Curso Elemental de Regresión Logística y Análisis de Supervivencia

Carlos E. Martínez-Rodríguez

Julio 2024

Índice general

Parte I

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1. Introducción

La Estadística es una ciencia formal que estudia la recolección, análisis e interpretación de datos de una muestra representativa, ya sea para ayudar en la toma de decisiones o para explicar condiciones regulares o irregulares de algún fenómeno o estudio aplicado, de ocurrencia en forma aleatoria o condicional. Sin embargo, la estadística es más que eso, es decir, es transversal a una amplia variedad de disciplinas, desde la física hasta las ciencias sociales, desde las ciencias de la salud hasta el control de calidad. Se usa para la toma de decisiones en áreas de negocios o instituciones gubernamentales. Ahora bien, las técnicas estadísticas se aplican de manera amplia en mercadotecnia, contabilidad, control de calidad y en otras actividades; estudios de consumidores; análisis de resultados en deportes; administradores de instituciones; en la educación; organismos políticos; médicos; y por otras personas que intervienen en la toma de decisiones.

Definición 1.1 *La Estadística es la ciencia cuyo objetivo es reunir una información cuantitativa concerniente a individuos, grupos, series de hechos, etc. y deducir de ello gracias al análisis de estos datos unos significados precisos o unas previsiones para el futuro.*

La estadística, en general, es la ciencia que trata de la recopilación, organización presentación, análisis e interpretación de datos numéricos con el fin de realizar una toma de decisión más efectiva. Los métodos estadísticos tradicionalmente se utilizan para propósitos descriptivos, para organizar y resumir datos numéricos. La estadística descriptiva, por ejemplo trata de la tabulación de datos, su presentación en forma gráfica o ilustrativa y el cálculo de medidas descriptivas.

1.2. Historia de la Estadística

Es difícil conocer los orígenes de la Estadística. Desde los comienzos de la civilización han existido formas sencillas de estadística, pues ya se utilizaban representaciones gráficas y otros símbolos en pieles, rocas, palos de madera y paredes de cuevas para contar el número de personas, animales o ciertas cosas. Su origen empieza posiblemente en la isla de Cerdeña, donde existen monumentos prehistóricos pertenecientes a los Nuragas, las primeros habitantes de la isla; estos monumentos constan de bloques de basalto superpuestos sin mortero y en cuyas paredes de encontraban grabados toscos signos que han sido interpretados con mucha verosimilidad como muescas que servían para llevar la cuenta del ganado y la caza. Los babilonios usaban ya pequeñas tablillas de arcilla para recopilar datos en tablas sobre la producción agrícola y los géneros vendidos o cambiados mediante trueque. Otros vestigios pueden ser hallados en el antiguo Egipto, cuyos faraones lograron recopilar, hacia el año 3050 antes de Cristo, prolijos datos relativos a la población y la riqueza del país. De acuerdo al historiador griego Heródoto, dicho registro de riqueza y población se hizo con el objetivo de preparar la construcción de las pirámides. En el mismo Egipto, Ramsés II hizo un censo de las tierras con el objeto de verificar un nuevo reparto. En el antiguo Israel la Biblia da referencias, en el libro de los Números, de los datos estadísticos obtenidos en dos recuentos de la población hebrea. El rey David por otra parte, ordenó a Joab, general del ejército hacer un censo de Israel con la finalidad de conocer el número de la población. También los chinos efectuaron censos hace más de cuarenta siglos. Los griegos efectuaron censos periódicamente con fines tributarios, sociales (división de tierras) y militares (cálculo de recursos y hombres disponibles). La investigación histórica revela que se realizaron 69 censos para calcular los impuestos, determinar los derechos de voto y ponderar la potencia guerrera.

Fueron los romanos, maestros de la organización política, quienes mejor supieron emplear los recursos de la estadística. Cada cinco años realizaban un censo de la población y sus funcionarios públicos tenían la obligación de anotar nacimientos, defunciones y matrimonios, sin olvidar los recuentos periódicos del ganado y de las riquezas contenidas en las tierras conquistadas. Para el nacimiento de Cristo sucedía uno de estos empadronamientos de la población bajo la autoridad del imperio. Durante los mil años siguientes a la caída del imperio Romano se realizaron muy pocas operaciones Estadísticas, con la notable excepción de las relaciones de tierras pertenecientes a la Iglesia, compiladas por Pipino el Breve en el 758 y por Carlomagno en el 762 DC. Durante el siglo IX se realizaron en Francia algunos censos parciales de siervos. En Inglaterra, Guillermo el Conquistador recopiló el Domesday Book o libro del Gran Catastro para el año 1086, un documento de la propiedad, extensión y valor de las tierras de Inglaterra. Esa obra fue el primer compendio estadístico de Inglaterra. Aunque Carlomagno, en Francia; y Guillermo el Conquistador, en Inglaterra, trataron de revivir la técnica romana, los métodos estadísticos permanecieron casi olvidados durante la Edad Media.

Durante los siglos XV, XVI, y XVII, hombres como Leonardo de Vinci, Nicolás Copérnico, Galileo, Neper, William Harvey, Sir Francis Bacon y René Descartes, hicieron grandes operaciones al método científico, de tal forma que cuando se crearon los Estados Nacionales y surgió como fuerza el comercio internacional existía ya un método capaz de aplicarse a los datos económicos. Para el año 1532 empezaron a registrarse en Inglaterra las defunciones debido al temor que Enrique VII tenía por la peste. Más o menos por la misma época, en Francia la ley exigió a los clérigos registrar los bautismos, fallecimientos y matrimonios. Durante un brote de peste que apareció a fines de la década de 1500, el gobierno inglés comenzó a publicar estadística semanales de los decesos. Esa costumbre continuó muchos años, y en 1632 estos Bills of Mortality (Cuentas de Mortalidad) contenían los nacimientos y fallecimientos por sexo. En 1662, el capitán John Graunt usó documentos que abarcaban treinta años y efectuó predicciones sobre el número de personas que morirían de varias enfermedades y sobre las proporciones de nacimientos de varones y mujeres que cabría esperar. El trabajo de Graunt, condensado en su obra *Natural and Political Observations...Made upon the Bills of Mortality*, fue un esfuerzo innovador en el análisis estadístico. Por el año 1540 el alemán Sebastián Muster realizó una compilación estadística de los recursos nacionales, comprensiva de datos sobre organización política, instrucciones sociales, comercio y poderío militar.

Los eruditos del siglo XVII demostraron especial interés por la Estadística Demográfica como resultado de la especulación sobre si la población aumentaba, decrecía o permanecía estática. En los tiempos modernos tales métodos fueron resucitados por algunos reyes que necesitaban conocer las riquezas monetarias y el potencial humano de sus respectivos países. El primer empleo de los datos estadísticos para fines ajenos a la política tuvo lugar en 1691 y estuvo a cargo de Gaspar Neumann, un profesor alemán que vivía en Breslau. Este investigador se propuso destruir la antigua creencia popular de que en los años terminados en siete moría más gente que en los restantes, y para lograrlo hurgó pacientemente en los archivos parroquiales de la ciudad. Después de revisar miles de partidas de defunción pudo demostrar que en tales años no fallecían más personas que en los demás. Los procedimientos de Neumann fueron conocidos por el astrónomo inglés Halley, descubridor del cometa que lleva su nombre, quien los aplicó al estudio de la vida humana.

Durante el siglo XVII y principios del XVIII, matemáticos como Bernoulli, Francis Maseres, Lagrange y Laplace desarrollaron la teoría de probabilidades. No obstante durante cierto tiempo, la teoría de las probabilidades limitó su aplicación a los juegos de azar y hasta el siglo XVIII no comenzó a aplicarse a los grandes problemas científicos. Godofredo Achenwall, profesor de la Universidad de Gotinga, acuñó en 1760 la palabra estadística, que extrajo del término italiano statista (estadista). Creía, y con sobrada razón, que los datos de la nueva ciencia serían el aliado más eficaz del gobernante consciente. La raíz remota de la palabra se halla, por otra parte, en el término latino status, que significa estado o situación; Esta etimología aumenta el valor intrínseco de la palabra, por cuanto la estadística revela el sentido cuantitativo de las más variadas situaciones. Jacques Quételect es quien aplica las Estadísticas a las ciencias sociales. Este interpretó la teoría de la probabilidad para su uso en las ciencias sociales y resolver la aplicación del principio de promedios y de la variabilidad a los fenómenos sociales. Quételect fue el primero en realizar la aplicación práctica de todo el método Estadístico, entonces conocido, a las diversas ramas de la ciencia. Entretanto, en el período del 1800 al 1820 se desarrollaron dos conceptos matemáticos fundamentales para la teoría Estadística; la teoría de los errores de observación, aportada por Laplace y Gauss; y la teoría de los mínimos cuadrados desarrollada por Laplace, Gauss y Legendre. A finales del siglo XIX, Sir Francis Gaston ideó el método conocido por Correlación, que tenía por objeto medir la influencia relativa de los factores sobre las variables. De aquí partió el desarrollo del coeficiente de correlación creado por Karl Pearson y otros cultivadores de la ciencia biométrica como J. Pease Norton, R. H. Hooker y G. Udny Yule, que efectuaron amplios estudios sobre la medida de las relaciones.

La historia de la estadística está resumida en tres grandes etapas o fases.

- **Fase 1: Los Censos:** Desde el momento en que se constituye una autoridad política, la idea de inventariar de una forma más o menos regular la población y las riquezas existentes en el territorio está ligada a la conciencia de soberanía y a los primeros esfuerzos administrativos.

- **Fase 2: De la Descripción de los Conjuntos a la Aritmética Política:** Las ideas mercantilistas extrañan una intensificación de este tipo de investigación. Colbert multiplica las encuestas sobre artículos manufacturados, el comercio y la población: los intendentes del Reino envían a París sus memorias. Vauban, más conocido por sus fortificaciones o su Dime Royale, que es la primera propuesta de un impuesto sobre los ingresos, se señala como el verdadero precursor de los sondeos. Más tarde, Bufón se preocupa de esos problemas antes de dedicarse a la historia natural. La escuela inglesa proporciona un nuevo progreso al superar la fase puramente descriptiva.

  Sus tres principales representantes son Graunt, Petty y Halley. El penúltimo es autor de la famosa Aritmética Política. Chaptal, ministro del interior francés, publica en 1801 el primer censo general de población, desarrolla los estudios industriales, de las producciones y los cambios, haciéndose sistemáticos durantes las dos terceras partes del siglo XIX.

- **Fase 3: Estadística y Cálculo de Probabilidades:** El cálculo de probabilidades se incorpora rápidamente como un instrumento de análisis extremadamente poderoso para el estudio de los fenómenos económicos y sociales y en general para el estudio de fenómenos cuyas causas son demasiados complejas para conocerlos totalmente y hacer posible su análisis.

La Estadística para su mejor estudio se ha dividido en dos grandes ramas: **la Estadística Descriptiva y la Estadística Inferencial**.

- **Descriptiva:** consiste sobre todo en la presentación de datos en forma de tablas y gráficas. Esta comprende cualquier actividad relacionada con los datos y está diseñada para resumir o describir los mismos sin factores pertinentes adicionales; esto es, sin intentar inferir nada que vaya más allá de los datos, como tales.

- **Inferencial:** se deriva de muestras, de observaciones hechas sólo acerca de una parte de un conjunto numeroso de elementos y esto implica que su análisis requiere de generalizaciones que van más allá de los datos. Como consecuencia, la característica más importante del reciente crecimiento de la estadística ha sido un cambio en el énfasis de los métodos que describen a métodos que sirven para hacer generalizaciones. La Estadística Inferencial investiga o analiza una población partiendo de una muestra tomada.

Estadística Inferencial

Los métodos básicos de la estadística inferencial son la estimación y el contraste de hipótesis, que juegan un papel fundamental en la investigación. Por tanto, algunos de los objetivos que se persiguen son:

- Calcular los parámetros de la distribución de medias o proporciones muestrales de tamaño n, extraídas de una población de media y varianza conocidas.

- Estimar la media o la proporción de una población a partir de la media o proporción muestral.

- Utilizar distintos tamaños muestrales para controlar la confianza y el error admitido.

- Contrastar los resultados obtenidos a partir de muestras.
- Visualizar gráficamente, mediante las respectivas curvas normales, las estimaciones realizadas.

En definitiva, la idea es, a partir de una población se extrae una muestra por algunos de los métodos existentes, con la que se generan datos numéricos que se van a utilizar para generar estadísticos con los que realizar estimaciones o contrastes poblacionales. Existen dos formas de estimar parámetros: la *estimación puntual* y la *estimación por intervalo de confianza*. En la primera se busca, con base en los datos muestrales, un único valor estimado para el parámetro. Para la segunda, se determina un intervalo dentro del cual se encuentra el valor del parámetro, con una probabilidad determinada.

Si el objetivo del tratamiento estadístico inferencial, es efectuar generalizaciones acerca de la estructura, composición o comportamiento de las poblaciones no observadas, a partir de una parte de la población, será necesario que la proporción de población examinada sea representativa del total. Por ello, la selección de la muestra requiere unos requisitos que lo garanticen, debe ser representativa y aleatoria.

Además, la cantidad de elementos que integran la muestra (el tamaño de la muestra) depende de múltiples factores, como el dinero y el tiempo disponibles para el estudio, la importancia del tema analizado, la confiabilidad que se espera de los resultados, las características propias del fenómeno analizado, etcétera.

Así, a partir de la muestra seleccionada se realizan algunos cálculos y se estima el valor de los parámetros de la población tales como la media, la varianza, la desviación estándar, o la forma de la distribución, etc.

El conjunto de los métodos que se utilizan para medir las características de la información, para resumir los valores individuales, y para analizar los datos a fin de extraerles el máximo de información, es lo que se llama *métodos estadísticos*. Los métodos de análisis para la información cuantitativa se pueden dividir en los siguientes seis pasos:

- Definición del problema.
- Recopilación de la información existente.
- Obtención de información original.
- Clasificación.
- Presentación.
- Análisis.

El centro de gravedad de la metodología estadística se empieza a desplazar técnicas de computación intensiva aplicadas a grandes masas de datos, y se empieza a considerar el método estadístico como un proceso iterativo de búsqueda del modelo ideal. Las aplicaciones en este periodo de la Estadística a la Economía conducen a una disciplina con contenido propio: la Econometría. La investigación estadística en problemas militares durante la segunda guerra mundial y los nuevos métodos de programación matemática, dan lugar a la Investigación Operativa. El tratamiento de los datos de la investigación científica tiene varias etapas:

- En la etapa de recolección de datos del método científico, se define a la población de interés y se selecciona una muestra o conjunto de personas representativas de la misma, se realizan experimentos o se emplean instrumentos ya existentes o de nueva creación, para medir los atributos de interés necesarios para responder a las preguntas de investigación. Durante lo que es llamado trabajo de campo se obtienen los datos en crudo, es decir las respuestas directas de los sujetos uno por uno, se codifican (se les asignan valores a las respuestas), se capturan y se verifican para ser utilizados en las siguientes etapas.
- En la etapa de recuento, se organizan y ordenan los datos obtenidos de la muestra. Esta será descrita en la siguiente etapa utilizando la estadística descriptiva, todas las investigaciones utilizan estadística descriptiva, para conocer de manera organizada y resumida las características de la muestra.
- En la etapa de análisis se utilizan las pruebas estadísticas (estadística inferencial) y en la interpretación se acepta o rechaza la hipótesis nula.

Niveles de medición y tipos de variables

Para poder emplear el método estadístico en un estudio es necesario medir las variables.

- Medir: es asignar valores a las propiedades de los objetos bajo ciertas reglas, esas reglas son los niveles de medición.
- Cuantificar: es asignar valores a algo tomando un patrón de referencia. Por ejemplo, cuantificar es ver cuántos hombres y cuántas mujeres hay.

Variable: es una característica o propiedad que asume diferentes valores dentro de una población de interés y cuya variación es susceptible de medirse.
Las variables pueden clasificarse de acuerdo al tipo de valores que puede tomar como:

- **Discretas o categóricas** en las que los valores se relacionan a nombres, etiquetas o categorías, no existe un significado numérico directo.
- **Continuas** los valores tienen un correlato numérico directo, son continuos y susceptibles de fraccionarse y de poder utilizarse en operaciones aritméticas.
- **Dicotómica** sólo tienen dos valores posibles, la característica está ausente o presente.

En cuanto a una clasificación estadística, las varibles pueden ser:

- **Aleatoria** Aquella en la cual desconocemos el valor porque fluctúa de acuerdo a un evento debido al azar.
- **Determinística** Aquella variable de la que se conoce el valor.
- **Independiente** aquellas variables que son manipuladas por el investigador. Define los grupos.
- **Dependiente** son mediciones que ocurren durante el experimento o tratamiento (resultado de la independiente), es la que se mide y compara entre los grupos.

En lo que tiene que ver con los **Niveles de Medición** tenemoss distintos tipos de variable

- **Nominal:** Las propiedades de la medición nominal son:
  - Exhaustiva: implica a todas las opciones.
  - A los sujetos se les asignan categorías, por lo que son mutuamente excluyentes. Es decir, la variable está presente o no; tiene o no una característica.
- **Ordinal:** Las propiedades de la medición ordinal son:
  - El nivel ordinal posee transitividad, por lo que se tiene la capacidad de identificar que es mejor o mayor que otra, en ese sentido se pueden establecer jerarquías.
  - Las distancias entre un valor y otro no son iguales.
- **Intervalo:**
  - El nivel de medición intervalar requiere distancias iguales entre cada valor. Por lo general utiliza datos cuantitativos. Por ejemplo: temperatura, atributos psicológicos (CI, nivel de autoestima, pruebas de conocimientos, etc.)
  - Las unidades de calificación son equivalentes en todos los puntos de la escala. Una escala de intervalos implica: clasificación, magnitud y unidades de tamaños iguales (Brown, 2000).
  - Se pueden hacer operaciones aritméticas.
  - Cuando se le pide al sujeto que califique una situación del 0 al 10 puede tomarse como un nivel de medición de intervalo, siempre y cuando se incluya el 0.
- **Razón:**
  - La escala empieza a partir del 0 absoluto, por lo tanto incluye sólo los números por su valor en sí, por lo que no pueden existir los números con signo negativo. Por ejemplo: Peso corporal en kg., edad en años, estatura en cm.

Definiciones adicionales

- **Variable:** Consideraciones que una variable son una característica o fenómeno que puede tomar distintos valores.
- **Dato:** Mediciones o cualidades que han sido recopiladas como resultado de observaciones.
- **Población:** Se considera el área de la cual son extraídos los datos. Es decir, es el conjunto de elementos o individuos que poseen una característica común y medible acerca de lo cual se desea información. Es también llamado Universo.
- **Muestra:** Es un subconjunto de la población, seleccionado de acuerdo a una regla o algún plan de muestreo.
- **Censo:** Recopilación de todos los datos (de interés para la investigación) de la población.
- **Estadística:** Es una función o fórmula que depende de los datos de la muestra (es variable).
- **Parámetro:** Característica medible de la población. Es un resumen numérico de alguna variable observada de la población. Los parámetros normales que se estudian son: *La media poblacional, Proporción.*
- **Estimador:** Un estimador de un parámetro es un estadístico que se emplea para conocer el parámetro desconocido.
- **Estadístico:** Es una función de los valores de la muestra. Es una variable aleatoria, cuyos valores dependen de la muestra seleccionada. Su distribución de probabilidad, se conoce como *Distribución muestral del estadístico.*
- **Estimación:** Este término indica que a partir de lo observado en una muestra (un resumen estadístico con las medidas que conocemos de Descriptiva) se extrapola o generaliza dicho resultado muestral a la población total, de modo que lo estimado es el valor generalizado a la población. Consiste en la búsqueda del valor de los parámetros poblacionales objeto de estudio. Puede ser puntual o por intervalo de confianza:
    - *Puntual:* cuando buscamos un valor concreto. Un estimador de un parámetro poblacional es una función de los datos muestrales. En pocas palabras, es una fórmula que depende de los valores obtenidos de una muestra, para realizar estimaciones. Lo que se pretende obtener es el valor exacto de un parámetro.
    - *Intervalo de confianza:* cuando determinamos un intervalo, dentro del cual se supone que va a estar el valor del parámetro que se busca con una cierta probabilidad. El intervalo de confianza está determinado por dos valores dentro de los cuales afirmamos que está el verdadero parámetro con cierta probabilidad. Son unos límites o margen de variabilidad que damos al valor estimado, para poder afirmar, bajo un criterio de probabilidad, que el verdadero valor no los rebasará.

      Este intervalo contiene al parámetro estimado con una determinada certeza o nivel de confianza.

  En la estimación por intervalos se usan los siguientes conceptos:

- Variabilidad del parámetro: Si no se conoce, puede obtenerse una aproximación en los datos o en un estudio piloto. También hay métodos para calcular el tamaño de la muestra que prescinden de este aspecto. Habitualmente se usa como medida de esta variabilidad la desviación típica poblacional.
- Error de la estimación: Es una medida de su precisión que se corresponde con la amplitud del intervalo de confianza. Cuanta más precisión se desee en la estimación de un parámetro, más estrecho deberá ser el intervalo de confianza y, por tanto, menor el error, y más sujetos deberán incluirse en la muestra estudiada.
- Nivel de confianza: Es la probabilidad de que el verdadero valor del parámetro estimado en la población se sitúe en el intervalo de confianza obtenido. El nivel de confianza se denota por $1 - \alpha$

- p-value : También llamado nivel de significación. Es la probabilidad (en tanto por uno) de fallar en nuestra estimación, esto es, la diferencia entre la certeza (1) y el nivel de confianza $1 - \alpha$.
- Valor crítico: Se representa por $Z_{\alpha/2}$. Es el valor de la abscisa en una determinada distribución que deja a su derecha un área igual a $1/2$, siendo $1 - \alpha$ el nivel de confianza. Normalmente los valores críticos están tabulados o pueden calcularse en función de la distribución de la población.

Para un tamaño fijo de la muestra, los conceptos de error y nivel de confianza van relacionados. Si admitimos un error mayor, esto es, aumentamos el tamaño del intervalo de confianza, tenemos también una mayor probabilidad de éxito en nuestra estimación, es decir, un mayor nivel de confianza. Por tanto, un aspecto que debe de tenerse en cuenta es el tamaño muestral, ya que para disminuir el error que se comente habrá que aumentar el tamaño muestral. Esto se resolverá, para un intervalo de confianza cualquiera, despejando el tamaño de la muestra en cualquiera de las formulas de los intervalos de confianza que veremos a continuación, a partir del error máximo permitido. Los intervalos de confianza pueden ser unilaterales o bilaterales:

- **Contraste de Hipótesis:** Consiste en determinar si es aceptable, partiendo de datos muestrales, que la característica o el parámetro poblacional estudiado tome un determinado valor o esté dentro de unos determinados valores.
- **Nivel de Confianza:** Indica la proporción de veces que acertaríamos al afirmar que el parámetro está dentro del intervalo al seleccionar muchas muestras.

1.3. Muestreo:

Muestreo: Una muestra es representativa en la medida que es imagen de la población. En general, podemos decir que el tamaño de una muestra dependerá principalmente de: *Nivel de precisión deseado, Recursos disponibles, Tiempo involucrado en la investigación.* Además el plan de muestreo debe considerar *La población, Parámetros a medir.* Existe una gran cantidad de tipos de muestreo, en la práctica los más utilizados son los siguientes:

- **MUESTREO ALEATORIO SIMPLE:** Es un método de selección de n unidades extraídas de N, de tal manera que cada una de las posibles muestras tiene la misma probabilidad de ser escogida. (En la práctica, se enumeran las unidades de 1 a N, y a continuación se seleccionan n números aleatorios entre 1 y N, ya sea de tablas o de alguna urna con fichas numeradas).
- **MUESTREO ESTRATIFICADO ALEATORIO:** Se usa cuando la población está agrupada en pocos estratos, cada uno de ellos son muchas entidades. Este muestreo consiste en sacar una muestra aleatoria simple de cada uno de los estratos. (Generalmente, de tamaño proporcional al estrato).
- **MUESTREO SISTEMÁTICO:** Se utiliza cuando las unidades de la población están de alguna manera totalmente ordenadas. Para seleccionar una muestra de n unidades, se divide la población en n subpoblaciones de tamaño $K = N/n$ y se toma al azar una unidad de la K primeras y de ahí en adelante cada K-ésima unidad.
- **MUESTREO POR CONGLOMERADO:** Se emplea cuando la población está dividida en grupos o conglomerados pequeños. Consiste en obtener una muestra aleatoria simple de conglomerados y luego CENSAR cada uno de éstos.
- **MUESTREO EN DOS ETAPAS (Bietápico):** En este caso la muestra se toma en dos pasos:
  - Seleccionar una muestra de unidades primarias, y
  - Seleccionar una muestra de elementos a partir de cada unidad primaria escogida.
  - *Observación:* En la realidad es posible encontrarse con situaciones en las cuales no es posible aplicar libremente un tipo de muestreo, incluso estaremos obligados a mezclarlas en ocasiones.

1.4. Errores Estadísticos Comunes

El propósito de esta sección es solamente indicar los malos usos comunes de datos estadísticos, sin incluir el uso de métodos estadísticos complicados. Un estudiante debería estar alerta en relación con estos malos usos y debería hacer un gran esfuerzo para evitarlos a fin de ser un verdadero estadístico.

Datos estadísticos inadecuados: Los datos estadísticos son usados como la materia prima para un estudio estadístico. Cuando los datos son inadecuados, la conclusión extraída del estudio de los datos se vuelve obviamente inválida. Por ejemplo, supongamos que deseamos encontrar el ingreso familiar típico del año pasado en la ciudad Y de 50,000 familias y tenemos una muestra consistente del ingreso de solamente tres familias: 1 millón, 2 millones y no ingreso. Si sumamos el ingreso de las tres familias y dividimos el total por 3, obtenemos un promedio de 1 millón. Entonces, extraemos una conclusión basada en la muestra de que el ingreso familiar promedio durante el año pasado en la ciudad fue de 1 millón. Es obvio que la conclusión es falsa, puesto que las cifras son extremas y el tamaño de la muestra es demasiado pequeño; por lo tanto la muestra no es representativa.

Hay muchas otras clases de datos inadecuados. Por ejemplo, algunos datos son respuestas inexactas de una encuesta, porque las preguntas usadas en la misma son vagas o engañosas, algunos datos son toscas estimaciones porque no hay disponibles datos exactos o es demasiado costosa su obtención, y algunos datos son irrelevantes en un problema dado, porque el estudio estadístico no está bien planeado. Al momento de recopilar los datos que serán procesados se es susceptible de cometer errores así como durante los cómputos de los mismos. No obstante, hay otros errores que no tienen nada que ver con la digitación y que no son tan fácilmente identificables. Algunos de éstos errores son:

- **Sesgo:** Es imposible ser completamente objetivo o no tener ideas preconcebidas antes de comenzar a estudiar un problema, y existen muchas maneras en que una perspectiva o estado mental pueda influir en la recopilación y en el análisis de la información. En estos casos se dice que hay un sesgo cuando el individuo da mayor peso a los datos que apoyan su opinión que a aquellos que la contradicen. Un caso extremo de sesgo sería la situación donde primero se toma una decisión y después se utiliza el análisis estadístico para justificar la decisión ya tomada.

- **Datos No Comparables:** el establecer comparaciones es una de las partes más importantes del análisis estadístico, pero es extremadamente importante que tales comparaciones se hagan entre datos que sean comparables.

- **Proyección descuidada de tendencias:** la proyección simplista de tendencias pasadas hacia el futuro es uno de los errores que más ha desacreditado el uso del análisis estadístico.

- **Muestreo Incorrecto:** en la mayoría de los estudios sucede que el volumen de información disponible es tan inmenso que se hace necesario estudiar muestras, para derivar conclusiones acerca de la población a que pertenece la muestra. Si la muestra se selecciona correctamente, tendrá básicamente las mismas propiedades que la población de la cual fue extraída; pero si el muestreo se realiza incorrectamente, entonces puede suceder que los resultados no signifiquen nada.

Sesgo significa que un usuario dé los datos perjudicialmente de más énfasis a los hechos, los cuales son empleados para mantener su predeterminada posición u opinión. Los estadísticos son frecuentemente degradados por lemas tales como: *Hay tres clases de mentiras: mentiras, mentiras reprobables y estadística, y Las cifras no mienten, pero los mentirosos piensan.* Hay dos clases de sesgos: conscientes e inconscientes. Ambos son comunes en el análisis estadístico. Hay numerosos ejemplos de sesgos conscientes. Un anunciante frecuentemente usa la estadística para probar que su producto es muy superior al producto de su competidor. Un político prefiere usar la estadística para sostener su punto de vista. Gerentes y líderes de trabajadores pueden simultáneamente situar sus respectivas cifras estadísticas sobre la misma tabla de trato para mostrar que sus rechazos o peticiones son justificadas. Es casi imposible que un sesgo inconsciente esté completamente ausente en un trabajo estadístico. En lo que respecta al ser humano, es difícil obtener una actitud completamente objetiva al abordar un problema, aun cuando un científico debería tener una mente abierta. Un estadístico debería estar enterado del hecho de que su interpretación de los resultados del análisis estadístico está influenciado por su propia experiencia, conocimiento y antecedentes con relación al problema dado.

CAPÍTULO 2

Elementos

2.1. Pruebas de Hipótesis

Tipos de errores

- Una hipótesis estadística es una afirmación acerca de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria, a menudo involucran uno o más parámetros de la distribución.
- Las hipótesis son afirmaciones respecto a la población o distribución bajo estudio, no en torno a la muestra.
- La mayoría de las veces, la prueba de hipótesis consiste en determinar si la situaci ón experimental ha cambiado
- el interés principal es decidir sobre la veracidad o falsedad de una hipótesis, a este procedimiento se le llama *prueba de hipótesis*.
- Si la información es consistente con la hipótesis, se concluye que esta es verdadera, de lo contrario que con base en la información, es falsa.

Una prueba de hipótesis está formada por cinco partes

- La hipótesis nula, denotada por H_0.
- La hipótesis alterativa, denorada por H_1.
- El estadśitico de prueba y su valor p.
- La región de rechazo.
- La conclusión.

Definición 2.1 *Las dos hipótesis en competencias son la* ***hipótesis alternativa*** H_1*, usualmente la que se desea apoyar, y la* ***hipótesis nula*** H_0*, opuesta a* H_1*.*

En general, es más fácil presentar evidencia de que H_1 es cierta, que demostrar que H_0 es falsa, es por eso que por lo regular se comienza suponiendo que H_0 es cierta, luego se utilizan los datos de la muestra para decidir si existe evidencia a favor de H_1, más que a favor de H_0, así se tienen dos conclusiones:

- Rechazar H_0 y concluir que H_1 es verdadera.
- Aceptar, no rechazar, H_0 como verdadera.

Ejemplo 2.1 *Se desea demostrar que el salario promedio por hora en cierto lugar es distinto de* $19usd$*, que es el promedio nacional. Entonces* $H_1 : \mu \neq 19$*, y* $H_0 : \mu = 19$*.*

A esta se le denomina **Prueba de hipótesis de dos colas**.

Ejemplo 2.2 *Un determinado proceso produce un promedio de* $5\,\%$ *de piezas defectuosas. Se está interesado en demostrar que un simple ajuste en una máquina reducirá* p*, la proporción de piezas defectuosas producidas en este proceso. Entonces se tiene* $H_0 : p < 0{,}3$ *y* $H_1 : p = 0{,}03$*. Si se puede rechazar* H_0*, se concluye que el proceso ajustado produce menos del* $5\,\%$ *de piezas defectuosas.*

A esta se le denomina **Prueba de hipótesis de una cola**.

La decisión de rechazar o aceptar la hipótesis nula está basada en la información contenida en una muestra proveniente de la población de interés. Esta información tiene estas formas

- **Estadśitico de prueba:** un sólo número calculado a partir de la muestra.
- p**-value:** probabilidad calculada a partir del estadśtico de prueba.

Definición 2.2 *El p-value es la probabilidad de observar un estadístico de prueba tanto o más alejado del valor obervado, si en realidad* H_0 *es verdadera. Valores grandes del estadśtica de prueba y valores pequeños de* p *significan que se ha observado un evento muy poco probable, si* H_0 *en realidad es verdadera.*

Todo el conjunto de valores que puede tomar el estadístico de prueba se divide en dos regiones. Un conjunto, formado de valores que apoyan la hipótesis alternativa y llevan a rechazar H_0, se denomina **región de rechazo**. El otro, conformado por los valores que sustentatn la hipótesis nula, se le denomina **región de aceptación**. Cuando la región de rechazo está en la cola izquierda de la distribución, la prueba se denomina **prueba lateral izquierda**. Una prueba con región de rechazo en la cola derecha se le llama **prueba lateral derecha**.

Si el estadśtico de prueba cae en la región de rechazo, entonces se rechaza H_0. Si el estadśtico de prueba cae en la región de aceptación, entonces la hipótesis nula se acepta o la prueba se juzga como no concluyente.

Dependiendo del nivel de confianza que se desea agregar a las conclusiones de la prueba, y el **nivel de significancia** α, el riesgo que está dispuesto a correr si se toma una decisión incorrecta.

Definición 2.3 *Un* ***error de tipo I*** *para una prueba estadística es el error que se tiene al rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera. El* ***nivel de significancia*** *para una prueba estadística de hipótesis es*

$$\begin{aligned}\alpha &= P\left\{\textit{error tipo I}\right\} = P\left\{\textit{rechazar equivocadamente } H_0\right\}\\ &= P\left\{\textit{rechazar } H_0 \textit{ cuando } H_0 \textit{ es verdadera}\right\}\end{aligned}$$

Este valor α representa el valor máximo de riesgo tolerable de rechazar incorrectamente H_0. Una vez establecido el nivel de significancia, la región de rechazo se define para poder determinar si se rechaza H_0 con un cierto nivel de confianza.

2.2. Muestras grandes

Cálculo de valor p

Definición 2.4 *El* ***valor de*** p *(p-****value****) o nivel de significancia observado de un estadístico de prueba es el valor más pequeño de* α *para el cual* H_0 *se puede rechazar. El riesgo de cometer un error tipo* I*, si* H_0 *es rechazada con base en la información que proporciona la muestra.*

Nota 2.1 *Valores pequeños de* p *indican que el valor observado del estadśtico de prueba se encuentra alejado del valor hipotético de* μ*, es decir se tiene evidencia de que* H_0 *es falsa y por tanto debe de rechazarse.*

Nota 2.2 *Valores grandes de* p *indican que el estadístico de prueba observado no está alejado de la medi hipotética y no apoya el rechazo de* H_0*.*

Definición 2.5 *Si el valor de* p *es menor o igual que el nivel de significancia* α*, determinado previamente, entonces* H_0 *es rechazada y se puede concluir que los resultados son estadísticamente significativos con un nivel de confianza del* $100\,(1-\alpha)\,\%$*.*

Es usual utilizar la siguiente clasificación de resultados

p	H_0	Significativa
$p < 0{,}01$	Rechazar	Altamente
$0{,}01 \leq p < 0{,}05$	Rechazar	Estadísticamente
$0{,}05 \leq p < 0{,}1$	No rechazar	Tendencia estadística
$0{,}01 \leq p$	No rechazar	No son estadísticamente

Nota 2.3 *Para determinar el valor de p, encontrar el área en la cola después del estadístico de prueba. Si la prueba es de una cola, este es el valor de p. Si es de dos colas, éste valor encontrado es la mitad del valor de p. Rechazar H_0 cuando el valor de $p < \alpha$.*

Hay dos tipos de errores al realizar una prueba de hipótesis

	H_0 es Verdadera	H_0 es Falsa
Rechazar H_0	Error tipo I	$\surd$
Aceptar H_0	$\surd$	Error tipo II

Definición 2.6 *La probabilidad de cometer el error tipo II se define por β donde*

$$\begin{aligned} \beta &= P\left\{\text{error tipo II}\right\} = P\left\{\text{Aceptar equivocadamente } H_0\right\} \\ &= P\left\{\text{Aceptar } H_0 \text{ cuando } H_0 \text{ es falsa}\right\} \end{aligned}$$

Nota 2.4 *Cuando H_0 es falsa y H_1 es verdadera, no siempre es posible especificar un valor exacto de μ, sino más bien un rango de posibles valores.En lugar de arriesgarse a tomar una decisión incorrecta, es mejor conlcuir que no hay evidencia suficiente para rechazar H_0, es decir en lugar de aceptar H_0, no rechazar H_0.*

La bondad de una prueba estadística se mide por el tamaño de α y β, ambas deben de ser pequeñas. Una manera muy efectiva de medir la potencia de la prueba es calculando el complemento del error tipo II:

$$\begin{aligned} 1-\beta &= P\left\{\text{Rechazar } H_0 \text{ cuando } H_0 \text{ es falsa}\right\} \\ &= P\left\{\text{Rechazar } H_0 \text{ cuando } H_1 \text{ es verdadera}\right\} \end{aligned}$$

Definición 2.7 *La **potencia de la prueba**, $1-\beta$, mide la capacidad de que la prueba funciona como se necesita.*

Ejemplo 2.3 *La producción diariade una planta química local ha promediado 880 toneladas en los últimos años. A la gerente de control de calidad le gustaría saber si este promedio ha cambiado en meses recientes. Ella selecciona al azar 50 días de la base de datos computarizada y calcula el promedio y la desviación estándar de las $n = 50$ producciones como $\overline{x} = 871$ toneladas y $s = 21$ toneladas, respectivamente. Pruebe la hipótesis apropiada usando $\alpha = 0{,}05$.*

La hipótesis nula apropiada es:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 880 \\ &\quad \textit{y la hipótesis alternativa } H_1 \textit{ es} \\ H_1 &: \mu \neq 880 \end{aligned}$$

el estimador puntual para μ es $\overline{x}$, entonces el estadístico de prueba es

$$\begin{aligned} z &= \frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \\ &= \frac{871-880}{21/\sqrt{50}} = -3{,}03 \end{aligned}$$

Para esta prueba de dos colas, hay que determinar los dos valores de $z_{\alpha/2}$, es decir, $z_{\alpha/2} = \pm 1{,}96$, como $z > z_{\alpha/2}$, z cae en la zona de rechazo, por lo tanto la gerente puede rechazar la hipótesis nula *y concluir que el promedio efectivamente ha cambiado.La probabilidad de rechazar H_0 cuando esta es verdadera es de* 0,05*.*

Recordemos que el valor observado del estadístico de prueba es $z = -3{,}03$, la región de rechazo más pequeña que puede usarse y todavía seguir rechazando H_0 es $|z| > 3{,}03$,
entonces $p = 2(0{,}012) = 0{,}0024$, que a su vez es menor que el nivel de significancia α asignado inicialmente, y además los resultados son ***altamente significativos****.*

Finalmente determinemos la potencia de la prueba cuando μ en realidad es igual a 870 *toneladas.*

Recordar que la región de aceptación está entre $-1{,}96$ y $1{,}96$, para $\mu = 880$, equivalentemente

$$874{,}18 < \overline{x} < 885{,}82$$

β es la probabilidad de aceptar H_0 cuando $\mu = 870$, calculemos los valores de z correspondientes a 874,18 *y* 885,82 *Entonces*

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\overline{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{874{,}18 - 870}{21/\sqrt{50}} = 1{,}41 \\ z_1 &= \frac{\overline{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{885{,}82 - 870}{21/\sqrt{50}} = 5{,}33 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \beta &= P\left\{\textit{aceptar } H_0 \textit{ cuando } H_0 \textit{ es falsa}\right\} \\ &= P\left\{874{,}18 < \mu < 885{,}82 \textit{ cuando } \mu = 870\right\} \\ &= P\left\{1{,}41 < z < 5{,}33\right\} = P\left\{1{,}41 < z\right\} \\ &= 1 - 0{,}9207 = 0{,}0793 \end{aligned}$$

entonces, la potencia de la prueba es

$$1 - \beta = 1 - 0{,}0793 = 0{,}9207$$

que es la probabilidad de rechazar correctamente H_0 cuando H_0 es falsa.

Prueba de hipótesis para la diferencia entre dos medias poblacionales

El estadístico que resume la información muestral respecto a la diferencia en medias poblacionales $(\mu_1 - \mu_2)$ es la diferencia de las medias muestrales $(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)$, por tanto al probar la difencia entre las medias muestrales se verifica que la diferencia real entre las medias poblacionales difiere de un valor especificado, $(\mu_1 - \mu_2) = D_0$, se puede usar el error estándar de $(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)$, es decir

$$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

cuyo estimador está dado por

$$SE = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

El procedimiento para muestras grandes es:

1) **Hipótesis Nula** $H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$,

   donde D_0 es el valor, la diferencia, específico que se desea probar. En algunos casos se querrá demostrar que no hay diferencia alguna, es decir $D_0 = 0$.

2) **Hipótesis Alternativa**

Prueba de una Cola	**Prueba de dos colas**
$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > D_0$	$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq D_0$
$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < D_0$	

3) Estadístico de prueba:

$$z = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - D_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

4) Región de rechazo: rechazar H_0 cuando

Prueba de una Cola	**Prueba de dos colas**
$z > z_0$	
$z < -z_\alpha$ cuando $H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < D_0$	$z > z_{\alpha/2}$ o $z < -z_{\alpha/2}$
cuando $p < \alpha$	

Ejemplo 2.4 *Para determinar si ser propietario de un automóvil afecta el rendimiento académico de un estudiante, se tomaron dos muestras aleatorias de 100 estudiantes varones. El promedio de calificaciones para los $n_1 = 100$ no propietarios de un auto tuvieron un promedio y varianza de $\overline{x}_1 = 2{,}7$ y $s_1^2 = 0{,}36$, respectivamente, mientras que para para la segunda muestra con $n_2 = 100$ propietarios de un auto, se tiene $\overline{x}_2 = 2{,}54$ y $s_2^2 = 0{,}4$. Los datos presentan suficiente evidencia para indicar una diferencia en la media en el rendimiento académico entre propietarios y no propietarios de un automóvil? Hacer pruebas para $\alpha = 0{,}01, 0{,}05$ y $\alpha = 0{,}1$.*

- *Solución utilizando la técnica de regiones de rechazo:realizando las operaciones $z = 1{,}84$, determinar si excede los valores de $z_{\alpha/2}$.*
- *Solución utilizando el p-value:Calcular el valor de p, la probabilidad de que z sea mayor que $z = 1{,}84$ o menor que $z = -1{,}84$, se tiene que $p = 0{,}0658$. Concluir.*
- *Si el intervalo de confianza que se construye contiene el valor del parámetro especificado por H_0, entonces ese valor es uno de los posibles valores del parámetro y H_0 no debe ser rechazada.*
- *Si el valor hipotético se encuentra fuera de los límites de confianza, la hipótesis nula es rechazada al nivel de significancia α.*

Prueba de Hipótesis para una Proporción Binomial

Para una muestra aleatoria de n intentos idénticos, de una población binomial, la proporción muesrtal $\hat{p}$ tiene una distribución aproximadamente normal cuando n es grande, con media p y error estándar

$$SE = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

La prueba de hipótesis de la forma

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad p = p_0 \\ H_1 &: \quad p > p_0, \text{ o } p < p_0 \text{ o } p \neq p_0 \end{aligned}$$

El estadístico de prueba se construye con el mejor estimador de la proporción verdadera, $\hat{p}$, con el estadístico de prueba z, que se distribuye normal estándar.

El procedimiento es

1) Hipótesis nula: $H_0 : p = p_0$

2) Hipótesis alternativa

Prueba de una Cola	**Prueba de dos colas**
$H_1 : p > p_0$	$p \neq p_0$
$H_1 : p < p_0$	

3) Estadístico de prueba:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}, \hat{p} = \frac{x}{n}$$

donde x es el número de éxitos en n intentos binomiales.

