x\right)\in A|X>x\right\}\left(1-F\left(x\right)\right)dx,$$

para todo $t\geq0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 731. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0,\lambda,2\lambda,\ldots$ para alguna $\lambda>0$ entera.*

Definición 732. *Una modificación medible de un proceso $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$, es una versión de este, $\left\{V\left(t,w\right)\right\}$ conjuntamente medible para $t\geq0$ y para $w\in S$, S espacio de estados para $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$.*

Teorema 569. *Sea $\left\{V\left(t\right),t\geq\right\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}\left[X\right]<\infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]<\infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]<\infty$,entonces

$$\frac{\int_{0}^{t}V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$.

Para $\left\{X\left(t\right):t\geq0\right\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N\left(t\right)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_{+}$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X\left(t\right)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_{n}=T_{n}-T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Sean $T_{1},T_{2},\ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_{j} es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_{1}\left(T_{i}\right)=0,L_{2}\left(T_{i}\right)=0,\hat{L}_{1}\left(T_{i}\right)=0$ y $\hat{L}_{2}\left(T_{i}\right)=0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Sea la función generadora de momentos para L_{i}, el número de usuarios en la cola $Q_{i}\left(z\right)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_{i}(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_{i}\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{L_{i}(t)}\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_{i}}\sum_{t=\tau_{i}(m)}^{\tau_{i}(m+1)-1}z^{L_{i}(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_{i}}\tau_{i}\left(m+1\right)-\tau_{i}\left(m\right)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$[98], se sigue del lema de Wald que:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]
\end{aligned}
$$

por tanto se tiene que

$$
Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]}
$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (**??**): $n \rightarrow t-\tau_i(m)$, $T \rightarrow \overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)$, $L_n \rightarrow L_i(t)$ y $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right] \rightarrow F_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i\tau_i(m)}\right]$, se puede ver que

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)} \tag{21.81}
$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)}\\
&= \frac{1-I_i[P_i(z)]}{1-P_i(z)}
\end{aligned}
$$

por tanto

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]}\left\{z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)} + \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}\right\}
\end{aligned}
$$

[98] En Stidham[128] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1$.

es decir

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1-z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \tag{21.82}$$

Teorema 570. *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t, $A_j(t) = \{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\}$ para algún tiempo $t \geq 0$ y Q_j la cola j-ésima en la RSVC, para $j = 1, 2, 3, 4$. Existe un intervalo $I \neq \emptyset$ tal que para $T^* \in I$, tal que $\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(Tt^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I\} > 0$.*

Proof. Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.

Sea $n > 0$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1(n) > 0$, entonces tenemos que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1(n)$.

Definamos el intervalo $I_1 \equiv [\overline{\tau}_1(n), \tau_2(n)]$ de longitud $\xi_1 = r_1(n)$. Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$\mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)}. \tag{21.83}$$

Por otra parte, para la cola Q_2, el tiempo $\overline{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\overline{\tau}_2(n-1)) = 0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n. Entonces tenemos un sgundo intervalo $I_2 \equiv [\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)}, \tag{21.84}$$

donde $\xi_2(n) = \tau_2(n) - \overline{\tau}_2(n-1)$.

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} &= \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\} \\ &\geq \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} \\ &= e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]}. \end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]} > 0. \tag{21.85}$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC, se afirma que existe $m > 0$ tal que $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$.

Para Q_3 sea $I_3 = [\overline{\tau}_3(m), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_3(m) = r_3(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(n)}. \tag{21.86}$$

Análogamente que como se hizo para Q_2, tenemos que para Q_4 se tiene el intervalo $I_4 = [\overline{\tau}_4(m-1), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_4(m) = \tau_4(m) - \overline{\tau}_4(m-1)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} = e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(n)}. \tag{21.87}$$

Al igual que para el primer sistema, dado que $I_3(m) \subset I_4(m)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \xi_3(m) \leq \xi_4(m) &\Leftrightarrow -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\ -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m) &\Leftrightarrow e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} \\ \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} &\geq \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} \end{aligned}$$

Entonces, dado que los eventos A_3 y A_4 son independientes, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t)\,|t\in I_3(m)\right\} &= \mathbb{P}\left\{A_3(t)\,|t\in I_3(m)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4(t)\,|t\in I_3(m)\right\}\\ &\geq \mathbb{P}\left\{A_3(t)\,|t\in I_3(n)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4(t)\,|t\in I_4(n)\right\}\\ &= e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(m)}e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(m)} = e^{-\left[\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m)\right]}.\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t)\,|t\in I_3(m)\right\} = e^{-\left[\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m)\right]} > 0. \tag{21.88}$$

Por construcción se tiene que $I(n,m)\equiv I_1(n)\cap I_3(m)\neq\emptyset$,entonces en particular se tienen las contenciones $I(n,m)\subseteq I_1(n)$ y $I(n,m)\subseteq I_3(m)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m}\equiv\ell(I(n,m))$ tenemos que

$$\xi_{n,m}\leq\xi_1(n) \text{ y } \xi_{n,m}\leq\xi_3(m) \text{ entonces } -\xi_{n,m}\geq-\xi_1(n) \text{ y } -\xi_{n,m}\leq-\xi_3(m)$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{array}{ll}-\tilde{\mu}_1\xi_{n,m}\geq-\tilde{\mu}_1\xi_1(n), & -\tilde{\mu}_2\xi_{n,m}\geq-\tilde{\mu}_2\xi_1(n)\geq-\tilde{\mu}_2\xi_2(n),\\ -\tilde{\mu}_3\xi_{n,m}\geq-\tilde{\mu}_3\xi_3(m), & -\tilde{\mu}_4\xi_{n,m}\geq-\tilde{\mu}_4\xi_3(m)\geq-\tilde{\mu}_4\xi_4(m).\end{array}$$

Sea $T^*\in I_{n,m}$, entonces dado que en particular $T^*\in I_1(n)$ se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2, en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4, es decir, $\tilde{\mu}_1=\mu_1$, $\tilde{\mu}_2=\mu_2$, $\tilde{\mu}_3=\mu_3$, $\tilde{\mu}_4=\mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I_{n,m}$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4, por lo tanto tenemos que

$$\begin{array}{l}\mathbb{P}\left\{A_1(T^*), A_2(T^*), A_3(T^*), A_4(T^*)\,|T^*\in I_{n,m}\right\} = \prod_{j=1}^{4}\mathbb{P}\left\{A_j(T^*)\,|T^*\in I_{n,m}\right\}\\ \geq\mathbb{P}\left\{A_1(T^*)\,|T^*\in I_1(n)\right\}\mathbb{P}\left\{A_2(T^*)\,|T^*\in I_2(n)\right\}\mathbb{P}\left\{A_3(T^*)\,|T^*\in I_3(m)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4(T^*)\,|T^*\in I_4(m)\right\}\\ = e^{-\mu_1\xi_1(n)}e^{-\mu_2\xi_2(n)}e^{-\mu_3\xi_3(m)}e^{-\mu_4\xi_4(m)} = e^{-\left[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)+\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m)\right]} > 0.\end{array} \tag{21.89}$$

□

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [100] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n)=\mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 571. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta-\mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta-\mu(1-\delta)^{-1}\right]\\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right]\\ var(D_n) &= var(T_0)-\left(\tau^{-1}-\delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2(1-\delta)^{-1}.\end{aligned}$$

  Teorema 572. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 573. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

En Sigman, Thorison y Wolff [127] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 189. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k (X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 574. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*
  b) $L = 0$, *para cualquier proceso de servicio* S;
  c) $L = 1$ *y* $G = D$;
  d) $L = \infty$ *y* $G = M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;
  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;
  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 575. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

a) $s = \infty$

b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*

c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para* $L < \infty$

d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 576. *En cualquier sistema de colas* $GI/G/1/L$ *con* $1 \leq L < \infty$ *y distribución de interarribos* A *y distribución de los tiempos de servicio* B*, tal que* $A(0) = 0$*,* $A(t)(1 - B(t)) > 0$ *para alguna* $t > 0$ *y* $B(t)$ *para toda* $t > 0$*, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [100] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 577. *En un sistema estacionario* $GI/M/1$ *los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\ var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2(1-\delta)^{-1}. \end{aligned}$$

  Teorema 578. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario* $GI/M/1$ *es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 579. *Los intervalos de interpartida* $\{D_n\}$ *de un sistema* $M/G/1$ *estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo* $M/M/1$.