4) Región de rechazo: rechazar H_0 cuando

Prueba de una Cola	**Prueba de dos colas**
$z > z_0$	
$z < -z_\alpha$ cuando $H_1 : p < p_0$	$z > z_{\alpha/2}$ o $z < -z_{\alpha/2}$
cuando $p < \alpha$	

Ejemplo 2.5 *A cualquier edad, alrededor del* $20\,\%$ *de los adultos de cierto país realiza actividades de acondicionamiento físico al menos dos veces por semana. En una encuesta local de* $n = 100$ *adultos de más de* 40 *a nos, un total de 15 personas indicaron que realizaron actividad física al menos dos veces por semana. Estos datos indican que el porcentaje de participación para adultos de más de 40 a nos de edad es considerablemente menor a la cifra del* $20\,\%$*? Calcule el valor de p y úselo para sacar las conclusiones apropiadas.*

Prueba de Hipótesis diferencia entre dos Proporciones Binomiales

Cuando se tienen dos muestras aleatorias independientes de dos poblaciones binomiales, el objetivo del experimento puede ser la diferencia $(p_1 - p_2)$ en las proporciones de individuos u objetos que poseen una característica especifica en las dos poblaciones. En este caso se pueden utilizar los estimadores de las dos proporciones $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ con error estándar dado por

$$SE = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}$$

considerando el estadístico z con un nivel de significancia $(1 - \alpha)\,100\,\%$

La hipótesis nula a probarse es de la forma

H_0: $p_1 = p_2$ o equivalentemente $(p_1 - p_2) = 0$, contra una hipótesis alternativa H_1 de una o dos colas.

Para estimar el error estándar del estadístico z, se debe de utilizar el hecho de que suponiendo que H_0 es verdadera, las dos proporciones son iguales a algún valor común, p. Para obtener el mejor estimador de p es

$$p = \frac{\text{número total de éxitos}}{\text{Número total de pruebas}} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

1) **Hipótesis Nula:** $H_0 : (p_1 - p_2) = 0$

2) **Hipótesis Alternativa:** H_1 :

Prueba de una Cola	**Prueba de dos colas**
$H_1 : (p_1 - p_2) > 0$	$H_1 : (p_1 - p_2) \neq 0$
$H_1 : (p_1 - p_2) < 0$	

3) Estadístico de prueba:

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\frac{pq}{n_1} + \frac{pq}{n_2}}}$$

donde $\hat{p_1} = x_1/n_1$ y $\hat{p_2} = x_2/n_2$, dado que el valor común para p_1 y p_2 es p, entonces $\hat{p} = \frac{x_1+x_2}{n_1+n_2}$ y por tanto el estadístico de prueba es

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

4) Región de rechazo: rechazar H_0 cuando

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$z > z_\alpha$	
$z < -z_\alpha$ cuando $H_1 : p < p_0$	$z > z_{\alpha/2}$ o $z < -z_{\alpha/2}$
cuando $p < \alpha$	

2.3. Muestras Pequeñas

Una media poblacional

1) **Hipótesis Nula:** $H_0 : \mu = \mu_0$

2) **Hipótesis Alternativa:** H_1 :

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$H_1 : \mu > \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$
$H_1 : \mu < \mu 0$	

3) Estadístico de prueba:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$$

4) Región de rechazo: rechazar H_0 cuando

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$t > t_\alpha$	
$t < -t_\alpha$ cuando $H_1 : \mu < mu_0$	$t > t_{\alpha/2}$ o $t < -t_{\alpha/2}$
cuando $p < \alpha$	

Diferencia entre dos medias poblacionales: M.A.I.

Cuando los tama nos de muestra son peque nos, no se puede asegurar que las medias muestrales sean normales, pero si las poblaciones originales son normales, entonces la distribución muestral de la diferencia de las medias muestales, $(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)$, será normal con media $(\mu_1 - \mu_2)$ y error estándar

$$ES = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

1) **Hipótesis Nula** $H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$,

   donde D_0 es el valor, la diferencia, específico que se desea probar. En algunos casos se querrá demostrar que no hay diferencia alguna, es decir $D_0 = 0$.

2) **Hipótesis Alternativa**

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > D_0$	$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq D_0$
$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < D_0$	

3) Estadístico de prueba:

$$t = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - D_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

   donde

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)\, s_1^2 + (n_2 - 1)\, s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

4) Región de rechazo: rechazar H_0 cuando

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$z > z_0$	
$z < -z_\alpha$ cuando $H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < D_0$	$z > z_{\alpha/2}$ o $z < -z_{\alpha/2}$
cuando $p < \alpha$	

Los valores críticos de t, $t_{-\alpha}$ y $t_{\alpha/2}$ están basados en $(n_1 + n_2 - 2)$ grados de libertad.

Diferencia entre dos medias poblacionales: Diferencias Pareadas

1) **Hipótesis Nula:** $H_0 : \mu_d = 0$

2) **Hipótesis Alternativa:** $H_1 : \mu_d$

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$H_1 : \mu_d > 0$	$H_1 : \mu_d \neq 0$
$H_1 : \mu_d < 0$	

3) Estadístico de prueba:

$$t = \frac{\overline{d}}{\sqrt{\frac{s_d^2}{n}}}$$

donde n es el número de diferencias pareadas, $\overline{d}$ es la media de las diferencias muestrales, y s_d es la desviación estándar de las diferencias muestrales.

4) Región de rechazo: rechazar H_0 cuando

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$t > t_\alpha$	
$t < -t_\alpha$ cuando $H_1 : \mu < mu_0$	$t > t_{\alpha/2}$ o $t < -t_{\alpha/2}$
cuando $p < \alpha$	

Los valores críticos de t, $t_{-\alpha}$ y $t_{\alpha/2}$ están basados en $(n_1 + n_2 - 2)$ grados de libertad.

Inferencias con respecto a la Varianza Poblacional

1) **Hipótesis Nula:** $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$
2) **Hipótesis Alternativa:** H_1

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	

3) Estadístico de prueba:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\, s^2}{\sigma_0^2}$$

4) Región de rechazo: rechazar H_0 cuando

Prueba de una Cola	Prueba de dos colas
$\chi^2 > \chi_\alpha^2$	
$\chi^2 < \chi_{(1-\alpha)}^2$ cuando $H_1 : \chi^2 < \chi_0^2$	$\chi^2 > \chi_{\alpha/2}^2$ o $\chi^2 < \chi_{(1-\alpha/2)}^2$
cuando $p < \alpha$	

Los valores críticos de χ^2,están basados en $(n_1 +)$ grados de libertad.

Comparación de dos varianzas poblacionales

1) **Hipótesis Nula** $H_0 : \left(\sigma_1^2 - \sigma_2^2\right) = D_0$,

   donde D_0 es el valor, la diferencia, específico que se desea probar. En algunos casos se querrá demostrar que no hay diferencia alguna, es decir $D_0 = 0$.

2) **Hipótesis Alternativa**

Prueba de una Cola	**Prueba de dos colas**
$H_1 : \left(\sigma_1^2 - \sigma_2^2\right) > D_0$	$H_1 : \left(\sigma_1^2 - \sigma_2^2\right) \neq D_0$
$H_1 : \left(\sigma_1^2 - \sigma_2^2\right) < D_0$	

3) Estadístico de prueba:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

   donde s_1^2 es la varianza muestral más grande.

4) Región de rechazo: rechazar H_0 cuando

Prueba de una Cola	**Prueba de dos colas**
$F > F_\alpha$	$F > F_{\alpha/2}$
cuando $p < \alpha$	

2.4. Estimación por intervalos

Para la media

Recordemos que S^2 es un estimador insesgado de σ^2

Definición 2.8 *Sean $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ dos estimadores insesgados de θ, parámetro poblacional. Si $\sigma^2_{\hat{\theta}_1} < \sigma^2_{\hat{\theta}_2}$, decimos que $\hat{\theta}_1$ un estimador más eficaz de θ que $\hat{\theta}_2$.*

Algunas observaciones que es preciso realizar

a) Para poblaciones normales, $\overline{X}$ y $\tilde{X}$ son estimadores insesgados de μ, pero con $\sigma^2_{\overline{X}} < \sigma^2_{\tilde{X}_2}$.

b) Para las estimaciones por intervalos de θ, un intervalo de la forma $\hat{\theta}_L < \theta < \hat{\theta}_U$, $\hat{\theta}_L$ y $\hat{\theta}_U$ dependen del valor de $\hat{\theta}$.

c) Para $\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$, si $n \rightarrow \infty$, entonces $\hat{\theta} \rightarrow \mu$.
   Para $\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$, si $n \rightarrow \infty$, entonces $\hat{\theta} \rightarrow \mu$.

d) Para $\hat{\theta}$ se determinan $\hat{\theta}_L$ y $\hat{\theta}_U$ de modo tal que

$$P\left\{\hat{\theta}_L < \hat{\theta} < \hat{\theta}_U\right\} = 1 - \alpha, \tag{2.1}$$

   con $\alpha \in (0, 1)$. Es decir, $\theta \in \left(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U\right)$ es un intervalo de confianza del $100\,(1-\alpha)$ %.

e) De acuerdo con el TLC se espera que la distribución muestral de $\overline{X}$ se distribuye aproximadamente normal con media $\mu_X = \mu$ y desviación estándar $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
   Para $Z_{\alpha/2}$ se tiene $P\left\{-Z_{\alpha/2} < Z < Z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$, donde $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$. Entonces $P\left\{-Z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$ es equivalente a $P\left\{\overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$

   f) Si $\overline{X}$ es la media muestral de una muestra de tamaño n de una población con varianza conocida σ^2, el intervalo de confianza de $100\,(1-\alpha)$ % para μ es $\mu \in \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

   g) Para muestras pequeñas de poblaciones no normales, no se puede esperar que el grado de confianza sea preciso.

h) Para $n \geq 30$, con distribución de forma no muy sesgada, se pueden tener buenos resultados.

Teorema 2.1 *Si $\overline{X}$ es un estimador de μ, podemos tener $100\,(1-\alpha)$ % de confianza en que el error no excederá a $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, error entre $\overline{X}$ y μ.*

Teorema 2.2 *Si $\overline{X}$ es un estimador de μ, podemos tener $100\,(1-\alpha)$ % de confianza en que el error no excederá una cantidad e cuando el tamaño de la muestra es*

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e}\right)^2.$$

Nota 2.5 *Para intervalos unilaterales*

$$P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_\alpha\right\} = 1-\alpha.$$

Equivalentemente

$$P\left\{\mu < \overline{X} + Z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha.$$

Si $\overline{X}$ es la media de una muestra aleatoria de tamaño n a partir de una población con varianza σ^2, los límites de confianza unilaterales del $100\,(1-\alpha)$ % de confianza para μ están dados por

- Límite unilateral superior: $\overline{x} + z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- Límite unilateral inferior: $\overline{x} - z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- Para σ desconocida recordar que $T = \frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$, donde s es la desviación estándar de la muestra. Entonces

$$P\left\{-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha, \text{equivalentemente}$$
$$P\left\{\overline{X} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha.$$

- Un intervalo de confianza del $100\,(1-\alpha)$ % de confianza para μ, σ^2 desconocida y población normal es $\mu \in \left(\overline{x} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$, donde $t_{\alpha/2}$ es una t-student con $\nu = n-1$ grados de libertad.
- Los límites unilaterales para μ con σ desconocida son $\overline{X} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$ y $\overline{X} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$.
- Cuando la población no es normal, σ desconocida y $n \geq 30$, σ se puede reemplazar por s para obtener el intervalo de confianza para muestras grandes:

$$\overline{X} \pm t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

- El estimador de $\overline{X}$ de μ, σ desconocida, la varianza de $\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$, el error estándar de $\overline{X}$ es $\sigma/\sqrt{n}$.
- Si σ es desconocida y la población es normal, $s \to \sigma$ y se incluye el error estándar $s/\sqrt{n}$, entonces

$$\overline{x} \pm t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Intervalos de confianza sobre la varianza

Supongamos que X se distribuye normal $\left(\mu, \sigma^2\right)$, desconocidas. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ muestra aleatoria de tamaño n , s^2 la varianza muestral.

Se sabe que $X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ se distribuye χ^2_{n-1} grados de libertad. Su intervalo de confianza es

$$\begin{aligned}
&P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right\} = 1-\alpha\\
&P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right\} = 1-\alpha\\
&P\left\{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right\} = 1-\alpha
\end{aligned} \tag{2.2}$$

es decir

$$\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}, \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right] \tag{2.3}$$

los intervalos unilaterales son

$$\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}, \infty\right] - \tag{2.4}$$

$$\sigma^2 \in \left[-\infty, \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right] \tag{2.5}$$

Intervalos de confianza para proporciones

Supongamos que se tienen una muestra de tamaño n de una población grande pero finita, y supongamos que X, $X \leq n$, pertenecen a la clase de interés, entonces

$$\hat{p} = \frac{\overline{X}}{n}$$

es el estimador puntual de la proporción de la población que pertenece a dicha clase.
n y p son los parámetros de la distribución binomial, entonces $\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$ aproximadamente si p es distinto de 0 y 1; o si n es suficientemente grande. Entonces

$$Z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)\,, \text{aproximadamente.}$$

entonces

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\left\{-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq z_{\alpha/2}\right\} \\ &= P\left\{\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}\right\} \end{aligned}$$

con $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ error estándar del estimador puntual p. Una solución para determinar el intervalo de confianza del parámetro p (desconocido) es

$$1-\alpha = P\left\{\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}\right\}$$

entonces los intervalos de confianza, tanto unilaterales como de dos colas son:

- $p \in \left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$
- $p \in \left(-\infty, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$
- $p \in \left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \infty\right)$

para minimizar el error estándar, se propone que el tamaño de la muestra sea $n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 p\,(1-p)$, donde $E = \mid p - \hat{p} \mid$.

Intervalos de confianza para dos muestras

Varianzas conocidas

Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes. X_1 con media desconocida μ_1 y varianza conocida σ_1^2; y X_2 con media desconocida μ_2 y varianza conocida σ_2^2. Se busca encontrar un intervalo de confianza de $100\,(1-\alpha)$ % de la diferencia entre medias μ_1 y μ_2.
Sean $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$ muestra aleatoria de n_1 observaciones de X_1, y sean $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ muestra aleatoria de n_2 observaciones de X_2.

Sean $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$, medias muestrales, entonces el estadśitico

$$Z = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N\,(0,1)\,, \tag{2.6}$$

si X_1 y X_2 son normales o aproximadamente normales si se aplican las condiciones del Teorema de Límite Central respectivamente.
Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= P\left\{-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2}\right\}\\
&= P\left\{-Z_{\alpha/2} \leq \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq Z_{\alpha/2}\right\}\\
&= P\left\{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \right.\\
&\qquad \left. \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right\}
\end{aligned}$$

Entonces los intervalos de confianza unilaterales y de dos colas al $(1-\alpha)$ % de confianza son

- $\mu_1 - \mu_2 \in \left[\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$
- $\mu_1 - \mu_2 \in \left[-\infty, \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$
- $\mu_1 - \mu_2 \in \left[\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \infty\right]$

Nota 2.6 *Si σ_1 y σ_2 son conocidas, o por lo menos se conoce una aproximación, y los tamaños de las muestras n_1 y n_2 son iguales, $n_1 = n_2 = n$, se puede determinar el tamaño de la muestra para que el error al estimar $\mu_1 - \mu_2$ usando $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ sea menor que E (valor del error deseado) al $(1-\alpha)$ % de confianza. El tamaño n de la muestra requerido para cada muestra es*

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right).$$

Varianzas desconocidas

- Si $n_1, n_2 \geq 30$ se pueden utilizar los intervalos de la distribución normal para varianza conocida
- Si n_1, n_2 son muestras pequeñas, supongase que las poblaciones para X_1 y X_2 son normales con varianzas desconocidas y con base en el intervalo de confianza para distribuciones t-student

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma$

Supongamos que X_1 es una variable aleatoria con media μ_1 y varianza σ_1^2, X_2 es una variable aleatoria con media μ_2 y varianza σ_2^2. Todos los parámetros son desconocidos. Sin embargo supóngase que es razonable considerar que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.

Nuevamente sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes. X_1 con media desconocida μ_1 y varianza muestral S_1^2; y X_2 con media desconocida μ_2 y varianza muestral S_2^2. Dado que S_1^2 y S_2^2 son estimadores de σ_1^2, se propone el estimador S de σ^2 como

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\, S_1^2 + (n_2 - 1)\, S_2^2}{n_1 + n_2 - 2},$$

entonces, el estadístico para $\mu_1 - \mu_2$ es

$$t_\nu = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

donde t_ν es una t de student con $\nu = n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P\left\{-t_{\alpha/2,\nu} \leq t \leq t_{\alpha/2,\nu}\right\} \\ &= P\left\{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - t_{\alpha/2,\nu} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq \right. \\ &\qquad \left. t \leq \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) + t_{\alpha/2,\nu} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right\} \end{aligned}$$

luego, los intervalos de confianza del $(1 - \alpha)$ % para $\mu_1 - |mu_2$ son

- $\mu_1 - \mu_2 \in \left[\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - t_{\alpha/2,\nu} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) + t_{\alpha/2,\nu} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right]$
- $\mu_1 - \mu_2 \in \left[-\infty, \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) + t_{\alpha/2,\nu} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right]$
- $\mu_1 - \mu_2 \in \left[\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - t_{\alpha/2,\nu} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \infty\right]$

$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Si no se tiene certeza de que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, se propone el estadístico

$$t^* = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \tag{2.7}$$

que se distribuye t-student con ν grados de libertad, donde

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{S_1^2/n_1}{n_1+1} + \frac{S_2^2/n_2}{n_2+1}} - 2$$

Entonces el intervalo de confianza de aproximadamente el $100\,(1 - \alpha)$ % para $\mu_1 - \mu_2$ con $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ es

$$\begin{aligned} \mu_1 - \mu_2 \in &\left[\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - t_{\alpha/2,\nu} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}},\right. \\ &\left.\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) + t_{\alpha/2,\nu} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\right] \end{aligned}$$

Intervalos de confianza para razón de Varianzas

Supongamos que se toman dos muestras aleatorias independientes de las dos poblaciones de interés.
Sean X_1 y X_2 variables normales independientes con medias desconocidas μ_1 y μ_2 y varianzas desconocidas σ_1^2 y σ_2^2 respectivamente. Se busca un intervalo de confianza de $100\,(1-\alpha)\,\%$ para σ_1^2/σ_2^2.Supongamos n_1 y n_2 muestras aleatorias de X_1 y X_2 y sean S_1^2 y S_2^2 varianzas muestralres. Se sabe que

$$F = \frac{S_2^2/\sigma_2^2}{S_1^2/\sigma_1^2}$$

se distribuye F con n_2-1 y n_1-1 grados de libertad.
Por lo tanto

$$P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1} \leq F \leq F_{\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1}\right\} = 1-\alpha$$
$$P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1} \leq \frac{S_2^2/\sigma_2^2}{S_1^2/\sigma_1^2} \leq F_{\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1}\right\} = 1-\alpha$$

por lo tanto

$$P\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}F_{1-\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1}\right\} = 1-\alpha$$

entonces

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in \left[\frac{S_1^2}{S_2^2}F_{1-\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1}, \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1}\right]$$

donde

$$F_{1-\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1} = \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1}}$$

Intervalos de confianza para diferencia de proporciones

Sean dos proporciones de interés p_1 y p_2. Se busca un intervalo para p_1-p_2 al $100\,(1-\alpha)\,\%$.
Sean dos muestras independientes de tamaño n_1 y n_2 de poblaciones infinitas de modo que X_1 y X_2 variables aleatorias binomiales independientes con parámetros (n_1,p_1) y (n_2,p_2). X_1 y X_2 son el número de observaciones que pertenecen a la clase de interés correspondientes. Entonces $\hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1}$ y $\hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2}$ son estimadores de p_1 y p_2 respectivamente. Supongamos que se cumple la aproximación normal a la binomial, entonces

$$Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} - \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim N(0,1) \, \text{aproximadamente}$$

entonces

$$(\hat{p}_1-\hat{p}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \leq p_1-p_2$$
$$\leq (\hat{p}_1-\hat{p}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} - \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

- Una hipótesis estadística es una afirmación acerca de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria, a menudo involucran uno o más parámetros de la distribución.

- Las hipótesis son afirmaciones respecto a la población o distribución bajo estudio, no en torno a la muestra.
- La mayoría de las veces, la prueba de hipótesis consiste en determinar si la situaci ón experimental ha cambiado
- el interés principal es decidir sobre la veracidad o falsedad de una hipótesis, a este procedimiento se le llama *prueba de hipótesis.*
- Si la información es consistente con la hipótesis, se concluye que esta es verdadera, de lo contrario que con base en la información, es falsa.

2.5. Análisis de Regresion Lineal (RL)

En muchos problemas hay dos o más variables relacionadas, para medir el grado de relación se utiliza el **análisis de regresión**. Supongamos que se tiene una única variable dependiente, y, y varias variables independientes, $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La variable y es una varaible aleatoria, y las variables independientes pueden ser distribuidas independiente o conjuntamente.

Regresión Lineal Simple (RLS)

A la relación entre estas variables se le denomina modelo regresión de y en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, por ejemplo $y = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, lo que se busca es una función que mejor aproxime a $\phi(\cdot)$.
Supongamos que de momento solamente se tienen una variable independiente x, para la variable de respuesta y. Y supongamos que la relación que hay entre x y y es una línea recta, y que para cada observación de x, y es una variable aleatoria.
El valor esperado de y para cada valor de x es

$$E(y|x) = \beta_0 + \beta_1 x \tag{2.8}$$

β_0 es la ordenada al orígen y β_1 la pendiente de la recta en cuestión, ambas constantes desconocidas.

Método de Mínimos Cuadrados

Supongamos que cada observación y se puede describir por el modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon \tag{2.9}$$

donde ϵ es un error aleatorio con media cero y varianza σ^2. Para cada valor y_i se tiene ϵ_i variables aleatorias no correlacionadas, cuando se incluyen en el modelo 2.9, este se le llama *modelo de regresión lineal simple.*
Suponga que se tienen n pares de observaciones $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, estos datos pueden utilizarse para estimar los valores de β_0 y β_1. Esta estimación es por el **métodos de mínimos cuadrados**.
Entonces la ecuación 2.9 se puede reescribir como

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.10}$$

Si consideramos la suma de los cuadrados de los errores aleatorios, es decir, el cuadrado de la diferencia entre las observaciones con la recta de regresión

$$L = \sum_{i=1}^{n} \epsilon^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \tag{2.11}$$

Para obtener los estimadores por mínimos cuadrados de β_0 y β_1, $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$, es preciso calcular las derivadas parciales con respecto a β_0 y β_1, igualar a cero y resolver el sistema de ecuaciones lineales resultante:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_0} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \beta_1} = 0$$

evaluando en $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$, se tiene

$$\begin{aligned} -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right) &= 0 \\ -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right) x_i &= 0 \end{aligned}$$

simplificando

$$\begin{aligned} n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores se les denominan *ecuaciones normales de mínimos cuadrados* con solución

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x} \tag{2.12}$$
$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{2.13}$$

entonces el modelo de regresión lineal simple ajustado es

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \tag{2.14}$$

Se intrduce la siguiente notación

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \tag{2.15}$$
$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} y_i (x_i - \overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \tag{2.16}$$

y por tanto

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \tag{2.17}$$

Propiedades de los Estimadores $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$

- Las propiedades estadísticas de los estimadores de mínimos cuadrados son útiles para evaluar la suficiencia del modelo.
- Dado que $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ son combinaciones lineales de las variables aleatorias y_i, también resultan ser variables aleatorias.

A saber

$$\begin{aligned}
E\left(\hat{\beta}_1\right) &= E\left(\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\right) = \frac{1}{S_{xx}} E\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \left(x_i - \overline{x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{S_{xx}} E\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i\right)\left(x_i - \overline{x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{S_{xx}} \left[\beta_0 E\left(\sum_{k=1}^{n} \left(x_k - \overline{x}\right)\right) + E\left(\beta_1 \sum_{k=1}^{n} x_k \left(x_k - \overline{x}\right)\right)\right. \\
&+ \left. E\left(\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \left(x_k - \overline{x}\right)\right)\right] = \frac{1}{S_{xx}} \beta_1 S_{xx} = \beta_1
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$E\left(\hat{\beta}_1\right) = \beta_1 \tag{2.18}$$

Es decir, $\hat{\beta}_1$ es un estimador insesgado.
Ahora calculemos la varianza:

$$\begin{aligned}
V\left(\hat{\beta}_1\right) &= V\left(\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\right) = \frac{1}{S_{xx}^2} V\left(\sum_{k=1}^{n} y_k \left(x_k - \overline{x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{S_{xx}^2} \sum_{k=1}^{n} V\left(y_k \left(x_k - \overline{x}\right)\right) = \frac{1}{S_{xx}^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma^2 \left(x_k - \overline{x}\right)^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{S_{xx}^2} \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - \overline{x}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$V\left(\hat{\beta}_1\right) = \frac{\sigma^2}{S_{xx}} \tag{2.19}$$

Proposición 2.1

$$\begin{aligned}
E\left(\hat{\beta}_0\right) &= \beta_0, \\
V\left(\hat{\beta}_0\right) &= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{S_{xx}}\right), \\
Cov\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1\right) &= -\frac{\sigma^2 \overline{x}}{S_{xx}}.
\end{aligned}$$

Para estimar σ^2 es preciso definir la diferencia entre la observación y_k, y el valor predecido $\hat{y}_k$, es decir

$$e_k = y_k - \hat{y}_k, \text{ se le denomina } \textbf{residuo}.$$

La suma de los cuadrados de los errores de los reisduos, *suma de cuadrados del error*

$$SC_E = \sum_{k=1}^{n} e_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k - \hat{y}_k\right)^2 \tag{2.20}$$

sustituyendo $\hat{y}_k = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_k$ se obtiene

$$\begin{aligned}
SC_E &= \sum_{k=1}^{n} y_k^2 - n\overline{y}^2 - \hat{\beta}_1 S_{xy} = S_{yy} - \hat{\beta}_1 S_{xy}, \\
E\left(SC_E\right) &= \left(n-2\right)\sigma^2, \text{ por lo tanto} \\
\hat{\sigma}^2 &= \frac{SC_E}{n-2} = MC_E \text{ es un estimador insesgado de } \sigma^2.
\end{aligned}$$

Prueba de Hipótesis en RLS

Para evaluar la suficiencia del modelo de regresión lineal simple, es necesario lleva a cabo una prueba de hipótesis respecto de los parámetros del modelo así como de la construcción de intervalos de confianza. Para poder realizar la prueba de hipótesis sobre la pendiente y la ordenada al orígen de la recta de regresión es necesario hacer el supuesto de que el error ϵ_i se distribuye normalmente, es decir $\epsilon_i \sim N\left(0, \sigma^2\right)$.
Suponga que se desea probar la hipótesis de que la pendiente es igual a una constante, $\beta_{0,1}$ las hipótesis Nula y Alternativa son:

H_0: $\beta_1 = \beta_{1,0}$,
H_1: $\beta_1 \neq \beta_{1,0}$.
donde dado que las $\epsilon_i \sim N\left(0, \sigma^2\right)$, se tiene que y_i son variables aleatorias normales $N\left(\beta_0 + \beta_1 x_1, \sigma^2\right)$.

De las ecuaciones (2.12) se desprende que $\hat{\beta}_1$ es combinación lineal de variables aleatorias normales independientes, es decir, $\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \sigma^2/S_{xx}\right)$, recordar las ecuaciones (2.18) y (2.19). Entonces se tiene que el estadístico de prueba apropiado es

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_{1,0}}{\sqrt{MC_E/S_{xx}}} \tag{2.21}$$

que se distribuye t con $n-2$ grados de libertad bajo $H_0 : \beta_1 = \beta_{1,0}$. Se rechaza H_0 si

$$t_0| > t_{\alpha/2, n-2}. \tag{2.22}$$

Para β_0 se puede proceder de manera análoga para
$H_0 : \beta_0 = \beta_{0,0}$,
$H_1 : \beta_0 \neq \beta_{0,0}$,
con $\hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0, \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{S_{xx}}\right)\right)$, por lo tanto

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_{0,0}}{MC_E\left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{S_{xx}}\right]}, \tag{2.23}$$

con el que rechazamos la hipótesis nula si

$$t_0| > t_{\alpha/2, n-2}. \tag{2.24}$$

No rechazar $H_0 : \beta_1 = 0$ es equivalente a decir que no hay relación lineal entre x y y. Alternativamente, si $H_0 : \beta_1 = 0$ se rechaza, esto implica que x explica la variabilidad de y, es decir, podría significar que la línea recta esel modelo adecuado.

El procedimiento de prueba para $H_0 : \beta_1 = 0$ puede realizarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
S_{yy} &= \sum_{k=1}^{n}\left(y_k-\overline{y}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\hat{y}_k-\overline{y}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(y_k-\hat{y}_k\right)^2\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(y_k-\overline{y}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(y_k-\hat{y}_k+\hat{y}_k-\overline{y}\right)^2\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\hat{y}_k-\overline{y}\right)+\left(y_k-\hat{y}_k\right)\right]^2\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\hat{y}_k-\overline{y}\right)^2+2\left(\hat{y}_k-\overline{y}\right)\left(y_k-\hat{y}_k\right)+\left(y_k-\hat{y}_k\right)^2\right]\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\hat{y}_k-\overline{y}\right)^2+2\sum_{k=1}^{n}\left(\hat{y}_k-\overline{y}\right)\left(y_k-\hat{y}_k\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(y_k-\hat{y}_k\right)^2\\
&\sum_{k=1}^{n}\left(\hat{y}_k-\overline{y}\right)\left(y_k-\hat{y}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\hat{y}_k\left(y_k-\hat{y}_k\right)-\sum_{k=1}^{n}\overline{y}\left(y_k-\hat{y}_k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\hat{y}_k\left(y_k-\hat{y}_k\right)-\overline{y}\sum_{k=1}^{n}\left(y_k-\hat{y}_k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_k\right)\left(y_k-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_k\right)-\overline{y}\sum_{k=1}^{n}\left(y_k-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\hat{\beta}_0\left(y_k-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_k\right)+\sum_{k=1}^{n}\hat{\beta}_1x_k\left(y_k-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_k\right)\\
&- \overline{y}\sum_{k=1}^{n}\left(y_k-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_k\right)\\
&= \hat{\beta}_0\sum_{k=1}^{n}\left(y_k-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_k\right)+\hat{\beta}_1\sum_{k=1}^{n}x_k\left(y_k-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_k\right)\\
&- \overline{y}\sum_{k=1}^{n}\left(y_k-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_k\right)=0+0+0=0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, efectivamente se tiene

$$S_{yy} = \sum_{k=1}^{n}\left(\hat{y}_k-\overline{y}\right)^2+\sum_{k=1}^{n}\left(y_k-\hat{y}_k\right)^2, \tag{2.25}$$

donde se hacen las definiciones

$$SC_E = \sum_{k=1}^{n}\left(\hat{y}_k-\overline{y}\right)^2 \cdots \text{Suma de Cuadrados del Error} \tag{2.26}$$

$$SC_R = \sum_{k=1}^{n}\left(y_k-\hat{y}_k\right)^2 \cdots \text{ Suma de Regresión de Cuadrados} \tag{2.27}$$

Por lo tanto la ecuación (2.25) se puede reescribir como

$$S_{yy} = SC_R + SC_E \tag{2.28}$$

recordemos que $SC_E = S_{yy} - \hat{\beta}_1 S_{xy}$

$$\begin{aligned} S_{yy} &= SC_R + \left(S_{yy} - \hat{\beta}_1 S_{xy}\right) \\ S_{xy} &= \frac{1}{\hat{\beta}_1} SC_R \end{aligned}$$

S_{xy} tiene $n-1$ grados de libertad y SC_R y SC_E tienen 1 y $n-2$ grados de libertad respectivamente.

Proposición 2.2

$$E\left(SC_R\right) = \sigma^2 + \beta_1 S_{xx} \tag{2.29}$$

además, SC_E y SC_R son independientes.

Recordemos que $\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$. Para $H_0 : \beta_1 = 0$ verdadera,

$$F_0 = \frac{SC_R/1}{SC_E/(n-2)} = \frac{MC_R}{MC_E}$$

se distribuye $F_{1,n-2}$, y se rechazaría H_0 si $F_0 > F_{\alpha,1,n-2}$.
El procedimiento de prueba de hipótesis puede presentarse como la tabla de análisis de varianza siguiente

Fuente de variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Media Cuadrática	F_0
Regresión	SC_R	1	MC_R	MC_R/MC_E
Error Residual	SC_E	$n-2$	MC_E	
Total	S_{yy}	$n-1$		

La prueba para la significación de la regresión puede desarrollarse basándose en la expresión (2.21), con $\hat{\beta}_{1,0} = 0$, es decir

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{MC_E/S_{xx}}} \tag{2.30}$$

Elevando al cuadrado ambos términos:

$$t_0^2 = \frac{\hat{\beta}_1^2 S_{xx}}{MC_E} = \frac{\hat{\beta}_1 S_{xy}}{MC_E} = \frac{MC_R}{MC_E}$$

Observar que $t_0^2 = F_0$, por tanto la prueba que se utiliza para t_0 es la misma que para F_0.

Estimación de Intervalos en RLS

Además de la estimación puntual para los parámetros β_1 y β_0, es posible obtener estimaciones del intervalo de confianza de estos parámetros. El ancho de estos intervalos de confianza es una medida de la calidad total de la recta de regresión.
Si los ϵ_k se distribuyen normal e independientemente, entonces

$$\frac{\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1\right)}{\sqrt{\frac{MC_E}{S_{xx}}}} \quad y \quad \frac{\left(\hat{\beta}_0 - \beta_0\right)}{\sqrt{MC_E\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{S_{xx}}\right)}}$$

se distribuyen t con $n-2$ grados de libertad. Por tanto un intervalo de confianza de $100\left(1-\alpha\right)\%$ para β_1 está dado por

$$\hat{\beta}_1 - t_{\alpha/2,n-2}\sqrt{\frac{MC_E}{S_{xx}}} \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1 + t_{\alpha/2,n-2}\sqrt{\frac{MC_E}{S_{xx}}}. \tag{2.31}$$

De igual manera, para β_0 un intervalo de confianza al $100\,(1-\alpha)\,\%$ es

$$\hat{\beta}_0 - t_{\alpha/2,n-2}\sqrt{MC_E\left(\frac{1}{n}+\frac{\overline{x}^2}{S_{xx}}\right)} \leq \beta_0 \leq \hat{\beta}_0 + t_{\alpha/2,n-2}\sqrt{MC_E\left(\frac{1}{n}+\frac{\overline{x}^2}{S_{xx}}\right)} \tag{2.32}$$

Predicción

Supongamos que se tiene un valor x_0 de interés, entonces la estimación puntual de este nuevo valor

$$\hat{y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 \tag{2.33}$$

Esta nueva observación es independiente de las utilizadas para obtener el modelo de regresión, por tanto, el intervalo en torno a la recta de regresión es inapropiado, puesto que se basa únicamente en los datos empleados para ajustar el modelo de regresión.

El intervalo de confianza en torno a la recta de regresión se refiere a la respuesta media verdadera $x = x_0$, no a observaciones futuras.

Sea y_0 la observación futura en $x = x_0$, y sea $\hat{y}_0$ dada en la ecuación anterior, el estimador de y_0. Si se define la variable aleatoria

$$w = y_0 - \hat{y}_0,$$

esta se distribuye normalmente con media cero y varianza

$$V\,(w) = \sigma^2\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - x_0)^2}{S_{xx}}\right]$$

dado que y_0 es independiente de $\hat{y}_0$, por lo tanto el intervalo de predicción al nivel α para futuras observaciones x_0 es

$$\hat{y}_0 - t_{\alpha/2,n-2}\sqrt{MC_E\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - x_0)^2}{S_{xx}}\right]} \leq y_0$$
$$\leq \hat{y}_0 + t_{\alpha/2,n-2}\sqrt{MC_E\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - x_0)^2}{S_{xx}}\right]}.$$

Prueba de falta de ajuste

Es común encontrar que el modelo ajustado no satisface totalmente el modelo necesario para los datos, en este caso es preciso saber qué tan bueno es el modelo propuesto. Para esto se propone la siguiente prueba de hipótesis:

H_0 : El modelo propuesto se ajusta adecuademente a los datos.
H_1 : El modelo NO se ajusta a los datos.

La prueba implica dividir la suma de cuadrados del eror o del residuo en las siguientes dos componentes:

$$SC_E = SC_{EP} + SC_{FDA}$$

donde SC_{EP} es la suma de cuadrados atribuibles al error puro, y SC_{FDA} es la suma de cuadrados atribuible a la falta de ajuste del modelo.

Coeficiente de Determinación

La cantidad

$$R^2 = \frac{SC_R}{S_{yy}} = 1 - \frac{SC_E}{S_{yy}} \tag{2.34}$$

se denomina coeficiente de determinación y se utiliza para saber si el modelo de regresión es suficiente o no. Se puede demostrar que $0 \leq R^2 \leq 1$, una manera de interpretar este valor es que si $R^2 = k$, entonces el modelo de regresión explica el $k * 100\,\%$ de la variabilidad en los datos.

- No mide la magnitud de la pendiente de la recta de regresión
- Un valor grande de R^2 no implica una pendiente empinada.
- No mide la suficiencia del modelo.
- Valores grandes de R^2 no implican necesariamente que el modelo de regresión proporcionará predicciones precisas para futuras observaciones.

Análisis de Varianza

Para analizar el ajuste de regresión se utiliza el método de **Análisis de Varianza** (**ANOVA**), el en cuál se estudia la variación de la variable dependiente, subidividiendola en dos componentes significativos. Recordemos las ecuaciones 2.25 y 2.28:

$$S_{yy} = SC_R + SC_E.$$

SC_R Se le denomina **suma de cuadrados de la regresión** y refleja la cantidad de variación de los valores de y que es explicada por el modelo, para nuestro caso: la recta propuesta.

SC_E Se le denomina suma de cuadrados del error, que es la variación o diferencia que hay entre los valores originales y los obtenidos mediante el ajuste.

De lo anterior se desprende que estamos interesados en validar nuestro modelo dado en la ecuación (2.9), es decir,

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

que en realidad el parámetro β_1 ha sido bien estimado:
Supongamos que se desea probar la hipótesis

$H_0 : \beta_1 = 0$
$H_1 : \beta_1 \neq 0$

Donde la hipótesis nula nos dice que el modelo en realidad debe de ser: $\mu_{Y|x} = \beta_0$, es decir, las variaciones en los valores de Y son independientes de los valores de x. Se puede demostrar que bajo la hipótesis nula los términos

- SC_R/σ^2 se distribuye χ^2 con 1 grado de libertad
- SC_E/σ^2 se distribuye χ^2 con $n-2$ grado de libertad.

e independientes, y por tanto S_{yy}, tambien llamada **suma total de cuadrados corregida: STCC**, se distribuye χ^2 con $n-1$ grados de libertad.
Para realizar esta prueba de hipótesis se calcula el cociente

$$f = \frac{SC_R/1}{SC_E/\left(n-2\right)} = \frac{SC_R}{s^2}$$

y se rechaza H_0 a un nivel de significancia α si $f > f_\alpha\left(1, (n-2)\right)$, esto se puede realizar mediante una tabla, llamada tabla de análisis de varianza, cuando a las distintas sumas de cuadrados se les divide por sus grados de libertad, se les denomina **cuadrados medios**.

Se rechaza la hipótesis nula, cuando el estadístico F calculado excede al valor crítico $f_\alpha\,(1-n-2)$, y entonces se concluye que existe evidencia sobre la variación respecto al modelo ajustado. Si el estadístico F está en la región de no rechazo, se concluye que los datos no reflejan evidencia suficiente para sostener que el modelo ajustado.

Para hacer la prueba de hipótesis

$H_0\,:\,\beta_1 = \beta_{10}$

$H_1\,:\,\beta_1 \neq \beta_{10}$

se utiliza el estadístico:

$$T = \frac{B_1 - \beta_{10}}{S/\sqrt{S_{xx}}}$$

donde T se distribuye t con $n-2$ grados de libertad. La hipótesis se rechaza si $|t| > t_{\alpha/2}$ con un nivel de confianza α.

Para el caso en que $\beta_{10} = 0$, se tiene que el valor del estadístico se convierte en

$$T = \frac{b_1 - \beta_{10}}{s/\sqrt{S_{xx}}}$$

y entonces el análisis es similar al dado en la tabla 2.1, y lo que se está diciendo es que la variación depende totalmente del azar. El Análisis de Varianza utiliza la distribución F en lugar de la distribución t.

Supongamos que se tienen observaciones repetidas de las respuestas para k valores distintos de x, es decir: para $x_1, x_2, \ldots, x_k$ se tienen $y_{1,1}, y_{1,2}, \ldots, y_{1,n_1}$ valores observados para la variable aleatoria Y_1, $y_{2,1}, y_{2,2}, \ldots, y_{2,n_2}$ valores observados para la variable aleatoria Y_2, y así sucesivamente para $y_{k,1}, y_{k,2}, \ldots, y_{1,n_k}$ valores observados para la variable aleatoria Y_k, de tal manera que

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_{1,1} & y_{2,1} & \cdots & Y_{k,1} \\ y_{1,2} & y_{2,2} & \cdots & Y_{k,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{1,j} & y_{2,j} & y_{i,j} & y_{k,j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{1,n_1} & y_{2,n_2} & \cdots & Y_{k,n_k} \end{bmatrix}$$

entonces, si definimos $y_i = T_i = \sum_{j=1}^{n_i} y_{i,j}$, se tiene que $\overline{y}_i = \frac{T_i}{n_i}$

Cómo se ve la matriz para el caso en que:

- $n_4 = 3$ mediciones de Y
- Simular en R, para los casos en que $n_1 = 4$, $n_2 = 6$, $n_3 = 5$, y $n_4 = 8$,

La suma de cuadrados del error se divide en dos partes: la cantidad debida a la variación entre los valores de Y para los valores dados de x, y lo que se denomina **falta de ajuste** que es una medida de la variación sistemática introducida por los términos de orden superior. Para nuestro caso en específico, estos son términos de x distintos de la contribución lineal de primer orden. Hasta el momento, dado que hemos considerado un modelo lineal, se asume que este segundo componente no existe, y por tanto la suma de cuadrados de error depende totalmente de los errores aleatorios. En consecuencia tenemos que $s^2 = \frac{SCE}{(n-2)}$ es un estimador insesgado para σ^2.

Fuente de Variación	**Suma de Cuadrados**	**Grados de Libertad**	**Cuadrado Medio**	**f calculada**
Regresión	SC_R	1	SC_R	$\frac{SC_R}{s^2}$
Error	SC_E	$n-2$		
Falta de ajuste	$SCE - SCE(puro)$	$k-2$	$\frac{SCE-SCE(puro)}{k-2}$	$\frac{SCE-SCE(puro)}{s^2(k-2)}$
Error Puro	$SCE(puro)$	$n-k$	$s^2 = \frac{SCE(puro)}{n-k}$	
Total	$STCC$	$n-1$		

Cuadro 2.1: Análisis de Varianza para la prueba $\beta_1 = 0$

Sin embargo, si el modelo no ajusta correctamente a los datos, lo que tenemos es una sobre estimación del valor de σ^2 y por tanto será un estimador sesgado del mismo.

Para obtener un estimador insesgado se calcula

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \overline{y}_i\right)^2}{n_i - 1}, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, k$$

después de hacer unas operaciones se puede obtener:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(n_i - 1\right) s_i^2}{n_i - k} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \overline{y}_i\right)^2}{n - k}.$$

El numerador de s^2 es una medida del **error experimental puro** o **falta de ajuste**. Para determinar el cuadrado del error en: error puro y la falta de ajuste:

- Se calcula la suma de cuadrados del error puro:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \overline{y}_i\right)^2$$

  esta suma de cuadrados tiene $n-k$ grados de libertad, y el cuadrado medio resultante es el estimador insesgado s^2 de σ^2.
- Restar la suma de cuadrados del error puro de la suma de cuadrados del error, SCE, resultando la suma de cuadrados por ajuste. Los grados de libertad de la falta de ajuste se obtienen por la resta: $(n-2) - (n-k) = k-2$.

La prueba de hipótesis en un problema de regresión con mediciones repetidas de la respuesta se ilustra en la tabla 2.1:

Estimación de Intervalos en RLS

- Además de la estimación puntual para los parámetros β_1 y β_0, es posible obtener estimaciones del intervalo de confianza de estos parámetros.
- El ancho de estos intervalos de confianza es una medida de la calidad total de la recta de regresión.