22 Procesos Regenerativos

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0. \tag{22.1}$$

(S2.)
$$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N}, \tag{22.2}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right] \geq 0$.
- Se define
$$\delta^* := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right]. \tag{22.3}$$

- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\right) \tag{22.4}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1,2,\ldots,K\} \times \{1,2,\ldots,S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{22.5}$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([94])

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0$
2) $\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}$para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j'}^{m} = r_{j,j'}$
- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define
$$\delta^{*} := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(i)\right]. \tag{22.6}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m, se denota por $B_m(t)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t; $B_m^0(t)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t, finalmente sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{22.7}$$

para $k = 1,\ldots,K$ y $m = 1,2,\ldots,M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1,2,\ldots,K\} \times \{1,2,\ldots,S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1,\ldots,\xi_K,\eta_1,\ldots,\eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1,\ldots,K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1,2,\ldots,K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{22.8}$$
$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{22.9}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto $A2)$ para $p=1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición 666.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

22.1 Preliminares

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s\left(x\right)=N\left(x\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]=\overline{N}>0$

2) $\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]\leq\overline{N}$para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}=r_{j,j^{'}}$
- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}\left(1\right)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.
- Finalmente, se define
$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}r_{j,j^{'}}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}\left(i\right)\right]. \tag{22.10}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho<1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_{k}\left(t\right)$ el número de usuarios en la cola k, $A_{k}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m, se denota por $B_{m}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t; $B_{m}^{0}\left(t\right)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t, finalmente sea $C_{m}\left(t\right)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X\left(t\right)^{T}=\left(Q_{k}\left(t\right),A_{k}\left(t\right),B_{m}\left(t\right),B_{m}^{0}\left(t\right),C_{m}\left(t\right)\right) \tag{22.11}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l\left(1\right)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k\left(1\right) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{22.12}$$
$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k\left(i\right) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k\left(x\right) dx, \;\; 0 \leq a < b. \tag{22.13}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto $A2)$ para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición 666.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

References

[1] Asmussen, S. (1987). *Applied Probability and Queues.* John Wiley and Sons.

[2] Bhat, N. (2008). *An Introduction to Queueing Theory: Modelling and Analysis in Applications.* Birkhauser.

[3] Boxma, J. O. (1987). Pseudoconservation Laws in Cyclic Service Systems. *Journal of Applied Probability*, 24, 949-964.

[4] Borovkov, A. A., and Schassberger, R. (1995). Ergodicity of a Polling Network. *Stochastic Processes and their Applications*, 50(2), 253-262.

[5] van den Bos, L., and Boon, M. (2013). *Networks of Polling Systems* (report). Eindhoven University of Technology.

[6] Boon, M. A. A., van der Mei, R. D., and Winands, E. M. M. (2011). Applications of Polling Systems. February 24, 2011.

[7] Ng, C. H., and Soong, B. H. (2008). *Queueing Modelling Fundamentals with Applications in Communications Networks.* John Wiley and Sons.

[8] Chen, H. (1995). Fluid Approximations and Stability of Multiclass Queueing Networks I: Work-conserving Disciplines. *Annals of Applied Probability.*

[9] Cooper, R. B. (1970). Queues Served in Cyclic Order: Waiting Times. *The Bell System Technical Journal*, 49, 399-413.

[10] Dai, J. G. (1995). On Positive Harris Recurrence of Multiclass Queueing Networks: A Unified Approach Via Fluid Limit Models. *The Annals of Applied Probability*, 5(1), 49-77.

[11] Dai, J. G., and Meyn, S. P. (1995). Stability and Convergence of Moments for Multiclass Queueing Networks Via Fluid Limit Models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(11), 1889-1904.

[12] Dai, J. G., and Weiss, G. (1996). Stability and Instability of Fluid Models for Reentrant Lines. *Mathematics of Operations Research*, 21(1), 115-134.

[13] Daley, D. J. (1968). The Correlation Structure of the Output Process of Some Single Server Queueing Systems. *The Annals of Mathematical Statistics*, 39(3), 1007-1019.

[14] Davis, M. H. A. (1984). Piecewise Deterministic Markov Processes: A General Class of Nondiffusion Stochastic Models. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 46(3), 353-388.

[15] Down, D. (1998). On the Stability of Polling Models with Multiple Servers. *Journal of Applied Probability*, 35(3), 925-935.

[16] Disney, R. L., Farrell, R. L., and Morais, P. R. (1973). A Characterization of $M/G/1$ Queues with Renewal Departure Processes. *Management Science*, 19(11), Theory Series, 1222-1228.

[17] Eisenberg, M. (1972). Queues with Periodic Service and Changeover Time. *Operations Research*, 20(2), 440-451.

[18] Fricker, C., and Jaïbi, M. R. (1994). Monotonicity and Stability of Periodic Polling Models. *Queueing Systems*, 15(1-4), 211-238.

[19] Getoor, R. K. (1979). Transience and Recurrence of Markov Processes. In J. Azema and M. Yor (Eds.), *Seminaire de Probabilités XIV* (pp. 397-409). New York: Springer-Verlag.

[20] Gut, A. (1995). *Stopped Random Walks: Limit Theorems and Applications*. Applied Probability.

[21] Kaspi, H., and Mandelbaum, A. (1992). Regenerative Closed Queueing Networks. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 39(4), 239-258.

[22] Kleinrock, L. (1975). *Queueing Systems: Theory, Volume 1*. Wiley-Interscience.

[23] Konheim, A. G., Levy, H., and Srinivasan, M. M. (1994). Descendant Set: An Efficient Approach for the Analysis of Polling Systems. *IEEE Transactions on Communications*, 42(2-4), 1245-1253.

[24] Lang, S. (1973). *Calculus of Several Variables*. Addison-Wesley Publishing Company.

[25] Levy, H., and Sidi, M. (1990). Polling Systems: Applications, Modeling, and Optimization. *IEEE Transactions on Communications*, 30(10), 1750-1760.

[26] Fricker, C., and Jaïbi, M. R. (1998). Stability of Multi-server Polling Models. Institute National de Recherche en Informatique et en Automatique.

[27] Meyn, S. P., and Tweedie, R. L. (1993). *Markov Chains and Stochastic Stability*. Springer-Verlag.

[28] Meyn, S. P., and Down, D. (1994). Stability of Generalized Jackson Networks. *The Annals of Applied Probability*.

[29] van der Mei, R. D., and Borst, S. C. (1997). Analysis of Multiple-server Polling Systems by Means of the Power-Series Algorithm. *Stochastic Models*, 13(2), 339-369.

[30] Meyn, S. P. (1995). Transience of Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models. *The Annals of Applied Probability*, 5(4), 946-957.

[31] Adan, I. J. B. F., van Leeuwaarden, J. S. H., and Winands, E. M. M. (2006). On the Application of Rouche's Theorem in Queueing Theory. *Operations Research Letters*, 34(3), 355-360.

[32] Roubos, A. (2007). *Polling Systems and their Applications.* Vrije Universiteit Amsterdam.

[33] Saavedra, B. P. (2011). Informe Técnico del Microsimulador. Departamento de Matemáticas.

[34] Vishnevskii, V. M., and Semenova, O. V. (2006). Mathematical Methods to Study the Polling Systems. *Automation and Remote Control*, 67(2), 173-220.

[35] Serfozo, R. (2009). *Basics of Applied Stochastic Processes.* Springer-Verlag.

[36] Sharpe, M. (1998). *General Theory of Markov Processes.* Academic.

[37] Sigman, K. (1990). The Stability of Open Queueing Networks. *Stochastic Processes and their Applications*, 35(1), 11-15.

[38] Sidi, M., and Levy, H. (1990). Customer Routing in Polling Systems. In P. King, I. Mitrani, and R. Pooley (Eds.), *Proceedings Performance '90.* North-Holland, Amsterdam.

[39] Sidi, M., and Levy, H. (1991). Polling Systems with Simultaneous Arrivals. *IEEE Transactions on Communications*, 39(6), 823-827.

[40] Sigman, K., Thorisson, H., and Wolff, R. W. (1994). A Note on the Existence of Regeneration Times. *Journal of Applied Probability*, 31, 1116-1122.

[41] Stidham, S. Jr. (1972). Regenerative Processes in the Theory of Queues, with Applications to the Alternating Priority Queue. *Advances in Applied Probability*, 4(3), 542-577.

[42] Takagi, H. (1986). *Analysis of Polling Systems.* Cambridge: MIT Press.

[43] Takagi, H., and Kleinrock. (1986). Analysis of Polling Systems. Cambridge: MIT Press.

[44] Takagi, H. (1988). Queueing Analysis of Polling Models. *ACM Computing Surveys*, 20(1), 5-28.