Si los ϵ_k se distribuyen normal e independientemente, entonces

$$\frac{\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1\right)}{\sqrt{\frac{MC_E}{S_{xx}}}} \quad y \quad \frac{\left(\hat{\beta}_0 - \beta_0\right)}{\sqrt{MC_E\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{S_{xx}}\right)}}$$

se distribuyen t con $n-2$ grados de libertad. Por tanto un intervalo de confianza de $100\left(1-\alpha\right)\%$ para β_1 está dado por

$$\hat{\beta}_1 - t_{\alpha/2,n-2}\sqrt{\frac{MC_E}{S_{xx}}} \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1 + t_{\alpha/2,n-2}\sqrt{\frac{MC_E}{S_{xx}}}. \tag{2.35}$$

De igual manera, para β_0 un intervalo de confianza al $100\left(1-\alpha\right)\%$ es

$$\hat{\beta}_0 - t_{\alpha/2,n-2}\sqrt{MC_E\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{S_{xx}}\right)} \leq \beta_0 \leq \hat{\beta}_0 + t_{\alpha/2,n-2}\sqrt{MC_E\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{S_{xx}}\right)} \tag{2.36}$$

Parte II

PRIMERA PARTE: Regresión Logística

CAPÍTULO 3

Día 1: Introducción

3.1. Conceptos Básicos

La regresión logística es una técnica de modelado estadístico utilizada para predecir la probabilidad de un evento binario (es decir, un evento que tiene dos posibles resultados) en función de una o más variables independientes. Es ampliamente utilizada en diversas disciplinas, como medicina, economía, biología, y ciencias sociales, para analizar y predecir resultados binarios. Un modelo de regresión logística describe cómo una variable dependiente binaria Y (que puede tomar los valores 0 o 1) está relacionada con una o más variables independientes $X_1, X_2, \ldots, X_n$. A diferencia de la regresión lineal, que predice un valor continuo, la regresión logística predice una probabilidad que puede ser interpretada como la probabilidad de que $Y = 1$ dado un conjunto de valores para $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

3.2. Regresión Lineal

La regresión lineal es utilizada para predecir el valor de una variable dependiente continua en función de una o más variables independientes. El modelo de regresión lineal tiene la forma:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_n X_n + \epsilon \tag{3.1}$$

donde:

- Y es la variable dependiente.
- β_0 es la intersección con el eje Y o término constante.
- $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ son los coeficientes que representan la relación entre las variables independientes y la variable dependiente.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son las variables independientes.
- ϵ es el término de error, que representa la desviación de los datos observados de los valores predichos por el modelo.

El objetivo de la regresión lineal es encontrar los valores de los coeficientes $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ que minimicen la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores observados y los valores predichos. Este método se conoce como mínimos cuadrados ordinarios (OLS, por sus siglas en inglés). La función de costo a minimizar es:

$$J(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \tag{3.2}$$

donde:

- y_i es el valor observado de la variable dependiente para la i-ésima observación.
- $\hat{y}_i$ es el valor predicho por el modelo para la i-ésima observación, dado por:

$$\hat{y}_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_n x_{in} \tag{3.3}$$

Para encontrar los valores óptimos de los coeficientes, se toman las derivadas parciales de la función de costo con respecto a cada coeficiente y se igualan a cero:

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_j} = 0 \quad \text{para } j = 0, 1, \ldots, n \tag{3.4}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtienen los valores de los coeficientes que minimizan la función de costo.

3.3. Regresión Logística

La deducción de la fórmula de la regresión logística comienza con la necesidad de modelar la probabilidad de un evento binario. Queremos encontrar una función que relacione las variables independientes con la probabilidad de que la variable dependiente tome el valor 1. La probabilidad de que el evento ocurra, $P(Y = 1)$, se denota como p. La probabilidad de que el evento no ocurra, $P(Y = 0)$, es $1 - p$. Los *odds* (chances) de que ocurra el evento se definen como:

$$\text{odds} = \frac{p}{1-p} \tag{3.5}$$

Los *odds* nos indican cuántas veces más probable es que ocurra el evento frente a que no ocurra. Para simplificar el modelado de los *odds*, aplicamos el logaritmo natural, obteniendo la función logit:

$$\text{logit}(p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right) \tag{3.6}$$

La transformación logit es útil porque convierte el rango de la probabilidad (0, 1) al rango de números reales $(-\infty, \infty)$. La idea clave de la regresión logística es modelar la transformación logit de la probabilidad como una combinación lineal de las variables independientes:

$$\text{logit}(p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_n X_n \tag{3.7}$$

Aquí, β_0 es el término constante y $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ son los coeficientes asociados con las variables independientes $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Para expresar p en función de una combinación lineal de las variables independientes, invertimos la transformación logit. Partimos de la ecuación:

$$\log\left(\frac{p}{1-p}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_n X_n$$

Aplicamos la exponenciación a ambos lados:

$$\frac{p}{1-p} = e^{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_n X_n}$$

Despejamos p:

$$p = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_n X_n}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_n X_n}}$$

La expresión final que obtenemos es conocida como la función logística:

$$p = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_n X_n)}} \tag{3.8}$$

Esta función describe cómo las variables independientes se relacionan con la probabilidad de que el evento de interés ocurra. Los coeficientes $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ se estiman a partir de los datos utilizando el método de máxima verosimilitud.

3.4. Método de Máxima Verosimilitud

Para estimar los coeficientes $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ en la regresión logística, utilizamos el método de máxima verosimilitud. La idea es encontrar los valores de los coeficientes que maximicen la probabilidad de observar los datos dados. Esta probabilidad se expresa mediante la función de verosimilitud L. La función de verosimilitud $L(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ para un conjunto de n observaciones se define como el producto de las probabilidades de las observaciones dadas las variables independientes:

$$L(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{y_i} (1 - p_i)^{1-y_i} \tag{3.9}$$

donde:

- p_i es la probabilidad predicha de que $Y_i = 1$,
- y_i es el valor observado de la variable dependiente para la i-ésima observación.

Trabajar directamente con esta función de verosimilitud puede ser complicado debido al producto de muchas probabilidades, especialmente si n es grande. Para simplificar los cálculos, se utiliza el logaritmo de la función de verosimilitud, conocido como la función de log-verosimilitud. El uso del logaritmo simplifica significativamente la diferenciación y maximización de la función. La función de log-verosimilitud se define como:

$$\log L(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) = \sum_{i=1}^{n} [y_i \log(p_i) + (1 - y_i) \log(1 - p_i)] \tag{3.10}$$

Aquí, log representa el logaritmo natural. Esta transformación es válida porque el logaritmo es una función monótona creciente, lo que significa que maximizar la log-verosimilitud es equivalente a maximizar la verosimilitud original. En la regresión logística, la probabilidad p_i está dada por la función logística:

$$p_i = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_n X_{in})}} \tag{3.11}$$

Sustituyendo esta expresión en la función de log-verosimilitud, obtenemos:

$$\begin{aligned} \log L(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) \quad &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \left[y_i \log \left(\frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\ldots+\beta_n X_{in})}} \right) + \right. \\ & \left. (1 - y_i) \log \left(1 - \frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\ldots+\beta_n X_{in})}} \right) \right] \end{aligned}$$

Simplificando esta expresión, notamos que:

$$\log \left(\frac{1}{1 + e^{-z}} \right) = -\log(1 + e^{-z})$$

y

$$\log \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-z}} \right) = \log \left(\frac{e^{-z}}{1 + e^{-z}} \right) = -z - \log(1 + e^{-z})$$

Aplicando estas identidades, la función de log-verosimilitud se convierte en:

$$\begin{aligned} \log L(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n} \left[y_i(-\log(1 + e^{-(\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\ldots+\beta_n X_{in})})) + \right. \\ & (1 - y_i) \left(-(\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_n X_{in}) - \log(1 + e^{-(\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\ldots+\beta_n X_{in})}) \right) \end{aligned}$$

Simplificando aún más, obtenemos:

$$\begin{aligned} \log L(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n} [y_i(\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_n X_{in}) \\ &- \quad \log(1 + e^{\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\ldots+\beta_n X_{in}})] \end{aligned}$$

Para simplificar aún más la notación, podemos utilizar notación matricial. Definimos la matriz $\mathbf{X}$ de tamaño $n \times (k + 1)$ y el vector de coeficientes $\boldsymbol{\beta}$ de tamaño $(k + 1) \times 1$ como sigue:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nk} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Entonces, la expresión para la función de log-verosimilitud es:

$$\log L(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i(\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}) - \log(1 + e^{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}) \right] \tag{3.13}$$

donde $\mathbf{X}_i$ es la i-ésima fila de la matriz $\mathbf{X}$. Esta notación matricial simplifica la implementación y la derivación de los estimadores de los coeficientes en la regresión logística. Utilizando métodos numéricos, como el algoritmo de Newton-Raphson, se pueden encontrar los coeficientes que maximizan la función de log-verosimilitud. Para maximizar la función de log-verosimilitud, derivamos esta función con respecto a cada uno de los coeficientes β_j y encontramos los puntos críticos. La derivada parcial de la función de log-verosimilitud con respecto a β_j es:

$$\frac{\partial \log L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i X_{ij} - \frac{X_{ij} e^{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}}{1 + e^{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}} \right] \tag{3.14}$$

Simplificando, esta derivada se puede expresar como:

$$\frac{\partial \log L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^{n} X_{ij}(y_i - p_i), \text{ donde } p_i = \frac{1}{1 + e^{-\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}} \tag{3.15}$$

Para encontrar los coeficientes que maximizan la log-verosimilitud, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \log L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} = 0 \text{ para todos los } j = 0, 1, \ldots, k.$$

Este sistema de ecuaciones no tiene una solución analítica cerrada, por lo que se resuelve numéricamente utilizando métodos iterativos como el algoritmo de Newton-Raphson.

3.5. Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson es un algoritmo iterativo que se utiliza para encontrar las raíces de una función. En el contexto de la regresión logística, se utiliza para maximizar la función de log-verosimilitud encontrando los valores de los coeficientes $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$. Este método se basa en una aproximación de segundo orden de la función objetivo. Dado un valor inicial de los coeficientes $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$, se actualiza iterativamente el valor de los coeficientes utilizando la fórmula:

$$\boldsymbol{\beta}^{(t+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(t)} - \left[\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}^{(t)}) \right]^{-1} \nabla \log L(\boldsymbol{\beta}^{(t)}) \tag{3.16}$$

donde:

- $\boldsymbol{\beta}^{(t)}$ es el vector de coeficientes en la t-ésima iteración.
- $\nabla \log L(\boldsymbol{\beta}^{(t)})$ es el gradiente de la función de log-verosimilitud con respecto a los coeficientes $\boldsymbol{\beta}$:

$$\nabla \log L(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{X}^T(\mathbf{y} - \mathbf{p}) \tag{3.17}$$

  donde $\mathbf{y}$ es el vector de valores observados y $\mathbf{p}$ es el vector de probabilidades.
- $\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}^{(t)})$ es la matriz Hessiana (matriz de segundas derivadas) evaluada en $\boldsymbol{\beta}^{(t)}$:

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}) = -\mathbf{X}^T\mathbf{W}\mathbf{X} \tag{3.18}$$

  donde $\mathbf{W}$ es una matriz diagonal de pesos con elementos $w_i = p_i(1 - p_i)$.

En resumen:

Algoritmo 3.1 *El algoritmo Newton-Raphson para la regresión logística se puede resumir en los siguientes pasos:*

a) *Inicializar el vector de coeficientes $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$ (por ejemplo, con ceros o valores pequeños aleatorios).*
b) *Calcular el gradiente $\nabla \log L(\boldsymbol{\beta}^{(t)})$ y la matriz Hessiana $\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}^{(t)})$ en la iteración t.*
c) *Actualizar los coeficientes utilizando la fórmula:*

$$\boldsymbol{\beta}^{(t+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(t)} - \left[\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}^{(t)}) \right]^{-1} \nabla \log L(\boldsymbol{\beta}^{(t)}) \tag{3.19}$$

d) *Repetir los pasos 2 y 3 hasta que la diferencia entre* $\boldsymbol{\beta}^{(t+1)}$ *y* $\boldsymbol{\beta}^{(t)}$ *sea menor que un umbral predefinido (criterio de convergencia).*

En resumen, el método de Newton-Raphson permite encontrar los coeficientes que maximizan la función de log-verosimilitud de manera eficiente.

3.6. Específicando

En específico para un conjunto de n observaciones, la función de verosimilitud L se define como el producto de las probabilidades individuales de observar cada dato:

$$L(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{y_i}(1-p_i)^{1-y_i} \tag{3.20}$$

donde y_i es el valor observado de la variable dependiente para la i-ésima observación y p_i es la probabilidad predicha de que $Y_i = 1$. Aquí, p_i es dado por la función logística:

$$p_i = \frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\ldots+\beta_n X_{in})}} \tag{3.21}$$

Tomando el logaritmo:

$$\log L(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i \log(p_i) + (1-y_i)\log(1-p_i)\right] \tag{3.22}$$

Sustituyendo p_i:

$$\log L(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i(\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\ldots+\beta_n X_{in}) - \log(1+e^{\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\ldots+\beta_n X_{in}})\right] \tag{3.23}$$

Dado que el objetivo es encontrar los valores de $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ que maximicen la función de log-verosimilitud. Para β_j, la derivada parcial de la función de log-verosimilitud es:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i X_{ij} - \frac{X_{ij} e^{\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\ldots+\beta_n X_{in}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\ldots+\beta_n X_{in}}}\right] \tag{3.24}$$

Esto se simplifica a (comparar con la ecuación 3.14):

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^{n} X_{ij}(y_i - p_i) \tag{3.25}$$

Para maximizar la log-verosimilitud, resolvemos el sistema de ecuaciones $\frac{\partial \log L}{\partial \beta_j} = 0$ para todos los j de 0 a n., mismo que se resuelve numéricamente utilizando métodos el algoritmo de Newton-Raphson. El método de Newton-Raphson se basa en una aproximación de segundo orden de la función objetivo. Dado un valor inicial de los coeficientes $\beta^{(0)}$, se iterativamente actualiza el valor de los coeficientes utilizando la fórmula:

$$\beta^{(k+1)} = \beta^{(k)} - \left[\mathbf{H}(\beta^{(k)})\right]^{-1} \mathbf{g}(\beta^{(k)}) \tag{3.26}$$

donde:

- $\beta^{(k)}$ es el vector de coeficientes en la k-ésima iteración.
- $\mathbf{g}(\beta^{(k)})$ es el gradiente (vector de primeras derivadas) evaluado en $\beta^{(k)}$:

  $$\mathbf{g}(\beta) = \frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i(y_i - p_i) \tag{3.27}$$

  donde $\mathbf{X}_i$ es el vector de valores de las variables independientes para la i-ésima observación (comparar con ecuación 3.17).
- $\mathbf{H}(\beta^{(k)})$ es la matriz Hessiana (matriz de segundas derivadas) evaluada en $\beta^{(k)}$:

  $$\mathbf{H}(\beta) = \frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta \partial \beta^T} = -\sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)\mathbf{X}_i\mathbf{X}_i^T, \tag{3.28}$$

  comparar con ecuación 3.18

Algoritmo 3.2 *Los pasos del algoritmo Newton-Raphson para la regresión logística son:*

a) *Inicializar el vector de coeficientes $\beta^{(0)}$ (por ejemplo, con ceros o valores pequeños aleatorios).*

b) *Calcular el gradiente $\mathbf{g}(\beta^{(k)})$ y la matriz Hessiana $\mathbf{H}(\beta^{(k)})$ en la iteración k.*

c) *Actualizar los coeficientes utilizando la fórmula:*

$$\beta^{(k+1)} = \beta^{(k)} - \left[\mathbf{H}(\beta^{(k)})\right]^{-1} \mathbf{g}(\beta^{(k)}) \tag{3.29}$$

d) *Repetir los pasos 2 y 3 hasta que la diferencia entre $\beta^{(k+1)}$ y $\beta^{(k)}$ sea menor que un umbral predefinido (criterio de convergencia).*

Como se puede observar la diferencia entre el Algoritmo 3.1 y el Algoritmo 3.2 son mínimas

Notas finales

En el contexto de la regresión logística, los vectores $X_1, X_2, \ldots, X_n$ representan las variables independientes. Cada X_j es un vector columna que contiene los valores de la variable independiente j para cada una de las n observaciones. Es decir,

$$X_j = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

Para simplificar la notación y los cálculos, a menudo combinamos todos los vectores de variables independientes en una única matriz de diseño $\mathbf{X}$ de tamaño $n \times (k+1)$, donde n es el número de observaciones y $k+1$ es el número de variables independientes más el término de intercepto. La primera columna de $\mathbf{X}$ corresponde a un vector de unos para el término de intercepto, y las demás columnas corresponden a los valores de las variables independientes:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nk} \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

revisar la ecuación 3.12. De esta forma, el modelo logit puede ser escrito de manera compacta utilizando la notación matricial:

$$\text{logit}(p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \tag{3.32}$$

donde $\boldsymbol{\beta}$ es el vector de coeficientes:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

Así, la probabilidad p se puede expresar como:

$$p = \frac{1}{1 + e^{-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}}} \tag{3.34}$$

Comparar la ecuación anterior con la ecuación 3.8. Esta notación matricial simplifica la implementación y la derivación de los estimadores de los coeficientes en la regresión logística. Para estimar los coeficientes $\boldsymbol{\beta}$ en la regresión logística, se utiliza el método de máxima verosimilitud. La función de verosimilitud $L(\boldsymbol{\beta})$ se define como el producto de las probabilidades de las observaciones dadas las variables independientes, recordemos la ecuación 3.9:

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{y_i} (1 - p_i)^{1-y_i} \tag{3.35}$$

donde y_i es el valor observado de la variable dependiente para la i-ésima observación, y p_i es la probabilidad predicha de que $Y_i = 1$. La función de log-verosimilitud, que es más fácil de maximizar, se obtiene tomando el logaritmo natural de la función de verosimilitud (3.13):

$$\log L(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} [y_i \log(p_i) + (1 - y_i) \log(1 - p_i)] \tag{3.36}$$

Sustituyendo $p_i = \frac{1}{1+e^{-\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}}$, donde $\mathbf{X}_i$ es la i-ésima fila de la matriz de diseño $\mathbf{X}$, obtenemos:

$$\log L(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i(\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}) - \log(1 + e^{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}) \right] \tag{3.37}$$

Para encontrar los valores de $\boldsymbol{\beta}$ que maximizan la función de log-verosimilitud, se utiliza un algoritmo iterativo como el método de Newton-Raphson. Este método requiere calcular el gradiente y la matriz Hessiana de la función de log-verosimilitud.

El gradiente de la función de log-verosimilitud con respecto a $\boldsymbol{\beta}$ es (3.17 y 3.27):

$$\nabla \log L(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{X}^T(\mathbf{y} - \mathbf{p}) \tag{3.38}$$

donde $\mathbf{y}$ es el vector de valores observados y $\mathbf{p}$ es el vector de probabilidades predichas.

La matriz Hessiana de la función de log-verosimilitud es (3.18 y 3.28):

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}) = -\mathbf{X}^T\mathbf{W}\mathbf{X} \tag{3.39}$$

donde $\mathbf{W}$ es una matriz diagonal de pesos con elementos $w_i = p_i(1 - p_i)$.

El método de Newton-Raphson actualiza los coeficientes $\boldsymbol{\beta}$ de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\beta}^{(t+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(t)} - [\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}^{(t)})]^{-1} \nabla \log L(\boldsymbol{\beta}^{(t)}) \tag{3.40}$$

Iterando este proceso hasta que la diferencia entre $\boldsymbol{\beta}^{(t+1)}$ y $\boldsymbol{\beta}^{(t)}$ sea menor que un umbral predefinido (3.16, 3.19, 3.26 y 3.29), se obtienen los estimadores de máxima verosimilitud para los coeficientes de la regresión logística.

CAPÍTULO 4

Elementos de Probabilidad

4.1. Introducción

Los fundamentos de probabilidad y estadística son esenciales para comprender y aplicar técnicas de análisis de datos y modelado estadístico, incluyendo la regresión lineal y logística. Este capítulo proporciona una revisión de los conceptos clave en probabilidad y estadística que son relevantes para estos métodos.

4.2. Probabilidad

La probabilidad es una medida de la incertidumbre o el grado de creencia en la ocurrencia de un evento. Los conceptos fundamentales incluyen:

4.2.1. Espacio Muestral y Eventos

El espacio muestral, denotado como S, es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Un evento es un subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo, si lanzamos un dado, el espacio muestral es:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Un evento podría ser obtener un número par:

$$E = \{2, 4, 6\}$$

4.2.2. Definiciones de Probabilidad

Existen varias definiciones de probabilidad, incluyendo la probabilidad clásica, la probabilidad frecuentista y la probabilidad bayesiana.

Probabilidad Clásica

La probabilidad clásica se define como el número de resultados favorables dividido por el número total de resultados posibles:

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|}$$

donde $|E|$ es el número de elementos en el evento E y $|S|$ es el número de elementos en el espacio muestral S.

Probabilidad Frecuentista

La probabilidad frecuentista se basa en la frecuencia relativa de ocurrencia de un evento en un gran número de repeticiones del experimento:

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_E}{n}$$

donde n_E es el número de veces que ocurre el evento E y n es el número total de repeticiones del experimento.

Probabilidad Bayesiana

La probabilidad bayesiana se interpreta como un grado de creencia actualizado a medida que se dispone de nueva información. Se basa en el teorema de Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

donde $P(A|B)$ es la probabilidad de A dado B, $P(B|A)$ es la probabilidad de B dado A, $P(A)$ y $P(B)$ son las probabilidades de A y B respectivamente.

4.3. Estadística Bayesiana

La estadística bayesiana proporciona un enfoque coherente para el análisis de datos basado en el teorema de Bayes. Los conceptos fundamentales incluyen:

4.3.1. Prior y Posterior

Distribución Prior

La distribución prior (apriori) representa nuestra creencia sobre los parámetros antes de observar los datos. Es una distribución de probabilidad que refleja nuestra incertidumbre inicial sobre los parámetros. Por ejemplo, si creemos que un parámetro θ sigue una distribución normal con media μ_0 y varianza σ_0^2, nuestra prior sería:

$$P(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(\theta-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}}$$

Verosimilitud

La verosimilitud (likelihood) es la probabilidad de observar los datos dados los parámetros. Es una función de los parámetros θ dada una muestra de datos X:

$$L(\theta; X) = P(X|\theta)$$

donde X son los datos observados y θ son los parámetros del modelo.

Distribución Posterior

La distribución posterior (a posteriori) combina la información de la prior y la verosimilitud utilizando el teorema de Bayes. Representa nuestra creencia sobre los parámetros después de observar los datos:

$$P(\theta|X) = \frac{P(X|\theta)P(\theta)}{P(X)}$$

donde $P(\theta|X)$ es la distribución posterior, $P(X|\theta)$ es la verosimilitud, $P(\theta)$ es la prior y $P(X)$ es la probabilidad marginal de los datos.
La probabilidad marginal de los datos $P(X)$ se puede calcular como:

$$P(X) = \int_{\Theta} P(X|\theta)P(\theta)d\theta$$

donde Θ es el espacio de todos los posibles valores del parámetro θ.

4.4. Distribuciones de Probabilidad

Las distribuciones de probabilidad describen cómo se distribuyen los valores de una variable aleatoria. Existen distribuciones de probabilidad discretas y continuas.

4.4.1. Distribuciones Discretas

Una variable aleatoria discreta toma un número finito o contable de valores. Algunas distribuciones discretas comunes incluyen:

Distribución Binomial

La distribución binomial describe el número de éxitos en una serie de ensayos de Bernoulli independientes y con la misma probabilidad de éxito. La función de probabilidad es:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

donde X es el número de éxitos, n es el número de ensayos, p es la probabilidad de éxito en cada ensayo, y $\binom{n}{k}$ es el coeficiente binomial.
La función generadora de momentos (MGF) para la distribución binomial es:

$$M_X(t) = \left(1 - p + pe^t\right)^n$$

El valor esperado y la varianza de una variable aleatoria binomial son:

$$\begin{aligned} E(X) &= np \\ \text{Var}(X) &= np(1-p) \end{aligned}$$

Distribución de Poisson

La distribución de Poisson describe el número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo fijo o en un área fija. La función de probabilidad es:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

donde X es el número de eventos, λ es la tasa media de eventos por intervalo, y k es el número de eventos observados.
La función generadora de momentos (MGF) para la distribución de Poisson es:

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

El valor esperado y la varianza de una variable aleatoria de Poisson son:

$$\begin{aligned} E(X) &= \lambda \\ \text{Var}(X) &= \lambda \end{aligned}$$

4.4.2. Distribuciones Continuas

Una variable aleatoria continua toma un número infinito de valores en un intervalo continuo. Algunas distribuciones continuas comunes incluyen:

Distribución Normal

La distribución normal, también conocida como distribución gaussiana, es una de las distribuciones más importantes en estadística. La función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

donde x es un valor de la variable aleatoria, μ es la media, y σ es la desviación estándar.
La función generadora de momentos (MGF) para la distribución normal es:

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

El valor esperado y la varianza de una variable aleatoria normal son:

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu \\ \mathrm{Var}(X) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Distribución Exponencial

La distribución exponencial describe el tiempo entre eventos en un proceso de Poisson. La función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

donde x es el tiempo entre eventos y λ es la tasa media de eventos.
La función generadora de momentos (MGF) para la distribución exponencial es:

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad \text{para } t < \lambda$$

El valor esperado y la varianza de una variable aleatoria exponencial son:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\lambda} \\ \mathrm{Var}(X) &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

4.5. Estadística Descriptiva

La estadística descriptiva resume y describe las características de un conjunto de datos. Incluye medidas de tendencia central, medidas de dispersión y medidas de forma.

4.5.1. Medidas de Tendencia Central

Las medidas de tendencia central incluyen la media, la mediana y la moda.

Media

La media aritmética es la suma de los valores dividida por el número de valores:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

donde x_i son los valores de la muestra y n es el tamaño de la muestra.

Mediana

La mediana es el valor medio cuando los datos están ordenados. Si el número de valores es impar, la mediana es el valor central. Si es par, es el promedio de los dos valores centrales.

Moda

La moda es el valor que ocurre con mayor frecuencia en un conjunto de datos.

4.5.2. Medidas de Dispersión

Las medidas de dispersión incluyen el rango, la varianza y la desviación estándar.

Rango

El rango es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de los datos:

$$Rango = x_{\max} - x_{\min}$$

Varianza

La varianza es la media de los cuadrados de las diferencias entre los valores y la media:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Desviación Estándar

La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

4.6. Inferencia Estadística

La inferencia estadística es el proceso de sacar conclusiones sobre una población a partir de una muestra. Incluye la estimación de parámetros y la prueba de hipótesis.

4.6.1. Estimación de Parámetros

La estimación de parámetros implica el uso de datos muestrales para estimar los parámetros de una población.

Estimador Puntual

Un estimador puntual proporciona un único valor como estimación de un parámetro de la población. Por ejemplo, la media muestral $\bar{x}$ es un estimador puntual de la media poblacional μ. Otros ejemplos de estimadores puntuales son:

- **Mediana muestral ($\tilde{x}$)**: Estimador de la mediana poblacional.
- **Varianza muestral (s^2)**: Estimador de la varianza poblacional σ^2, definido como:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

- **Desviación estándar muestral (s)**: Estimador de la desviación estándar poblacional σ, definido como:

$$s = \sqrt{s^2}$$

Propiedades de los Estimadores Puntuales

Los estimadores puntuales deben cumplir ciertas propiedades deseables, como:

- **Insesgadez**: Un estimador es insesgado si su valor esperado es igual al valor del parámetro que estima.

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

- **Consistencia**: Un estimador es consistente si converge en probabilidad al valor del parámetro a medida que el tamaño de la muestra tiende a infinito.
- **Eficiencia**: Un estimador es eficiente si tiene la varianza más baja entre todos los estimadores insesgados.

Estimador por Intervalo

Un estimador por intervalo proporciona un rango de valores dentro del cual se espera que se encuentre el parámetro poblacional con un cierto nivel de confianza. Por ejemplo, un intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

donde z es el valor crítico correspondiente al nivel de confianza deseado, σ es la desviación estándar poblacional y n es el tamaño de la muestra.

4.6.2. Prueba de Hipótesis

La prueba de hipótesis es un procedimiento para decidir si una afirmación sobre un parámetro poblacional es consistente con los datos muestrales.

Hipótesis Nula y Alternativa

La hipótesis nula (H_0) es la afirmación que se somete a prueba, y la hipótesis alternativa (H_a) es la afirmación que se acepta si se rechaza la hipótesis nula.

Nivel de Significancia

El nivel de significancia (α) es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera. Un valor comúnmente utilizado es $\alpha = 0{,}05$.

Estadístico de Prueba

El estadístico de prueba es una medida calculada a partir de los datos muestrales que se utiliza para decidir si se rechaza la hipótesis nula. Por ejemplo, en una prueba t para la media:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

donde $\bar{x}$ es la media muestral, μ_0 es la media poblacional bajo la hipótesis nula, s es la desviación estándar muestral y n es el tamaño de la muestra.

P-valor

El p-valor es la probabilidad de obtener un valor del estadístico de prueba al menos tan extremo como el observado, bajo la suposición de que la hipótesis nula es verdadera. Si el p-valor es menor que el nivel de significancia α, se rechaza la hipótesis nula. El p-valor se interpreta de la siguiente manera:

- **P-valor bajo (p ¡0.05)**: Evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula.
- **P-valor alto (p ¿0.05)**: No hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula.

Tipos de Errores

En la prueba de hipótesis, se pueden cometer dos tipos de errores:

- **Error Tipo I (α)**: Rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera.
- **Error Tipo II (β)**: No rechazar la hipótesis nula cuando es falsa.

Tabla de Errores en la Prueba de Hipótesis

A continuación se presenta una tabla que muestra los posibles resultados en una prueba de hipótesis, incluyendo los falsos positivos (error tipo I) y los falsos negativos (error tipo II):

	Hipótesis Nula Verdadera	**Hipótesis Nula Falsa**
Rechazar H_0	Error Tipo I (α)	Aceptar H_a
No Rechazar H_0	Aceptar H_0	Error Tipo II (β)

Cuadro 4.1: Resultados de la Prueba de Hipótesis

4.7. Probabilidad Condicional e Independencia de Eventos

Definición 4.1 *Sean A y B dos eventos. La* Probabilidad Condicional *del evento A dado que ocurre el evento B, denotado por $\mathbb{P}[A|B]$,está definida por*

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[AB]}{\mathbb{P}[B]} \tag{4.1}$$

Lo anterior si $\mathbb{P}[B] > 0$
De lo anterios se desprende que:
$\mathbb{P}[AB] = \mathbb{P}[A|B]\,\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[B|A]\,\mathbb{P}[A]$

Proposición 4.1 *Dado el evento B con $\mathbb{P}[B] > 0$, se cumplen las siguientes propiedades*

a)
$$\mathbb{P}[\emptyset|B] = 0 \tag{4.2}$$

b) *Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos mutuamente excluyentes, entonces*

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|B] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i|B] \tag{4.3}$$

c) *Si A es un evento, entonces*
$$\mathbb{P}[A^c|B] = 1 - \mathbb{P}[A|B] \tag{4.4}$$

d) *Sean A_1 y A_2 eventos, entonces*

$$\mathbb{P}[A_1|B] = \mathbb{P}[A_1 \cap A_2|B] + \mathbb{P}[A_1 \cap A_2^c|B] \tag{4.5}$$

e) *Sean A_1 y A_2 eventos, entonces*

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2|B] = \mathbb{P}[A_1|B] + \mathbb{P}[A_2|B] - \mathbb{P}[A_1 \cap A_2^c|B] \tag{4.6}$$

f) *Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos, entonces*

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|B] \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i|B] \tag{4.7}$$

Definición 4.2 *Dados dos eventos A y B, se dice que son independientes si*

$$\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A] \tag{4.8}$$

4.8. Teorema de Bayes

Proposición 4.2 *Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos mutuamente excluyentes. Sea B un evento cualquiera, entonces*

$$\mathbb{P}[B] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[B|A_i]\,\mathbb{P}[A_i] \tag{4.9}$$

Proposición 4.3 *Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos mutuamente excluyentes. Sea B un evento cualquiera, con $\mathbb{P}[B] > 0$, entonces para cualquier $j = 1, \ldots, n$ se cumple que*

$$\mathbb{P}[A_j|B] = \frac{\mathbb{P}[B|A_j]\,\mathbb{P}[A_j]}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[B|A_i]\,\mathbb{P}[A_i]} \tag{4.10}$$

4.9. Probabilidad Condicional e Independencia de Eventos

Definición 4.3 *Sean A y B dos eventos. La* Probabilidad Condicional *del evento A dado que ocurre el evento B, denotado por $\mathbb{P}[A|B]$,está definida por*

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[AB]}{\mathbb{P}[B]} \tag{4.11}$$

Lo anterior si $\mathbb{P}[B] > 0$
De lo anterios se desprende que:
$\mathbb{P}[AB] = \mathbb{P}[A|B]\,\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[B|A]\,\mathbb{P}[A]$

Proposición 4.4 *Dado el evento B con $\mathbb{P}[B] > 0$, se cumplen las siguientes propiedades*

a)
$$\mathbb{P}[\emptyset|B] = 0 \tag{4.12}$$

b) *Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos mutuamente excluyentes, entonces*
$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|B] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i|B] \tag{4.13}$$

c) *Si A es un evento, entonces*
$$\mathbb{P}[A^c|B] = 1 - \mathbb{P}[A|B] \tag{4.14}$$

d) *Sean A_1 y A_2 eventos, entonces*
$$\mathbb{P}[A_1|B] = \mathbb{P}[A_1 \cap A_2|B] + \mathbb{P}[A_1 \cap A_2^c|B] \tag{4.15}$$

e) *Sean A_1 y A_2 eventos, entonces*
$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2|B] = \mathbb{P}[A_1|B] + \mathbb{P}[A_2|B] - \mathbb{P}[A_1 \cap A_2^c|B] \tag{4.16}$$

f) *Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos, entonces*
$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|B] \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i|B] \tag{4.17}$$

Definición 4.4 *Dados dos eventos A y B, se dice que son independientes si*

$$\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A] \tag{4.18}$$

4.10. Transformaciones

4.11. Transformaciones de Variables Aleatorias

Dada una variable aleatoria X existen tres tipos de transformaciones básicas.

a) Dada X variable aleatoria con funcion de densidad $f_X(x)$ y una transformación Y, tal que para $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Sea $Y=g(x)$. Se quiere encontrar $f_Y(y)$.

b) Para X variable aleatoria con funcion de densidad $f_{XY}(x,y)$ y una transformación Y, con $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Sea $Y=g(x,y)$. Encontrar $f_Y(y)$.

c) Sea $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ una sucesión de variables aleatorias con funcion de densidad conjunta $f_{X_1}, ..., f_{X_n}(x_1, ..., x_n)$ y una transformación Y, tal que para $g_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Sea

$$\begin{aligned} Y_1 &= g_1(x_1 \ldots x_n) \\ Y_2 &= g_2(x_1 \ldots x_n) \\ &\vdots \\ Y_n &= g_n(x_1 \ldots x_n) \end{aligned}$$

Encontrar $f_{Y_1 \ldots Y_n}(y_1 \ldots y_n)$

4.11.1. Ejercicios

Ejemplo 4.1 *Sea X V.A distribuida uniformemente sobre el intervalo $(0,1)$, es decir, $X \backsim U_{(0,1)}$ y sea Y la transformación de X definida por $Y=\frac{1}{\lambda}(1-X)$, para $\lambda>0$. Encontrar $f_Y(y)$*

Dado que X se distribuye uniforme en el intervalo $(0,1)$, se tiene que su función de densidad $f_X(x)$ está dada por:

$$f_X(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<1, \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Entonces $f_Y(y)=\dfrac{\partial}{\partial y}F_Y(y)$, donde $F_Y(y)$ está dada por:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}[Y\leqslant y]=\mathbb{P}\left[-\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)\leqslant y\right]=\mathbb{P}[\ln(1-X)\leqslant \lambda y] \\ &= \mathbb{P}[\ln(1-X)>-\lambda y]=\mathbb{P}\left[(1-X)>e^{-\lambda y}\right]=\mathbb{P}\left[-X>e^{-\lambda y}-1\right] \\ &= \mathbb{P}\left[X\leqslant 1-e^{-\lambda y}\right]=F_X\left(1-e^{-\lambda y}\right) \end{aligned}$$

Por tanto $F_Y(y)=F_X\left(1-e^{-\lambda y}\right)$. Sabemos que $0<X<1\Rightarrow -1<-X<0\Rightarrow 0<1-X<1$. Aplicando el logaritmo natural en ambos lados $-\infty<\ln(1-X)<0\Rightarrow -\infty<\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X)<0\Rightarrow 0<-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X)<\infty$ es decir, $0<y<\infty$. Recordemos que $F_Y(y)=\mathbb{P}[Y\leq y]$ para $0<y<\infty$. Como $X\sim U(0,1)$ tenemos que $F_Y(y)=1-e^{-\lambda y}$ para $y\geq 0$, entonces $0<y<\infty\Rightarrow 0<\lambda y<\infty\Rightarrow -\infty<-\lambda y<0\Rightarrow 0<e^{-\lambda y}<1\Rightarrow -1<e^{-\lambda y}<0\Rightarrow 0<1-e^{-\lambda y}<1$, es decir, su rango está contenido en el intervalo $(0,1)$. Finalmente podemos determinar $\dfrac{\partial}{\partial Y}F_Y(y)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Y}F_y(y) &= -e^{-\lambda y}(-\lambda)=-\lambda e^{-\lambda y}.\ \textit{es decir} \\ f_Y(y) &= \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & y\geq 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que

$$Y\sim exp(\lambda)$$

.

Ejemplo 4.2 *Sea X v.a con distribución normal estándar,es decir $X \sim N(0,1)$. Sea Y transformacion definida por $Y = \sqrt{x}$. Encontrar $f_Y(y)$.*

Al igual que antes recordemos que buscamos a $f_Y(y) = \dfrac{\partial}{\partial y} F_Y(y)$. Dado que:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}\left[X^{1/2} \leq y\right]$$

Ahora, como $X \sim N(0,1)$, entonces $\mathbb{P}\left[\left(X^{1/2}\right)^2 \leq y^2\right] = \mathbb{P}\left[X \leq y^2\right] = F_X\left(y^2\right)$. Por otra parte, $-\infty < X < \infty$, para $0 < X < \infty$. Por lo tanto se tiene que $0 < \sqrt{X} < \infty$, luego $0 < Y < \infty$. Ahora, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp^{\frac{-x^2}{2}}$, con $f_Y(y) = f_X\left(y^2\right)(2y)$. Lo anterior es cierto por el teorema de cambio de variable. Por tanto:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp^{\frac{-y^4}{2}} 2y,$$

para $0 < y < \infty$.

Ejemplo 4.3 *Sea $X \sim Exp(\lambda)$. Encontrar la densidad de $Y = [3X]$. Dado que*

$$X \sim exp(\lambda) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0, \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}[Y = y] = \mathbb{P}[[3X] = y] = \mathbb{P}[y \leq 3X < y+1] = \mathbb{P}\left[\frac{y}{3} \leq X \leq \frac{y+1}{3}\right] \\ &= \int_{y/3}^{(y+1)/3} f_X(x)\,dx = \int_{y/3}^{\frac{y+1}{3}} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_{y/3}^{(y+1)/3} e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_{y/3}^{(y+1)/3} \\ &= -e^{-\lambda((y+1)/3)} + e^{-\lambda\left(\frac{y}{3}\right)} = -e^{-\lambda\left(\frac{y}{3}\right)} e^{-\lambda\left(\frac{1}{3}\right)} + e^{-\lambda\left(\frac{y}{3}\right)} = e^{-\lambda\left(\frac{y}{3}\right)}\left[1 - e^{\frac{-\lambda}{3}}\right]. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4 *Sea $X \sim Gamma(2,2)$. Encontrar la densidad de $Y = \dfrac{X}{1+X}$*

$$X \sim Gamma(2,2) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{2^2}{\Gamma(2)} x^{2-1} e^{2x} & x \geq 0, \\ 0 & e.o.c \end{cases} = \begin{cases} 4xe^{-2x} & x \geq 0, \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Sabemos que $0 < x \leq \infty \Rightarrow 1 \leq x+1 < \infty \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{X+1} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{X}{X+1} \leq X \leq \infty$. Por tanto

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}\left[\frac{X}{1+X} \leq y\right] = \mathbb{P}[X \leq y(1+X)] = \mathbb{P}[X \leq y + yX] \\ &= \mathbb{P}[X - yX \leq y] = \mathbb{P}[X(1-y) \leq y] = \mathbb{P}\left[X \leq \frac{y}{1-y}\right] = F_X\left(\frac{y}{1-y}\right). \end{aligned}$$

Luego se tiene que

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left(\frac{y}{1-y}\right)\frac{[(1-y) - y(-1)]}{(1-y)^2} = \frac{4\left(\frac{y}{1-y}\right)e^{-2\left(\frac{y}{1-y}\right)}}{(1-y)^2} \\ &= \begin{cases} \frac{4\left(\frac{y}{1-y}\right)e^{-2\left(\frac{y}{1-y}\right)}}{(1-y)^3} & 0 < y < 1, \\ 0 & e.o.c. \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{4\left(\frac{y}{1-y}\right)e^{-2\left(\frac{y}{1-y}\right)}}{(1-y)^3} dy &= 4\int_0^1 \frac{y}{(1-y)^3} e^{-2\left(\frac{y}{1-y}\right)} dy = \left(\frac{y}{1-y}\right)\left(-\frac{1}{2}e^{-2\left(\frac{y}{1-y}\right)}\right)|_0^1 \\ &+ 2\int_0^1 e^{-2\left(\frac{y}{1-y}\right)}\left(\frac{1}{(1-y)^2}\right) dy \end{aligned}$$

si hacemos el siguiente cambio de variable $u = \frac{y}{1-y} \Rightarrow du = \frac{1}{(1-y)^2} dy$ y $dv = \frac{y}{(1-y)^3} e^{-2\left(\frac{y}{1-y}\right)} dy \Rightarrow v = -\frac{1}{2} e^{-2\left(\frac{y}{1-y}\right)}$, si ahora $u = \frac{1}{(1-y)^2} \Rightarrow 2(1-y)\,dy$, con $dv = e^{-2\left(\frac{y}{1-y}\right)} dy \Rightarrow v = \frac{(1-y)^2 e^{-2\left(\frac{y}{1-y}\right)}}{2}$ entonces se tiene

$$-2\left(\frac{y}{1-y}\right) = \frac{(1-y)(-2) - (-2y)(-1)}{(1-y)^2} = \frac{2}{(1-y)^2}.$$

Ejemplo 4.5 *Sea $X \sim \mathcal{P}o(\lambda)$. Hallar la densidad de $Y = 4X + 3$. Dado que X se distribuye Poisson*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x = 0, 1, 2, \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

se tiene que

$$f_Y(y) \;=\; \mathbb{P}[Y = y] = \mathbb{P}[4X + 3 = y] = \mathbb{P}[4X = y - 3] = \mathbb{P}\left[X = \frac{y-3}{4}\right] = f_X\left(\frac{y-3}{4}\right)$$

entonces

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{\left(\frac{y-3}{4}\right)}}{4\left(\frac{y-3}{4}\right)!} & y = 3, 7, 11, 15, \ldots \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Lo anterior es cierto dado que $x = 0, 1, 2, 3, \cdots$, entonces $4X = 0, 4, 8, 12, \cdots$, es decir $4X + 3 = 3, 7, 11, 15, \cdots$ por tanto $Y = 3, 7, 11, 15, \cdots$.