[45] Thorisson, H. (2000). *Coupling, Stationarity, and Regeneration.* Probability and its Applications. Springer-Verlag.

[46] Winands, E. M. M., Adan, I. J. B. F., and van Houtum, G. J. (2006). Mean Value Analysis for Polling Systems. *Queueing Systems*, 54, 35-44.

[47] James, G., Witten, D., Hastie, T., and Tibshirani, R. (2013). *An Introduction to Statistical Learning: with Applications in R.* Springer.

[48] Hosmer, D. W., Lemeshow, S., and Sturdivant, R. X. (2013). *Applied Logistic Regression* (3rd ed.). Wiley.

[49] Bishop, C. M. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning.* Springer.

[50] Harrell, F. E. (2015). *Regression Modeling Strategies: With Applications to Linear Models, Logistic and Ordinal Regression, and Survival Analysis.* Springer.

[51] R Documentation and Tutorials: `https://cran.r-project.org/manuals.html`

[52] Tutorials on R-bloggers: `https://www.r-bloggers.com/`

[53] Coursera: *Machine Learning* by Andrew Ng.

[54] edX: *Data Science and Machine Learning Essentials* by Microsoft.

[55] Ross, S. M. (2014). *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists.* Academic Press.

[56] DeGroot, M. H., and Schervish, M. J. (2012). *Probability and Statistics* (4th ed.). Pearson.

[57] Hogg, R. V., McKean, J., and Craig, A. T. (2019). *Introduction to Mathematical Statistics* (8th ed.). Pearson.

[58] Kleinbaum, D. G., and Klein, M. (2010). *Logistic Regression: A Self-Learning Text* (3rd ed.). Springer.

[59] Wasserman, L. (2004). *All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference*. Springer.

[60] Probability and Statistics Tutorials on Khan Academy: https://www.khanacademy.org/math/statistics-probability

[61] Online Statistics Education: http://onlinestatbook.com/

[62] Peng, C. Y. J., Lee, K. L., and Ingersoll, G. M. (2002). *An Introduction to Logistic Regression Analysis and Reporting*. The Journal of Educational Research.

[63] Agresti, A. (2007). *An Introduction to Categorical Data Analysis* (2nd ed.). Wiley.

[64] Han, J., Pei, J., and Kamber, M. (2011). *Data Mining: Concepts and Techniques*. Morgan Kaufmann.

[65] Data Cleaning and Preprocessing on Towards Data Science: https://towardsdatascience.com/data-cleaning-and-preprocessing

[66] Molinaro, A. M., Simon, R., and Pfeiffer, R. M. (2005). *Prediction Error Estimation: A Comparison of Resampling Methods*. Bioinformatics.

[67] Evaluating Machine Learning Models on Towards Data Science: https://towardsdatascience.com/evaluating-machine-learning-models

[68] Practical Guide to Logistic Regression in R on Towards Data Science: https://towardsdatascience.com/practical-guide-to-logistic-regression-in-r

[69] Coursera: *Statistics with R* by Duke University.

[70] edX: *Data Science: Probability* by Harvard University.

[71] Coursera: *Logistic Regression* by Stanford University.

[72] edX: *Data Science: Inference and Modeling* by Harvard University.

[73] Coursera: *Data Science: Wrangling and Cleaning* by Johns Hopkins University.

[74] edX: *Data Science: R Basics* by Harvard University.

[75] Coursera: *Regression Models* by Johns Hopkins University.

[76] edX: *Data Science: Statistical Inference* by Harvard University.

[77] An Introduction to Survival Analysis on Towards Data Science: https://towardsdatascience.com/an-introduction-to-survival-analysis

[78] Multinomial Logistic Regression on DataCamp: https://www.datacamp.com/community/tutorials/multinomial-logistic-regression-R

[79] Coursera: *Survival Analysis* by Johns Hopkins University.

[80] edX: *Data Science: Statistical Inference and Modeling for High-throughput Experiments* by Harvard University.

[81] Sigman, K., and Wolff, R. W. (1993). A Review of Regenerative Processes. *SIAM Review*, 38(2), 269-288.

[82] I.J.B.F. Adan, J.S.H. van Leeuwaarden, and E.M.M. Winands. On the application of Rouches theorem in queueing theory. Operations Research Letters, 34(3):355-360, 2006.

[83] Asmussen Soren, Applied Probability and Queues, John Wiley and Sons, 1987.