Ejemplo 4.6 *Sea $X \sim U(0,1)$. Hallar una función g t.q $Y \sim U(a,t)$, con $Y = g(X)$. Dado que $X \sim U(0,1)$,*

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Además

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ x & 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

Se busca que $Y \sim U(a,b)$, entonces

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

por tanto

$$\int_a^y \frac{1}{b-a}\,dv = \frac{y-a}{b-a},$$

entonces

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{y-a}{b-a} & a \leq y \leq b \\ 1 & y > b. \end{cases}$$

Sea $y \in [a,b]$, supongamos que g es creciente: $F_Y(y) = \mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}[g(X) \leq y] = \mathbb{P}\left[X \leq g^{-1}(y)\right]$, es decir, $F_X\left(g^{-1}(y)\right) = g^{-1}(y)$, con $g : (0,1) \to (a,b)$, por tanto $g^{-1} : (a,b) \to (0,1)$. Lo anterior es cierto puesto que $F_X(x) = x$ para $x \in [0,1]$, por lo tanto $g^{-1}(y) = \frac{y-a}{b-a} \Rightarrow y = g\left(\frac{y-a}{b-a}\right)$. Si hacemos $t = \frac{y-a}{b-a} \Rightarrow y - a \Rightarrow y = a + t(b-a)$, por tanto se propone $Y = g(X) = a + (b-a)X$.

Ejemplo 4.7 (Importante) *Un insecto deposita un número grande de huevos, el número de huevos depositado es una v.a que frecuentemente se asocia una distribución Poisson (λ). La supervivencia de un cierto huevo tiene probabilidad p. Encontrar el número promedio de huevos sobrevivientes. Sean las variables aleatorias $Y \equiv$ Número de huevos depositados, es decir, $Y \sim Poi(\lambda)$. $X \equiv$ Número de huevos sobrevivientes $X|Y \sim Bin(Y,p)$. A saber*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X = x] &= \sum_{y=0}^{\infty} \mathbb{P}[X = xY = y] = \sum_{y=0}^{\infty} \mathbb{P}[X = x|Y = y]\,\mathbb{P}[Y = y] \\ &= \sum_{y=x}^{\infty} \left[\binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x}\right]\left[\frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}\right] = \sum_{y=x}^{\infty} \left(\frac{y!}{(y-x)!x!} p^x (1-p)^{y-x}\right)\left(\frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}\right) \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}[X=x] = e^{-\lambda}p^x\sum_{y=x}^{\infty}\frac{(1-p)^{y-x}\lambda^y}{(y-x)!x!} = \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^x}{x!}\sum_{y=x}^{\infty}\frac{[(1-p)\lambda]^{y-x}}{(y-x)!}$$

si hacemos el cambio de variable $z=y-x$, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X=x] &= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^x}{x!}\sum_{z=0}^{\infty}\frac{[(1-p)\lambda]^z}{z!} = \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^x}{x!}\sum_{z=0}^{\infty}\frac{[(1-p)\lambda]^t}{t!}\\ &= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^x}{x!}\left(1+(1-p)\lambda+\frac{((1-p)\lambda)^2}{2!}+\cdots\right) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^x}{x!}e^{(1-p)\lambda}\\ &= \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^x}{x!}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{P}[X=x]=\frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^x}{x!}$*, es decir,* $X\sim\mathcal{P}o(\lambda p)$*, por lo tanto* $E[X]=\lambda p$*.*

Ejemplo 4.8

Sea X,Y variables aleatorias independientes, tales que $X\sim U(0,1)$ y $Y\sim U(0,2)$. Defínase la nueva variable aleatoria $Z=X+Y$, determinar la densidad de Z. A saber

$$X\sim U_{0,1}\Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & e.o.c\end{cases},\quad Y\sim U_{0,2}\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0\le y\le 2\\ 0 & e.o.c\end{cases}$$

Por tanto la densidad conjunta es

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)\begin{cases}\frac{1}{2} & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2,\\ 0 & e.o.c\end{cases}$$

con distribución de probabilidad

$$F_Z(z)=\mathbb{P}[X+Y\le z]=\mathbb{P}[Y\le z-X],$$

además el rango de Z es el intervalo $(0,3)$.

Ejemplo 4.9

Sea X,Y variables aleatorias tales que $X\sim exp(\lambda)$ y $Y\sim exp(\lambda)$ independientes. Sea $Z=min\{x,y\}$. Hallar $f_z(z)$.
A saber

$$X\sim exp(\lambda)\Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & e.o.c\end{cases},\quad Y\sim exp(\lambda)\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y} & y>0\\ 0 & e.o.c\end{cases}$$

Entonces,

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)=\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)\left(\lambda e^{-\lambda y}\right)=\begin{cases}\lambda^2e^{-\lambda(x+y)} & x>0\\ & y>0\\ 0 & e.o.c\end{cases}$$

Sea $z\ge 0$, entonces

$$\begin{aligned}F_z(z) &= \mathbb{P}[Z\le z]=\mathbb{P}[min\{X,Y\}>Z]=1-\mathbb{P}[X<z,Y>z]=1-\mathbb{P}[X<z]\,\mathbb{P}[Y>z]\\ &= 1-\mathbb{P}[X>z]^2=1-(\mathbb{P}[X\le z])^2=1-(1-F_X(z))^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \int_0^x\lambda e^{-\lambda u}\,du=\lambda\int_0^x e^{-\lambda u}\,du=x\left(-e^{-\lambda u}/x\right)_0^x=-e^{-\lambda x}+1=1-e^{-\lambda x}\\ &= 1-\left(1-1-e^{-\lambda x}\right)^2=1-e^{-2\lambda z},\end{aligned}$$

por lo tanto $z>0$, así

$$f_x(z)=\left(-e^{-2\lambda z}\right)(-2\lambda)=\begin{cases}2\lambda e^{-2\lambda z} & z>0\\ 0 & e.o.c.\end{cases},$$

es decir $z=min\{x,y\}\sim exp(2\lambda)$.

4.12. Cambio de Variable

Teorema 4.1 *Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a continuas con densidad conjunta $f_{x_1\ldots x_n}(x_1\ldots x_n)$ y $Y_1 = g_1(x_1\ldots x_n), Y_2 = g_2(x_1\ldots x_n)\ldots Y_n = g_n(x_1\ldots x_n)$. Si existe solución única $x_1 = h_1(y_1\ldots y_n), x_2 = h_2(y_1\ldots y_n), \ldots, x_n = h_n(y_1\ldots yn)$, con*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces

$$f_{Y1,\ldots Y_n}(y_1\ldots y_n) = \begin{cases} \mid J \mid f_{X1\ldots Xn}[h_1\ldots h_n] & (y_1\ldots y_n) \in D \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

4.12.1. Ejercicios

Ejemplo 4.10 *Sean X, Y variables aleatorias independientes tales que $X \sim Gamma(\alpha_1, \lambda)$, $Y \sim Gamma(\alpha_2, \lambda)$. Hallar $f_{u,v}$ donde $U = \dfrac{Y}{X}$ y $V = X + Y$ ¿Son U y V independientes?.*
A saber

$$X \sim Gamma(\alpha_1, \lambda) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1 - 1} e^{-\lambda x} & x > 0, \\ 0 & e.o.c \end{cases}.$$

$$Y \sim Gamma(\alpha_2, \lambda) \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} y^{\alpha_2 - 1} e^{-\lambda y} & y > 0, \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

entonces

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_1-1} y^{\alpha_2-1} e^{-\lambda(x+y)} & y > 0, x > 0, \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Si $U = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux$, entonces $v = x + y \Rightarrow v = x + ux \Rightarrow v = (1+u)x \Rightarrow x = \frac{v}{1+u}$, por lo tanto se tiene que $y = u\left(\dfrac{v}{1+u}\right)$, entonces

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-v}{(1+u)^2} & \frac{1}{(1+u)} \\ v(1+u)^{-1} - uv(1+u)^{-2} & \frac{u}{1+u} \end{vmatrix} = -\frac{-vu}{(1+u)^3} - \frac{v}{(1+u)^2} + \frac{-vu}{(1+u)^3} = v(1+u)^{-2}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f_{uv}(u,v) &= |J| f_{XY}(x,y) = v(1+u)^2 \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \left(\frac{v}{1+u}\right)^{\alpha_1-1} \left(\frac{uv}{1+u}\right)^{\alpha_2-1} e^{-\lambda\left(\frac{v+uv}{1+u}\right)} \\ &= \frac{u^{\alpha_2-1} v^{\alpha_1+\alpha_2-2}}{(1+u)^{\alpha_2+\alpha_2}} \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\lambda v}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.11 *Sea X, Y variables aleatorias, tales que $X \sim exp(1)$ y $Y \sim U(0,1)$ independientes. Sean $U = X + Y$ y $V = X - Y$, hallar $f_{U,V}(u,v)$ y averiguar independencia.*
A saber

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0, \\ 0 & e.o.c. \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Entonces para $u = x + y$, $x = u - y$m además $v = x - y$ implica que $y = x - v$, por lo tanto $y = u - y - v \Rightarrow y = \frac{u-v}{2}$. Por lo tanto $x = u - \left(\frac{u-v}{2}\right) = \frac{2u-u+v}{2} = \frac{u+v}{2}$. Haciendo $T(t,0) = (t,t)$, $T(0,t) = (t,-t)$ y $T(t,1) = (t+1, t-1)$, tenemos que $T(u,v) = (x+y, x-y)$. Sean

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= (t,0) \text{ para } t > 0, \\ \sigma_2(t) &= (0,t) \text{ para } 0 < t < 1 \text{ y } v = -u, \\ \sigma_3(t) &= (t,1) \text{ para } t > 0. \end{aligned}$$

Ahora, si hacemos $u = t \Rightarrow u = v$, $u = t + 1$, *entonces* $v = t$ *y* $v = t - 1$, *entonces* $u = tv = t - 1 \Rightarrow u = -v \Rightarrow u - 1 = tv + 1 = t$ *y* $u - 1 = v + 1 \Rightarrow v = u - 2$. *Por tanto*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

Luego

$$f_{u,v}(u,v) = |j| f_{XY}(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{u+v}{2}\right)} & x, y \in D, \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Por tanto

$$f_u(u) = \begin{cases} \int_{-u}^{u} \frac{1}{2} e^{-\frac{u+v}{2}} dv & 0 \leq u \leq 1, \\ \int_{u-2}^{u} \frac{1}{2} e^{-\frac{u+v}{2}} dv & 0 \geq 1, \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Donde

$$\begin{aligned}
\int_{-u}^{u} \frac{1}{2} e^{-\frac{u+v}{2}} dv &= \frac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}} \int_{-u}^{u} e^{-\frac{v}{2}} dv = \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}}\right) \left(\frac{e^{-\frac{v}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right)_{-u}^{u} = \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}}\right) \left(-2e^{\frac{-v}{2}}\right)_{-u}^{u} \\
&= \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}}\right) \left(-2\left(e^{\frac{-u}{2}} - e^{\frac{u}{2}}\right)\right) = -e^{-u} + 1 = 1 - e^{-u}. \\
\int_{u-2}^{u} e^{\frac{v}{2}} dv &= \left(-2e^{-\frac{v}{2}}\right)_{u-2}^{u} = -e^{-\frac{u}{2}} + e^{-\frac{(u-2)}{2}} = e^{-\frac{u}{2}} \left(-e^{-\frac{u}{2}} + e^{-\frac{(u-2)}{2}}\right) \\
&= -e^{-u} + e^{-\frac{u}{2} - \frac{(u-2)}{2}} = -e^{-u} + e^{-u} e^{+1} = e^{1-u} - e^{-u}.
\end{aligned}$$

Luego

$$f_u(u) = \begin{cases} 1 - e^{-u} & 0 \leq u \leq 1, \\ e^{1-u} - e^{-u} & u \geq 1, \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

De manera análoga para V:

$$f_v(v) = \begin{cases} \int_{-v}^{v+2} \frac{1}{2} e^{\left(\frac{u+v}{2}\right)} du & -1 \leq v \leq 0, \\ \int_{u}^{v+2} \frac{1}{2} e^{\left(\frac{u+v}{2}\right)} du & v \geq 0, \\ 0 & e.o.c. \end{cases} = \begin{cases} e^{-\frac{v}{2}} \left(e^{\frac{v}{2}} - e^{-\frac{v+2}{2}}\right) = 1 - e^{(v+1)} & -1 \leq v \leq 0, \\ -e^{-(v+1)} + e^{-v} & v \geq 0, \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Ejemplo 4.12 *Sean* X_1, X_2 *variables aleatorias independientes tales que* $X_1, X_2 \sim U_{(-3,3)}$. *Sean* $Y_1 = X_2 - X_1, Y_2 = X_1 - X_2$. *Entonces* $y_1 = x_2 - x_1 \Rightarrow x_2 = y_1 + x_1 \Rightarrow x_2 = y_1 + y_2 - x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $y_2 = x_1 + x_2 \Rightarrow x_1 = y_2 - x_2 \Rightarrow x_1 = y_2 - \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \frac{2y_2 - y_1 - y_2}{2}$, *por lo tanto* $x_1 = \frac{y_2 - y_1}{2}$. *Entonces*

$$J = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2},$$

es decir $|J| = \frac{1}{2}$. *Por tanto*

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2} f_{X_1,X_2}\left(\frac{y_2 - y_1}{2}, \frac{y_2 + y_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{36}\right) = \begin{cases} \frac{1}{72} & x, y \in D \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Si hacemos $\sigma_1(t) = (t, 3)$, $\sigma_2(t) = (-3, t)$, $\sigma_3(t) = (t, -3)$, $\sigma_4(t) = (3, t)$,$T(t, 3) = (3 - t, t + 3)$,$T(-3, t) = (t + 3, -3 + t)$,$T(t, -3) = (-(3 + t), -3 + t)$ *y* $T(3, t) = (t - 3, 3 + t)$. *Entonces tenemos que*

$$\begin{aligned}
y_1 &= 3 - t, \\
y_2 &= -3 + t \Rightarrow t = y_1 - 3 \Rightarrow t = y_2 + 3 \Rightarrow y_1 - 3 = y_2 + 3, \\
y_2 &= y_2 = y_1 - 6, \\
y_1 &= -(3 + t), \\
y_2 &= -3 + t \Rightarrow t = -(3 + y_1), \\
y_2 &= -3 + t \Rightarrow t = -(3 + y_1) = y_2 + 3 \Rightarrow -3(3 + y_1) = y_2 + 3,
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} y_2 &= -6 - y_1 \text{ es decir,} \\ y_1 &= t - 3, \text{ con} \\ y_2 &= 3 + t. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{array}{ll} y_1 = 3 - t, & y_2 = t + 3, \text{ por tanto} \\ \Rightarrow t = 3 - y_1 & t = y_2 - 3. \text{ Entonces} \\ 3 - y_1 = y_2 - 3 \Rightarrow y_2 = 6 - y_1 \Rightarrow y_1 + 3 = t, & t = y_2 - 3. \\ \Rightarrow y_1 + 3 = y_2 - 3 \Rightarrow y_2 = y_1 + 6. & \end{array}$$

Entonces

$$\begin{array}{rc} y_2 = 6 + y_1, & (0,6)(6,0), \\ y_2 = y_1 - 6, & (0,-6)(6,0), \\ y_2 = -y_1 - 6, & (0,-6)(-6,0) \text{ y} \\ y_2 = y_1 + 6, & (0,6)(-6,0). \end{array}$$

Por lo tanto obtenemos

$$\begin{aligned} f_{Y_2}(y_2) &= \begin{cases} \int_{-y_2-6}^{y_2+6} f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)\,dy_1 & -6 \leq y_2 \leq 0, \\ \int_{y_2-6}^{6-y_2} f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)\,dy_1 & 0 < y_2 \leq 6, \\ 0 & e.o.c. \end{cases} \\ f_{Y_1}(y_1) &= \begin{cases} \int_{-y_1-6}^{y_1+6} f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)\,dy_2 & -6 \leq y_1 \leq 0, \\ \int_{y_1-6}^{6-y_1} f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)\,dy_2 & 0 < y_1 \leq 6, \\ 0 & e.o.c. \end{cases} \\ f_{Y_1}(y_1) &= \begin{cases} \frac{1}{36}y_1 + \frac{1}{6} & -6 \leq y_1 \leq 0, \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{36}y_1 & 0 < y_1 \leq 6, \\ 0 & e.o.c. \end{cases} \\ f_{Y_2}(y_2) &= \begin{cases} \frac{1}{6} + \frac{1}{36}y_2 & -6 \leq y_2 \leq 0, \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{36}y_1 & 0 < y_2 \leq 6, \\ 0 & e.o.c. \end{cases} \end{aligned}$$

4.13. Estadísticas de Orden

Sea $X_1 ... X_n$ muestra aleatoria de variables continuas. Se definen las estadísticas de orden como:

$$\begin{aligned} Y_1 &\equiv \min\{X_1 ... X_n\}, \text{estadística de orden 1.} \\ Y_j &\equiv \text{La j-ésima más chica de la muestra est. de orden j.} \\ Y_n &\equiv \max\{X_1 ... X_n\}, \text{estadística de orden n.} \end{aligned}$$

Entonces $Y_1 < Y_2 < ... < Y_n$.

4.13.1. Ejercicios

Ejemplo 4.13 *Sean X, Y variables aleatorias tales que $X, Y \sim Geo(p)$, es decir $f_X(x) = pq^x$, para $x = 0, 1, \ldots$. Sean $U = XV = min\{X, Y\}$. Hallar la densidad conjunta de U y V*

$$f_X(x) = \begin{cases} pq^x & x = 0, 1, ... \\ 0 & e.o.c. \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} pq^y & y = 0, 1, ... \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
f_{u,v}(u,v) &= \mathbb{P}[U=u, V=v] = \mathbb{P}[X=u, min\{X,Y\}=v] = \mathbb{P}[X=u, X=v, Y>v] \\
&+ \mathbb{P}[X=u, Y=v, X>v] + \mathbb{P}[X=u, X=v, Y=v].
\end{aligned}
$$

Caso 1:$u=v$

$$
f_{u,v}(u,v) = \mathbb{P}[X=u, Y>v] + \mathbb{P}[X=u, Y=u] = \mathbb{P}[X=u]\,\mathbb{P}[Y \geqslant u].
$$

Recordemos que

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \sum_{v=0}^{x} p(1-p)^v = p\left[1+(1-p)+(1-p)^2+...+(1-p)^x\right] \\
&= p\left[\frac{1-(1-p)^{x+1}}{1-(1-p)}\right] = p\left[\frac{1-(1-p)^{x+1}}{p}\right] = 1-(1-p)^{x+1}.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
f_{u,v}(u,v) &= p(1-p)^u \sum_{y=u}^{\infty} p(1-p)^y = p^2(1-p)^u \sum_{y=u}^{\infty}(1-p)^y \\
&= p^2\left[(1-p)^u(1-p)^u + (1-p)^{u+1} + ...+\right] = p^2(1-p)^{2u}\left[1+(1-p)+...+\right] \\
&= p^2(1-p)^{2u}\frac{1}{1-(1-p)} = p(1-p)^{2u}.
\end{aligned}
$$

Caso 2: $u>v$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[X=u, Y=v] &= \mathbb{P}[X=u]\,\mathbb{P}[Y=v] = p(1-p)^u p(1-p)^v \\
&= p^2(1-p)^{u+v}
\end{aligned}
$$

$u>v, f_{u,v}(u,v)=0.$

Ejemplo 4.14 *Para* $f_{XY}(x,y) = \frac{1}{8}\left(y^2-x^2\right)e^{-y}$, *con* $-y \leq x \leq y$, $0<y<\infty$. *Hallar la densidad de* $Z = max\{X,Y\}$.
A saber

$$
F_z(z) = \mathbb{P}[Z \leq z] = \mathbb{P}[max\{X,Y\} \leq z] = \mathbb{P}[X \leq z, Y \leq z]
$$

Dado $y \geq 0 \Rightarrow z \geq 0$, $\mathbb{P}[X \leq 0 Y \leq 0] = 0$ *para* $z=0$. *Por lo tanto*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[X \leq 1, Y \leq 1] &= \mathbb{P}[Z \leq z, Y \leq z] = \int_0^z \int_{-y}^{y} \frac{1}{8}\left(y^2-x^2\right)e^{-y}\,dx\,dy \\
&= e^{-z}\left(-\frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{2}z^2 - z - 1\right) + 1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
f_z(z) &= e^{-z}\left(-\frac{3}{6}z^2 - z - 1\right) - e^{-z}\left(-\frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{2}z^2 - z - 1\right) \\
&= e^{-z}\left(-\frac{1}{2}z^2 - z - 1 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{2}z^2 + z + 1\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
f_z(z) = \begin{cases} \frac{1}{6}e^{-z}z^3 & z>0, \\ 0 & e.o.c. \end{cases}
$$

Ejemplo 4.15 *Sean* X_1, X_2, X_3 *m.a.* $U(0,1)$. *Hallar* $f_{Yj}(t)\, j=1,2,3$, Y_j *es la estadística de orden* j. *Entonces*

$$
f_{X_1X_2X_3}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} 1 & x_1,x_2,x_3 \in (0,1), \\ 0 & e.o.c. \end{cases}, \quad f_{Y_1Y_2Y_3}(y_1,y_2,y_3) = \begin{cases} 3! & 0<y_1<y_2<y_3<1, \\ 0 & e.o.c. \end{cases}
$$

Por lo tanto, calculando la marginal con respecto a Y_1

$$
\begin{aligned}
f_{Y_1}(y_1) &= \int_{y_1}^{y_3}\int_{y_1}^{1} 6dy_3dy_2 = 6\int_{y_1}^{1} y_2 \mid_{y_1}^{y_3} dy_3, 0 < y_1 < 1 \\
&= 6\int_{y_1}^{1}(y_3 - y_1)\,dy_3 = 6\left[\frac{y_3^2}{2} + y_1y_3\right]_{y_1}^{1} = 6\left[\frac{1}{2} + y_1 - \left[\frac{y_1^2}{2} + y_1^2\right]\right] \\
&= 6\left[\frac{1}{2} + y_1 - \frac{y_1^2}{2}\right] = 12\left[1 - \frac{y_1}{2} + y_1^2\right].
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
f_{Y_2}(y_2) = \int_{y_2}^{1}\int_{0}^{y_2} dy_1\, dy_3 = \begin{cases} 6y_2(1-y_2) & 0 < y_2 < 1, \\ 0 & e.o.c. \end{cases}
$$

4.14. Esperanza

Si (X,Y) es un vector aleatorio, la esperanza de $g(X,Y)$ es:

$$
E[g(Z,Y)] = \begin{cases} \int\int g(X,Y)\, f_{XY}(x,y)\,dxdy & \text{caso continuo,} \\ \sum\sum g(x,y)\, f_{XY}(x,y) & \text{caso discreto.} \end{cases}
$$

Si $g(X,Y) = X$

$$
E[X] = \int\int x f_{XY}(x,y)\,dydx = \int x\left(\int f_{XY}(x,y)\,dy\right)dx = x f_X(x)\,dx.
$$

Si X y Y son independientes

$$
E[h_1(X)\,h_2(Y)] = E[h_1(X)]\,E[h_2(X)]
$$

.

4.14.1. Ejercicios

Ejemplo 4.16 *Sea* X *v.a con densidad*

$$
f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = -2 \\ \frac{1}{2} & x = 3 \\ \frac{1}{6} & x = 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}
$$

Hallar:

a) $E[X]$
b) $E[2X+5]$
c) $E[X^2]$
d) $Var(X)$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= -2\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6}\right)\right) = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{6} = \frac{-4+9+1}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\
E[2X+5] &= 2[X] + 5 = 2 + 5 = 7 \\
E\left[X^2\right] &= \sum_x x^2 f_X(x) = (-2)^2\left(\frac{1}{3}\right) + (3)^2\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{4}{3} + \frac{9}{2} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{8+27+1}{6} = \frac{36}{6} = 6 \\
Var(X) &= E\left[X^2\right] + E^2(X) = 6 + 1 = 7
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.17 *Si* $X \sim Bin(n, Q)$ *y* $Q \sim Beta(4, 2)$. *Hallar* $E(X)$ $Var(X)$

$$\begin{aligned}
f_{X|Q}(x,q) &= (x^n)\, q^x (1-a)^{n-x}, x = 0,1,2,...\\
G &\sim Beta(4,2) \Rightarrow f_Q(a) = \frac{M(G)}{M(4)(2)} q^3 (1-a)\\
E(X) &= E(E(X|Q)) = E(nQ) = nE(Q) = n\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = n\frac{2}{3}\\
Var(X) &= Var(E(X|Q)) + E(Var(X|Q))\\
&= Var(nQ) + E(nQ(1-Q))\\
&= n^2 Var(Q) + n\left[E(Q) - E\left(Q^2\right)\right]\\
&= n^2\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}\right) + n\left[\frac{2}{3} - Var(Q) - E^2(Q)\right]\\
&= n^2\left(\frac{8}{(36)(7)}\right) + n\left[\frac{2}{3} - \frac{8}{(36)(7)} - \frac{4}{9}\right]\\
&= n^2\frac{2}{63} + n\left[\frac{2}{3} - \frac{2}{63} - \frac{4}{9}\right]\\
&= \frac{2}{63}n^2 + n\left[\frac{42-2-28}{63}\right]\\
&= \frac{2}{63}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.18 $X \sim U(1, T)$ *y* $f_T(t) = ct^2$, $1 \leq t \leq 3$. *Hallar* $E(X)$ $Var(X)$

$$f_{X|T}(x|T) = \begin{cases} \frac{1}{T-1} & 1 \leq x \leq t \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&f_T(t) = ct^2\\
1 = \int_1^3 ct^2\,dt = c\int_1^3 t^2\,dt = \left(\frac{t^3}{3}\right)_1^3 = c\left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right) = c\left(\frac{26}{3}\right)\\
&\therefore c = \frac{3}{26}
\end{aligned}$$

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{3}{26}t^2 & 1 \leq t \leq 3 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

4.15. Ejercicios de función generadora de momentos.

a) *Encontrar todos los momentos de una v.a. X si:*

a) $X \sim N(0, 1)$

b) $X \sim U(a, b)$

c) $x \sim Beta(a, b)$

d) $x \sim Gamma(\alpha, \lambda)$

Para a)

$$
\begin{aligned}
X &\sim N(0,1) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\} x \in \mathbb{R}\\
E[X^r] &= \frac{d^r}{dt^r} M_X(t)\, y = 0\Big|_{t=0}\\
M_X(t) &= E\left[e^{tX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}\right) dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{x^2}{2}}\, dx\\
tx - \frac{x^2}{2} &\Rightarrow -\frac{1}{2}\left(x^2 - 2tx\right) = -\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{t^2}{2}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{t^2}{2}}\, dx\\
&= \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}\, dt = e^{\frac{t^2}{2}}\\
N(t,1) &\\
M_X^{i}(t)\Big|_{t=0} &= e^{\frac{1}{2}t^2}(t) = 0\\
M_X^{ii}(t)\Big|_{t=0} &= e^{\frac{1}{2}t^2} + t^2 e^{\frac{1}{2}t^2}\Big|_{t=0}\\
M_X^{iii}(t)\Big|_{t=0} &= te^{\frac{1}{2}t^2} + t^3 e^{\frac{1}{2}e^2} + e^{\frac{1}{2}t^2}(2t)\Big|_{t=0} = 0\\
M_X^{iv}(t)\Big|_{t=0} &= t^2 e^{\frac{1}{2}t^2} + e^{\frac{1}{2}t^2} + t^4 e^{\frac{1}{2}t^2} + 3t^2 e^{\frac{1}{2}t^2} + 2t^2 e^{\frac{1}{2}t^2} + 2e^{\frac{1}{2}t^2}\Big|_{t=0}\\
&= 1 + 2 = 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[X^r] &= \int x^r f_X(x)\, dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\\
u &= x^{r-1} \Rightarrow \frac{du}{dx} = (r-1)\,x^{r-2} \Rightarrow du = (r-1)\,x^{r-2} dx\\
dv &= xe^{-\frac{-x^2}{2}} dx \Rightarrow v = -e^{-\frac{x^2}{2}}\\
&= x^{r-1} e^{\frac{x^2}{2}}\Big|_{t=0} + \int e^{\frac{x^2}{2}}(r-1)\,x^{r-2}\, dx\\
u &= x^{r-3} \Rightarrow du = (r-3)\,x^{r-4} dx\\
dv &= xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx \Rightarrow v = -e^{-\frac{1}{2}x^2}\\
&= -x^{r-3} e^{-\frac{1}{2}x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}(r-3)\,x^{r-4}\, dx\\
&= (r-1)(r-3)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{r-4}\, dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r &= 1 \\
e\left[X\right] &= 0 \\
r &= 2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(r-1\right)\int_{-\infty}^{\infty} x^{r-2}e^{\frac{1}{2}t^2}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1\right)\int_{-\infty}^{\infty} x^{2-2}e^{\frac{1}{2}t^2}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}t^2}\,dx = 1 \\
r &= 3 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(r-1\right)\left(r-3\right)\int_{-\infty}^{\infty} x^{r-4}e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(2\right)\left(3-3\right))\int_{-\infty}^{\infty} x^{r-4}e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = 0
\end{aligned}
$$

Para b)
$X \sim U\left(a,b\right)$

$$
f_X\left(x\right) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in \left(a,b\right) \\ 0 & e.o.c \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left[X^r\right] &= \int_a^{,b} x^r f_X\left(x\right)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^r\,dx \\
&= \frac{1}{b-a}\left[\frac{xr+1}{r+1}\right] = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}\right] \\
M_X\left(t\right) &= E\left[e^{tx}\right] = \int_a^b e^{tx}\frac{1}{b-a}\,dx \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{tx}\,dx = \frac{1}{b-a}\left(e^{tx}\right)_a^b \\
&= \frac{1}{b-a}e^{t(b-a)} \\
M_X^{'}|_{t=0} &= \frac{1}{b-a}e^{t(b-a)}\left(b-a\right) \\
&= e^{t(b-a)}
\end{aligned}
$$

Para c)

$X \sim Beta(a,b)$

$$
f_X\left(x\right) = \begin{cases} \frac{M(a+b)}{M(a)M(b)}x^{a-1}\left(1-x\right)^{b-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left[X^r\right] &= \int_0^1 x^r \frac{M\left(a+b\right)}{M\left(a\right)M\left(t\right)}x^{a-1}\left(1-x\right)^{b-1}\,dx \\
&= \frac{M\left(a+b\right)}{M\left(a\right)M\left(b\right)}\,\frac{M\left(r+a\right)M\left(b\right)}{r\left(a+b+r\right)}\int_0^1 \frac{M\left(a+r+b\right)}{M\left(r+a\right)r\left(b\right)}x^{r+a+1}\left(a-x\right)^{b-1}\,dx \\
&= \frac{M\left(a+b\right)M\left(r+a\right)}{r\left(a\right)M\left(a+b+r\right)}
\end{aligned}
$$

Para d)

$X \sim Gamma(\alpha,\lambda)$

$$
f_X\left(x\right) = \begin{cases} \frac{1}{M(\alpha)\lambda^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\lambda}} & x > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left[X^r\right] &= \int_0^\infty x^r \frac{1}{M(\alpha)\lambda^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\lambda}}\, dx \\
&= \frac{1}{M(\alpha)\lambda^\alpha} x^{r+\alpha-1} e^{-\frac{x}{\lambda}}\, dx \\
&= \frac{M(r+\alpha)\lambda^{r+\alpha}}{M(\alpha)\lambda^\alpha M(r+\alpha)\lambda^{r+\alpha}} \int_0^\infty x^{r+\alpha-1} e^{\frac{x}{\lambda}}\, dx \\
&= \frac{M(\alpha+\alpha)}{M(\alpha)\lambda^\alpha}
\end{aligned}
$$

$Gamma\,(r+\alpha,\lambda)$

b) *Sean* $X, Y \sim U_{1,2,\dots,m}$ *ind. Calcular* $E\left[|X-Y|\right]$

$$
f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} & x = 1\dots m \\ 0 & e.o.c \end{cases}
$$

$$
f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} & y = 1\dots m \\ 0 & e.o.c \end{cases}
$$

$$
f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{m^2} & x, y = 1\dots m \\ 0 & e.o.c \end{cases}
$$

$$
|X-Y| = \begin{cases} x-y & x>y \\ y-x & y>x \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
Z &= |X-Y| \\
f_Z(z) &= \mathbb{P}[Z=z] = \mathbb{P}[|X-Y|=z] = \mathbb{P}[X-Y=z] + \mathbb{P}[Y-X=z] \\
&= \mathbb{P}[X=Y+z] + \mathbb{P}[Y=z+X]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[X=Y+z] &= \sum_K \mathbb{P}[X=K+z]\,\mathbb{P}[Y=K] \\
&= \sum_{K=1}^{m-z} \mathbb{P}[X=K+z]\,\mathbb{P}[Y=K] \\
\mathbb{P}[Y=z+X] &= \sum_K \mathbb{P}[K+z]\,[X=K] \\
&= \sum_{K=1}^{m-z} \mathbb{P}[Y=K+z]\,\mathbb{P}[X=K]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}[X=Y+z] + \mathbb{P}[Y=X+z] \\
&= \sum_{K=1}^{m-z} \left[\mathbb{P}[X=K+z]\,\mathbb{P}[Y=K] + \mathbb{P}[X=K]\right] \\
&= \sum_{K=1}^{m-z} \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2}\right) = 2\sum_{K=1}^{m-z} \frac{1}{m^2} \\
&= \frac{2}{m^2} \sum_{K=1}^{m-z} = \frac{2}{m^2}(m-z-1+1) = \frac{2}{m^2}(m-z) = \frac{2(m-z)}{m^2}
\end{aligned}
$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2(m-z)}{m^2} & z = 1, ..., m-1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&= E[|X-Y|] = E[Z] = \sum_z z f_z(z)) \sum_z z \frac{2(m-z)}{m^2} \\
&= \frac{2}{m^2} \sum_{z=1}^{m-1} zm - z^2 = \frac{2}{m^2}\left[\left(m\left(\frac{m-1(m)}{2}\right)\right) - \sum_{z=1}^{m-1} z^2\right] \\
&= \frac{2}{m^2}\left[\frac{m^2(m-1)}{2} - \left(1+4+9+...+(m-1)^2\right)\right] \\
&= \frac{2}{m^2}\left[\frac{m^2(m-1)}{2} - \frac{(m-1)(m)(2(m-1)+1)}{6}\right] \\
&= \frac{2}{m^2}\left[\frac{m^2(m-1)}{2} - \frac{m(m-1)(2m-1)}{6}\right] \\
&= m-1\left[1 - \frac{m(2m-1)}{3}\right]
\end{aligned}$$

c) *$X_1 \sim Exp(2)$ y $X_2 \sim U(X_1+1, X_1+2)$. Hallar $E(X_2)$ y $Var(X_2)$*

$$\begin{aligned}
X_1 \sim Exp(2) \Rightarrow f_{X_1}(x_1) &= \begin{cases} 2e^{-2x_1} & x_{1>0} \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
X_{2|X_1} &\sim U(X_1+1, X_1+2) \\
\Rightarrow f_{X_2|X_1}(x_2|x_1) &= \begin{cases} 2e^{-2x_1} & x_{1>0} \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
f_{X_1X_2}(x_1,x_2) &= f_{X_2|X_1}(x_2|x_1) f_{X_1}(x_1) \\
&= \begin{cases} 2e^{-2x_1} & x_1+1 < x_2 < x_1+2, x_1 > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
x_2 = x_1 + 1 \\
(0,1)\,(-1,0) \\
x_2 = x_1 + 2 \\
(0,2)\,(-2,0)
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
f_{X_2}(x_2) &= \begin{cases} \int_0^{x_2-1} 2e^{-2x_1}\,dx_1 & 1 \leq x < 2 \\ \int_{x_2-2}^{x_2-1} 2e^{-2x_1}\,dx_1 & x \geq 2 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
f_{X_2}(x_2) &= \begin{cases} 1 - e^{-2(x_2-1)} & 1 \leq x < 2 \\ e^{-2(x_2-2)} - e^{-2(x_2-1)} & x > 2 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
E[X_2] &= \int_1^2 x_2\left(1 - e^{-2(x_2-1)}\right) dx_2 + \int_0^\infty x_2 e^{-2(x_2-2)} - e^{-2(x_2-1)}\,dx_2 = 2 \\
E\left[X_2^2\right] &= \int_1^2 x_2^2\left(1 - e^{-2(x_2-1)}\right) dx_2 + \int_0^\infty x_2^2 e^{-2(x_2-2)} - e^{-2(x_2-1)}\,dx_2 = \frac{13}{3} \\
Var(X_2) &= E\left[X_2^2\right] - E^2[X_2] = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

d) *$X_1, X_2, X_3, X_4 \sim U(0,1)$ Ind. Hallar $E(Y_4 - Y_1)$ donde Y_j es la estadística de orden j.*

$$
\begin{aligned}
X_1 \sim f_{X_1}(x_1) &= \begin{cases} 1 & 0 < x_1 < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
\Rightarrow f_{X_1 X_2 X_3 X_4}(x_1, X_2, X_3, X_4) &= \begin{cases} 1 & 0 < x_1 < 1\, 0 < x_2 < 1\, 0 < x_3 < 1\, 0 < x_4 < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
\Rightarrow f_{Y_1 Y_2 Y_3 Y_4}(y_1, y_2, y_3, y_4) &= \begin{cases} 4! & 0 < y_1 < 1\, 0 < y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
f_{Y_4 Y_1}(y_1, y_4) &= \int_{y_1}^{y_4} \int_{y_1}^{y_3} 4!\, dy_2\, dy_3 = 4! \int_{y_1}^{y_4} y_2 \Big|_{y_1}^{y_3} dy_3 \\
&= 4! \int_{y_1}^{y_4} y_3 - y_1\, dy_3 = 4! \left(\frac{y_3^2}{2} - y_1 y_3 \right)_{y_1}^{y_4} \\
&= 4! \left(\frac{y_4^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} - y_1 y_4 + y_1^2 \right) \\
&= 4! \left(\frac{y_4^2}{2} + \frac{y_1^2}{2} - y_1 y_4 \right) \\
&= \frac{4!}{2} \left(y_4^2 + y_1^2 - 2 y_1 y_4 \right) = 12 (y_4 - y_1)^2 \\
0 < y_1 < y_4 < 1 & \\
E[Y_4 - Y_1] &= \int_0^1 \int_0^{y_4} (Y_4 - Y_1) f_{Y_1 Y_4}(y_1, y_4)\, dy_1\, dy_4 \\
&= \int_0^1 \int_0^{y_4} (Y_4 - Y_1)\, 12 (y_4 - y_1)^2\, dy_1\, dy_4 \\
&= 12 \int_0^1 \int_0^{y_4} (y_4 - y_1)^3\, dy_1\, dy_4 \\
&= 12 \int_0^1 - \frac{(y_4 - y_1)^4}{4} \Big|_0^{y_4} dy_4 \\
&= 12 \int_0^1 - \frac{(y_4 - y_4)^4}{4} + \frac{(y_4 - 0)^4}{4}\, dy_4 \\
&= \frac{12}{4} \left(\frac{y_4^5}{5} \right)_0^1 = 3 \left(\frac{1}{5} \right) = \frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

e) *Sea*

$$
f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} C & x \geq 0\, y \geq 0\, x + y \geq 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}
$$

Hallar $Cov(X, Y)$.

$$\begin{aligned}
y &= 1-x\ (0,1)\ (1,0)\\
1 &= \int_0^1\int_0^{1-x} c\,dy\,dx = c\int_0^1 y\Big|_0^{1-x}\ dx = c\int_0^1 (1-x)\ dx\\
&= -c\frac{(1-x)^2}{2}\Big|_0^1 = -c\frac{(1-1)}{2}+c\frac{(1-0)^2}{2} = \frac{c}{2}\\
\therefore c &= 2\\
f_{X,Y}(x,y) &= \begin{cases} 2 & x\geq 0\, y\geq 0\, x+y\geq 1\\ 0 & e.o.c\end{cases}\\
Cov(X,Y) &= E(XY)-E(X)E(Y)\\
f_X(x) &= \int_0^{1-x} 2\,dy = 2y|_0^{1-x} = 2(1-x)\\
0 &< x<1\\
f_Y(y) &= \int_0^{1-y} 2\,dx = 2(1-y)\\
0 &< y<1\\
E(X) &= \int_0^1 2x(1-x)\ dx = x^2-\frac{2x^3}{3}\Big|_0^1\\
&= 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\\
E[Y] &= \int_0^1 2y(1-y)\ dy = 2\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)_0^1\\
&= 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\\
E[XY] &= \int_0^1\int_0^{1-x} 2xy\,dy\,dx = 2\int_0^1 x\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x}\ dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 x(1-x)^2\ dx = \int_0^1 x-2x^2+x^3\,dx = \frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{4}\Big|_0^1\\
&= \frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{6-8+3}{12}=\frac{1}{12}\\
Cov(X,Y) &= \frac{1}{12}-\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{12}-\frac{1}{9}=\frac{3-4}{36}=-\frac{1}{36}\\
p(X,Y) &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(X)}}=\frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{\left(\frac{1}{18}\right)\left(\frac{1}{18}\right)}}=-\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{18}}=-\frac{18}{36}=-\frac{1}{2}\\
Var(X) &= E\left(X^2\right)-E^2(X)=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{9-6}{54}=\frac{3}{54}=\frac{1}{18}\\
E\left[X^2\right] &= \int_0^1 2x^2(1-x)\ dx = 2\ \frac{x^3}{3}-\frac{2x^4}{4}\Big|_0^1\\
&= \frac{2}{3}-\frac{2}{4}=\frac{8-6}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

f) *Si* $X\sim N(0,1)$.

$$\begin{aligned}
Cov\left(X^2-1,X+\frac{1}{2}\right) &= E\left[\left(X^2-1\right)\left(X+\frac{1}{2}\right)\right]-E\left[X^2-1\right]E\left[X+\frac{1}{2}\right]\\
&= E\left[X^3+\frac{1}{2}X^2-X-\frac{1}{2}\right]-\left[E\left[X^2\right]-1\right]\left[E[X]+\frac{1}{2}\right]\\
&= E\left[X^3\right]+\frac{1}{2}E\left[X^2\right]-E[X]-\frac{1}{2}-E\left[X^2\right]E[X]\\
&- \frac{1}{2}E\left[X^2\right]+E[X]+\frac{1}{2}\\
&= E\left[X^3\right]-E\left[X^2\right]E[X]=0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Var\left(X^2-1\right) &= E\left[\left(X^2-1\right)^2\right]-E^2\left[X^2-1\right] \\
&= E\left[X^4-2X^2+1\right]-\left(E\left[X^2\right]-1\right)^2 \\
&= E\left[X^4\right]-2E\left[X^2\right]+1-\left(E^2\left[X^2\right]-2E\left[X^2\right]+1\right) \\
&= E\left[X^4\right]-E^2\left[X^2\right]=3-1=2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var\left(X+\frac{1}{2}\right) &= E\left[\left(X+\frac{1}{2}\right)^2\right]-\left(E\left[X+\frac{1}{2}\right]\right)^2 \\
&= E\left[X^2+X+\frac{1}{4}\right]-\left(E\left[X\right]+\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= E\left[X^2\right]+E\left[X\right]+\frac{1}{4}-\left(E^2\left[X\right]+E\left[X\right]+\frac{1}{4}\right) \\
&= E\left[X^2\right]-E^2\left[X\right]=1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X\sim N\left(0,1\right) &\Rightarrow f_X\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\} \\
M_X\left(t\right) &= E\left[e^{xt}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{xt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{xt-\frac{x^2}{2}}\,dx \\
Nota\ -\frac{x^2}{2}+xt &= \frac{-1}{2}\left(x^2-2xt\right)=-\frac{1}{2}\left(x-t\right)^2+\frac{t^2}{2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2+\frac{t^2}{2}}\,dx=e^{\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}\,dx \\
&= e^{\frac{t^2}{2}}
\end{aligned}
$$

g) *Hallar el número de lanzamientos necesarios para obtener al menos 1 vez c/cara de un lado.*

$$
\begin{aligned}
i &= \{1,2,3,...,6\} \\
P_i &\equiv \textit{probabilidad de que caiga la cara } i \\
X_i &\sim Geo\left(p_i\right) \\
E\left[X_i\right] &= \frac{1}{i_i} \\
f_X\left(x\right) &= p\left(1-p\right)^{x-1}\ ,x=1... \\
X &= X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6 \\
E\left[X\right]?
\end{aligned}
$$

$X_1 \equiv$ *No. de lanzamientos para obtener la cara 1 (La cara que salga al tirar por primera vez un dado).* $p_1=1\Rightarrow X_1\sim Geo\left(1\right)\Rightarrow E\left[X_1\right]=1$

$X_2 \equiv$ *No. de lanzamientos necesarios para obtener la cara 2. (La cara 2 es la primera cara diferente a la cara 1, como la cara 1 ya salió por primera vez, entonces sólo interesa que salga cualquiera de las 5 restantes).*

$p_2=\frac{5}{6}\Rightarrow X_2\sim Geo\left(\frac{5}{6}\right)\Rightarrow E\left[X_2\right]=\frac{1}{\frac{5}{6}}=\frac{6}{5}$

Razonamiento análogico

$$
\begin{aligned}
p_3=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} &\quad X_3\sim Geo\left(\tfrac{2}{3}\right) \quad E\left[X_3\right]=\frac{3}{2} \\
p_4=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} &\quad X_4\sim Geo\left(\tfrac{1}{2}\right) \quad E\left[X_4\right]=2 \\
p_5=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} &\quad X_5\sim Geo\left(\tfrac{1}{3}\right) \quad E\left[X_5\right]=3 \\
p_6=\frac{1}{6} &\quad X_6\sim Geo\left(\tfrac{1}{6}\right) \quad E\left[X_6\right]=6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore E[X] &= 1+\frac{6}{5}+\frac{3}{2}+2+3+6=12+\frac{12+15}{10}\\
&= \frac{120+12+15}{10}=\frac{147}{10}=14{,}7
\end{aligned}
$$

h) *Si* $X \sim Geo\left(\frac{5}{8}\right)$ $f_X(x)=\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^x$, $x=0,1,....$
Calcular $E[2X|Z\leq 3,x]$ *par.*

$$
\begin{aligned}
E[2X|X\geq par] &= \sum_{x=0}^{\infty} 2x f_{X|D}(x|d)\\
\mathbb{P}[X=x|X\geq 3, Xpar] &= \frac{\mathbb{P}[X=x, X\geq 3, Xpar]}{\mathbb{P}[X\geq 3, Xpar]}\\
\mathbb{P}[X=x, X\geq 3, Xpar] &= \mathbb{P}[X=xpar\ mayor\ ó\ igual\ a\ 4]\\
&= \left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^x, x=4,6,8,...
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[X03, X\geq 3, Xpar] &= 0\\
\mathbb{P}[X=4, X\geq 3, Xpar] &= \mathbb{P}[X=4]\\
\mathbb{P}[X\geq 3, Xpar] &= \mathbb{P}[X=4]+\mathbb{P}[X=6]+\ldots\\
&= \left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^4+\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^6+\ldots+\\
&= \left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^4\left[1+\left(\frac{3}{8}\right)^2+\left(\frac{3}{8}\right)^4+\ldots\right]\\
&= \frac{5}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^4\left[\frac{1}{1-\left(\frac{3}{8}\right)^2}\right]\\
&= \frac{5}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^4\left(\frac{1}{\frac{64-9}{64}}\right)=\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^4\left(\frac{64}{55}\right)\\
&= \frac{81}{5632}\\
\mathbb{P}[X=x \mid X\geq 3, Xpar] &= \begin{cases} \frac{\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^\alpha}{\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^4\left(\frac{64}{55}\right)}=\frac{3520}{81}\left(\frac{3}{8}\right)^x & x=4,6,8,\ldots\\ 0 & e.o.c \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{x=4}^{\infty}\left(\frac{3520}{81}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^x &= \frac{3520}{81}\left[\left(\frac{3}{8}\right)^4+\left(\frac{3}{8}\right)^6+\ldots\right]\\
&= \frac{3520}{81}\left(\frac{3}{8}\right)^4\left[1+\left(\frac{3}{8}\right)^2+\left(\frac{3}{8}\right)^4+\ldots\right]\\
&= \frac{55}{64}\left[\frac{1}{1-\frac{9}{64}}\right]=1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \mathbb{P}[2X \mid Z\geq 3, Xpar] &= \sum_{x=4}^{\infty} 2x\frac{3520}{81}\left(\frac{3}{8}\right)^x\\
&= 2\left(\frac{3520}{81}\right)\sum_{x=4}^{\infty} x\left(\frac{3}{8}\right)^x\\
&= \frac{7040}{81}\left[4\left(\frac{3}{8}\right)^4+6\left(\frac{3}{8}\right)^6+\ldots\right]\\
&= \frac{14080}{81}\left[\frac{\frac{9}{64}}{\left(1-\frac{9}{64}\right)^2}-\frac{9}{64}\right]=\frac{14080}{81}\left[\frac{9}{64}\left(\frac{4086}{3025}\right)-\frac{9}{64}\right]\\
&= \left(\frac{14080}{81}\right)\left(\frac{9}{64}\right)\left[\frac{4096}{3025}-1\right]=\frac{14080}{81}\left(\frac{9}{64}\right)\left(\frac{1071}{3025}\right)=\frac{476}{55}
\end{aligned}
$$

i*) Sean X, Y Vra. con densidad f_{XY} constante en el triángulo $(0,0),(2,0),(1,2)$. Hallar $E[Y \mid X]$*

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} & 0 \le y \le 2x \mid 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{-2x+4} & 0 \le y \le -2x+4 \mid 1 \le x \le 2 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

$$E[Y \mid X] = \begin{cases} \int_0^{2x} y \frac{1}{2x}\, dy = x & 0 \le x \le 1 \\ \int y \frac{1}{-2x+4} = -x+2 & 1 \le x \le 2 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ -x+2 & 1 \le x < 2 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

4.16. Ejercicios para Evaluación

a*) Sea $f_{X,Y}(x,y) = c \mid x \mid$. Si $0 < y < 1- \mid x \mid \; -1 < x < 1$*

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-|x|} c \mid x \mid \, dy\, dx = c \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-|x|} \mid x \mid \, dy\, dx \\
&= c \left[\int_{-1}^{0} \int_{0}^{1+x} -x\, dy\, dx + \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x} x\, dy\, dx \right] \\
&= c \left[\int_{-1}^{0} -xy \mid_0^{1+x} + \int_{0}^{1} xy \mid_0^{1-x} \, dx \right] \\
&= c \left[\int_{-1}^{0} -x(1+x)\, dx + \int_{0}^{1} x(1-x)\, dx \right] \\
&= c \left[\int_{-1}^{0} -x - x^2\, dx + \int_{0}^{1} x - x^2\, dx \right] \\
&= c \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \mid_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \mid_0^1 \right) \\
&= c \left(+\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = c \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \left(\frac{3-2}{3} \right) = c \left(\frac{1}{3} \right) \\
\therefore c &= 3 \\
f_{XY}(x,y) &= \begin{cases} 3 \mid x \mid & 0 < y < 1- \mid x \mid, -1 < x < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \\
f_Y(y) &= \int 3 \mid x \mid \, dx = -3 \int_{y-1}^{0} x\, dx + 3 \int_{0}^{1-y} x\, dx \\
&= -3 \left(\frac{x^2}{2} \right)_{y-1}^{0} + 3 \left(\frac{x^2}{2} \right)_{0}^{1-y} = 3 \frac{(y-1)^2}{2} + 3 \frac{(1-y)^2}{2} \\
&= \frac{3}{2} \left((y-1)^2 + (1-y)^2 \right) \\
f_Y\left(\frac{1}{2} \right) &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4} \\
f_{X|Y}(x \mid 1/2) &= \begin{cases} \frac{f_{XY}\left(x, \frac{1}{2}\right)}{f_Y\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3|x|}{\frac{3}{4}} & \\ 0 & e.o.c \end{cases}
\end{aligned}$$

b) *Hallar* $f_{XY}(x,y)$ *con los datos del problema anterior.*

c) *Calcular* $\mathbb{P}[Y >\mid X \mid]$ *con los datos del problema 1.*

$$
\begin{aligned}
y = \mid x \mid &= \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \\
\mathbb{P}[Y >\mid X \mid] &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \int_{-x}^{1+x} 3 \mid x \mid \, dy\, dx \\
&= \int_{0}^{\frac{1}{2}} \int_{x}^{1-x} 3 \mid x \mid \, dy\, dx \\
&= \int_{\frac{-1}{2}}^{0} \int_{-x}^{1+x} -3x\, dx\, dy + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \int_{x}^{1-x} 3x\, dx\, dy \\
&= -3 \int_{\frac{-1}{2}}^{0} \int_{-x}^{1+x} x\, dx\, dy + 3 \int_{0}^{\frac{1}{2}} \int_{x}^{1-x} x\, dx\, dy \\
&= -3 \int_{\frac{-1}{2}}^{0} xy \mid_{x}^{1+x} \, dx + 3 \int_{0}^{\frac{1}{2}} xy \mid_{x}^{1-x} \, dx \\
&= -3 \int_{\frac{-1}{2}}^{0} x(1+x+x)\, dx + 3 \int_{0}^{\frac{1}{2}} x(1-x-x)\, dx \\
&= -3 \int_{\frac{-1}{2}}^{0} x + 2x^2\, dx + 3 \int_{0}^{\frac{1}{2}} x - 2x^2\, dx \\
&= -3 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 \right)_{\frac{-1}{2}}^{0} + 3 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 \right)_{0}^{\frac{1}{2}} \\
&= -3 \left(\frac{\frac{1}{4}}{2} + \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} \right) + 3 \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} \right) \\
&= -3 \left(-\frac{1}{8} + \frac{\frac{2}{8}}{\frac{3}{1}} \right) + +3 \left(-\frac{\frac{1}{4}}{2} - \frac{\frac{2}{8}}{\frac{3}{1}} \right) \\
&= -3 \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{12} \right) + 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \right) \\
&= \frac{3}{24} + \frac{2}{12} \\
&= \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

d) $X \sim U_{\{1\ldots N\}}, N \sim U_{\{1\ldots m\}}$. *Calcular* $\mathbb{P}[\mid X - N \mid]$

$$
\begin{aligned}
f_{X/N} &= \begin{cases} \frac{1}{N} & x = 1 \ldots N \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
f_{N(n)} &= \begin{cases} \frac{1}{m} & N = 1 \ldots m \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
f_{X/N}(x/n) f_N(n) = f_{XN}(x,n) &= \begin{cases} \left(\frac{1}{N}\right)\left(\frac{1}{m}\right) & x = 1 \ldots N, N = 1 \ldots m \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
\mathbb{P}[X - N \leq 1] &= \mathbb{P}[-1 \leq X - N \leq 1] = \mathbb{P}[X - N \leq 1] - \mathbb{P}[X - N \leq -1] \\
\mathbb{P}[X - N \leq 1] &= \mathbb{P}[X \leq 1 + N] \\
&= \sum_{k=0} \mathbb{P}[X \leq 1 + k \mid N = k] \mathbb{P}[X \leq 1 + k \mid N = k] \mathbb{P}[N = k] \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}[X \leq 1 + k, N = k] \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{1+k} \mathbb{P}[X = j, N = k] \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{1+k} \frac{1}{N} \frac{1}{m} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{N} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{1+k} 1 = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{N} \frac{1}{m} (k+1) \\
&= \frac{1}{N} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} (k+1) = \frac{1}{Nm} \left[\sum_{k=1}^{m-1} k + \sum_{k=1}^{m-1} 1 \right] \\
&= \frac{1}{Nm} \left[\frac{(m-1)m}{2} + (m-1) \right] = \frac{1}{Nm}(m-1)\left[\frac{m}{2} + 1\right] \\
&= \frac{1}{Nm}(m-1)\left[\frac{m+2}{2}\right] = \frac{(m-1)(m+2)}{2Nm}
\end{aligned}
$$

e) $X \sim U(0,1)$. *Hallar la densidad de* $Y = -\ln\left(\frac{X}{X-1}\right)$

$$
X \sim U(0,1) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
X < X + 1 &\Rightarrow \frac{X}{X+1} < 1 \\
0 &< \frac{X}{X+1} < 1 \\
\ln(0) &> \ln\left(\frac{X}{X+1}\right) > \ln(1) \\
-\infty &< \ln\left(\frac{X}{X+1}\right) < 0 \\
0 &< -\ln\left(\frac{X}{X+1}\right) < \infty \\
0 &< Y < \infty
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{\partial}{\partial y} F_Y(y) \\
F_Y(y) &= \mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}\left[-\ln\left(\frac{X}{X-1}\right) \leq y\right] = \mathbb{P}\left[\ln\left(\frac{X}{X-1}\right) \geq -y\right] \\
&= \mathbb{P}\left[\frac{X}{X-1} \geq e^{-y}\right] = \mathbb{P}\left[X \geq e^{-y}(X+1)\right] = \mathbb{P}\left[X \geq Xe^{-y} + e^{-y}\right] \\
&= \mathbb{P}\left[X - Xe^{-y} \geq e^{-y}\right] = \mathbb{P}\left[X\left(1 - e^{-y}\right) \geq e^{-y}\right] \\
&= \mathbb{P}\left[-X\left(e^{-y} - 1\right) \geq e^{-y}\right] = \mathbb{P}\left[\frac{-X \geq e^{-y}}{e^{-y} - 1}\right] \\
&= \mathbb{P}\left[X \leq -\frac{e^{-y}}{e^{-y} - 1}\right] = \mathbb{P}\left[X \leq \frac{e^{-y}}{1 - e^{-y}}\right] = F_X\left(\frac{e^{-y}}{1 - e^{-y}}\right) \\
f_Y(y) &= f_X\left(\frac{e^{-y}}{1 - e^{-y}}\right) \\
&= \frac{\left(1 - e^{-y}\right)\left(e^{-y}\right)(-1) - e^{-y}\left(-e^{-y}\right)(-1)}{\left(1 - e^{-y}\right)^2} \\
&= \frac{-e^{-y}\left(1 - e^{-y}\right) - e^{-2y}}{\left(1 - e^{-y}\right)^2} = \frac{e^{-y} + e^{-2y} - e^{-2y}}{\left(1 - e^{-y}\right)^2} \\
&= \frac{e^{-y}}{\left(1 - e^{-y}\right)^2} \\
0 &< y < \infty \\
-\infty &< y < 0 \\
0 &< e^{-y} < 1 \\
-1 &< -e^{-y} < 0 \\
0 &< 1 - e^{-y} < 1 \\
0 &< \left(1 - e^{-y}\right)^2 < 1 \\
f_Y(y) &= \begin{cases} \frac{e^{-y}}{\left(1 - e^{-y}\right)^2} & \\ 0 & e.o.c \end{cases}
\end{aligned}$$

f) *Sea* $f_{XY}(x, y) = cx, 0 < x < y < 1$. *Hallar la densidad de* $T = \frac{Y}{X}$

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_0^1 \int_x^1 cx\, dy\, dx = c\int_0^1 xy \mid_x^1\ dx \\
&= c\int_0^1 x\left(1-x\right)\, dx = c\int_0^1 x - x^2\, dx \\
&= c\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)_0^1 = c\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = c\left(\frac{3-2}{6}\right) \\
&= c\left(\frac{1}{6}\right) \\
\therefore c &= 6 \\
F_T\left(t\right) &= \mathbb{P}\left[T \leq t\right] = \mathbb{P}\left[Y \leq tX\right], 0 < t < 1 \\
&= \int_0^{\frac{1}{t}} \int_x^{tx} 6x\, dy\, dx + \int_{\frac{1}{t}}^1 \int_x^1 6x\, dy\, dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{t}} 6xy \mid_x^{tx}\ dx + \int_{\frac{1}{t}}^1 6xy \mid_x^1\ dx = \int_0^{\frac{1}{t}} 6x\left(tx - x\right)\, dx \\
t\int_{\frac{1}{t}}^1 6x\left(1-x\right)\, dx &= \int_0^{\frac{1}{t}} 6tx^2 - \frac{6x^2}{2}\, dx + \int_{\frac{1}{t}}^1 6x - \frac{6x^2}{2}\, dx \\
&= \frac{6tx^3}{3} \mid_0^{\frac{1}{t}} - \frac{6x^3}{6} \mid_0^{\frac{1}{t}} + \frac{6x^2}{2} \mid_{\frac{1}{t}}^1 - \frac{6x^3}{6} \mid_{\frac{1}{t}}^1 \\
&= 2t\left(\frac{1}{t}\right)^3 - \left(\frac{1}{t}\right)^3 + 3\left(1\right)^2 - 3\left(\frac{1}{t}\right)^2 - \left(1\right)^3 + \left(\frac{1}{t}\right)^3 \\
&= \frac{2}{t^3} - \frac{1}{t^3} + 3 - 3\left(\frac{1}{t^2}\right) - 1 + \frac{1}{t^3} = -\frac{1}{t^2} + 2 \\
F_T\left(t\right) &= \begin{cases} -t^{-2} + 2 & t \in \left(0,1\right) \\ 0 & e.o.c \end{cases}
\end{aligned}
$$

g) *$X, Y \sim U\left(0,1\right)$ Ind. Hallar $f_{u,v}\left(u,v\right)$ si $U = X, V = X + Y$*

$$
\begin{aligned}
J &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \mid 1 \mid = 1 \\
f_{XY}\left(x,y\right) &= \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
f_{u,v}\left(u,v\right) &= \mid J \mid f_{XY}\left(x,y\right) \\
&= 1 * 1 = 1 \\
f_{uv}\left(u,v\right) &= \begin{cases} 1 & Si 0 < u < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}
\end{aligned}
$$

h) *Con los datos del ejercicio 4. Calcular $E\left(X\right)$ y $Var\left(X\right)$*

$$
\begin{aligned}
X &\sim U_{\{1,\ldots N\}}\, y\, Y \sim U_{\{1,\ldots m\}} \textit{ Con } m \textit{ par}\\
f_{X\mathbb{N}} &= \begin{cases} \frac{1}{N} & x = 1,\ldots N\\ 0 & e.o.c \end{cases}\\
f_Y(y) &= \begin{cases} \frac{1}{m} & y = 1,\ldots m\\ 0 & e.o.c \end{cases}\\
E(X) &= \sum_{x=1}^{N} X\frac{1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} X = \frac{1}{N}(1+2+\ldots+N)\\
&= \frac{1}{N}\frac{(N(N+1))}{2} = \frac{N+1}{2}\\
E\left(X^2\right) &= \sum_{x=1}^{N} x^2\frac{1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} x^2 = \frac{1}{N}\left(1^2+2^2+\ldots+N^2\right)\\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\right) = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}\\
Var(X) &= E\left(X^2\right) - E^2(X) = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4}\\
&= \frac{2(N+1)(2N+1) - 3(N+1)^2}{12}\\
E(X) &= E(E(X \mid N)) = E\left(\frac{N+1}{2}\right) = \frac{1}{2}E(N) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{m+1}{2}\right) + \frac{1}{2}\\
&= \frac{m+1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{m+1+2}{4} = \frac{m+3}{4}\\
Var(X) &= E(Var(X \mid N)) + var(E(X \mid N))\\
&= E\left(\frac{2(N+1)(2N+1) - 3(N+1)^2}{12}\right) + Var\left(\frac{N+1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

4.17. Ejercicios para Tarea

a) *Dar un ejemplo de v.a discretas tales que $Cov(X,Y) = 0$ pero que no sean ind.*

$$
\begin{aligned}
f_{XY}(x,y) &= \begin{cases} \frac{1}{13} & x,y \in D\\ 0 & e.o.c \end{cases}\\
f_Y(y) = f_X(x) &= \begin{cases} \frac{1}{13} & x = -2\\ \frac{3}{13} & x = -1\\ \frac{5}{13} & x = 0\\ \frac{3}{13} & x = 1\\ \frac{1}{13} & x = 2\\ 0 & e.o.c \end{cases}\\
E[X] &= (-2)\left(\frac{1}{13}\right) + (-1)\left(\frac{3}{13}\right) + (0)\left(\frac{3}{13}\right) + (1)\left(\frac{3}{13}\right) + (2)\left(\frac{2}{13}\right)\\
&= 0\\
&= E[Y]\\
E[XY] &= \sum_y\sum_x xy\frac{1}{13} = \left(\frac{1}{13}\right)\sum_y\sum_x xy\\
&= (-2)(-2) + (-2)(-1) + (-2)(0) + (-2)(2) + (-1)(-2)\\
&+ (-1)(-1) + \ldots + (-1)(2) + 0 + (1)(-2)(1)(-1)\\
&+ (1)(0) + (1)(1) + (1)(2) + (2)(-2) + (2)(-1) + \ldots + (2)(2)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

b) *Hallar todos los momentos de X si:*

a) $X \sim N(0,1)$

$$\begin{aligned} M_N(t) &= e^{\frac{t^2}{2}} \\ M_X^{'}(0) &= te^{\frac{t^2}{2}} = 0 \\ M_X^{''}(0) &= t^2e^{\frac{t^2}{2}} + e^{\frac{t^2}{2}} = 1 \end{aligned}$$

b) $X \sim U(a,b)$

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \int_a^b x^r \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^r\,dx \\ &= \frac{1}{b-a}\frac{x^{r+1}}{r+1}\,|_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}\right) \\ &= \frac{1}{(r+1)(b-a)}\left(b^{r+1} - a^{r+1}\right) \\ r &= 1 \\ &= \frac{1}{2(b-a)}\left(b^2 - a^2\right) = \frac{1}{2}\frac{(b-a)(b+a)}{(b-a)} = \frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

c) $X \sim Gamma(2,1)$

$$\begin{aligned} E[X^r] &= \frac{M(\alpha+r)}{\lambda^r M(r)} \\ r &= 1 \\ \frac{M(2+1)}{2^1 M(1)} &= M(3) = 2 \\ r &= 2 \\ \frac{M(2+2)}{1^2 M(2)}) &= M(4) = 3! = 6 \end{aligned}$$

c) *A una fiesta llegan 20 pares de gemelos, se forman equipos de 2 personas al azar. Hallar el número promedio de equipos formados por gemelos.*

$$\begin{aligned} X_i &= \begin{cases} 1 & \textit{Si la pareja i es de Gemelos}, i = 1..,20 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\ X &= X_i + \ldots + X_{20} = \textit{Número de parejas formadas por gemelos} \\ E(X) &= \sum_{i=1}^{20} E(X_i) = \sum_{i=1}^{20} \mathbb{P}[X_i = 1] = 20\mathbb{P}[X_i = 1] \\ \mathbb{P}[X_1 = 1] &= \mathbb{P}[\textit{Primer pareja sea de gemelos}] = \frac{20\binom{2}{2}\binom{38}{0}}{\binom{40}{2}} = \frac{1}{39} \\ \mathbb{P}[X_2 = 1] &= \mathbb{P}[\textit{Segunda pareja sea de gemelos}] = \mathbb{P}[\textit{2da}\ldots \mid \textit{1ra. Fue}\,]\,\mathbb{P}[\textit{2da. Fue} \mid \textit{1ra. No fue}]\,\mathbb{P}[\textit{1ra. no fue}] \\ &= \frac{19\binom{2}{2}\binom{36}{0}}{\binom{38}{2}}\left(\frac{1}{39}\right) + \frac{18\binom{2}{2}\binom{34}{2}}{\binom{38}{2}} = \frac{1}{3739} + \frac{36}{3739} = \frac{1}{39} \end{aligned}$$

d) *Hallar el tercer momento factorial de X si:*

a) $X \sim Poisson\,(1)$

$$
\begin{aligned}
f_x\,(2) &= \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x = 0, 1, \ldots \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
E\,[X\,(X-1)\,(X-2)] &= \sum_{x=0}^{\infty} x\,(x-1)\,(x-2)\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-3)!} = \sum_{x=3}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-3)!} \\
&= \lambda^3 \sum_{x=3}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-3}}{(x-3)!} \\
y &= x - 3 \\
&\therefore \quad E\,[X\,(X-1)\,(X-2)] = \lambda^3
\end{aligned}
$$

b) $X \sim Bin\,(n, p)$

$$
\begin{aligned}
f_X\,(x) &= \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x\,(1-p)^{n-x}\,, x = 0, 1, 2.\ldots \\
E\,[X\,(X-1)\,(X-2)] &= \sum_{x=0}^{\infty} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x\,(1-p)^{n-x}\,x\,(x-1)\,(x-2) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x\,(x-1)\,(x-2)\,\frac{n!}{(n-x)!x!} p^x\,(1-p)^{n-x} \\
&= \frac{n!}{(n-x)!\,(x-3)!} p^x\,(1-p)^{n-x} \\
&= n\,(n-1)\,(n-2) \sum_{x=3}^{\infty} \frac{(n-3)!}{(n-x)!\,(x-3)!} p^x\,(1-p)^{n-x}
\end{aligned}
$$

e) *Si $E\,[X]$ existe mostrar que $E\,[X] = \int_0^{\infty} (1 - F_X\,(x))\;dx - \int_{-\infty}^{0} F_X\,(x)\;dx$*

$$
\begin{aligned}
F_X\,(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X\,(t)\;dt \Rightarrow 1 - F_X\,(x) = 1 - \int_{-\infty}^{x} F_X\,(t)\;dt \\
&= \int_{x}^{\infty} f_X\,(t)\;dt \\
E\,[X] &= \int_0^{\infty} \left(1 - \int_{-\infty}^{x} f_X\,(t)\;dt\right)\,dx - \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{x} f_X\,(t)\;dt \\
&= \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} f_X\,(t)\;dt\,dx - \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{x} f_X\,(t)\;dt\,dx \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{t} f_X\,(t)\;dx\,dt - \int_{-\infty}^{0} \int_{t}^{0} f_X\,(t)\;dx\,dt \\
&= \int_0^{\infty} f_X\,(t) \int_0^{t}\;dx\,dt - \int_{-\infty}^{0} f_X\,(t) \int_{t}^{0}\;dx\,dt \\
&= \int_0^{\infty} f_X\,(t)\,t\,dt - \int_{-\infty}^{0} f_X\,(t)\,(-t)\;dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} t f_X\,(t)\;dt = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X\,(x)\;dx
\end{aligned}
$$

f) *Hallar $E\left(X^2Y\right)$ si:*

a) $X, Y \sim U_{\{1\ldots N\}}$ *Ind.*

$$
\begin{aligned}
f_X(X) &= \begin{cases} \frac{1}{N} & x = 1 \dots N \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
f_Y(y) &= \begin{cases} \frac{1}{N} & y = 1 \dots N \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
f_{XY}(x,y) &= f_X(x) f_Y(y) \begin{cases} \frac{1}{N^2} & x, y \in \{1 \dots N\} \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
E\left(X^2 Y\right) &= \sum_x \sum_y x^2 y \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N^2} \sum_{x=1}^{N} x^2 \sum_{y=1}^{N} y \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{x=1}^{N} x^2 \left(\frac{N(N+1)}{2} \right) = \frac{(N+1)}{2N} \sum_{x=1}^{N} x^2 \\
&= \frac{N+1}{2N} \left[1 + 2^2 + 3^2 + \dots + N^2 \right]
\end{aligned}
$$

b) *$X, Y \sim U_{(0,1)}$ ind.*

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
f_Y(y) &= \begin{cases} 1 & 0 < y < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
f_{XY}(x,y) &= f_X(x) f_Y(y) \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
E\left(X^2 Y\right) &= \int_0^1 \int_0^1 x^2 y \, dx \, dy = \int_0^1 y \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 dy \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 y \, dy = \frac{1}{6} \left(y^2 \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

g) *Una Urna tiene 2 bolas negras y 3 rojas. Se extraen bolas sucesivamente sin reemplazo. Sean X = Número de extraccoines donde apareció la primera roja. Y = Número de extracciones donde apareció la primera negra. Hallar $p(X,Y)$*

$$
\begin{aligned}
X &= \text{Número de extracciones donde apareció la Primer bola roja.} = \{1,2,3\} \\
Y &= \text{Número de extracciones donde apareció la Primer bola negra.} = \{1,2,3,4\} \\
P[X = 2, Y = 1] &= \left(\frac{2}{5} \right) \left(\frac{3}{4} \right)
\end{aligned}
$$

h) ***a)*** *$X, Y \sim U(0,3)$ Ind. Hallar $E(X \mid X + Y > 4)$*

$$
\begin{aligned}
y &= 4 - x, (0,4), (4,0) \\
3 &= 4 - x \Rightarrow x = 4 - 3 \Rightarrow x = 1 \\
f_{XY}(x,y) &= \begin{cases} \frac{1}{9} & 0 < x < 3, 0 < x < 3 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
E[X \mid X + Y > 4] &= \int x f_{X|D}(x \mid D) \, dx \\
f_{X|D}(x \mid D) &= \frac{\mathbb{P}[X \leq x, X + Y > 4]}{\mathbb{P}[X + Y > 4]} \\
\mathbb{P}[X \leq x, X + Y > 4] &= \begin{cases} \int_1^x \int_{4-t}^3 \frac{1}{9} \, dy \, dt & 1 < x < 3 \\ \int_1^3 \int_{4-x}^3 \frac{1}{9} \, dy \, dx & x > 3 \\ 0 & x < 1 \end{cases} \\
\mathbb{P}[X + Y > 4] &= \frac{1}{9} \, dy \, dx
\end{aligned}
$$

b) *$X, Y \sim Geo(p)$ ind. $f_X(x) = pq^{x-1}$, x $1, 2, \ldots$.*
Hallar $E(X \mid Y = X + 2)$

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \begin{cases} pq^{x-1} & x = 1, 2. \ldots \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
f_Y(y) &= \begin{cases} pq^{y-1} & x = 1, 2. \ldots \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
f_{XY}(x, y) &= \begin{cases} p^2 q^{x+y-2} & x, y \in \{1, 2. \ldots\} \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
E[X \mid Y = X + 2] &= \sum_{1}^{\infty} x f_{X|D}(x \mid D) \\
f_{X|D}(x \mid D) &= \frac{\mathbb{P}[X = x, Y = X + 2]}{[Y = X + 2]} \\
\mathbb{P}[X = x, Y = X + 2] &= \mathbb{P}[Y = X + 2 \mid X = x] \, \mathbb{P}[X = x] \\
\mathbb{P}[Y = X + 2] &= \sum_{K=1}^{\infty} \mathbb{P}[Y = K + 2 \mid X = K] \, \mathbb{P}[X = K] \\
&= \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}[Y = K + 2 \mid X = K]}{\mathbb{P}[X = K]} \mathbb{P}[X = K] \\
&= \mathbb{P}[Y = K + 2] \, \mathbb{P}[X = K]
\end{aligned}
$$

i*) Hallar $\varphi_X(t)$ si $X \sim Geo(p)$*

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \begin{cases} pq^{x-1} & x = 1, 2 \ldots \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
\varphi_X(t) &= E\left(e^{iXt}\right) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{iXt} pq^{x-1} \\
&= pe^{it} \sum \left(e^{it}(1 - p)\right)^{x-1} \\
&= \frac{pe^{it}}{1 - e^{it}(1 - p)}
\end{aligned}
$$

j*) $X \sim Binneg(r, p)$*
Si

$$
\begin{aligned}
Y_1, Y_2, \ldots, Y_r &\sim Geo(p) \Rightarrow X = Y_1, Y_2, \ldots, Y_r \sim Binneg(r, p) \Rightarrow \varphi_X(t) \\
&= (\varphi_Y(t))^r = \left(\frac{pe^{it}}{1 - e^{it}(1 - p)}\right)^r
\end{aligned}
$$

k*) Hallar $\varphi_X(t)$ si $\mathbb{P}[X - 2] = \frac{1}{4} = \mathbb{P}[X = -2] \, \mathbb{P}[X = 0] = \frac{1}{2}$*

$$
\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= E\left(e^{itX}\right) = e^{itX} \mathbb{P}[X = 0] + e^{itx} \mathbb{P}[X = 2] + eitx \mathbb{P}[X = -2] \\
&= \frac{1}{2} + e^{2it}\left(\frac{1}{4}\right) + e^{2it}\left(\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(e^{2it} + e^{-2it}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos(2t)
\end{aligned}
$$

l*) X variabe aleatroria continua con densidad $f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ con $x \in \mathbb{R}$ Mostrar que $\varphi_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$*

$$
\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= E\left(e^{iXt}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iXt}\frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{iXt}e^{x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{iXt}e^{-x}\,dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(1+it)}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x(1-it)}\,dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+it}e^{1+it}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{1-it}e^{-x}(1-it)\Big|_{0}^{\infty}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+it} - \frac{1}{it-1}\right) \\
&= \frac{1}{1+t^2}
\end{aligned}
$$

m) *Mostrar que* $E\left[E\left(X \mid Y,Z\right)\right] = E\left(X\right)$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} X f_X(x)\,dx \\
f_X(x) &= \int_Y\int_Z f_{XYZ}(x,y,z)\,dz\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x\int_y\int_z f_{xyz}(x,y,z)\,dz\,dy\,dx \\
E(E(X \mid Y,Z)) &= \int\int E(X \mid Y=y, Z=z)\,f_{YZ}(y,z)\,dy\,dz \\
&= \int\int\int x f_{X|Y,Z}(x \mid y,z)\,f_{YZ}(y,z)\,dy\,dz\,dx \\
&= \int\int\int x f_{XYZ}(x,y,z)\,dz\,dy\,dx \\
&= \int x f_X(x)\,dx \\
&= E(X)
\end{aligned}
$$

4.18. Ejercicios para Evaluación

a) *Se tienen bolas numeradas. Dos personas I y II eligen cada una 3 de las 6 bolas sin reemplazo y con independencia entre personas. Sea* X *el número de bolas que nadie seleccionó. Hallar* $E(X)$.

$$
\begin{aligned}
X_i &= \begin{cases} 1 & \textit{Si la bola i nadie la elige} \\ 0 & \textit{e.o.c} \end{cases} \\
i &= 1,\ldots,6 \\
X &= X_1 + \ldots + X_6 \\
E(X) &= \sum_{i=1}^{6} E(X_i) = 6E(X_i) = 6\mathbb{P}[X_i = 1] = 6\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} \\
\mathbb{P}[X_i = 1] &= \mathbb{P}[\textit{ Bola 1 no la elija I}]\,\mathbb{P}[\textit{ Bola 1 no la elija II}] \\
&= (\mathbb{P}[\textit{ Bola 1 no la elija I}])^2 \\
&= \left(\frac{\binom{1}{0}\binom{5}{3}}{\binom{6}{3}}\right)^2 = \left(\frac{10}{20}\right)^2 = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

b) $X, Y \sim U(0,2)$ *ind. Hallar* $E(X \mid X+Y > 2)$

$$
\begin{aligned}
E\left(X \mid X+Y>2\right) &= \frac{1}{\mathbb{P}\left[D\right]} E\left(X \parallel_D\right)\\
x+y &= 2 \Rightarrow y = 2-x\\
(0,2)\,(2,0) &\\
f_{XY}\left(x,y\right) &= \begin{cases} \frac{1}{4} & 0<x<2, 0<y<2\\ 0 & e.o.c \end{cases}\\
\mathbb{P}\left[D\right] &= \mathbb{P}\left[X+Y=2\right] = \mathbb{P}\left[Y>2-X\right]\\
&= \int_0^2 \int_{2-x}^2 f_{XY}\left(x,y\right)\, dy\, dx\\
&= \frac{1}{4}\int_0^2 y|_{2-x}^2\; dx = \frac{1}{4}\int_0^2 2-2+x\, dx\\
&= \frac{1}{4}\int_0^2 x\, dx = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^2 = \frac{1}{4}\left(2\right) = \frac{1}{2}\\
E\left(X \parallel_D\right) &= \frac{1}{4}\int\int_{\mathbb{R}} x \parallel_D \; dx\, dy = \frac{1}{4}\int\int_{D\cap\mathbb{R}} x\, dx\, dy\\
&= \frac{1}{4}\int_0^2\int_{2-x}^2 x\, dy\, dx = \frac{1}{4}\int_0^2 xy\Big|_{2-x}^2 dx\\
&= \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}\\
\frac{1}{\mathbb{P}\left(D\right)} E\left(X \parallel_D\right) &= 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

c) *$X_1 \ldots X_{121}$ m.a de una densis¿dad f con media 2 y varianza 1. Hallar $c \in \mathbb{R}$ t.q. $\mathbb{P}\left[240 - \frac{c}{2} \leq S_{121} \leq 240 + \frac{c}{2}\right] =$* 0,94

$$
\begin{aligned}
S_{121} &= \sum_{i=1}^{121} X_i\\
E\left(X_i\right) &= 2\\
Var\left(X_i\right) &= 4 \qquad \forall i = 1 \ldots 121\\
E\left(S_{121}\right) &= \sum_{i=1}^{121} E\left(X_i\right) = \sum_{i=1}^{121}\left(2\right) = 2\left(121\right) = 242\\
Var\left(S_{121}\right) &= Var\left(\sum_{i=1}^{121}\right) X_i) = \sum_{i=1}^{121} Var\left(X_i\right) = 4\left(121\right) = 484\\
\mathbb{P}\left[S_{121} \leq 240 + \frac{c}{2}\right] &- \mathbb{P}\left[S_{121} \leq 240 - \frac{c}{2}\right]\\
\mathbb{P}\left[S_{121} \leq 240 + \frac{c}{2}\right] &= \mathbb{P}\left[\frac{S_{121} - E\left(S_{121}\right)}{\sqrt{484}} \leq \frac{240 + \frac{c}{2} - E\left(S_{121}\right)}{\sqrt{484}}\right]\\
&= \mathbb{P}\left[\frac{S_{121} - 242}{22} \leq \frac{240 - 242 + \frac{c}{2}}{22}\right]\\
&= \mathbb{P}\left[z \leq \frac{\frac{-4+c}{2}}{22}\right] = \mathbb{P}\left[z \leq \frac{c-4}{44}\right] = \phi\left(\frac{c-4}{44}\right)\\
\mathbb{P}\left[S_{121} \leq 240 - \frac{c}{2}\right] &= \mathbb{P}\left[\frac{S_{121} - 242}{22} \leq \frac{240 - \frac{c}{2} - 242}{22}\right] = \mathbb{P}\left[z \leq \frac{c+4}{22}\right]\\
&= \phi\left(-\frac{c+4}{44}\right)
\end{aligned}
$$

d) *Sean $X_1 \sim N\left(1,3\right)$, $X_2 \sim N\left(0,5\right)$ ind. Usar función característica para encontra la densidad de $Y = 2X_1 + 3X_2$*

$$
\begin{aligned}
\varphi_Y(t) &= E\left(e^{itY}\right) = E\left(e^{it(2X_1+3X_2)}\right) = E\left(e^{it2X_1}e^{it3X_2}\right)\\
&= E\left(e^{2itX_1}\right)E\left(e^{3itX_2}\right) = E\left(e^{i(2t)X_1}\right)E\left(e^{i(3t)X_2}\right)\\
&= \varphi_{X_1}(2t)\,\varphi_{X_2}(3t)\\
X &\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)\\
f_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\\
\varphi_X(t) &= E\left(e^{itX}\right) = \int e^{itX}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}+itX\right\}dx\\
&= -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}+itX = -\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2+2x\mu+\mu^2+itx2\sigma^2\right]\\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2-2x\left(\mu-it\sigma^2\right)+\mu^2\right)\\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2-2x\left(\mu-it\sigma^2\right)+\left(\mu-it\sigma^2\right)^2-\left(\mu-it\sigma^2\right)^2+\mu^2\right)\\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(x-\left(\mu-it\sigma^2\right)\right)^2+2\mu it\sigma^2-\left(it\sigma^2\right)^2\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(x-\left(\mu-it\sigma^2\right)\right)^2+2\mu it\sigma^2-\left(it\sigma^2\right)^2\right]\right\}dx\\
&= exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(2\mu it\sigma^2-\left(it\sigma^2\right)^2\right)\right\}\\
\mu &= 1\\
\sigma^2 &= 3\\
\varphi_{X_1}(2t) &= exp\left\{-\frac{1}{6}\left(2(1)\,i(2t)(3)-\left(i(2t)(3)\right)^2\right)\right\}\\
&= exp\left\{-\frac{1}{6}(12it)-(6it)^2\right\}\\
&= exp\left\{-\left(2it+6t^2\right)\right\}\\
\mu &= 0\\
\sigma^2 &= 5\\
\varphi_{X_2}(3t) &= exp\left\{-\frac{1}{10}\left(-\left(i(3t)\,5\right)^2\right)\right\}\\
&= exp\left\{-\frac{1}{10}\left(225t^2\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_Y(t) &= \varphi_{X_1}(2t)\,\varphi_{X_2}(3t)\\
&= exp\left\{-\left(2it+6t^2\right)\right\}exp\left\{-\frac{1}{10}\left(225t^2\right)\right\}\\
&= exp\left\{-2it-\frac{285t^2}{10}\right\}\\
&= exp\left\{-\frac{20it-285t^2}{10}\right\} = exp\left\{2it-\frac{57}{2}t^2\right\}
\end{aligned}
$$

e) $Y \sim U_{0,1,\ldots,N}$, $N \sim Geo$. *Hallar* $Var\,(Y+1)$ $f_N\,(n) = pq^n$

$$\begin{aligned}
Y \mid N \sim U_{0,1,\ldots,N} &= f_{Y\mid N}\,(y \mid n) = \begin{cases} \frac{1}{N+1} & y = 0,1\ldots N \\ o & e.o.c \end{cases} \\
N \sim Geo\,(p) &\Rightarrow f_N\,(n) = \begin{cases} pq^n & n = 0,1,2,\ldots \\ o & e.o.c \end{cases} \\
Var\,(Y+1) &= Var\,(Y) = Var\,(E\,(Y \mid N)) + E\,(Var\,(Y \mid N)) \\
&= Var\left(\frac{N}{2}\right) + E\left(\frac{N\,(N+2)}{12}\right) \\
&= \frac{1}{4}Var\,(N) + \frac{1}{12}E\,[N\,(N+2)] \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{q}{p^2}\right) + \frac{1}{12}\left[E\left(N^2\right) + 2E\,(N)\right] \\
&= \frac{1}{4}\frac{q}{p^2} + \frac{1}{12}\left[\frac{q\,(1+q)}{p^2} + 2\frac{q}{p}\right] \\
&= \frac{1}{3}\frac{q}{p^2} + \frac{1}{12}\frac{q}{p^2} + \frac{1}{12}\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{6p} = \frac{-\,(p-4)\,(p-1)}{12p^2}
\end{aligned}$$

4.19. Ejercicios para tarea del tema de transformaciones

a) *1) Si* $X \sim U_{-1,4}$. *Hallar la densidad de* $Y = [5X]$

$$\begin{aligned}
X \sim U_{-1,4} \Rightarrow f_X\,(x) &= \begin{cases} \frac{1}{5} & -1 \le x \le 4 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
F_Y\,(y) &= \mathbb{P}\,[Y = y] = \mathbb{P}\,[[5X] = y] = \mathbb{P}\,[y \le 5X < y+1] \\
&= \mathbb{P}\left[\frac{y}{5} \le X < \frac{y+1}{5}\right] = \int_{\frac{y}{5}}^{\frac{y+1}{5}} \frac{1}{5}\,dx = \frac{1}{5}x\Big|_{\frac{y}{5}}^{\frac{y+1}{5}} = \frac{1}{5}\left[\frac{y+1}{5} - \frac{y}{5}\right] = \frac{1}{25} \\
f_Y\,(y) &= \begin{cases} \frac{1}{25} & y = -5,\ldots,20 \\ 0 & e.o.c \end{cases}
\end{aligned}$$

2) Si $X \sim Cauchy$. *Hallar la densidad de* $Y = \frac{1}{X}$

$$\begin{aligned}
X \sim Cauchy \Rightarrow f_X\,(x) &= \frac{1}{\pi\,(1+x^2)} x \in \mathbb{R} \\
Y &= \frac{1}{X} \\
Sea y &> 0 \\
F_Y\,(y) &= \mathbb{P}\,[Y \le y] = \mathbb{P}\left[\frac{1}{X} \le y\right]
\end{aligned}$$