[84] Bhat Narayan, An Introduction to Queueing Theory Modelling and Analysis in Applications, Birkhauser, 2008.

[85] Boxma J. O., Analysis and Optimization of Polling Systems, Queueing, Performance and Control in ATM, pp. 173-183, 1991.

[86] Boxma J. O., Pseudoconservation Laws in Cyclic Service Systems, Journal of Applied Probability, vol. 24, 1987, pp. 949-964.

[87] Boon M.A.A., Van der Mei R.D. and Winands E.M.M., Applications of Polling Systems, 2011.

[88] Borovkov. A. A. and Schassberger R., Ergodicity of a Polling Network, Stochastic Processes and their Applications, vol. 50, no. 2, 1995, pp. 253-262.

[89] Laurent van den Bos and Marko Boon, Networks of Polling Systems (report), Eindhoven University of Technology, 2013.

[90] Chee-Hook Ng. y Boon-Hee Soong, Queueing Modelling Fundemantals with Applications in Communications Networks, John-Wiley and Sons, Ltd, 2008.

[91] Chen H., Fluid Approximations and Stability of Multiclass Queueing Networks I: Work-Conserving Disciplines, Annals Applied Probabability, vol. 5, no. 3, 1995, pp. 637-665.

[92] R.B. Cooper, G. Murray, Queues served in cyclic order (The Bell System Technical Journal, 48 (1969) 675-689).

[93] R.B. Cooper, Queues served in cyclic order: waiting times (The Bell System Technical Journal, 49 (1970) 399-413).

[94] Dai Jean G., On positive Harris Recurrence of Multiclass Queueing Networks: A Unified Approach Via Fluid Limit Models, The Annals of Applied Probability, vol. 5, No. 1, 1995, pp. 49-77.

[95] Dai Jim G. and Meyn Sean P., Stability and Convergence of Moments for Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models, IEEE transactions on Automatic Control, vol. 40, No. 11, 1995, pp. 1889-1904.

[96] Dai Jim G. and Weiss G., Stability and Inestability of Fluid Models for Reentrant Lines, Mathematics of Operation Research, vol. 21, no. 1, 1996, pp. 115-134.

[97] D.J. Daley, The correlation structure of the output process of some single server queueing systems, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 39. No. 3, pp. 1007-1019, 1968.

[98] Davis, M. H. A., Piecewise Deterministic Markov Processes: A General Class of Nondifussion Stochastic Models. Journal of Royal Statistics Society Serie B, vol. 46, no. 3, 1984, pp. 353-388.

[99] Down D., On the Stability of Polling Models with Multiple Servers, Journal of Applied Probability, vol. 35, no. 3, 1998, pp. 925-935.

[100] D.J. Daley, The correlation structure of the output process of some single server queueing systems, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 39. No. 3, pp. 1007-1019, 1968.

[101] Ralpjh L. Disney, Robert L. Farrell and Paulo Renato Morais, A Characterization of $M/G/1$ Queues with Renewal Departure Processes, Manage of Science, Vol. 19, No. 11, Theory Series, pp. 1222-1228, 1973.

[102] M. Eisenberg, Queues with periodic service and changeover time (Operations Research, 20 (2)(1972) 440-451).

[103] Fricker Christine and Jaïbi M.R., Monotonicity and Stability of Periodic Polling Models, Queueing Systems, vol. 15, no. 1-4, 1994, pp. 211-238.

[104] Fricker Christine and Jaïbi M.R., Stability of Multi-Server Polling Models, Institute National de Recherche en Informatique et en Automatique, Issue 3347, 1998.

[105] Getoor R. K., Transience and recurrence of Markov processes, Siminaire de Probabilitis XIV, J. Azema and M Yor, Eds. New York Springer-Verlag, 1979.

[106] Gut A., Stopped Random Walks: Limit Theorems and Applications, Applied Probability, 1995.

[107] Chee-Hook Ng. y Boon-Hee Soong, Queueing Modelling Fundemantals with Applications in Communications Networks, John-Wiley and Sons, Ltd, 2008.

[108] Kaspi H. and Mandelbaum A., Regenerative Closed Queueing Networks, Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, vol. 39, no. 4, 1992, pp. 239-258.

[109] A.G. Konheim, H. Levy, M.M. Srinivasan, Descendant set: an efficient approach for the analysis of polling systems (IEEE Transactions on Communications, 42 (2/3/4)(1994) 1245-1253).

[110] Leonard Kleinrock, Theory, Volume 1, Queueing Systems Wiley-Interscience, 1975,

[111] A. G. Konheim, h. Levy and M. M. Srinivasan. Descendant set: an efficient approach for the analysis of polling systems. IEEE Trabsanctions on Communications, 42(2-4): pp. 1245-1253, 1994.

[112] Serge Lang, Calculus of Several Variables, Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

[113] Levy Hanoch y Sidi Moshe , Polling Systems: Applications, Modeling, and Optimization, IEEE Transactions on Communications, vol. 30, no. 10, 1990, pp. 1750-1760.

[114] van der Mei, R.D. and Borst, S. C., Analysis of Multiple-Server Polling Systems by Means of the Power-Series Algorithm, Stochastic Models, vol. 13, no. 2, 1997, pp. 339-369.

[115] Meyn Sean P., Transience of Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models, The Annals of Applied Probability, vol. 5, no. 4, 1995, pp.946-957.

[116] Meyn S. P. and Tweedie R. L., Stability of Markovian Processes II:Continuous Time Processes and Sample Chains, Advanced Applied Pobability, vol. 25, 1993, pp. 487-517.

[117] Meyn S. P. and Tweedie R. L., Markov Chains and Stochastic Stability, 1993.

[118] Meyn, S.P. and Down, D., Stability of Generalized Jackson Networks, The Annals of Applied Probability, 1994.

[119] Roubos Alex, Polling Systems and their Applications, Vrije Universiteit Amsterdam, 2007.

[120] Saavedra B. P., Informe Técnico del Microsimulador, Departamento de Matemátias, 2011.

[121] Vishnevskii V.M. and Semenova O.V., Mathematical Methods to Study the Polling Systems, Automation and Remote Control, vol. 67, no. 2, 2006, pp. 173-220.

[122] Richard Serfozo, Basics of Applied Stochastic Processes, Springer-Verlag, 2009.

[123] Sharpe Michael , General Theory of Markov Processes. Boston, M.A. Academic, 1998.

[124] Sigman Karl, The Stability of Open Queueing Networks, Stochastic Processes and their Applications, vol. 35, no. 1, 1990, pp. 11-15.

[125] Sidi M. and Levy H., Customer Routing in Polling Systems, In: P. King, I. Mitrani, and R. Pooley (Eds.), Proceedings Performance '90, North-Holland, Amsterdam, 1990.

[126] Sidi M. and Levy H., Polling Systems with Simultaneus Arrivals. IEEE Transactions on Communications, vol. 39, no. 6, 1991, pp. 823-827.

[127] Karl Sigman, Hermann Thorisson and Ronald W. Wolff, A Note on the Existence of Regeneration Times, Journal of Applied Probability, vol. 31, pp. 1116-1122, 1994.

[128] Shaler Stidham, Jr., Regenerative Processes in the theory ow queues, with applications to the alternating priority queue, Advances in Applied Probability, Vol. 4, no. 3, 1972,pp. 542-577.

[129] Takagi H., Analysis of Polling Systems, Cambdrige: MIT Press, 1986

[130] Takagi H. and Kleinrock, Analysis of Polling Systems, Cambdrige: MIT Press, 1986

[131] Takagi Hideaki, Queueing Analysis of Polling Models, ACM computing Surveys, vol. 20, no. 1, 1988, pp. 5-28.

[132] Hermann Thorisson, Coupling, Stationarity, and Regeneration, Probability and its Applications, Springer-Verlag, 2000.

[133] E.M.M. Winands, I.J.B.F. Adan adn G.J. van Houtum, Mean value analysis for polling systems, Queueing Systems (2006), 54:35-44,

[134] Konheim, A.G. and Meister, B., Waiting Lines and Times in a System with Polling, J. ACM, 1974, vol. 21, n0. 3, pp. 470-490.

[135] Levy, H. and Kleinrock, L., Polling Systems with Zero Switch-over Periods: A General Method for Analysis the Expected DElay, Performance Evaluat., 1991, vol. 13, no. 2, pp. 97-107.

[136] Yechiali, U., Analysis and Control of Polling systems, in Performance Evaluation of Computer and Communications Systems, Donatiello, L. and Nelson R., Eds. Berlin: Springer Verlag, 1993, pp. 630-650.