3) Si $X \sim N\,(0,1)$. *Hallar la densidad de* $Y = \mid 2X \mid$

$$
\begin{aligned}
X \sim N(0,1) \quad &\Rightarrow \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{-x^2}{2}\right\} \\
F_Y(y) &= \mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}[\mid 2X \mid \leq y] = \mathbb{P}[-y \leq 2X < y] \\
&= \mathbb{P}\left[-\frac{y}{2} \leq X \leq \frac{y}{2}\right] = \mathbb{P}\left[X \leq \frac{y}{2}\right] - \mathbb{P}\left[X \leq -\frac{y}{2}\right] \\
&= F_X\left(\frac{y}{2}\right) - F_X\left(-\frac{y}{2}\right) \\
f_Y(y) &= f_X\left(\frac{y}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - f_x\left(-\frac{y}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= f_X\left(\frac{y}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + f_X\left(-\frac{y}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = f_X\left(\frac{y}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + f_X\left(\frac{y}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= f_X\left(\frac{y}{2}\right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{\left(\frac{y}{2}\right)^2}{2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{y^2}{8}\right\} & y \geq 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
-\infty &< X < \infty \\
-\infty &< 2X < \infty \\
0 &< \mid 2X \mid < \infty \\
0 &< Y < \infty
\end{aligned}
$$

4) Si $X \sim Bin\left(n, \frac{1}{3}\right)$. Hallar la densidad de $Y = n - X$

$$
\begin{aligned}
X \sim Bin\left(n, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow f_X(x) &= \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{n-x} & x = 0, 1, \ldots n \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
f_Y(y) &= \mathbb{P}[Y = y] = \mathbb{P}[n - X = y] = \mathbb{P}[n - y = X] = f_X(n - y) \\
&= \begin{pmatrix} n \\ n-y \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-y} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-n+y} \\
&= \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ n-y \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-y} \left(\frac{2}{3}\right)^{y} & y = n - x \Rightarrow y = n, n-1, \ldots, 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}
\end{aligned}
$$

5) Si $X \sim U_{(0,2)}$. *Hallar la distribución* $Y = X^2 - X + 1$

$$\begin{aligned}
X \sim U_{(0,2)} \Rightarrow f_X(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
F_Y(y) &= \mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}\left[X^2 - X + 1 \leq y\right] = \mathbb{P}\left[\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 \leq y\right] \\
&= \mathbb{P}\left[\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 \leq Y - \frac{3}{4}\right]
\end{aligned}$$

Caso 1: $\frac{3}{4} < y < 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[-\sqrt{y - \frac{3}{4}} \leq X - \frac{1}{2} < \sqrt{y - \frac{3}{4}}\right] & \\
&= \mathbb{P}\left[-\sqrt{y - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} < X < \sqrt{y - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\right] \\
F_X\left(\sqrt{y - \frac{3}{4}}\right) &- F_X\left(-\sqrt{y - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\right) \\
f_Y(y) &= f_X\left(\sqrt{y - \frac{3}{4}}\right)\left(\frac{1}{2}\left(y - \frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \\
&+ f_X\left(-\sqrt{y - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\right)(4) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{y - \frac{3}{4}}} + \frac{1}{4\sqrt{y - \frac{3}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{y - \frac{3}{4}}}
\end{aligned}$$

b) *1) Si* $X, y \sim Exp(\lambda)$ *ind. Hallar la densidad de* $T = min\{X, Y\}$

$$\begin{aligned}
X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow f_X(x) &= \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
t &\geq 0 \\
F_T(t) &= \mathbb{P}[T \leq t] = \mathbb{P}[T = min\{X, Y\} \leq t] = 1 - \mathbb{P}[T = min\{X, Y\} > t] \\
&= 1 - \mathbb{P}[X > t, Y > t] = 1 - \mathbb{P}[X > t]\,\mathbb{P}[Y > t] = 1 - \mathbb{P}[X > t]^2 \\
F_X(x) &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \lambda \int_0^x e^{-\lambda t}\, dt = x\left(-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right)_0^x \\
&= -e^{-\lambda x} + e^0 = 1 - e^{-\lambda x} \\
&= 1 - \left(1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)\right)^2 = 1 - e^{-2\lambda t} \\
f_T(t) &= \left(-e^{-2\lambda t}\right)(-2\lambda) = \begin{cases} 2\lambda e^{-2\lambda t} & t > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
\therefore T &\sim Exp(2\lambda)
\end{aligned}$$

2) Si $X, Y \sim Geo(p)$ *ind. Hallar la densidad de* $W = X + Y$

$$
\begin{aligned}
X \sim Geo\left(p\right) \quad &\Rightarrow \quad f_X\left(x\right)\begin{cases} pq^x & x=0,1,\ldots \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
Y \sim Geo\left(p\right) \quad &\Rightarrow \quad f_Y\left(y\right)\begin{cases} pq^y & y=0,1,\ldots \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
f_{XY}\left(x,y\right) &= \begin{cases} p^2q^{x+y} & x=0,1,\ldots,y=0,1,\ldots \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
f_W\left(w\right) &= \mathbb{P}\left[W=w\right]=\mathbb{P}\left[X+Y=w\right]=\mathbb{P}\left[Y=w-X\right] \\
&= \sum_{k=0}^{w}\mathbb{P}\left[Y=w-k\right]\mathbb{P}\left[X=k\right] \\
&= \sum_{k=0}^{w}\left(pq^{w-k}\right)\left(pq^k\right)=\sum_{k=0}^{w}p^2q^w=p^2q^w\sum_{k=0}^{w} \\
&= \begin{cases} p^2q^w\left(w\right) & w=0,1,\ldots \\ 0 & e.o.c \end{cases}
\end{aligned}
$$

3) Si $X,Y \sim U_{\{1,\ldots,N\}}$ ind. Hallar la densidad de $Z=max\left\{X,Y\right\}$

$$
\begin{aligned}
z &\in \left\{1,\ldots,2N\right\} \\
f_z\left(z\right) &= \mathbb{P}\left[Z=z\right]=\mathbb{P}\left[max\left\{X,Y\right\}=Z\right] \\
f_X\left(x\right) &= \begin{cases} \frac{1}{N} & x=1,2,\ldots,N \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
F_X\left(x\right) &= \begin{cases} \frac{1}{N} & x=\ldots-2,-1,0 \\ \sum_{t=-\infty}^{x}f_X\left(t\right)=\sum_{t=-\infty}^{x}\frac{1}{N}=\frac{1}{N}\sum_{t=-\infty}^{x}=\frac{1}{N}\left(x-0\right)=\frac{x}{N} & x=1,\ldots,N \\ 1 & x=N+1,N+2,\ldots \end{cases} \\
\left(F_X\left(z\right)\right)^2 &= \left(\frac{z}{N}\right)^2=\frac{z^2}{N^2}
\end{aligned}
$$

4) $X,Y \sim N\left(\sigma,\sigma^2\right)$ ind. Hallar la densidad de $T=\frac{Y}{X}$

$$
\begin{aligned}
f_X\left(x\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}Exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\},x\in\mathbb{R} \\
f_Y\left(x\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}Exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\},y\in\mathbb{R} \\
\Rightarrow f_{XY}\left(x\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}Exp\left\{-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{2\sigma^2}\right\} \quad x\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_T\left(t\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}\mid x\mid\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{t^2x^2}{2\sigma^2}}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mid x\mid e^{-\frac{x^2\left(1+t^2\right)}{2\sigma^2}}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\left[\int_{-\infty}^{0}\left(-x\right)e^{-\frac{x^2\left(1+t^2\right)}{2\sigma^2}}\,dx+\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{0}^{\infty}xe^{-\frac{x^2\left(1+t^2\right)}{2\sigma^2}}\,dx\right] \\
&= -\frac{1}{2\pi\sigma^2}\left[\frac{-2\sigma^2}{2\left(1+t^2\right)}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\left(1+t^2\right)}\right]_{-\infty}^{0}+\frac{1}{2\pi\sigma^2}\left[\frac{-2\sigma^2}{2\left(1+t^2\right)}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\left(1+t^2\right)}\right]_{0}^{\infty} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{1+t^2}\right]+\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1+t^2}\right] \\
&= \frac{1}{\pi\left(1+z^2\right)} \\
Z &\sim Cauchy \\
-\infty &< z<\infty
\end{aligned}
$$

c) *1)* $X_1, X_2, X_3 \sim N\left(\sigma, \sigma^2\right)$ *ind. Entonces* $Y = \left(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2\right)^{\frac{1}{2}}$ *tiene la densidad de Maxwell. Encon trarla.*

$$\begin{aligned}
f_{Xi}\left(x_i\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \\
\Rightarrow f_{X_1X_2X_3}\left(x_1, x_2, x_3\right) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} exp\left\{-\frac{\sum x_i^2}{2\sigma^2}\right\} \\
f_Y\left(y\right) &= \mathbb{P}\left[Y \leq y\right] = \mathbb{P}\left[\left(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq y\right] \\
&= \mathbb{P}\left[X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \leq y^2\right] \\
\mathbb{P}\left[X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \leq y^2\right] &= \int\int\int_s \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} exp\left\{-\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2\sigma^2}\right\} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
\rho \leq y & x_1 = \rho\cos\theta\sin\phi \\
0 < \theta < 2\pi & x_2 = \rho\cos\theta\sin\phi \\
0 < \rho < \pi & x_3 = \rho\cos\phi
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= \rho^2\left[\cos^2\theta\sin 2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\phi\right] \\
&= \rho^2\left[\sin^2\phi + \cos^2\phi\right] = \rho^2 \\
&= \frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^y \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho \\
F_Y\left(y\right) &= 4\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^3 \int_0^y e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\rho \\
f_Y\left(y\right) &= 4\pi\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{3}{2}}} y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \\
&= 2^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}\sigma^{-3}y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \\
f_Y\left(y\right) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma^3} y^2 e^{-\frac{\alpha y^2}{2\sigma^2}} & y > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
\alpha &= \frac{1}{\sigma^2} \\
\Rightarrow f_Y\left(y\right) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha^{\frac{3}{2}} y^2 e^{-\frac{\alpha y^2}{2\sigma^2}} & y > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
Y &\sim Maxwell \\
\mid J \mid &= \mid -\rho^2\sin\varphi \mid = \rho^2\sin\varphi
\end{aligned}$$

2) *Sean* R *y* Θ *v.a ind. t.q* $\Theta \sim U\left(-\pi, \pi\right)$ *y* $\begin{cases} \frac{1}{\sigma^2} r e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} & r \geq 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$ *Hallar la densidad conjunta de* $X = R\cos\Theta$, $Y = R\sin\Theta$ *¿ Son ind?.*

$$
\begin{aligned}
f_{\Theta}(\theta) &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & -\pi < \theta < \pi \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
f_{R,\theta} &= \begin{cases} \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma 2}} & r \geq 0, -\pi < \theta < \pi \\ 0 & e.o.c \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\sigma_1(t) = (0,t) & t \geq 0 \\
\sigma_2(t) = (t,0) & 0 \leq t < \pi \\
\sigma_3(t) = (\pi,0) & t \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
T(x,y) &= (R\cos\Theta, R\sin\Theta) \\
T(0,t) &= (t,0) \\
T(t,0) &= (0,0) \\
T(\pi,0) &= (0,0) \\
x^2+y^2 &= R^2\cos^2\Theta + R^2\sin^2\Theta = R^2 \Rightarrow R = \sqrt{x^2+y^2} \\
\frac{Y}{X} &= \frac{R\sin\Theta}{R\cos\Theta} = \tan\Theta \\
\Theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\
J &= \begin{vmatrix} \dfrac{(-1)\frac{y_2}{y_1 2}}{1+\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2} & \dfrac{\frac{1}{y_1}}{1+\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2} \\ \dfrac{y_1}{(y_1^y+y_2^2)^{\frac{1}{2}}} & \dfrac{y_2}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{1}{2}}} \end{vmatrix} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \\
|\, J \,| &= \frac{1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \\
f_{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} f_{\Theta,R}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right), \sqrt{x^2+y^2}\right) \\
\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sigma^2} Exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right\} & x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} Exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right\} dy \\
&= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} Exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\
X &\sim N(\sigma, \sigma^2) \\
y &\sim N(\sigma, \sigma^2)\, ind.
\end{aligned}
$$

4.20. Evaluación de Probabilidad

a) *Sea* $X \sim U(0,2)$. *Hallar la densidad de* $Y = X^2 - 3X + 1$

$$
\begin{aligned}
f_Y &= (y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} \\
F_Y(y) &= \mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}\left[X^2 - 3X + 1 \leq y\right] = \mathbb{P}\left[\left(X - \frac{3}{2}\right)^2 + 1 \leq y + \frac{9}{4}\right] \\
&= \mathbb{P}\left[\left(X - \frac{3}{2}\right)^2 \leq y + \frac{9}{4} - 1\right] = \mathbb{P}\left[X - \frac{3}{2} \leq \sqrt{y + \frac{5}{4}}\right] \\
&= \mathbb{P}\left[X \leq \sqrt{y + \frac{5}{4}} - \frac{3}{2}\right] = F_X\left(\left(y + \frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\right) \\
&= f_Y(y) = f_X\left(\left(y + \frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\left(y + \frac{5}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \\
f_Y(y) &= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(y + \frac{5}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}\left(y + \frac{5}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} & (-1,1) \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
\int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\left(y + \frac{5}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} dy &= \frac{1}{4}\left(2\left(y + \frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2}\left(y + \frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(-1 + \frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

b) $X_1, X_2 \sim U(0,1)$ *ind.* $X_1 = Y_1 \cos(Y_2)$, $X_2 = Y_1 \sin(Y_2)$ *Hallar la densidad conjunta de* Y_1 *y* Y_2

y averiguar independencia

$$\begin{aligned}
f_{X_1X_2}(x_1x_2) &= \begin{cases} 1 & x_1 \in (0,1), x_2 \in (0,1) \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
x_1^2 + x_2^2 &= y_1^2\cos^2(y_2) + y_1^2\sin^2(y_2) \\
&= y_1^2 + y_1^2 = 2y_1^2 \\
\Rightarrow y_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)} \\
\frac{X_1}{X_2} &= \frac{Y_1\cos Y_2}{Y_1\sin Y_2} = \tan Y_2 \Rightarrow Y_2 = \arctan\left(\frac{X_1}{X_2}\right) \\
J &= \left|\begin{array}{cc} \cos(Y_2) & -Y_1\sin(Y_2) \\ \sin(Y_2) & Y_1\cos(Y_2) \end{array}\right| = Y_1\cos^2 Y_2 + Y_1\sin^2 Y_2 \\
&= Y_1 \Rightarrow \mid J \mid = Y_1 \\
f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2) &= \mid J \mid f_{X_1X_2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)}, \arctan\left(\frac{X_1}{X_2}\right)\right) \\
&= \begin{cases} Y_1 & y_1y_2 \in \mathbb{R} \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
\left.\begin{array}{l} \sigma_1(t) = (t,1) \\ \sigma_2(t) = (0,t) \\ \sigma_3(t) = (t,0) \\ \sigma_4(t) = (1,t) \end{array}\right\} 0 &\leq t \leq 1 \\
Y_1 &= X_1\cos X_2, Y_2 = X_1\sin(X_2) \\
T(t,1) &= (t\cos(1), t\sin(1)) = (t(0{,}5403), t(0{,}8414)) \\
T(0,t) &= (0,0) \\
T(t,0) &= (t\cos(0), t\sin(0)) = (t,0) \\
T(1,t) &= (\cos(t), \sin(t)) \\
y_1 &= t\cos(1) \Rightarrow x_1\cos^{-1}(1) = t \\
y_2 &= t\sin(1) \Rightarrow x_2\sin^{-1}(1) = t \\
\frac{y_1}{\cos(1)} &= t, \frac{y_2}{\sin(1)} = t \Rightarrow \frac{y_1}{\cos(1)} = \frac{y_2}{\sin(1)} \\
y_2 &= y_1\tan(1) \\
y_2 &= t \Rightarrow t = \arccos(y_1) \Rightarrow \arccos(y_1) = \arcsin(y_2) \\
y_2 &= \sin t \Rightarrow t = \arcsin(y_2) \Rightarrow \sin(\arccos(y_1)) = y_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{Y_1} &= \begin{cases} \int_0^{y_1\tan(1)} f_{Y_1Y_2}(y_1y_2)\, dy_2 & y_1 \in (0, 0{,}5403) \\ \int_0^{\sin(\arccos(y_1))} f_{Y_1Y_2}(y_1y_2)\, dy_2 & y_1 \in (0{,}5403, 1) \\ 0 & e.o.c \end{cases} \\
f_{Y_2}(y_2) &= \begin{cases} \int_{\cos(\arcsin(y_2))}^{\frac{y_2}{\tan(1)}} f_{Y_1Y_2}(y_1y_2)\, dy_1 & y_2 \in (0, 0{,}8414) \\ 0 & e.o.c/ \end{cases}
\end{aligned}$$

c) *N es una v.a t.q* $\mathbb{P}[N=1] = \frac{1}{4}, \mathbb{P}[N=2] = \frac{1}{3}, \mathbb{P}[N=3] = \frac{5}{12}$
$X_i \sim$ *Poisson* $(1), i = 1, 2, \ldots$
Hallar la densidad de la suma aleatoria SN

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[S_N = x\right] &= \mathbb{P}\left[X_1 + X_2 + \ldots + X_N = x\right] \\
&= \sum_{n=1}^{3} \mathbb{P}\left[X_1 + X_2 + \ldots + X_N = x \mid N = n\right] \mathbb{P}\left[N = n\right] \\
&= \sum_{n=1}^{3} \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N = x, N = n}{\mathbb{P}\left[N = n\right]} \mathbb{P}\left[N = n\right] \\
Sol \sim Poisson\left(n\lambda\right) & \\
&= \sum_{n=1}^{3} \mathbb{P}\left[S_n = x\right] \mathbb{P}\left[N = n\right] = \mathbb{P}\left[S_1 = x\right] \mathbb{P}\left[N = 1\right] + \mathbb{P}\left[S_2 = x\right] \mathbb{P}\left[N = 2\right] \\
&+ \mathbb{P}\left[S_3 = x\right] \mathbb{P}\left[N = 3\right] \\
S_1 &= X_1 \\
&= \mathbb{P}\left[S_1 = x\right] \mathbb{P}\left[N = 1\right] + \mathbb{P}\left[S_2 = x\right] \mathbb{P}\left[N = 2\right] + \mathbb{P}\left[S_3 = x\right] \mathbb{P}\left[N = 3\right] \\
&= \left(\frac{e^{-1}}{x!}\right) \frac{1}{4} + \left(\frac{e^{-2}}{x!}\right) \frac{1}{3} + \left(\frac{e^{-3}}{x!}\right) \frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

CAPÍTULO 5

Matemáticas Detrás de la Regresión Logística

5.1. Introducción

La regresión logística es una técnica de modelado estadístico utilizada para predecir la probabilidad de un evento binario en función de una o más variables independientes. Este capítulo profundiza en las matemáticas subyacentes a la regresión logística, incluyendo la función logística, la función de verosimilitud, y los métodos para estimar los coeficientes del modelo.

5.2. Función Logística

La función logística es la base de la regresión logística. Esta función transforma una combinación lineal de variables independientes en una probabilidad.

5.2.1. Definición

La función logística se define como:

$$p = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_n X_n)}}$$

donde p es la probabilidad de que el evento ocurra, $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ son los coeficientes del modelo, y $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son las variables independientes.

5.2.2. Propiedades

La función logística tiene varias propiedades importantes:

- ***Rango**: La función logística siempre produce un valor entre 0 y 1, lo que la hace adecuada para modelar probabilidades.*
- ***Monotonía**: La función es monótona creciente, lo que significa que a medida que la combinación lineal de variables independientes aumenta, la probabilidad también aumenta.*
- ***Simetría**: La función logística es simétrica en torno a $p = 0{,}5$.*

5.3. Función de Verosimilitud

La función de verosimilitud se utiliza para estimar los coeficientes del modelo de regresión logística. Esta función mide la probabilidad de observar los datos dados los coeficientes del modelo.

5.3.1. Definición

Para un conjunto de n observaciones, la función de verosimilitud L se define como el producto de las probabilidades individuales de observar cada dato:

$$L(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{y_i} (1 - p_i)^{1-y_i}$$

donde y_i es el valor observado de la variable dependiente para la i-ésima observación y p_i es la probabilidad predicha de que $Y_i = 1$.

5.3.2. Función de Log-Verosimilitud

Para simplificar los cálculos, trabajamos con el logaritmo de la función de verosimilitud, conocido como la función de log-verosimilitud. Tomar el logaritmo convierte el producto en una suma:

$$\log L(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) = \sum_{i=1}^{n} [y_i \log(p_i) + (1 - y_i) \log(1 - p_i)]$$

Sustituyendo p_i:

$$\log L(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i(\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_n X_{in}) - \log(1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_n X_{in}}) \right]$$

5.4. Estimación de Coeficientes

Los coeficientes del modelo de regresión logística se estiman maximizando la función de log-verosimilitud. Este proceso generalmente se realiza mediante métodos iterativos como el algoritmo de Newton-Raphson.

5.4.1. Gradiente y Hessiana

Para maximizar la función de log-verosimilitud, necesitamos calcular su gradiente y su matriz Hessiana.

Gradiente

El gradiente de la función de log-verosimilitud con respecto a los coeficientes β es:

$$\mathbf{g}(\beta) = \frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i (y_i - p_i)$$

donde $\mathbf{X}_i$ es el vector de valores de las variables independientes para la i-ésima observación.

Hessiana

La matriz Hessiana de la función de log-verosimilitud con respecto a los coeficientes β es:

$$\mathbf{H}(\beta) = \frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta \partial \beta^T} = -\sum_{i=1}^{n} p_i (1 - p_i) \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^T$$

5.4.2. Algoritmo Newton-Raphson

El algoritmo Newton-Raphson se utiliza para encontrar los valores de los coeficientes que maximizan la función de log-verosimilitud. El algoritmo se puede resumir en los siguientes pasos:

a) *Inicializar el vector de coeficientes $\beta^{(0)}$ (por ejemplo, con ceros o valores pequeños aleatorios).*

b) *Calcular el gradiente $\mathbf{g}(\beta^{(k)})$ y la matriz Hessiana $\mathbf{H}(\beta^{(k)})$ en la iteración k.*

c) *Actualizar los coeficientes utilizando la fórmula:*

$$\beta^{(k+1)} = \beta^{(k)} - \left[\mathbf{H}(\beta^{(k)}) \right]^{-1} \mathbf{g}(\beta^{(k)})$$

d) *Repetir los pasos 2 y 3 hasta que la diferencia entre $\beta^{(k+1)}$ y $\beta^{(k)}$ sea menor que un umbral predefinido (criterio de convergencia).*

5.5. Validación del Modelo

Una vez que se han estimado los coeficientes del modelo de regresión logística, es importante validar el modelo para asegurarse de que proporciona predicciones precisas.

5.5.1. Curva ROC y AUC

La curva ROC (Receiver Operating Characteristic) es una herramienta gráfica utilizada para evaluar el rendimiento de un modelo de clasificación binaria. El área bajo la curva (AUC) mide la capacidad del modelo para distinguir entre las clases.

5.5.2. Matriz de Confusión

La matriz de confusión es una tabla que resume el rendimiento de un modelo de clasificación al comparar las predicciones del modelo con los valores reales. Los términos en la matriz de confusión incluyen verdaderos positivos, falsos positivos, verdaderos negativos y falsos negativos.

CAPÍTULO 6

Preparación de Datos y Selección de Variables

6.1. Introducción

La preparación de datos y la selección de variables son pasos cruciales en el proceso de modelado estadístico. Un modelo bien preparado y con las variables adecuadas puede mejorar significativamente la precisión y la interpretabilidad del modelo. Este capítulo proporciona una revisión detallada de las técnicas de limpieza de datos, tratamiento de datos faltantes, codificación de variables categóricas y selección de variables.

6.2. Importancia de la Preparación de Datos

La calidad de los datos es fundamental para el éxito de cualquier análisis estadístico. Los datos sin limpiar pueden llevar a modelos inexactos y conclusiones erróneas. La preparación de datos incluye varias etapas:

- *Limpieza de datos*
- *Tratamiento de datos faltantes*
- *Codificación de variables categóricas*
- *Selección y transformación de variables*

6.3. Limpieza de Datos

La limpieza de datos es el proceso de detectar y corregir (o eliminar) los datos incorrectos, incompletos o irrelevantes. Este proceso incluye:

- *Eliminación de duplicados*
- *Corrección de errores tipográficos*
- *Consistencia de formato*
- *Tratamiento de valores extremos (outliers)*

6.4. Tratamiento de Datos Faltantes

Los datos faltantes son un problema común en los conjuntos de datos y pueden afectar la calidad de los modelos. Hay varias estrategias para manejar los datos faltantes:

- ***Eliminación de Datos Faltantes**: Se eliminan las filas o columnas con datos faltantes.*
- ***Imputación**: Se reemplazan los valores faltantes con estimaciones, como la media, la mediana o la moda.*
- ***Modelos Predictivos**: Se utilizan modelos predictivos para estimar los valores faltantes.*

6.4.1. Imputación de la Media

Una técnica común es reemplazar los valores faltantes con la media de la variable. Esto se puede hacer de la siguiente manera:

$$x_i = \begin{cases} x_i & \textit{si } x_i \textit{ no es faltante} \\ \bar{x} & \textit{si } x_i \textit{ es faltante} \end{cases}$$

donde $\bar{x}$ es la media de la variable.

6.5. Codificación de Variables Categóricas

Las variables categóricas deben ser convertidas a un formato numérico antes de ser usadas en un modelo de regresión logística. Hay varias técnicas para codificar variables categóricas:

6.5.1. Codificación One-Hot

La codificación one-hot crea una columna binaria para cada categoría. Por ejemplo, si tenemos una variable categórica con tres categorías (A, B, C), se crean tres columnas:

$$\begin{aligned} A &= [1, 0, 0] \\ B &= [0, 1, 0] \\ C &= [0, 0, 1] \end{aligned}$$

6.5.2. Codificación Ordinal

La codificación ordinal asigna un valor entero único a cada categoría, preservando el orden natural de las categorías. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \textit{Bajo} &= 1 \\ \textit{Medio} &= 2 \\ \textit{Alto} &= 3 \end{aligned}$$

6.6. Selección de Variables

La selección de variables es el proceso de elegir las variables más relevantes para el modelo. Existen varias técnicas para la selección de variables:

6.6.1. Métodos de Filtrado

Los métodos de filtrado seleccionan variables basadas en criterios estadísticos, como la correlación o la chi-cuadrado. Algunas técnicas comunes incluyen:

- ***Análisis de Correlación**: Se seleccionan variables con alta correlación con la variable dependiente y baja correlación entre ellas.*
- ***Pruebas de Chi-cuadrado**: Se utilizan para variables categóricas para determinar la asociación entre la variable independiente y la variable dependiente.*

6.6.2. Métodos de Wrapper

Los métodos de wrapper evalúan múltiples combinaciones de variables y seleccionan la combinación que optimiza el rendimiento del modelo. Ejemplos incluyen:

- ***Selección hacia Adelante**: Comienza con un modelo vacío y agrega variables una por una, seleccionando la variable que mejora más el modelo en cada paso.*
- ***Selección hacia Atrás**: Comienza con todas las variables y elimina una por una, removiendo la variable que tiene el menor impacto en el modelo en cada paso.*
- ***Selección Paso a Paso**: Combina la selección hacia adelante y hacia atrás, agregando y eliminando variables según sea necesario.*

6.6.3. Métodos Basados en Modelos

Los métodos basados en modelos utilizan técnicas de regularización como Lasso y Ridge para seleccionar variables. Estas técnicas añaden un término de penalización a la función de costo para evitar el sobreajuste.

Regresión Lasso

La regresión Lasso (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator) añade una penalización L_1 a la función de costo:

$$J(\beta) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 + \lambda \sum_{j=1}^{p} |\beta_j|$$

donde λ es el parámetro de regularización que controla la cantidad de penalización.

Regresión Ridge

La regresión Ridge añade una penalización L_2 a la función de costo:

$$J(\beta) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 + \lambda \sum_{j=1}^{p} \beta_j^2$$

donde λ es el parámetro de regularización.

6.7. Implementación en R

6.7.1. Limpieza de Datos

Para ilustrar la limpieza de datos en R, considere el siguiente conjunto de datos:

```
data <- data.frame(
  var1 = c(1, 2, 3, NA, 5),
  var2 = c("A", "B", "A", "B", "A"),
  var3 = c(10, 15, 10, 20, 25)
)

# Eliminaci\'on de filas con datos faltantes
data_clean <- na.omit(data)

# Imputaci\'on de la media
data$var1[is.na(data$var1)] <- mean(data$var1, na.rm = TRUE)
```

6.7.2. Codificación de Variables Categóricas

Para codificar variables categóricas, utilice la función 'model.matrix':

```
data <- data.frame(
  var1 = c(1, 2, 3, 4, 5),
  var2 = c("A", "B", "A", "B", "A")
)

# Codificaci\'on one-hot
data_onehot <- model.matrix(~ var2 - 1, data = data)
```

6.7.3. Selección de Variables

Para la selección de variables, utilice el paquete 'caret':

```
library(caret)

# Dividir los datos en conjuntos de entrenamiento y prueba
set.seed(123)
trainIndex <- createDataPartition(data$var1, p = .8,
                                  list = FALSE,
                                  times = 1)
dataTrain <- data[trainIndex,]
dataTest <- data[-trainIndex,]

# Modelo de regresi\'on log\'istica
model <- train(var1 ~ ., data = dataTrain, method = "glm", family = "binomial")

# Selecci\'on de variables
model <- step(model, direction = "both")
summary(model)
```

CAPÍTULO 7

Evaluación del Modelo y Validación Cruzada

7.1. Introducción

Evaluar la calidad y el rendimiento de un modelo de regresión logística es crucial para asegurar que las predicciones sean precisas y útiles. Este capítulo se centra en las técnicas y métricas utilizadas para evaluar modelos de clasificación binaria, así como en la validación cruzada, una técnica para evaluar la generalización del modelo.

7.2. Métricas de Evaluación del Modelo

Las métricas de evaluación permiten cuantificar la precisión y el rendimiento de un modelo. Algunas de las métricas más comunes incluyen:

7.2.1. Curva ROC y AUC

La curva ROC (Receiver Operating Characteristic) es una representación gráfica de la sensibilidad (verdaderos positivos) frente a 1 - especificidad (falsos positivos). El área bajo la curva (AUC) mide la capacidad del modelo para distinguir entre las clases.

$$\begin{aligned} Sensibilidad &= \frac{TP}{TP + FN} \\ Especificidad &= \frac{TN}{TN + FP} \end{aligned}$$

7.2.2. Matriz de Confusión

La matriz de confusión es una tabla que muestra el rendimiento del modelo comparando las predicciones con los valores reales. Los términos incluyen:

- ***Verdaderos Positivos (TP)**: Predicciones correctas de la clase positiva.*
- ***Falsos Positivos (FP)**: Predicciones incorrectas de la clase positiva.*
- ***Verdaderos Negativos (TN)**: Predicciones correctas de la clase negativa.*
- ***Falsos Negativos (FN)**: Predicciones incorrectas de la clase negativa.*

	Predicción Positiva	**Predicción Negativa**
Real Positiva	TP	FN
Real Negativa	FP	TN

Cuadro 7.1: Matriz de Confusión

7.2.3. Precisión, Recall y F1-Score

$$\begin{aligned} \textit{Precisión} &= \frac{TP}{TP + FP} \\ \textit{Recall} &= \frac{TP}{TP + FN} \\ \textit{F1-Score} &= 2 \cdot \frac{\textit{Precisión} \cdot \textit{Recall}}{\textit{Precisión} + \textit{Recall}} \end{aligned}$$

7.2.4. Log-Loss

La pérdida logarítmica (Log-Loss) mide la precisión de las probabilidades predichas. La fórmula es:

$$\textit{Log-Loss} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [y_i \log(p_i) + (1 - y_i) \log(1 - p_i)]$$

donde y_i son los valores reales y p_i son las probabilidades predichas.

7.3. Validación Cruzada

La validación cruzada es una técnica para evaluar la capacidad de generalización de un modelo. Existen varios tipos de validación cruzada:

7.3.1. K-Fold Cross-Validation

En K-Fold Cross-Validation, los datos se dividen en K subconjuntos. El modelo se entrena K veces, cada vez utilizando K-1 subconjuntos para el entrenamiento y el subconjunto restante para la validación.

$$\textit{Error Medio} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \textit{Error}_k$$

7.3.2. Leave-One-Out Cross-Validation (LOOCV)

En LOOCV, cada observación se usa una vez como conjunto de validación y las restantes como conjunto de entrenamiento. Este método es computacionalmente costoso pero útil para conjuntos de datos pequeños.

7.4. Ajuste y Sobreajuste del Modelo

El ajuste adecuado del modelo es crucial para evitar el sobreajuste (overfitting) y el subajuste (underfitting).

7.4.1. Sobreajuste

El sobreajuste ocurre cuando un modelo se ajusta demasiado bien a los datos de entrenamiento, capturando ruido y patrones irrelevantes. Los síntomas incluyen una alta precisión en el entrenamiento y baja precisión en la validación.

7.4.2. Subajuste

El subajuste ocurre cuando un modelo no captura los patrones subyacentes de los datos. Los síntomas incluyen baja precisión tanto en el entrenamiento como en la validación.

7.4.3. Regularización

La regularización es una técnica para prevenir el sobreajuste añadiendo un término de penalización a la función de costo. Las técnicas comunes incluyen:

- ***Regresión Lasso (L1)***
- ***Regresión Ridge (L2)***

7.5. Implementación en R

7.5.1. Evaluación del Modelo

```
# Cargar el paquete necesario
library(caret)

# Dividir los datos en conjuntos de entrenamiento y prueba
set.seed(123)
trainIndex <- createDataPartition(data$var1, p = .8,
                                  list = FALSE,
                                  times = 1)
dataTrain <- data[trainIndex,]
dataTest <- data[-trainIndex,]

# Entrenar el modelo de regresión logística
model <- train(var1 ~ ., data = dataTrain, method = "glm", family = "binomial")

# Predicciones en el conjunto de prueba
predictions <- predict(model, dataTest)

# Matriz de confusión
confusionMatrix(predictions, dataTest$var1)
```

7.5.2. Validación Cruzada

```
# K-Fold Cross-Validation
control <- trainControl(method = "cv", number = 10)
model_cv <- train(var1 ~ ., data = dataTrain, method = "glm",
                  family = "binomial", trControl = control)

# Evaluación del modelo con validación cruzada
print(model_cv)
```

CAPÍTULO 8

Diagnóstico del Modelo y Ajuste de Parámetros

8.1. Introducción

El diagnóstico del modelo y el ajuste de parámetros son pasos esenciales para mejorar la precisión y la robustez de los modelos de regresión logística. Este capítulo se enfoca en las técnicas para diagnosticar problemas en los modelos y en métodos para ajustar los parámetros de manera óptima.

8.2. Diagnóstico del Modelo

El diagnóstico del modelo implica evaluar el rendimiento del modelo y detectar posibles problemas, como el sobreajuste, la multicolinealidad y la influencia de puntos de datos individuales.

8.2.1. Residuos

Los residuos son las diferencias entre los valores observados y los valores predichos por el modelo. El análisis de residuos puede revelar patrones que indican problemas con el modelo.

$$Residuo_i = y_i - \hat{y}_i$$

Residuos Estudiantizados

Los residuos estudiantizados se ajustan por la variabilidad del residuo y se utilizan para detectar outliers.

$$r_i = \frac{Residuo_i}{\hat{\sigma}\sqrt{1 - h_i}}$$

donde h_i es el leverage del punto de datos.

8.2.2. Influencia

La influencia mide el impacto de un punto de datos en los coeficientes del modelo. Los puntos con alta influencia pueden distorsionar el modelo.

Distancia de Cook

La distancia de Cook es una medida de la influencia de un punto de datos en los coeficientes del modelo.

$$D_i = \frac{r_i^2}{p} \cdot \frac{h_i}{1 - h_i}$$

donde p es el número de parámetros en el modelo.

8.2.3. Multicolinealidad

La multicolinealidad ocurre cuando dos o más variables independientes están altamente correlacionadas. Esto puede inflar las varianzas de los coeficientes y hacer que el modelo sea inestable.

Factor de Inflación de la Varianza (VIF)

El VIF mide cuánto se inflan las varianzas de los coeficientes debido a la multicolinealidad.

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2}$$

donde R_j^2 *es el coeficiente de determinación de la regresión de la variable* j *contra todas las demás variables.*

8.3. Ajuste de Parámetros

El ajuste de parámetros implica seleccionar los valores óptimos para los hiperparámetros del modelo. Esto puede mejorar el rendimiento y prevenir el sobreajuste.

8.3.1. Grid Search

El grid search es un método exhaustivo para ajustar los parámetros. Se define una rejilla de posibles valores de parámetros y se evalúa el rendimiento del modelo para cada combinación.

8.3.2. Random Search

El random search selecciona aleatoriamente combinaciones de valores de parámetros dentro de un rango especificado. Es menos exhaustivo que el grid search, pero puede ser más eficiente.

8.3.3. Bayesian Optimization

La optimización bayesiana utiliza modelos probabilísticos para seleccionar iterativamente los valores de parámetros más prometedores.

8.4. Implementación en R

8.4.1. Diagnóstico del Modelo

```
# Cargar el paquete necesario
library(car)

# Residuos estudentizados
dataTrain$resid <- rstudent(model)
hist(dataTrain$resid, breaks = 20, main = "Residuos Estudentizados")
```

```
# Distancia de Cook
dataTrain$cook <- cooks.distance(model)
plot(dataTrain$cook, type = "h", main = "Distancia de Cook")

# Factor de Inflaci\'on de la Varianza
vif_values <- vif(model)
print(vif_values)
```

8.4.2. Ajuste de Parámetros

```
# Grid Search con caret
control <- trainControl(method = "cv", number = 10)
tune_grid <- expand.grid(.alpha = c(0, 0.5, 1), .lambda = seq(0.01, 0.1, by = 0.01))

model_tune <- train(var1 ~ ., data = dataTrain, method = "glmnet",
                    trControl = control, tuneGrid = tune_grid)

print(model_tune)
```

CAPÍTULO 9

Interpretación de los Resultados

9.1. Introducción

Interpretar correctamente los resultados de un modelo de regresión logística es esencial para tomar decisiones informadas. Este capítulo se centra en la interpretación de los coeficientes del modelo, las odds ratios, los intervalos de confianza y la significancia estadística.

9.2. Coeficientes de Regresión Logística

Los coeficientes de regresión logística representan la relación entre las variables independientes y la variable dependiente en términos de log-odds.

9.2.1. Interpretación de los Coeficientes

Cada coeficiente β_j *en el modelo de regresión logística se interpreta como el cambio en el log-odds de la variable dependiente por unidad de cambio en la variable independiente* X_j.

$$\log\left(\frac{p}{1-p}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_n X_n$$

9.2.2. Signo de los Coeficientes

- ***Coeficiente Positivo****: Un coeficiente positivo indica que un aumento en la variable independiente está asociado con un aumento en el log-odds de la variable dependiente.*
- ***Coeficiente Negativo****: Un coeficiente negativo indica que un aumento en la variable independiente está asociado con una disminución en el log-odds de la variable dependiente.*

9.3. Odds Ratios

Las odds ratios proporcionan una interpretación más intuitiva de los coeficientes de regresión logística. La odds ratio para una variable independiente X_j *se calcula como* e^{β_j}.

9.3.1. Cálculo de las Odds Ratios

$$OR_j = e^{\beta_j}$$

9.3.2. Interpretación de las Odds Ratios

- ***OR ¿1***: *Un OR mayor que 1 indica que un aumento en la variable independiente está asociado con un aumento en las odds de la variable dependiente.*
- ***OR ¡1***: *Un OR menor que 1 indica que un aumento en la variable independiente está asociado con una disminución en las odds de la variable dependiente.*
- ***OR = 1***: *Un OR igual a 1 indica que la variable independiente no tiene efecto sobre las odds de la variable dependiente.*

9.4. Intervalos de Confianza

Los intervalos de confianza proporcionan una medida de la incertidumbre asociada con los estimadores de los coeficientes. Un intervalo de confianza del 95 % para un coeficiente β_j *indica que, en el 95 % de las muestras, el intervalo contendrá el valor verdadero de* β_j.

9.4.1. Cálculo de los Intervalos de Confianza

Para calcular un intervalo de confianza del 95 % para un coeficiente β_j*, utilizamos la fórmula:*

$$\beta_j \pm 1{,}96 \cdot SE(\beta_j)$$

donde $SE(\beta_j)$ *es el error estándar de* β_j.

9.5. Significancia Estadística

La significancia estadística se utiliza para determinar si los coeficientes del modelo son significativamente diferentes de cero. Esto se evalúa mediante pruebas de hipótesis.

9.5.1. Prueba de Hipótesis

Para cada coeficiente β_j*, la hipótesis nula* H_0 *es que* $\beta_j = 0$*. La hipótesis alternativa* H_a *es que* $\beta_j \neq 0$.

9.5.2. P-valor

El p-valor indica la probabilidad de obtener un coeficiente tan extremo como el observado, asumiendo que la hipótesis nula es verdadera. Un p-valor menor que el nivel de significancia α *(típicamente 0.05) indica que podemos rechazar la hipótesis nula.*

9.6. Implementación en R

9.6.1. Cálculo de Coeficientes y Odds Ratios

```
# Cargar el paquete necesario
library(broom)

# Entrenar el modelo de regresi\'on log\'istica
model <- glm(var1 ~ ., data = dataTrain, family = "binomial")

# Coeficientes del modelo
coef(model)

# Odds ratios
exp(coef(model))
```

9.6.2. Intervalos de Confianza

```
# Intervalos de confianza para los coeficientes
confint(model)

# Intervalos de confianza para las odds ratios
exp(confint(model))
```

9.6.3. P-valores y Significancia Estadística

```
# Resumen del modelo con p-valores
summary(model)
```

CAPÍTULO 10

Regresión Logística Multinomial y Análisis de Supervivencia

10.1. Introducción

La regresión logística multinomial y el análisis de supervivencia son extensiones de la regresión logística binaria. Este capítulo se enfoca en las técnicas y aplicaciones de estos métodos avanzados.

10.2. Regresión Logística Multinomial

La regresión logística multinomial se utiliza cuando la variable dependiente tiene más de dos categorías.

10.2.1. Modelo Multinomial

El modelo de regresión logística multinomial generaliza el modelo binario para manejar múltiples categorías. La probabilidad de que una observación pertenezca a la categoría k se expresa como:

$$P(Y = k) = \frac{e^{\beta_{0k}+\beta_{1k}X_1+\ldots+\beta_{nk}X_n}}{\sum_{j=1}^{K} e^{\beta_{0j}+\beta_{1j}X_1+\ldots+\beta_{nj}X_n}}$$

10.2.2. Estimación de Parámetros

Los coeficientes del modelo multinomial se estiman utilizando máxima verosimilitud, similar a la regresión logística binaria.

10.3. Análisis de Supervivencia

El análisis de supervivencia se utiliza para modelar el tiempo hasta que ocurre un evento de interés, como la muerte o la falla de un componente.

10.3.1. Función de Supervivencia

La función de supervivencia $S(t)$ describe la probabilidad de que una observación sobreviva más allá del tiempo t:

$$S(t) = P(T > t)$$

10.3.2. Modelo de Riesgos Proporcionales de Cox

El modelo de Cox es un modelo de regresión semiparamétrico utilizado para analizar datos de supervivencia:

$$h(t|X) = h_0(t)e^{\beta_1 X_1 + \ldots + \beta_p X_p}$$

donde $h(t|X)$ *es la tasa de riesgo en el tiempo* t *dado el vector de covariables* X *y* $h_0(t)$ *es la tasa de riesgo basal.*

10.4. Implementación en R

10.4.1. Regresión Logística Multinomial

```
# Cargar el paquete necesario
library(nnet)

# Entrenar el modelo de regresi\'on log\'istica multinomial
model_multinom <- multinom(var1 ~ ., data = dataTrain)

# Resumen del modelo
summary(model_multinom)
```

10.4.2. Análisis de Supervivencia

```
# Cargar el paquete necesario
library(survival)

# Crear el objeto de supervivencia
surv_object <- Surv(time = data$time, event = data$status)

# Ajustar el modelo de Cox
model_cox <- coxph(surv_object ~ var1 + var2, data = data)

# Resumen del modelo
summary(model_cox)
```

CAPÍTULO 11

Implementación de Regresión Logística en Datos Reales

11.1. Introducción

Implementar un modelo de regresión logística en datos reales implica varias etapas, desde la limpieza de datos hasta la evaluación y validación del modelo. Este capítulo presenta un ejemplo práctico de la implementación de un modelo de regresión logística utilizando un conjunto de datos real.

11.2. Conjunto de Datos

Para este ejemplo, utilizaremos un conjunto de datos disponible públicamente que contiene información sobre clientes bancarios. El objetivo es predecir si un cliente suscribirá un depósito a plazo fijo.

11.3. Preparación de Datos

11.3.1. Carga y Exploración de Datos

Primero, cargamos y exploramos el conjunto de datos para entender su estructura y contenido.

```
# Cargar el paquete necesario
library(dplyr)

# Cargar el conjunto de datos
data <- read.csv("bank.csv")

# Explorar los datos
str(data)
summary(data)
```

11.3.2. Limpieza de Datos

El siguiente paso es limpiar los datos, lo que incluye tratar los valores faltantes y eliminar las duplicidades.

```
# Eliminar duplicados
data <- data %>% distinct()

# Imputar valores faltantes (si existen)
data <- data %>% mutate_if(is.numeric, ~ifelse(is.na(.), mean(., na.rm = TRUE), .))
```

11.3.3. Codificación de Variables Categóricas

Convertimos las variables categóricas en variables numéricas utilizando la codificación one-hot.

```
# Codificaci\'on one-hot de variables categ\'oricas
data <- data %>% mutate(across(where(is.factor), ~ as.numeric(as.factor(.))))
```

11.4. División de Datos

Dividimos los datos en conjuntos de entrenamiento y prueba.

```
# Dividir los datos en conjuntos de entrenamiento y prueba
set.seed(123)
trainIndex <- createDataPartition(data$y, p = .8, list = FALSE, times = 1)
dataTrain <- data[trainIndex,]
dataTest <- data[-trainIndex,]
```

11.5. Entrenamiento del Modelo

Entrenamos un modelo de regresión logística utilizando el conjunto de entrenamiento.

```
# Entrenar el modelo de regresi\'on log\'istica
model <- glm(y ~ ., data = dataTrain, family = "binomial")

# Resumen del modelo
summary(model)
```

11.6. Evaluación del Modelo

Evaluamos el rendimiento del modelo utilizando el conjunto de prueba.

```
# Predicciones en el conjunto de prueba
predictions <- predict(model, dataTest, type = "response")

# Convertir probabilidades a etiquetas
predicted_labels <- ifelse(predictions > 0.5, 1, 0)

# Matriz de confusi\'on
confusionMatrix(predicted_labels, dataTest$y)
```

11.7. Interpretación de los Resultados

Interpretamos los coeficientes del modelo y las odds ratios.

```
# Coeficientes del modelo
coef(model)

# Odds ratios
exp(coef(model))
```

CAPÍTULO 12

Resumen y Proyecto Final

12.1. Resumen de Conceptos Clave

En este curso, hemos cubierto una variedad de conceptos y técnicas esenciales para la regresión logística. Los conceptos clave incluyen:

- ***Fundamentos de Probabilidad y Estadística**: Comprensión de distribuciones de probabilidad, medidas de tendencia central y dispersión, inferencia estadística y pruebas de hipótesis.*
- ***Regresión Logística**: Modelo de regresión logística binaria y multinomial, interpretación de coeficientes y odds ratios, métodos de estimación y validación.*
- ***Preparación de Datos**: Limpieza de datos, tratamiento de valores faltantes, codificación de variables categóricas y selección de variables.*
- ***Evaluación del Modelo**: Curva ROC, AUC, matriz de confusión, precisión, recall, F1-score y validación cruzada.*
- ***Diagnóstico del Modelo**: Análisis de residuos, influencia, multicolinealidad y ajuste de parámetros.*
- ***Análisis de Supervivencia**: Modelos de supervivencia, función de supervivencia y modelos de riesgos proporcionales de Cox.*

12.2. Buenas Prácticas

Al implementar modelos de regresión logística, es importante seguir buenas prácticas para garantizar la precisión y la robustez de los modelos. Algunas buenas prácticas incluyen:

- ***Exploración y Preparación de Datos**: Realizar un análisis exploratorio exhaustivo y preparar los datos adecuadamente antes de construir el modelo.*
- ***Evaluación y Validación del Modelo**: Utilizar métricas adecuadas para evaluar el rendimiento del modelo y validar el modelo utilizando técnicas como la validación cruzada.*
- ***Interpretación de Resultados**: Interpretar correctamente los coeficientes del modelo y las odds ratios, y comunicar los resultados de manera clara y concisa.*
- ***Revisión y Ajuste del Modelo**: Diagnosticar problemas en el modelo y ajustar los parámetros para mejorar el rendimiento.*

12.3. Proyecto Final

Para aplicar los conceptos y técnicas aprendidos en este curso, te proponemos realizar un proyecto final utilizando un conjunto de datos de tu elección. El proyecto debe incluir las siguientes etapas:

12.3.1. Selección del Conjunto de Datos

Elige un conjunto de datos relevante que contenga una variable dependiente binaria o multinomial y varias variables independientes.

12.3.2. Exploración y Preparación de Datos

Realiza un análisis exploratorio de los datos y prepara los datos para el modelado. Esto incluye la limpieza de datos, el tratamiento de valores faltantes y la codificación de variables categóricas.

12.3.3. Entrenamiento y Evaluación del Modelo

Entrena un modelo de regresión logística utilizando el conjunto de datos preparado y evalúa su rendimiento utilizando métricas apropiadas.

12.3.4. Interpretación de Resultados

Interpreta los coeficientes del modelo y las odds ratios, y proporciona una explicación clara de los resultados.

12.3.5. Presentación del Proyecto

Presenta tu proyecto en un informe detallado que incluya la descripción del conjunto de datos, los pasos de preparación y modelado, los resultados del modelo y las conclusiones.

Parte III

SEGUNDA PARTE: ANALISIS DE SUPERVIVENCIA

CAPÍTULO 13

Introducción al Análisis de Supervivencia

13.1. Conceptos Básicos

El análisis de supervivencia es una rama de la estadística que se ocupa del análisis del tiempo que transcurre hasta que ocurre un evento de interés, comúnmente referido como ”tiempo de falla”. Este campo es ampliamente utilizado en medicina, biología, ingeniería, ciencias sociales, y otros campos.

13.2. Definición de Eventos y Tiempos

En el análisis de supervivencia, un .^{ev}ento”se refiere a la ocurrencia de un evento específico, como la muerte, la falla de un componente, la recaída de una enfermedad, etc. El ”tiempo de supervivencia.^{es} el tiempo que transcurre desde un punto de inicio definido hasta la ocurrencia del evento.

13.3. Censura

La censura ocurre cuando la información completa sobre el tiempo hasta el evento no está disponible para todos los individuos en el estudio. Hay tres tipos principales de censura:

- ***Censura a la derecha:*** *Ocurre cuando el evento de interés no se ha observado para algunos sujetos antes del final del estudio.*
- ***Censura a la izquierda:*** *Ocurre cuando el evento de interés ocurrió antes del inicio del periodo de observación.*
- ***Censura por intervalo:*** *Ocurre cuando el evento de interés se sabe que ocurrió en un intervalo de tiempo, pero no se conoce el momento exacto.*

13.4. Función de Supervivencia

La función de supervivencia, $S(t)$, *se define como la probabilidad de que un individuo sobreviva más allá de un tiempo* t. *Matemáticamente, se expresa como:*

$$S(t) = P(T > t)$$

donde T *es una variable aleatoria que representa el tiempo hasta el evento. La función de supervivencia tiene las siguientes propiedades:*

- $S(0) = 1$*: Esto indica que al inicio (tiempo* $t = 0$*), la probabilidad de haber experimentado el evento es cero, por lo tanto, la supervivencia es del 100*

- $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$: *A medida que el tiempo tiende al infinito, la probabilidad de que cualquier individuo aún no haya experimentado el evento tiende a cero.*
- $S(t)$ *es una función no creciente: Esto significa que a medida que el tiempo avanza, la probabilidad de supervivencia no aumenta.*

13.5. Función de Densidad de Probabilidad

La función de densidad de probabilidad $f(t)$ *describe la probabilidad de que el evento ocurra en un instante de tiempo específico. Se define como:*

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

donde $F(t)$ *es la función de distribución acumulada,* $F(t) = P(T \leq t)$*. La relación entre* $S(t)$ *y* $f(t)$ *es:*

$$f(t) = -\frac{dS(t)}{dt}$$

13.6. Función de Riesgo

La función de riesgo, $\lambda(t)$*, también conocida como función de tasa de fallas o hazard rate, se define como la tasa instantánea de ocurrencia del evento en el tiempo* t*, dado que el individuo ha sobrevivido hasta el tiempo* t*. Matemáticamente, se expresa como:*

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t \mid T \geq t)}{\Delta t}$$

Esto se puede reescribir usando $f(t)$ *y* $S(t)$ *como:*

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$$

13.7. Relación entre Función de Supervivencia y Función de Riesgo

La función de supervivencia y la función de riesgo están relacionadas a través de la siguiente ecuación:

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)\, du\right)$$

Esta fórmula se deriva del hecho de que la función de supervivencia es la probabilidad acumulativa de no haber experimentado el evento hasta el tiempo t*, y* $\lambda(t)$ *es la tasa instantánea de ocurrencia del evento.*
La función de riesgo también puede ser expresada como:

$$\lambda(t) = -\frac{d}{dt}\log S(t)$$

13.8. Deducción de la Función de Supervivencia

La relación entre la función de supervivencia y la función de riesgo se puede deducir integrando la función de riesgo:

$$\begin{aligned}
S(t) &= \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)\, du\right) \\
\log S(t) &= -\int_0^t \lambda(u)\, du \\
\frac{d}{dt}\log S(t) &= -\lambda(t) \\
\lambda(t) &= -\frac{d}{dt}\log S(t)
\end{aligned}$$

13.9. Ejemplo de Cálculo

Supongamos que tenemos una muestra de tiempos de supervivencia $T_1, T_2, \ldots, T_n$. *Podemos estimar la función de supervivencia empírica como:*

$$\hat{S}(t) = \frac{\textit{Número de individuos que sobreviven más allá de } t}{\textit{Número total de individuos en riesgo en } t}$$

y la función de riesgo empírica como:

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\textit{Número de eventos en } t}{\textit{Número de individuos en riesgo en } t}$$

13.10. Conclusión

El análisis de supervivencia es una herramienta poderosa para analizar datos de tiempo hasta evento. Entender los conceptos básicos como la función de supervivencia y la función de riesgo es fundamental para el análisis más avanzado.

CAPÍTULO 14

Función de Supervivencia y Función de Riesgo

14.1. Introducción

Este capítulo profundiza en la definición y propiedades de la función de supervivencia y la función de riesgo, dos conceptos fundamentales en el análisis de supervivencia. Entender estas funciones y su relación es crucial para modelar y analizar datos de tiempo hasta evento.

14.2. Función de Supervivencia

La función de supervivencia, $S(t)$, describe la probabilidad de que un individuo sobreviva más allá de un tiempo t. Formalmente, se define como:

$$S(t) = P(T > t)$$

donde T es una variable aleatoria que representa el tiempo hasta el evento.

14.2.1. Propiedades de la Función de Supervivencia

La función de supervivencia tiene varias propiedades importantes:

- $S(0) = 1$*: Indica que la probabilidad de haber experimentado el evento en el tiempo 0 es cero.*
- $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$*: A medida que el tiempo tiende al infinito, la probabilidad de supervivencia tiende a cero.*
- $S(t)$ *es una función no creciente: A medida que el tiempo avanza, la probabilidad de supervivencia no aumenta.*

14.2.2. Derivación de $S(t)$

Si la función de densidad de probabilidad $f(t)$ del tiempo de supervivencia T es conocida, la función de supervivencia puede derivarse como:

$$\begin{aligned} S(t) &= P(T > t) \\ &= 1 - P(T \leq t) \\ &= 1 - F(t) \\ &= 1 - \int_0^t f(u)\, du \end{aligned}$$

donde $F(t)$ es la función de distribución acumulada.

14.2.3. Ejemplo de Cálculo de $S(t)$

Consideremos un ejemplo donde el tiempo de supervivencia T sigue una distribución exponencial con tasa λ. La función de densidad de probabilidad $f(t)$ es:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

La función de distribución acumulada $F(t)$ es:

$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda u}\, du = 1 - e^{-\lambda t}$$

Por lo tanto, la función de supervivencia $S(t)$ es:

$$S(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$$

14.3. Función de Riesgo

La función de riesgo, $\lambda(t)$, proporciona la tasa instantánea de ocurrencia del evento en el tiempo t, dado que el individuo ha sobrevivido hasta el tiempo t. Matemáticamente, se define como:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t \mid T \geq t)}{\Delta t}$$

14.3.1. Relación entre $\lambda(t)$ y $f(t)$

La función de riesgo se puede relacionar con la función de densidad de probabilidad $f(t)$ y la función de supervivencia $S(t)$ de la siguiente manera:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$$

14.3.2. Derivación de $\lambda(t)$

La derivación de $\lambda(t)$ se basa en la definición condicional de la probabilidad:

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t \mid T \geq t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{P(t \leq T < t + \Delta t \text{ y } T \geq t)}{P(T \geq t)}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{P(t \leq T < t + \Delta t)}{P(T \geq t)}}{\Delta t} \\
&= \frac{f(t)}{S(t)}
\end{aligned}$$

14.4. Relación entre Función de Supervivencia y Función de Riesgo

La función de supervivencia y la función de riesgo están estrechamente relacionadas. La relación se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)\, du\right)$$

14.4.1. Deducción de la Relación

Para deducir esta relación, consideramos la derivada logarítmica de la función de supervivencia:

$$\begin{aligned}
S(t) &= \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)\,du\right)\\
\log S(t) &= -\int_0^t \lambda(u)\,du\\
\frac{d}{dt}\log S(t) &= -\lambda(t)\\
\lambda(t) &= -\frac{d}{dt}\log S(t)
\end{aligned}$$

14.5. Interpretación de la Función de Riesgo

La función de riesgo, $\lambda(t)$, se interpreta como la tasa instantánea de ocurrencia del evento por unidad de tiempo, dado que el individuo ha sobrevivido hasta el tiempo t. Es una medida local del riesgo de falla en un instante específico.

14.5.1. Ejemplo de Cálculo de $\lambda(t)$

Consideremos nuevamente el caso donde el tiempo de supervivencia T sigue una distribución exponencial con tasa λ. La función de densidad de probabilidad $f(t)$ es:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

La función de supervivencia $S(t)$ es:

$$S(t) = e^{-\lambda t}$$

La función de riesgo $\lambda(t)$ se calcula como:

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \frac{f(t)}{S(t)}\\
&= \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}}\\
&= \lambda
\end{aligned}$$

En este caso, $\lambda(t)$ es constante y igual a λ, lo que es una característica de la distribución exponencial.

14.6. Funciones de Riesgo Acumulada y Media Residual

La función de riesgo acumulada $H(t)$ se define como:

$$H(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du$$

Esta función proporciona la suma acumulada de la tasa de riesgo hasta el tiempo t.

La función de vida media residual $e(t)$ se define como la esperanza del tiempo de vida restante dado que el individuo ha sobrevivido hasta el tiempo t:

$$e(t) = \mathbb{E}[T - t \mid T > t] = \int_t^\infty S(u)\,du$$

14.7. Ejemplo de Cálculo de Función de Riesgo Acumulada y Vida Media Residual

Consideremos nuevamente la distribución exponencial con tasa λ*. La función de riesgo acumulada* $H(t)$ *es:*

$$
\begin{aligned}
H(t) &= \int_0^t \lambda \, du \\
&= \lambda t
\end{aligned}
$$

La función de vida media residual $e(t)$ *es:*

$$
\begin{aligned}
e(t) &= \int_t^\infty e^{-\lambda u} \, du \\
&= \left[\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda u} \right]_t^\infty \\
&= \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}
$$

En este caso, la vida media residual es constante e igual a $\frac{1}{\lambda}$*, otra característica de la distribución exponencial.*

14.8. Conclusión

La función de supervivencia y la función de riesgo son herramientas fundamentales en el análisis de supervivencia. Entender su definición, propiedades, y la relación entre ellas es esencial para modelar y analizar correctamente los datos de tiempo hasta evento. Las funciones de riesgo acumulada y vida media residual proporcionan información adicional sobre la dinámica del riesgo a lo largo del tiempo.

CAPÍTULO 15

Estimador de Kaplan-Meier

15.1. Introducción

El estimador de Kaplan-Meier, también conocido como la función de supervivencia empírica, es una herramienta no paramétrica para estimar la función de supervivencia a partir de datos censurados. Este método es especialmente útil cuando los tiempos de evento están censurados a la derecha.

15.2. Definición del Estimador de Kaplan-Meier

El estimador de Kaplan-Meier se define como:

$$\hat{S}(t) = \prod_{t_i \leq t} \left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right)$$

donde:

- t_i *es el tiempo del i-ésimo evento,*
- d_i *es el número de eventos que ocurren en* t_i*,*
- n_i *es el número de individuos en riesgo justo antes de* t_i*.*

15.3. Propiedades del Estimador de Kaplan-Meier

El estimador de Kaplan-Meier tiene las siguientes propiedades:

- *Es una función escalonada que disminuye en los tiempos de los eventos observados.*
- *Puede manejar datos censurados a la derecha.*
- *Proporciona una estimación no paramétrica de la función de supervivencia.*

15.3.1. Función Escalonada

La función escalonada del estimador de Kaplan-Meier significa que $\hat{S}(t)$ *permanece constante entre los tiempos de los eventos y disminuye en los tiempos de los eventos. Matemáticamente, si* t_i *es el tiempo del i-ésimo evento, entonces:*

$$\hat{S}(t) = \hat{S}(t_i) \quad \textit{para } t_i \leq t < t_{i+1}$$

15.3.2. Manejo de Datos Censurados

El estimador de Kaplan-Meier maneja datos censurados a la derecha al ajustar la estimación de la función de supervivencia sólo en los tiempos en que ocurren eventos. Si un individuo es censurado antes de experimentar el evento, no contribuye a la disminución de $\hat{S}(t)$ *en el tiempo de censura. Esto asegura que la censura no sesga la estimación de la supervivencia.*

15.3.3. Estimación No Paramétrica

El estimador de Kaplan-Meier es no paramétrico porque no asume ninguna forma específica para la distribución de los tiempos de supervivencia. En cambio, utiliza la información empírica disponible para estimar la función de supervivencia.

15.4. Deducción del Estimador de Kaplan-Meier

La deducción del estimador de Kaplan-Meier se basa en el principio de probabilidad condicional. Consideremos un conjunto de tiempos de supervivencia observados $t_1, t_2, \ldots, t_k$ *con eventos en cada uno de estos tiempos. El estimador de la probabilidad de supervivencia más allá del tiempo* t *es el producto de las probabilidades de sobrevivir más allá de cada uno de los tiempos de evento observados hasta* t.

15.4.1. Probabilidad Condicional

La probabilidad de sobrevivir más allá de t_i, *dado que el individuo ha sobrevivido justo antes de* t_i, *es:*

$$P(T > t_i \mid T \geq t_i) = 1 - \frac{d_i}{n_i}$$

donde d_i *es el número de eventos en* t_i *y* n_i *es el número de individuos en riesgo justo antes de* t_i.

15.4.2. Producto de Probabilidades Condicionales

La probabilidad de sobrevivir más allá de un tiempo t *cualquiera, dada la secuencia de tiempos de evento, es el producto de las probabilidades condicionales de sobrevivir más allá de cada uno de los tiempos de evento observados hasta* t. *Así, el estimador de Kaplan-Meier se obtiene como:*

$$\hat{S}(t) = \prod_{t_i \leq t} \left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right)$$

15.5. Ejemplo de Cálculo

Supongamos que tenemos los siguientes tiempos de supervivencia observados para cinco individuos: 2, 3, 5, 7, 8. Supongamos además que tenemos censura a la derecha en el tiempo 10. Los tiempos de evento y el número de individuos en riesgo justo antes de cada evento son:

Tiempo (t_i)	Eventos (d_i)	En Riesgo (n_i)
2	1	5
3	1	4
5	1	3
7	1	2
8	1	1

Cuadro 15.1: Ejemplo de cálculo del estimador de Kaplan-Meier

Usando estos datos, el estimador de Kaplan-Meier se calcula como:

$$\begin{aligned}
\hat{S}(2) &= 1 - \frac{1}{5} = 0{,}8 \\
\hat{S}(3) &= 0{,}8 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 0{,}8 \times 0{,}75 = 0{,}6 \\
\hat{S}(5) &= 0{,}6 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 0{,}6 \times 0{,}6667 = 0{,}4 \\
\hat{S}(7) &= 0{,}4 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2 \\
\hat{S}(8) &= 0{,}2 \times \left(1 - \frac{1}{1}\right) = 0{,}2 \times 0 = 0
\end{aligned}$$

15.6. Intervalos de Confianza para el Estimador de Kaplan-Meier

Para calcular intervalos de confianza para el estimador de Kaplan-Meier, se puede usar la transformación logarítmica y la aproximación normal. Un intervalo de confianza aproximado para $\log(-\log(\hat{S}(t)))$ *se obtiene como:*

$$\log(-\log(\hat{S}(t))) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{d_i(n_i - d_i)}}$$

donde $z_{\alpha/2}$ *es el percentil correspondiente de la distribución normal estándar.*

15.7. Transformación Logarítmica Inversa

La transformación logarítmica inversa se utiliza para obtener los límites del intervalo de confianza para $S(t)$*:*

$$\hat{S}(t) = \exp\left(-\exp\left(\log(-\log(\hat{S}(t))) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{d_i(n_i - d_i)}}\right)\right)$$

15.8. Cálculo Detallado de Intervalos de Confianza

Para un cálculo más detallado de los intervalos de confianza, consideremos un tiempo específico t_j*. La varianza del estimador de Kaplan-Meier en* t_j *se puede estimar usando Greenwood's formula:*

$$Var(\hat{S}(t_j)) = \hat{S}(t_j)^2 \sum_{t_i \le t_j} \frac{d_i}{n_i(n_i - d_i)}$$

El intervalo de confianza aproximado para $\hat{S}(t_j)$ *es entonces:*

$$\hat{S}(t_j) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{Var(\hat{S}(t_j))}$$

15.9. Ejemplo de Intervalo de Confianza

Supongamos que en el ejemplo anterior queremos calcular el intervalo de confianza para $\hat{S}(3)$*. Primero, calculamos la varianza:*

$$\begin{aligned}
Var(\hat{S}(3)) &= \hat{S}(3)^2\left(\frac{1}{5\times 4} + \frac{1}{4\times 3}\right)\\
&= 0{,}6^2\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{12}\right)\\
&= 0{,}36\,(0{,}05 + 0{,}0833)\\
&= 0{,}36 \times 0{,}1333\\
&= 0{,}048
\end{aligned}$$

El intervalo de confianza es entonces:

$$0{,}6 \pm 1{,}96\sqrt{0{,}048} = 0{,}6 \pm 1{,}96 \times 0{,}219 = 0{,}6 \pm 0{,}429$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza para $\hat{S}(3)$ *es aproximadamente* $(0{,}171, 1{,}029)$*. Dado que una probabilidad no puede exceder 1, ajustamos el intervalo a* $(0{,}171, 1{,}0)$*.*

15.10. Interpretación del Estimador de Kaplan-Meier

El estimador de Kaplan-Meier proporciona una estimación empírica de la función de supervivencia que es fácil de interpretar y calcular. Su capacidad para manejar datos censurados lo hace especialmente útil en estudios de supervivencia.

15.11. Conclusión

El estimador de Kaplan-Meier es una herramienta poderosa para estimar la función de supervivencia en presencia de datos censurados. Su cálculo es relativamente sencillo y proporciona una estimación no paramétrica robusta de la supervivencia a lo largo del tiempo. La interpretación adecuada de este estimador y su intervalo de confianza asociado es fundamental para el análisis de datos de supervivencia.

CAPÍTULO 16

Comparación de Curvas de Supervivencia

16.1. Introducción

Comparar curvas de supervivencia es crucial para determinar si existen diferencias significativas en las tasas de supervivencia entre diferentes grupos. Las pruebas de hipótesis, como el test de log-rank, son herramientas comunes para esta comparación.

16.2. Test de Log-rank

El test de log-rank se utiliza para comparar las curvas de supervivencia de dos o más grupos. La hipótesis nula es que no hay diferencia en las funciones de riesgo entre los grupos.

16.2.1. Fórmula del Test de Log-rank

El estadístico del test de log-rank se define como:

$$\chi^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k}(O_i - E_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} V_i}$$

donde:

- O_i *es el número observado de eventos en el grupo* i.
- E_i *es el número esperado de eventos en el grupo* i.
- V_i *es la varianza del número de eventos en el grupo* i.

16.2.2. Cálculo de E_i y V_i

El número esperado de eventos E_i *y la varianza* V_i *se calculan como:*

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{d_i \cdot n_i}{n} \\ V_i &= \frac{d_i \cdot (n - d_i) \cdot n_i \cdot (n - n_i)}{n^2 \cdot (n-1)} \end{aligned}$$

donde:

- d_i *es el número total de eventos en el grupo* i.
- n_i *es el número de individuos en riesgo en el grupo* i.
- n *es el número total de individuos en todos los grupos.*

16.3. Ejemplo de Cálculo del Test de Log-rank

Supongamos que tenemos dos grupos con los siguientes datos de eventos:

Grupo	Tiempo (t_i)	Eventos (O_i)	En Riesgo (n_i)
1	2	1	5
1	4	1	4
2	3	1	4
2	5	1	3

Cuadro 16.1: Ejemplo de datos para el test de log-rank

Calculemos E_i y V_i para cada grupo:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{2\cdot 5}{9} + \frac{2\cdot 4}{8} = \frac{10}{9} + \frac{8}{8} = 1{,}11 + 1 = 2{,}11 \\
V_1 &= \frac{2\cdot 7\cdot 5\cdot 4}{81\cdot 8} = \frac{2\cdot 7\cdot 5\cdot 4}{648} = \frac{280}{648} = 0{,}432 \\
E_2 &= \frac{2\cdot 4}{9} + \frac{2\cdot 3}{8} = \frac{8}{9} + \frac{6}{8} = 0{,}89 + 0{,}75 = 1{,}64 \\
V_2 &= \frac{2\cdot 7\cdot 4\cdot 4}{81\cdot 8} = \frac{2\cdot 7\cdot 4\cdot 4}{648} = \frac{224}{648} = 0{,}346
\end{aligned}$$

El estadístico de log-rank se calcula como:

$$\begin{aligned}
\chi^2 &= \frac{((1-2{,}11)+(1-1{,}64))^2}{0{,}432+0{,}346} \\
&= \frac{(-1{,}11-0{,}64)^2}{0{,}778} \\
&= \frac{3{,}04}{0{,}778} \\
&= 3{,}91
\end{aligned}$$

El valor p se puede obtener comparando χ^2 con una distribución χ^2 con un grado de libertad (dado que estamos comparando dos grupos).

16.4. Interpretación del Test de Log-rank

Un valor p pequeño (generalmente menos de 0.05) indica que hay una diferencia significativa en las curvas de supervivencia entre los grupos. Un valor p grande sugiere que no hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula de que las curvas de supervivencia son iguales.

16.5. Pruebas Alternativas

Además del test de log-rank, existen otras pruebas para comparar curvas de supervivencia, como el test de Wilcoxon (Breslow), que da más peso a los eventos en tiempos tempranos.

16.6. Conclusión

El test de log-rank es una herramienta esencial para comparar curvas de supervivencia entre diferentes grupos. Su cálculo se basa en la diferencia entre los eventos observados y esperados en cada grupo, y su interpretación puede ayudar a identificar diferencias significativas en la supervivencia.

CAPÍTULO 17

Modelos de Riesgos Proporcionales de Cox

17.1. Introducción

El modelo de riesgos proporcionales de Cox, propuesto por David Cox en 1972, es una de las herramientas más utilizadas en el análisis de supervivencia. Este modelo permite evaluar el efecto de varias covariables en el tiempo hasta el evento, sin asumir una forma específica para la distribución de los tiempos de supervivencia.

17.2. Definición del Modelo de Cox

El modelo de Cox se define como:

$$\lambda(t \mid X) = \lambda_0(t) \exp(\beta^T X)$$

donde:

- $\lambda(t \mid X)$ *es la función de riesgo en el tiempo* t *dado el vector de covariables* X.
- $\lambda_0(t)$ *es la función de riesgo basal en el tiempo* t.
- β *es el vector de coeficientes del modelo.*
- X *es el vector de covariables.*

17.3. Supuesto de Proporcionalidad de Riesgos

El modelo de Cox asume que las razones de riesgo entre dos individuos son constantes a lo largo del tiempo. Matemáticamente, si X_i *y* X_j *son las covariables de dos individuos, la razón de riesgos se expresa como:*

$$\frac{\lambda(t \mid X_i)}{\lambda(t \mid X_j)} = \frac{\lambda_0(t) \exp(\beta^T X_i)}{\lambda_0(t) \exp(\beta^T X_j)} = \exp(\beta^T (X_i - X_j))$$

17.4. Estimación de los Parámetros

Los parámetros β *se estiman utilizando el método de máxima verosimilitud parcial. La función de verosimilitud parcial se define como:*

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{k} \frac{\exp(\beta^T X_i)}{\sum_{j \in R(t_i)} \exp(\beta^T X_j)}$$

donde $R(t_i)$ *es el conjunto de individuos en riesgo en el tiempo* t_i.

17.4.1. Función de Log-Verosimilitud Parcial

La función de log-verosimilitud parcial es:

$$\log L(\beta) = \sum_{i=1}^{k} \left(\beta^T X_i - \log \sum_{j \in R(t_i)} \exp(\beta^T X_j) \right)$$

17.4.2. Derivadas Parciales y Maximización

Para encontrar los estimadores de máxima verosimilitud, resolvemos el sistema de ecuaciones obtenido al igualar a cero las derivadas parciales de $\log L(\beta)$ *con respecto a* β*:*

$$\frac{\partial \log L(\beta)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{k} \left(X_i - \frac{\sum_{j \in R(t_i)} X_j \exp(\beta^T X_j)}{\sum_{j \in R(t_i)} \exp(\beta^T X_j)} \right) = 0$$

17.5. Interpretación de los Coeficientes

Cada coeficiente β_i *representa el logaritmo de la razón de riesgos asociado con un incremento unitario en la covariable* X_i*. Un valor positivo de* β_i *indica que un aumento en* X_i *incrementa el riesgo del evento, mientras que un valor negativo indica una reducción del riesgo.*

17.6. Evaluación del Modelo

El modelo de Cox se evalúa utilizando varias técnicas, como el análisis de residuos de Schoenfeld para verificar el supuesto de proporcionalidad de riesgos, y el uso de curvas de supervivencia estimadas para evaluar la bondad de ajuste.

17.6.1. Residuos de Schoenfeld

Los residuos de Schoenfeld se utilizan para evaluar la proporcionalidad de riesgos. Para cada evento en el tiempo t_i*, el residuo de Schoenfeld para la covariable* X_j *se define como:*

$$r_{ij} = X_{ij} - \hat{X}_{ij}$$

donde $\hat{X}_{ij}$ *es la covariable ajustada.*

17.6.2. Curvas de Supervivencia Ajustadas

Las curvas de supervivencia ajustadas se obtienen utilizando la función de riesgo basal estimada y los coeficientes del modelo. La función de supervivencia ajustada se define como:

$$\hat{S}(t \mid X) = \hat{S}_0(t)^{\exp(\beta^T X)}$$

donde $\hat{S}_0(t)$ *es la función de supervivencia basal estimada.*

17.7. Ejemplo de Aplicación del Modelo de Cox

Consideremos un ejemplo con tres covariables: edad, sexo y tratamiento. Supongamos que los datos se ajustan a un modelo de Cox y obtenemos los siguientes coeficientes:

$$\hat{\beta}_{edad} = 0{,}02, \quad \hat{\beta}_{sexo} = -0{,}5, \quad \hat{\beta}_{tratamiento} = 1{,}2$$

La función de riesgo ajustada se expresa como:

$$\lambda(t \mid X) = \lambda_0(t) \exp(0{,}02 \cdot edad - 0{,}5 \cdot sexo + 1{,}2 \cdot tratamiento)$$

17.8. Conclusión

El modelo de riesgos proporcionales de Cox es una herramienta poderosa para analizar datos de supervivencia con múltiples covariables. Su flexibilidad y la falta de suposiciones fuertes sobre la distribución de los tiempos de supervivencia lo hacen ampliamente aplicable en diversas disciplinas.

CAPÍTULO 18

Diagnóstico y Validación de Modelos de Cox

18.1. Introducción

Una vez ajustado un modelo de Cox, es crucial realizar diagnósticos y validaciones para asegurar que el modelo es apropiado y que los supuestos subyacentes son válidos. Esto incluye la verificación del supuesto de proporcionalidad de riesgos y la evaluación del ajuste del modelo.

18.2. Supuesto de Proporcionalidad de Riesgos

El supuesto de proporcionalidad de riesgos implica que la razón de riesgos entre dos individuos es constante a lo largo del tiempo. Si este supuesto no se cumple, las inferencias hechas a partir del modelo pueden ser incorrectas.

18.2.1. Residuos de Schoenfeld

Los residuos de Schoenfeld se utilizan para evaluar la proporcionalidad de riesgos. Para cada evento en el tiempo t_i, el residuo de Schoenfeld para la covariable X_j se define como:

$$r_{ij} = X_{ij} - \hat{X}_{ij}$$

donde $\hat{X}_{ij}$ es la covariable ajustada. Si los residuos de Schoenfeld no muestran una tendencia sistemática cuando se trazan contra el tiempo, el supuesto de proporcionalidad de riesgos es razonable.

18.3. Bondad de Ajuste

La bondad de ajuste del modelo de Cox se evalúa comparando las curvas de supervivencia observadas y ajustadas, y utilizando estadísticas de ajuste global.

18.3.1. Curvas de Supervivencia Ajustadas

Las curvas de supervivencia aaustadas se obtienen utilizando la función de riesgo basal estimada y los coeficientes del modelo. La función de supervivencia ajustada se define como:

$$\hat{S}(t \mid X) = \hat{S}_0(t)^{\exp(\beta^T X)}$$

donde $\hat{S}_0(t)$ es la función de supervivencia basal estimada. Comparar estas curvas con las curvas de Kaplan-Meier para diferentes niveles de las covariables puede proporcionar una validación visual del ajuste del modelo.

18.3.2. Estadísticas de Ajuste Global

Las estadísticas de ajuste global, como el test de la desviación y el test de la bondad de ajuste de Grambsch y Therneau, se utilizan para evaluar el ajuste global del modelo de Cox.

18.4. Diagnóstico de Influencia

El diagnóstico de influencia identifica observaciones individuales que tienen un gran impacto en los estimados del modelo. Los residuos de devianza y los residuos de martingala se utilizan comúnmente para este propósito.

18.4.1. Residuos de Deviance

Los residuos de deviance se definen como:

$$D_i = sign(O_i - E_i)\sqrt{-2\left(O_i \log \frac{O_i}{E_i} - (O_i - E_i)\right)}$$

donde O_i *es el número observado de eventos y* E_i *es el número esperado de eventos. Observaciones con residuos de deviance grandes en valor absoluto pueden ser influyentes.*

18.4.2. Residuos de Martingala

Los residuos de martingala se definen como:

$$M_i = O_i - E_i$$

donde O_i *es el número observado de eventos y* E_i *es el número esperado de eventos. Los residuos de martingala se utilizan para detectar observaciones que no se ajustan bien al modelo.*

18.5. Ejemplo de Diagnóstico

Consideremos un modelo de Cox ajustado con las covariables edad, sexo y tratamiento. Para diagnosticar la influencia de observaciones individuales, calculamos los residuos de deviance y martingala para cada observación.

Observación	Edad	Sexo	Tratamiento	Residuo de Deviance
1	50	0	1	1.2
2	60	1	0	-0.5
3	45	0	1	-1.8
4	70	1	0	0.3

Cuadro 18.1: Residuos de deviance para observaciones individuales

Observaciones con residuos de deviance grandes en valor absoluto (como la observación 3) pueden ser influyentes y requieren una revisión adicional.

18.6. Conclusión

El diagnóstico y la validación son pasos críticos en el anślisis de modelos de Cox. Evaluar el supuesto de proporcionalidad de riesgos, la bondad de ajuste y la influencia de observaciones individuales asegura que las inferencias y conclusiones derivadas del modelo sean vślidas y fiables.

CAPÍTULO 19

Modelos Acelerados de Fallos

19.1. Introducción

Los modelos acelerados de fallos (AFT) son una alternativa a los modelos de riesgos proporcionales de Cox. En lugar de asumir que las covariables afectan la tasa de riesgo, los modelos AFT asumen que las covariables multiplican el tiempo de supervivencia por una constante.

19.2. Definición del Modelo AFT

Un modelo AFT se expresa como:

$$T = T_0 \exp(\beta^T X)$$

donde:

- T *es el tiempo de supervivencia observado.*
- T_0 *es el tiempo de supervivencia bajo condiciones basales.*
- β *es el vector de coeficientes del modelo.*
- X *es el vector de covariables.*

19.2.1. Transformación Logarítmica

El modelo AFT se puede transformar logarítmicamente para obtener una forma lineal:

$$\log(T) = \log(T_0) + \beta^T X$$

19.3. Estimación de los Parámetros

Los parámetros del modelo AFT se estiman utilizando el método de máxima verosimilitud. La función de verosimilitud se define como:

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i \mid X_i; \beta)$$

donde $f(t_i \mid X_i; \beta)$ *es la función de densidad de probabilidad del tiempo de supervivencia* t_i *dado el vector de covariables* X_i *y los parámetros* β.

19.3.1. Función de Log-Verosimilitud

La función de log-verosimilitud es:

$$\log L(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \log f(t_i \mid X_i; \beta)$$

19.3.2. Maximización de la Verosimilitud

Los estimadores de máxima verosimilitud se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones obtenido al igualar a cero las derivadas parciales de $\log L(\beta)$ *con respecto a* β*:*

$$\frac{\partial \log L(\beta)}{\partial \beta} = 0$$

19.4. Distribuciones Comunes en Modelos AFT

En los modelos AFT, el tiempo de supervivencia T *puede seguir varias distribuciones comunes, como la exponencial, Weibull, log-normal y log-logística. Cada una de estas distribuciones tiene diferentes propiedades y aplicaciones.*

19.4.1. Modelo Exponencial AFT

En un modelo exponencial AFT, el tiempo de supervivencia T *sigue una distribución exponencial con parámetro* λ*:*

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$$

La función de supervivencia es:

$$S(t) = \exp(-\lambda t)$$

La transformación logarítmica del tiempo de supervivencia es:

$$\log(T) = \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \beta^T X$$

19.4.2. Modelo Weibull AFT

En un modelo Weibull AFT, el tiempo de supervivencia T *sigue una distribución Weibull con parámetros* λ *y* k*:*

$$f(t) = \lambda k t^{k-1} \exp(-\lambda t^k)$$

La función de supervivencia es:

$$S(t) = \exp(-\lambda t^k)$$

La transformación logarítmica del tiempo de supervivencia es:

$$\log(T) = \log\left(\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/k}\right) + \frac{\beta^T X}{k}$$

19.5. Interpretación de los Coeficientes

En los modelos AFT, los coeficientes β_i *se interpretan como factores multiplicativos del tiempo de supervivencia. Un valor positivo de* β_i *indica que un aumento en la covariable* X_i *incrementa el tiempo de supervivencia, mientras que un valor negativo indica una reducción del tiempo de supervivencia.*

19.6. Ejemplo de Aplicación del Modelo AFT

Consideremos un ejemplo con tres covariables: edad, sexo y tratamiento. Supongamos que los datos se ajustan a un modelo Weibull AFT y obtenemos los siguientes coeficientes:

$$\hat{\beta}_{edad} = -0{,}02, \quad \hat{\beta}_{sexo} = 0{,}5, \quad \hat{\beta}_{tratamiento} = -1{,}2$$

La función de supervivencia ajustada se expresa como:

$$S(t \mid X) = \exp\left(-\left(\frac{t\exp(-0{,}02 \cdot edad + 0{,}5 \cdot sexo - 1{,}2 \cdot tratamiento)}{\lambda}\right)^k\right)$$

19.7. Conclusión

Los modelos AFT proporcionan una alternativa flexible a los modelos de riesgos proporcionales de Cox. Su enfoque en la multiplicación del tiempo de supervivencia por una constante permite una interpretación intuitiva y aplicaciones en diversas áreas.

CAPÍTULO 20

Análisis Multivariado de Supervivencia

20.1. Introducción

El análisis multivariado de supervivencia extiende los modelos de supervivencia para incluir múltiples covariables, permitiendo evaluar su efecto simultáneo sobre el tiempo hasta el evento. Los modelos de Cox y AFT son comúnmente utilizados en este contexto.

20.2. Modelo de Cox Multivariado

El modelo de Cox multivariado se define como:

$$\lambda(t \mid X) = \lambda_0(t) \exp(\beta^T X)$$

donde X es un vector de covariables.

20.2.1. Estimación de los Parámetros

Los parámetros β se estiman utilizando el método de máxima verosimilitud parcial, como se discutió anteriormente. La función de verosimilitud parcial se maximiza para obtener los estimadores de los coeficientes.

20.3. Modelo AFT Multivariado

El modelo AFT multivariado se expresa como:

$$T = T_0 \exp(\beta^T X)$$

20.3.1. Estimación de los Parámetros

Los parámetros β se estiman utilizando el método de máxima verosimilitud, similar al caso univariado. La función de verosimilitud se maximiza para obtener los estimadores de los coeficientes.

20.4. Interacción y Efectos No Lineales

En el análisis multivariado, es importante considerar la posibilidad de interacciones entre covariables y efectos no lineales. Estos se pueden incluir en los modelos extendiendo las funciones de riesgo o supervivencia.

20.4.1. Interacciones

Las interacciones entre covariables se pueden modelar añadiendo términos de interacción en el modelo:

$$\lambda(t \mid X) = \lambda_0(t) \exp(\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 X_2)$$

donde $X_1 X_2$ *es el término de interacción.*

20.4.2. Efectos No Lineales

Los efectos no lineales se pueden modelar utilizando funciones no lineales de las covariables, como polinomios o splines:

$$\lambda(t \mid X) = \lambda_0(t) \exp(\beta_1 X + \beta_2 X^2)$$

20.5. Selección de Variables

La selección de variables es crucial en el análisis multivariado para evitar el sobreajuste y mejorar la interpretabilidad del modelo. Métodos como la regresión hacia atrás, la regresión hacia adelante y la selección por criterios de información (AIC, BIC) son comúnmente utilizados.

20.5.1. Regresión Hacia Atrás

La regresión hacia atrás comienza con todas las covariables en el modelo y elimina iterativamente la covariable menos significativa hasta que todas las covariables restantes sean significativas.

20.5.2. Regresión Hacia Adelante

La regresión hacia adelante comienza con un modelo vacío y añade iterativamente la covariable más significativa hasta que no se pueda añadir ninguna covariable adicional significativa.

20.5.3. Criterios de Información

Los criterios de información, como el AIC (Akaike Information Criterion) y el BIC (Bayesian Information Criterion), se utilizan para seleccionar el modelo que mejor se ajusta a los datos con la menor complejidad posible:

$$\begin{aligned} AIC &= -2\log L + 2k \\ BIC &= -2\log L + k\log n \end{aligned}$$

donde L *es la función de verosimilitud del modelo,* k *es el número de parámetros en el modelo y* n *es el tamaño de la muestra.*

20.6. Ejemplo de Análisis Multivariado

Consideremos un ejemplo con tres covariables: edad, sexo y tratamiento. Ajustamos un modelo de Cox multivariado y obtenemos los siguientes coeficientes:

$$\hat{\beta}_{edad} = 0{,}03, \quad \hat{\beta}_{sexo} = -0{,}6, \quad \hat{\beta}_{tratamiento} = 1{,}5$$

La función de riesgo ajustada se expresa como:

$$\lambda(t \mid X) = \lambda_0(t) \exp(0{,}03 \cdot edad - 0{,}6 \cdot sexo + 1{,}5 \cdot tratamiento)$$

20.7. Conclusión

El análisis multivariado de supervivencia permite evaluar el efecto conjunto de múltiples covariables sobre el tiempo hasta el evento. La inclusión de interacciones y efectos no lineales, junto con la selección adecuada de variables, mejora la precisión y la interpretabilidad de los modelos de supervivencia.

CAPÍTULO 21

Supervivencia en Datos Complicados

21.1. Introducción

El análisis de supervivencia en datos complicados se refiere a la evaluación de datos de supervivencia que presentan desafíos adicionales, como la censura por intervalo, datos truncados y datos con múltiples tipos de eventos. Estos escenarios requieren métodos avanzados para un análisis adecuado.

21.2. Censura por Intervalo

La censura por intervalo ocurre cuando el evento de interés se sabe que ocurrió dentro de un intervalo de tiempo, pero no se conoce el momento exacto. Esto es común en estudios donde las observaciones se realizan en puntos de tiempo discretos.

21.2.1. Modelo para Datos Censurados por Intervalo

Para datos censurados por intervalo, la función de verosimilitud se modifica para incluir la probabilidad de que el evento ocurra dentro de un intervalo:

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} P(T_i \in [L_i, U_i] \mid X_i; \beta)$$

donde $[L_i, U_i]$ *es el intervalo de tiempo durante el cual se sabe que ocurrió el evento para el individuo* i.

21.3. Datos Truncados

Los datos truncados ocurren cuando los tiempos de supervivencia están sujetos a un umbral, y solo se observan los individuos cuyos tiempos de supervivencia superan (o están por debajo de) ese umbral. Existen dos tipos principales de truncamiento: truncamiento a la izquierda y truncamiento a la derecha.

21.3.1. Modelo para Datos Truncados

Para datos truncados a la izquierda, la función de verosimilitud se ajusta para considerar solo los individuos que superan el umbral de truncamiento:

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{f(t_i \mid X_i; \beta)}{1 - F(L_i \mid X_i; \beta)}$$

donde L_i *es el umbral de truncamiento para el individuo* i.

21.4. Análisis de Competing Risks

En estudios donde pueden ocurrir múltiples tipos de eventos (competing risks), es crucial modelar adecuadamente el riesgo asociado con cada tipo de evento. La probabilidad de ocurrencia de cada evento compite con las probabilidades de ocurrencia de otros eventos.

21.4.1. Modelo de Competing Risks

Para un análisis de competing risks, la función de riesgo se descompone en funciones de riesgo específicas para cada tipo de evento:

$$\lambda(t) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)$$

donde $\lambda_j(t)$ *es la función de riesgo para el evento* j.

21.5. Métodos de Imputación

Los métodos de imputación se utilizan para manejar datos faltantes o censurados en estudios de supervivencia. La imputación múltiple es un enfoque común que crea múltiples conjuntos de datos completos imputando valores faltantes varias veces y luego combina los resultados.

21.5.1. Imputación Múltiple

La imputación múltiple para datos de supervivencia se realiza en tres pasos:

a) *Imputar los valores faltantes múltiples veces para crear varios conjuntos de datos completos.*

b) *Analizar cada conjunto de datos completo por separado utilizando métodos de supervivencia estándar.*

c) *Combinar los resultados de los análisis separados para obtener estimaciones y varianzas combinadas.*

21.6. Ejemplo de Análisis con Datos Complicados

Consideremos un estudio con datos censurados por intervalo y competing risks. Ajustamos un modelo para los datos censurados por intervalo y obtenemos los siguientes coeficientes para las covariables edad y tratamiento:

$$\hat{\beta}_{edad} = 0{,}04, \quad \hat{\beta}_{tratamiento} = -0{,}8$$

La función de supervivencia ajustada se expresa como:

$$S(t \mid X) = \exp\left(-\left(\frac{t\exp(0{,}04 \cdot \mathit{edad} - 0{,}8 \cdot \mathit{tratamiento})}{\lambda}\right)^k\right)$$

21.7. Conclusión

El análisis de supervivencia en datos complicados requiere métodos avanzados para manejar censura por intervalo, datos truncados y competing risks. La aplicación de modelos adecuados y métodos de imputación asegura un análisis preciso y completo de estos datos complejos.

CAPÍTULO 22

Proyecto Final y Revisión

22.1. Introducción

El proyecto final proporciona una oportunidad para aplicar los conceptos y técnicas aprendidas en el curso de análisis de supervivencia. Este capítulo incluye una guía para desarrollar un proyecto de análisis de supervivencia y una revisión de los conceptos clave.

22.2. Desarrollo del Proyecto

El proyecto final debe incluir los siguientes componentes:

a) *Definición del problema: Identificar la pregunta de investigación y los objetivos del análisis de supervivencia.*

b) *Descripción de los datos: Presentar los datos utilizados, incluyendo las covariables y la estructura de los datos.*

c) *Análisis exploratorio: Realizar un análisis descriptivo de los datos, incluyendo la censura y la distribución de los tiempos de supervivencia.*

d) *Ajuste del modelo: Ajustar modelos de supervivencia adecuados (Kaplan-Meier, Cox, AFT) y evaluar su bondad de ajuste.*

e) *Diagnóstico del modelo: Realizar diagnósticos para evaluar los supuestos del modelo y la influencia de observaciones individuales.*

f) *Interpretación de resultados: Interpretar los coeficientes del modelo y las curvas de supervivencia ajustadas.*

g) *Conclusiones: Resumir los hallazgos del análisis y proporcionar recomendaciones basadas en los resultados.*

22.3. Revisión de Conceptos Clave

Una revisión de los conceptos clave del análisis de supervivencia incluye:

- ***Función de Supervivencia:*** *Define la probabilidad de sobrevivir más allá de un tiempo específico.*
- ***Función de Riesgo:*** *Define la tasa instantánea de ocurrencia del evento.*
- ***Estimador de Kaplan-Meier:*** *Proporciona una estimación no paramétrica de la función de supervivencia.*
- ***Test de Log-rank:*** *Compara curvas de supervivencia entre diferentes grupos.*
- ***Modelo de Cox:*** *Evalúa el efecto de múltiples covariables sobre el tiempo hasta el evento, asumiendo proporcionalidad de riesgos.*
- ***Modelos AFT:*** *Modelan el efecto de las covariables multiplicando el tiempo de supervivencia por una constante.*

- ***Análisis Multivariado:*** *Considera interacciones y efectos no lineales entre múltiples covariables.*
- ***Supervivencia en Datos Complicados:*** *Maneja censura por intervalo, datos truncados y competing risks.*

22.4. Ejemplo de Proyecto Final

A continuación se presenta un ejemplo de estructura de un proyecto final de análisis de supervivencia:

22.4.1. Definición del Problema

Analizar el efecto del tratamiento y la edad sobre la supervivencia de pacientes con una enfermedad específica.

22.4.2. Descripción de los Datos

Datos de supervivencia de 100 pacientes, con covariables: edad, sexo y tipo de tratamiento. Los tiempos de supervivencia están censurados a la derecha.

22.4.3. Análisis Exploratorio

Realizar histogramas y curvas de Kaplan-Meier para explorar la distribución de los tiempos de supervivencia y la censura.

22.4.4. Ajuste del Modelo

Ajustar un modelo de Cox y un modelo AFT con las covariables edad y tratamiento.

22.4.5. Diagnóstico del Modelo

Evaluar la proporcionalidad de riesgos y realizar análisis de residuos para identificar observaciones influyentes.

22.4.6. Interpretación de Resultados

Interpretar los coeficientes del modelo y las curvas de supervivencia ajustadas para diferentes niveles de las covariables.

22.4.7. Conclusiones

Resumir los hallazgos y proporcionar recomendaciones sobre el efecto del tratamiento y la edad en la supervivencia de los pacientes.

22.5. Conclusión

El proyecto final es una oportunidad para aplicar los conocimientos adquiridos en un contexto práctico. La revisión de los conceptos clave y la aplicación de técnicas adecuadas de análisis de supervivencia aseguran un análisis riguroso y significativo.

Parte IV

TERCERA PARTE: TEMAS SELECTOS

CAPÍTULO 23

Probabilidad Avanzada

CAPÍTULO 24

Polling Systems

24.1. Ecuaciones Centrales

Proposición 24.1 *Supongamos*

$$f_i(i) - f_j(i) = \mu_i \left[\sum_{k=j}^{i-1} r_k + \sum_{k=j}^{i-1} \frac{f_k(k)}{1-\mu_k} \right] \tag{24.1}$$

$$f_{i+1}(i) = r_i \mu_i, \tag{24.2}$$

Demostrar que

$$f_i(i) = \mu_i \left[\sum_{k=1}^{N} r_k + \sum_{k=1, k\neq i}^{N} \frac{f_k(k)}{1-\mu_k} \right].$$

En la Ecuación (24.2) hagamos $j = i+1$, entonces se tiene $f_j = r_i \mu_i$, lo mismo para (24.1)

$$\begin{aligned} f_i(i) &= r_i\mu_i + \mu_i \left[\sum_{k=j}^{i-1} r_k + \sum_{k=j}^{i-1} \frac{f_k(k)}{1-\mu_k} \right] \\ &= \mu_i \left[\sum_{k=j}^{i} r_k + \sum_{k=j}^{i-1} \frac{f_k(k)}{1-\mu_k} \right] \end{aligned}$$

entonces, tomando sobre todo valor de $1, \ldots, N$, tanto para antes de i como para después de i, entonces

$$f_i(i) = \mu_i \left[\sum_{k=1}^{N} r_k + \sum_{k=1, k\neq i}^{N} \frac{f_k(k)}{1-\mu_k} \right].$$

Ahora, supongamos nuevamente la ecuación (24.1)

$$\begin{aligned}
f_i(i) - f_j(i) &= \mu_i \left[\sum_{k=j}^{i-1} r_k + \sum_{k=j}^{i-1} \frac{f_k(k)}{1-\mu_k}\right] \\
&\Leftrightarrow \\
f_j(j) - f_i(j) &= \mu_j \left[\sum_{k=i}^{j-1} r_k + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{f_k(k)}{1-\mu_k}\right] \\
f_i(j) &= f_j(j) - \mu_j \left[\sum_{k=i}^{j-1} r_k + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{f_k(k)}{1-\mu_k}\right] \\
&= \mu_j (1-\mu_j) \frac{r}{1-\mu} - \mu_j \left[\sum_{k=i}^{j-1} r_k + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{f_k(k)}{1-\mu_k}\right] \\
&= \mu_j \left[(1-\mu_j) \frac{r}{1-\mu} - \sum_{k=i}^{j-1} r_k - \sum_{k=i}^{j-1} \frac{f_k(k)}{1-\mu_k}\right] \\
&= \mu_j \left[(1-\mu_j) \frac{r}{1-\mu} - \sum_{k=i}^{j-1} r_k - \frac{r}{1-\mu} \sum_{k=i}^{j-1} \mu_k\right] \\
&= \mu_j \left[\frac{r}{1-\mu} \left(1 - \mu_j - \sum_{k=i}^{j-1} \mu_k\right) - \sum_{k=i}^{j-1} r_k\right] \\
&= \mu_j \left[\frac{r}{1-\mu} \left(1 - \sum_{k=i}^{j} \mu_k\right) - \sum_{k=i}^{j-1} r_k\right].
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
1 - \sum_{k=i}^{j} \mu_k &= 1 - \sum_{k=1}^{N} \mu_k + \sum_{k=j+1}^{i-1} \mu_k \\
&\Leftrightarrow \\
\sum_{k=i}^{j} \mu_k &= \sum_{k=1}^{N} \mu_k - \sum_{k=j+1}^{i-1} \mu_k \\
&\Leftrightarrow \\
\sum_{k=1}^{N} \mu_k &= \sum_{k=i}^{j} \mu_k + \sum_{k=j+1}^{i-1} \mu_k
\end{aligned}$$

Por tanto

$$f_i(j) = \mu_j \left[\frac{r}{1-\mu} \sum_{k=j+1}^{i-1} \mu_k + \sum_{k=j}^{i-1} r_k\right].$$

Teorema 24.1 (Teorema de Continuidad) *Supóngase que $\{X_n, n = 1,2,3,\ldots\}$ son variables aleatorias finitas, no negativas con valores enteros tales que $P(X_n = k) = p_k^{(n)}$, para $n = 1,2,3,\ldots$, $k = 0,1,2,\ldots$, con $\sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(n)} = 1$, para $n = 1,2,3,\ldots$. Sea g_n la PGF para la variable aleatoria X_n. Entonces existe una sucesión $\{p_k\}$ tal que*

$$lim_{n\to\infty} p_k^{(n)} = p_k \text{ para } 0 < s < 1.$$

En este caso, $g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$. Además

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \text{ si y sólo si } lim_{s\uparrow 1} g(s) = 1$$

Teorema 24.2 *Sea N una variable aleatoria con valores enteros no negativos finita tal que $P(N = k) = p_k$, para $k = 0,1,2,\ldots$, y $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = P(N < \infty) = 1$. Sea Φ la PGF de N tal que $g(s) = \mathbb{E}\left[s^N\right] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$ con $g(1) = 1$. Si $0 \leq p_1 \leq 1$ y $\mathbb{E}[N] = g^{'}(1) \leq 1$, entonces no existe solución de la ecuación $g(s) = s$ en el intervalo $[0,1)$. Si $\mathbb{E}[N] = g^{'}(1) > 1$, lo cual implica que $0 \leq p_1 < 1$, entonces existe una única solución de la ecuación $g(s) = s$ en el intervalo $[0,1)$.*

Teorema 24.3 *Si X y Y tienen PGF G_X y G_Y respectivamente, entonces,*

$$G_X(s) = G_Y(s)$$

para toda s, si y sólo si

$$P(X = k)) = P(Y = k)$$

para toda $k = 0, 1, \ldots,.$, es decir, si y sólo si X y Y tienen la misma distribución de probabilidad.

Teorema 24.4 *Para cada n fijo, sea la sucesióin de probabilidades $\{a_{0,n}, a_{1,n}, \ldots, \}$, tales que $a_{k,n} \geq 0$ para toda $k = 0, 1, 2, \ldots,$ y $\sum_{k\geq 0} a_{k,n} = 1$, y sea $G_n(s)$ la correspondiente función generadora, $G_n(s) = \sum_{k\geq 0} a_{k,n}s^k$. De modo que para cada valor fijo de k*

$$lim_{n\to\infty} a_{k,n} = a_k,$$

es decir converge en distribución, es necesario y suficiente que para cada valor fijo $s \in [0,)$,

$$lim_{n\to\infty} G_n(s) = G(s),$$

donde $G(s) = \sum_{k\geq 0} p_k s^k$, para cualquier
la función generadora del límite de la sucesión.

Teorema 24.5 (Teorema de Abel) *Sea $G(s) = \sum_{k\geq 0} a_k s^k$ para cualquier $\{p_0, p_1, \ldots, \}$, tales que $p_k \geq 0$ para toda $k = 0, 1, 2, \ldots,$. Entonces $G(s)$ es continua por la derecha en $s = 1$, es decir*

$$lim_{s\uparrow 1} G(s) = \sum_{k\geq 0} p_k = G(),$$

sin importar si la suma es finita o no.

Nota 24.1 *El radio de Convergencia para cualquier PGF es $R \geq 1$, entonces, el Teorema de Abel nos dice que aún en el peor escenario, cuando $R = 1$, aún se puede confiar en que la PGF será continua en $s = 1$, en contraste, no se puede asegurar que la PGF será continua en el límite inferior $-R$, puesto que la PGF es simétrica alrededor del cero: la PGF converge para todo $s \in (-R, R)$, y no lo hace para $s < -R$ o $s > R$. Además nos dice que podemos escribir $G_X(1)$ como una abreviación de $lim_{s\uparrow 1} G_X(s)$.*

Entonces si suponemos que la diferenciación término a término está permitida, entonces

$$G_X^{'}(s) = \sum_{x=1}^{\infty} x s^{x-1} p_x$$

el Teorema de Abel nos dice que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \lim_{s\uparrow 1} G_X^{'}(s) : \\
\mathbb{E}[X] &= = \sum_{x=1}^{\infty} x p_x = G_X^{'}(1) \\
&= \lim_{s\uparrow 1} G_X^{'}(s),
\end{aligned}$$

dado que el Teorema de Abel se aplica a

$$G_X^{'}(s) = \sum_{x=1}^{\infty} x s^{x-1} p_x,$$

estableciendo así que $G_X^{'}(s)$ es continua en $s = 1$. Sin el Teorema de Abel no se podría asegurar que el límite de $G_X^{'}(s)$ conforme $s \uparrow 1$ sea la respuesta correcta para $\mathbb{E}[X]$.

Nota 24.2 *La PGF converge para todo $|s| < R$, para algún R. De hecho la PGF converge absolutamente si $|s| < R$. La PGF además converge uniformemente en conjuntos de la forma $\left\{s : |s| < R^{'}\right\}$, donde $R^{'} < R$, es decir, $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\forall s$, con $|s| < R^{'}$, y $\forall n \geq n_0$,*

$$|\sum_{x=0}^{n} s^x \mathbb{P}(X = x) - G_X(s)| < \epsilon.$$

De hecho, la convergencia uniforme es la que nos permite diferenciar término a término:

$$G_X(s) = \mathbb{E}\left[s^X\right] = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \mathbb{P}(X = x),$$

y sea $s < R$.

a*)*

$$\begin{aligned} G_X^{'}(s) &= \frac{d}{ds}\left(\sum_{x=0}^{\infty} s^x \mathbb{P}(X = x)\right) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{d}{ds}\left(s^x \mathbb{P}(X = x)\right) \\ &= \sum_{x=0}^{n} x s^{x-1} \mathbb{P}(X = x). \end{aligned}$$

b*)*

$$\begin{aligned} \int_a^b G_X(s)\, ds &= \int_a^b \left(\sum_{x=0}^{\infty} s^x \mathbb{P}(X = x)\right) ds = \sum_{x=0}^{\infty} \left(\int_a^b s^x \mathbb{P}(X = x)\, ds\right) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{s^{x+1}}{x+1} \mathbb{P}(X = x), \end{aligned}$$

para $-R < a < b < R$.

Teorema 24.6 (Teorema de Convergencia Monótona para PGF) *Sean* X *y* X_n *variables aleatorias no negativas, con valores en los enteros, finitas, tales que*

$$lim_{n \to \infty} G_{X_n}(s) = G_X(s)$$

para $0 \leq s \leq 1$, *entonces*

$$lim_{n \to \infty} P(X_n = k) = P(X = k),$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

El teorema anterior requiere del siguiente lema

Lema 24.1 *Sean* $a_{n,k} \in \mathbb{Z}^+$, $n \in \mathbb{N}$ *constantes no negativas con* $\sum_{k \geq 0} a_{k,n} \leq 1$. *Supóngase que para* $0 \leq s \leq 1$, *se tiene*

$$a_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} s^k \to a(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k.$$

Entonces

$$a_{0,n} \to a_0.$$

24.2. Funciones Generadoras de Probabilidad Conjunta

De lo desarrollado hasta ahora se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}\right] = \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}\right] = \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1) + X_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1)}\right] \\ = & \mathbb{E}\left[\left\{z_2^{L_2(\tau_1)}\right\}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1)}\right\}\right] = \mathbb{E}\left[\left\{z_2^{L_2(\tau_1)}\right\}\left\{P_2(z_2)\right\}^{\overline{\tau}_1 - \tau_1}\right] \\ = & \mathbb{E}\left[\left\{z_2^{L_2(\tau_1)}\right\}\left\{\theta_1(P_2(z_2))\right\}^{L_1(\tau_1)}\right] = F_1(\theta_1(P_2(z_2)), z_2) \end{aligned}$$

es decir

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}\right] = F_1(\theta_1(P_2(z_2)), z_2). \tag{24.3}$$

Procediendo de manera análoga para $\overline{\tau}_2$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}\right] &= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}\right]=\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)+X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{z_1^{L_1(\tau_2)}\right\}\left\{z_1^{X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right\}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\left\{z_1^{L_1(\tau_2)}\right\}\left\{P_1\left(z_1\right)\right\}^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{z_1^{L_1(\tau_2)}\right\}\left\{\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\right)\right\}^{L_2(\tau_2)}\right]\\
&= F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}\right]=F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\right)\right) \tag{24.4}
$$

Ahora, para el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}_1,\tau_2]$ y $[\overline{\tau}_2,\tau_1]$, los arribos de los usuarios modifican el número de usuarios que llegan a las colas, es decir, los procesos $L_1(t)$ y $L_2(t)$. La PGF para el número de arribos a todas las estaciones durante el intervalo $[\overline{\tau}_1,\tau_2]$ cuya distribución está especificada por la distribución compuesta $R_1(\mathbf{z}),R_2(\mathbf{z})$:

$$
\begin{aligned}
R_1\left(\mathbf{z}\right)=R_1\left(\prod_{i=1}^{2}P\left(z_i\right)\right)=\mathbb{E}\left[\left\{\prod_{i=1}^{2}P\left(z_i\right)\right\}^{\tau_2-\overline{\tau}_1}\right]\\
R_2\left(\mathbf{z}\right)=R_2\left(\prod_{i=1}^{2}P\left(z_i\right)\right)=\mathbb{E}\left[\left\{\prod_{i=1}^{2}P\left(z_i\right)\right\}^{\tau_1-\overline{\tau}_2}\right]
\end{aligned}
$$

Dado que los eventos en $[\tau_1,\overline{\tau}_1]$ y $[\overline{\tau}_1,\tau_2]$ son independientes, la PGF conjunta para el número de usuarios en el sistema al tiempo $t=\tau_2$ la PGF conjunta para el número de usuarios en el sistema están dadas por

$$
\begin{aligned}
F_1\left(\mathbf{z}\right) &= R_2\left(\prod_{i=1}^{2}P\left(z_i\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\right)\right)\\
F_2\left(\mathbf{z}\right) &= R_1\left(\prod_{i=1}^{2}P\left(z_i\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(P_2\left(z_2\right)\right),z_2\right)
\end{aligned}
$$

Entonces debemos de determinar las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
f_1\left(1\right)=\frac{\partial F_1(\mathbf{z})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1},\quad f_1\left(2\right)=\frac{\partial F_1(\mathbf{z})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1},\\
f_2\left(1\right)=\frac{\partial F_2(\mathbf{z})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1},\quad f_2\left(2\right)=\frac{\partial F_2(\mathbf{z})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R_1\left(\mathbf{z}\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1} &= R_1^{(1)}\left(1\right)P_1^{(1)}\left(1\right)\\
\frac{\partial R_1\left(\mathbf{z}\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1} &= R_1^{(1)}\left(1\right)P_2^{(1)}\left(1\right)\\
\frac{\partial R_2\left(\mathbf{z}\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1} &= R_2^{(1)}\left(1\right)P_1^{(1)}\left(1\right)\\
\frac{\partial R_2\left(\mathbf{z}\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1} &= R_2^{(1)}\left(1\right)P_2^{(1)}\left(1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_1}F_1\left(\theta_1\left(P_2\left(z_2\right)\right),z_2\right) &= 0\\
\frac{\partial}{\partial z_2}F_1\left(\theta_1\left(P_2\left(z_2\right)\right),z_2\right) &= \frac{\partial F_1}{\partial z_2}+\frac{\partial F_1}{\partial z_1}\theta_1^{(1)}P_2^{(1)}\left(1\right)\\
\frac{\partial}{\partial z_1}F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\right)\right) &= \frac{\partial F_2}{\partial z_1}+\frac{\partial F_2}{\partial z_2}\theta_2^{(1)}P_1^{(1)}\left(1\right)\\
\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\right)\right) &= 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto de las dos secciones anteriores se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial z_1} &= \frac{\partial R_2}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1} + \frac{\partial F_2}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1} = R_2^{(1)}(1)\, P_1^{(1)}(1) + f_2(1) + f_2(2)\, \theta_2^{(1)}(1)\, P_1^{(1)}(1) \\
\frac{\partial F_1}{\partial z_2} &= \frac{\partial R_2}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1} + \frac{\partial F_2}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1} = R_2^{(1)}(1)\, P_2^{(1)}(1) \\
\frac{\partial F_2}{\partial z_1} &= \frac{\partial R_1}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1} = R_1^{(1)}(1)\, P_1^{(1)}(1) \\
\frac{\partial F_2}{\partial z_2} &= \frac{\partial R_1}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1} + \frac{\partial F_1}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1} = R_1^{(1)}(1)\, P_2^{(1)}(1) + f_1(1)\, \theta_1^{(1)}(1)\, P_2^{(1)}(1)
\end{aligned}$$

El cual se puede escribir en forma equivalente:

$$\begin{aligned}
f_1(1) &= r_2\mu_1 + f_2(1) + f_2(2)\frac{\mu_1}{1-\mu_2} \\
f_1(2) &= r_2\mu_2 \\
f_2(1) &= r_1\mu_1 \\
f_2(2) &= r_1\mu_2 + f_1(2) + f_1(1)\frac{\mu_2}{1-\mu_1}
\end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned}
f_1(1) &= \mu_1\left[r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\mu_2}\right] + f_2(1) \\
f_2(2) &= \mu_2\left[r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right] + f_1(2)
\end{aligned}$$

Resolviendo para $f_1(1)$:

$$\begin{aligned}
f_1(1) &= r_2\mu_1 + f_2(1) + f_2(2)\frac{\mu_1}{1-\mu_2} = r_2\mu_1 + r_1\mu_1 + f_2(2)\frac{\mu_1}{1-\mu_2} \\
&= \mu_1(r_2 + r_1) + f_2(2)\frac{\mu_1}{1-\mu_2} = \mu_1\left(r + \frac{f_2(2)}{1-\mu_2}\right),
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
f_2(2) &= \mu_2\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + f_1(2) = \mu_2\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + r_2\mu_2 \\
&= \mu_2\left[r_1 + r_2 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right] = \mu_2\left[r + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right] \\
&= \mu_2 r + \mu_1\left(r + \frac{f_2(2)}{1-\mu_2}\right)\frac{\mu_2}{1-\mu_1} \\
&= \mu_2 r + \mu_2\frac{r\mu_1}{1-\mu_1} + f_2(2)\frac{\mu_1\mu_2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)} \\
&= \mu_2\left(r + \frac{r\mu_1}{1-\mu_1}\right) + f_2(2)\frac{\mu_1\mu_2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)} \\
&= \mu_2\left(\frac{r}{1-\mu_1}\right) + f_2(2)\frac{\mu_1\mu_2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}
\end{aligned}$$

entonces

$$
\begin{aligned}
f_2(2) - f_2(2)\frac{\mu_1\mu_2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)} &= \mu_2\left(\frac{r}{1-\mu_1}\right)\\
f_2(2)\left(1 - \frac{\mu_1\mu_2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}\right) &= \mu_2\left(\frac{r}{1-\mu_1}\right)\\
f_2(2)\left(\frac{1-\mu_1-\mu_2+\mu_1\mu_2-\mu_1\mu_2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}\right) &= \mu_2\left(\frac{r}{1-\mu_1}\right)\\
f_2(2)\left(\frac{1-\mu}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}\right) &= \mu_2\left(\frac{r}{1-\mu_1}\right)
\end{aligned}
$$

por tanto

$$
\begin{aligned}
f_2(2) &= \frac{r\frac{\mu_2}{1-\mu_1}}{\frac{1-\mu}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}} = \frac{r\mu_2(1-\mu_1)(1-\mu_2)}{(1-\mu_1)(1-\mu)}\\
&= \frac{\mu_2(1-\mu_2)}{1-\mu}r = r\mu_2\frac{1-\mu_2}{1-\mu}.
\end{aligned}
$$

es decir

$$
f_2(2) = r\mu_2\frac{1-\mu_2}{1-\mu}. \tag{24.5}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
f_1(1) &= \mu_1 r + f_2(2)\frac{\mu_1}{1-\mu_2} = \mu_1 r + \left(\frac{\mu_2(1-\mu_2)}{1-\mu}r\right)\frac{\mu_1}{1-\mu_2}\\
&= \mu_1 r + \mu_1 r\left(\frac{\mu_2}{1-\mu}\right) = \mu_1 r\left[1 + \frac{\mu_2}{1-\mu}\right]\\
&= r\mu_1\frac{1-\mu_1}{1-\mu}
\end{aligned}
$$

CAPÍTULO 25

Cadenas de Markov

25.1. Cadenas de Markov

25.1.1. Estacionareidad

Sea $v = (v_i)_{i\in E}$ *medida no negativa en* E*, podemos definir una nueva medida* $v\mathbb{P}$ *que asigna masa* $\sum_{i\in E} v_i p_{ij}$ *a cada estado* j*.*

Definición 25.1 *La medida* v *es estacionaria si* $v_i < \infty$ *para toda* i *y adem?s* $v\mathbb{P} = v$*.*

En el caso de que v *sea distribuci?n, independientemente de que sea estacionaria o no, se cumple con*

$$\mathbb{P}_v\left[X_1 = j\right] = \sum_{i\in E} \mathbb{P}_v\left[X_0 = i\right] p_{ij} = \sum_{i\in E} v_i p_{ij} = (vP)_j$$

Teorema 25.1 *Supongamos que* v *es una distribuci?n estacionaria. Entonces*

i) La cadena es estrictamente estacionaria con respecto a $\mathbb{P}_v$*, es decir,* $\mathbb{P}_v$*-distribuci?n de* $\{X_n, X_{n+1}, \ldots\}$ *no depende de* n*;*

ii) Existe un aversi?n estrictamente estacionaria $\{X_n\}_{n\in Z}$ *de la cadena con doble tiempo infinito y* $\mathbb{P}(X_n = i) = v_i$ *para toda* $n \in Z$*.*

Teorema 25.2 *Sea* i *estado fijo, recurrente. Entonces una medida estacionaria* v *puede definirse haciendo que* v_j *sea el n?mero esperado de visitas a* j *entre dos visitas consecutivas* i*,*

$$v_j = \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \mathbb{1}(X_n = i) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i\left[X_n = j, \tau(i) > n\right] \tag{25.1}$$

Teorema 25.3 *Si la cadena es irreducible y recurrente, entonces una medida estacionaria* v *existe, satisface* $0 < v_j < \infty$ *para toda* j *y es ?nica salvo factores multiplicativos, es decir, si* v, v^* *son estacionarias, entonces* $c = cv^*$ *para alguna* $c \in (0, \infty)$*.*

Corolario 25.1 *Si la cadena es irreducible y positiva recurrente, existe una ?nica distribuci?n estacionaria* π *dada por*

$$\pi_j = \frac{1}{\mathbb{E}_i \tau_i} \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \mathbb{1}(X_n = j) = \frac{1}{\mathbb{E}_j \tau(j)}. \tag{25.2}$$

Corolario 25.2 *Cualquier cadena de Markov irreducible con un espacio de estados finito es positiva recurrente.*

25.1.2. Teor?a Erg?dica

Lema 25.1 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y se F subconjunto finito del espacio de estados. Entonces la cadena es positiva recurrente si $\mathbb{E}_i \tau(F) < \infty$ para todo $i \in F$.*

Proposición 25.1 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y transiente o cero recurrente, entonces $p_{ij}^n \rightarrow 0$ conforme $n \rightarrow \infty$ para cualquier $i, j \in E$, E espacio de estados.*

Utilizando el teorema (2.2) y el corolario refCor.3.5, se demuestra el siguiente resultado importante.

Teorema 25.4 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y aperi?dica positiva recurrente, y sea $\pi = \{\pi_j\}_{j \in E}$ la distribuci?n estacionaria. Entonces $p_{ij}^n \rightarrow \pi_j$ para todo i, j.*

Definición 25.2 *Una cadena irreducible aperiodica, positiva recurrente con medida estacionaria v, es llamada* erg?dica.

Proposición 25.2 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y recurrente con medida estacionaria v, entocnes para todo $i, j, k, l \in E$*

$$\frac{\sum_{n=0}^{m} p_{ij}^n}{\sum_{n=0}^{m} p_{lk}^n} \rightarrow \frac{v_j}{v_k},\ m \rightarrow \infty \tag{25.3}$$

Lema 25.2 *La matriz $\widetilde{P}$ con elementos $\widetilde{p}_{ij} = \frac{v_{ji} p_{ji}}{v_i}$ es una matriz de transici?n. Adem?s, el i-?simo elementos $\widetilde{p}_{ij}^m$ de la matriz potencia $\widetilde{P}^m$ est? dada por $\widetilde{p}_{ij}^m = \frac{v_{ji} p_{ji}^m}{v_i}$.*

Lema 25.3 *Def?nase $N_i^m = \sum_{n=0}^{m} \mathbb{1}(X_n = i)$ como el n?mero de visitas a i antes del tiempo m. Entonces si la cadena es reducible y recurrente, $lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_j N_i^m}{\mathbb{E}_k N_i^m} = 1$ para todo $j, k \in E$.*

25.1.3. Funciones Arm?nicas, Recurrencia y Transitoriedad

Definición 25.3 *Una funci?n Arm?nica es el eigenvector derecho h de P corrrespondiente al eigenvalor 1.*

$$Ph = h \Leftrightarrow h(i) = \sum_{j \in E} p_{ij} h(j) = \mathbb{E}_i h(X_1) = \mathbb{E}\left[h(X_{n+1}) | X_n = i\right].$$

es decir, $\{h(X_n)\}$ es martingala.

Proposición 25.3 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y sea i estado fijo arbitrario. Entonces la cadena es transitoria s? y s?lo si existe una funci?n no cero, acotada $h : E - \{i\} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface*

$$h(j) = \sum_{k \neq i} p_{jk} h(k) \ \ para\ j \neq i. \tag{25.4}$$

Proposición 25.4 *Supongamos que la cadena es irreducible y sea E_0 un subconjunto finito del espacio de estados, entonces*

i)

ii)

Proposición 25.5 *Suponga que la cadena es irreducible y sea E_0 un subconjunto finito de E tal que se cumple la ecuaci?n 5.2 para alguna funci?n h acotada que satisface $h(i) < h(j)$ para alg?n estado $i \notin E_0$ y todo $j \in E_0$. Entonces la cadena es transitoria.*

25.2. Procesos de Markov de Saltos

25.2.1. Estructura B?sica de los Procesos Markovianos de Saltos

- *Sea E espacio discreto de estados, finito o numerable, y sea $\{X_t\}$ un proceso de Markov con espacio de estados E. Una medida μ en E definida por sus probabilidades puntuales μ_i, escribimos $p_{ij}^t = P^t(i, \{j\}) = P_i(X_t = j)$.*

- *El monto del tiempo gastado en cada estado es positivo, de modo tal que las trayectorias muestrales son constantes por partes. Para un proceso de saltos denotamos por los tiempos de saltos a* $S_0 = 0 < S_1 < S_2 \cdots$, *los tiempos entre saltos consecutivos* $T_n = S_{n+1} - S_n$ *y la secuencia de estados visitados por* $Y_0, Y_1, \ldots$, *as? las trayectorias muestrales son constantes entre* S_n *consecutivos, continua por la derecha, es decir,* $X_{S_n} = Y_n$.
- *La descripci?n de un modelo pr?ctico est? dado usualmente en t?rminos de las intensidades* $\lambda(i)$ *y las probabilidades de salto* q_{ij} *m?s que en t?rminos de la matriz de transici?n* P^t.
- *Sup?ngase de ahora en adelante que* $q_{ii} = 0$ *cuando* $\lambda(i) > 0$

25.2.2. Matriz Intensidad

Definición 25.4 *La matriz intensidad* $\Lambda = (\lambda(i,j))_{i,j\in E}$ *del proceso de saltos* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *est? dada por*

$$\begin{aligned}\lambda(i,j) &= \lambda(i)\, q_{i,j},\ j \neq i\\ \lambda(i,i) &= -\lambda(i)\end{aligned}$$

Proposición 25.6 *Una matriz* $E \times E$, Λ *es la matriz de intensidad de un proceso markoviano de saltos* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *si y s?lo si*

$$\lambda(i,i) \leq 0,\ \lambda(i,j),\ i \neq j,\ \sum_{j\in E} \lambda(i,j) = 0.$$

Adem?s, Λ *est? en correspondencia uno a uno con la distribuci?n del proceso minimal dado por el teorema 3.1.*

Para el caso particular de la Cola $M/M/1$, *la matr?z de itensidad est? dada por*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\beta & \beta & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \delta & -\beta-\delta & \beta & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & \delta & -\beta-\delta & \beta & 0 & \cdots\\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

25.2.3. Medidas Estacionarias

Definición 25.5 *Una medida* $v \neq 0$ *es estacionaria si* $0 \leq v_j < \infty$, $vP^t = v$ *para toda* t.

Teorema 25.5 *Supongamos que* $\{X_t\}$ *es irreducible recurrente en* E. *Entonces existe una y s?lo una, salvo m?ltiplos, medida estacionaria* v. *Esta* v *tiene la propiedad de que* $0 < v_j < \infty$ *para todo* j *y puede encontrarse en cualquiera de las siguientes formas*

i) *Para alg?n estado* i, *fijo pero arbitrario,* v_j *es el tiempo esperado utilizado en* j *entre dos llegadas consecutivas al estado* i;

$$v_j = \mathbb{E}_i \int_0^{w(i)} \mathbb{1}(X_t = j)\, dt \tag{25.5}$$

con $w(i) = \inf\{t > 0 : X_t = i, X_{t^-} = \lim_{s\uparrow t} X_s \neq i\}$.

ii) $v_j = \frac{\mu_j}{\lambda(j)}$, *donde* μ *es estacionaria para* $\{Y_n\}$.

iii) *como soluci?n de* $v\Lambda = 0$.

25.2.4. Criterios de Ergodicidad

Definición 25.6 *Un proceso irreducible recurrente con medida estacionaria de masa finita es llamado erg?dico.*

Teorema 25.6 *Un proceso de Markov de saltos irreducible no explosivo es erg?dico si y s?lo si se puede encontrar una soluci?n, de probabilidad,* π, *con* $|\pi| = 1$ *y* $0 \leq \pi_j \leq 1$, *a* $\pi\Lambda = 0$. *En este caso* π *es la distribuci?n estacionaria.*

Corolario 25.3 *Una condici?n suficiente para la ergodicidad de un proceso irreducible es la existencia de una probabilidad π que resuelva el sistema $\pi\Lambda = 0$ y que adem?s tenga la propiedad de que $\sum \pi_j \lambda(j) < \infty$.*

Proposición 25.7 *Si el proceso es erg?dico, entonces existe una versi?n estrictamente estacionaria $\{X_t\}_{-\infty<t<\infty}$ con doble tiempo infinito.*

Teorema 25.7 *Si $\{X_t\}$ es erg?dico y π es la distribuci?n estacionaria, entonces para todo i, j, $p_{ij}^t \rightarrow \pi_j$ cuando $t \rightarrow \infty$.*

Corolario 25.4 *Si $\{X_t\}$ es irreducible recurente pero no erg?dica, es decir $|v| = \infty$, entonces $p_{ij}^t \rightarrow 0$ para todo $i, j \in E$.*

Corolario 25.5 *Para cualquier proceso Markoviano de Saltos minimal, irreducible o no, los l?mites $li_{t\rightarrow\infty} p_{ij}^t$ existe.*

25.3. Notaci?n Kendall-Lee

A partir de este momento se har?n las siguientes consideraciones: Si t_n es el tiempo aleatorio en el que llega al sistema el n-?simo cliente, para $n = 1, 2, \ldots$, $t_0 = 0$ y $t_0 < t_1 < \cdots$ se definen los tiempos entre arribos $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ para $n = 1, 2, \ldots$, variables aleatorias independientes e id?nticamente distribuidas. Los tiempos entre arribos tienen un valor medio $E(\tau)$ finito y positivo $\frac{1}{\beta}$, es decir, β se puede ver como la tasa o intensidad promedio de arribos al sistema por unidad de tiempo. Adem?s se supondr? que los servidores son identicos y si s denota la variable aleatoria que describe el tiempo de servicio, entonces $E(s) = \frac{1}{\delta}$, δ es la tasa promedio de servicio por servidor.

La notaci?n de Kendall-Lee es una forma abreviada de describir un sisema de espera con las siguientes componentes:

i) **Fuente**: *Poblaci?n de clientes potenciales del sistema, esta puede ser finita o infinita.*

ii) **Proceso de Arribos**: *Proceso determinado por la funci?n de distribuci?n $A(t) = P\{\tau \leq t\}$ de los tiempos entre arribos.*

Adem?s tenemos las siguientes igualdades

$$N(t) = N_q(t) + N_s(s) \tag{25.6}$$

donde

- *$N(t)$ es el n?mero de clientes en el sistema al tiempo t.*
- *$N_q(t)$ es el n?mero de clientes en la cola al tiempo t*
- *$N_s(t)$ es el n?mero de clientes recibiendo servicio en el tiempo t.*

Bajo la hip?tesis de estacionareidad, es decir, las caracter?sticas de funcionamiento del sistema se han estabilizado en valores independientes del tiempo, entonces

$$N = N_q + N_s. \tag{25.7}$$

Los valores medios de las cantidades anteriores se escriben como $L = E(N)$, $L_q = E(N_q)$ y $L_s = E(N_s)$, entonces de la ecuaci?n 30.97 se obtiene

$$L = L_q + L_s \tag{25.8}$$

Si q es el tiempo que pasa un cliente en la cola antes de recibir servicio, y W es el tiempo total que un cliente pasa en el sistema, entonces

$$w = q + s$$

por lo tanto

$$W = W_q + W_s,$$

donde $W = E(w)$, $W_q = E(q)$ y $W_s = E(s) = \frac{1}{\delta}$.

La intensidad de tr?fico se define como

$$\rho = \frac{E(s)}{E(\tau)} = \frac{\beta}{\delta}. \tag{25.9}$$

La utilizaci?n por servidor es

$$u = \frac{\rho}{c} = \frac{\beta}{c\delta}. \qquad (25.10)$$

donde c es el n?mero de servidores. Esta notaci?n es una forma abreviada de describir un sistema de espera con componentes dados a continuaci?n, la notaci?n es

$$A/S/c/K/F/d \qquad (25.11)$$

Cada una de las letras describe:

- A *es la distribuci?n de los tiempos entre arribos.*
- S *es la distribuci?n del tiempo de servicio.*
- c *es el n?mero de servidores.*
- K *es la capacidad del sistema.*
- F *es el n?mero de individuos en la fuente.*
- d *es la disciplina del servicio*

Usualmente se acostumbra suponer que $K = \infty$, $F = \infty$ *y* $d = FIFO$, *es decir, First In First Out.*
Las distribuciones usuales para A y B son:

- GI *para la distribuci?n general de los tiempos entre arribos.*
- G *distribuci?n general del tiempo de servicio.*
- M *Distribuci?n exponencial para A o S.*
- E_K *Distribuci?n Erlang-K, para A o S.*
- D *tiempos entre arribos o de servicio constantes, es decir, deterministicos.*

25.4. Procesos de Nacimiento y Muerte

25.4.1. Procesos de Nacimiento y Muerte Generales

Por un proceso de nacimiento y muerte se entiende un proceso de saltos de markov $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *con espacio de estados a lo m?s numerable, con la propiedad de que s?lo puede ir al estado* $n+1$ *o al estado* $n-1$, *es decir, su matriz de intensidad es de la forma*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\beta_0 & \beta_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \delta_1 & -\beta_1-\delta_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \delta_2 & -\beta_2-\delta_2 & \beta_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

donde β_n *son las intensidades de nacimiento y* δ_n *las intensidades de muerte, o tambi?n se puede ver como a* X_t *el n?mero de usuarios en una cola al tiempo* t, *un salto hacia arriba corresponde a la llegada de un nuevo usuario y un salto hacia abajo como al abandono de un usuario despu?s de haber recibido su servicio.*
La cadena de saltos $\{Y_n\}$ *tiene matriz de transici?n dada por*

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

donde $p_n = \frac{\beta_n}{\beta_n+\delta_n}$ *y* $q_n = 1 - p_n = \frac{\delta_n}{\beta_n+\delta_n}$, *donde adem?s se asumne por el momento que* p_n *no puede tomar el valor* 0 *?* 1 *para cualquier valor de* n.

Proposición 25.8 *La recurrencia de* $\{X_t\}$, *o equivalentemente de* $\{Y_n\}$ *es equivalente a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_1\cdots\delta_n}{\beta_1\cdots\beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1\cdots q_n}{p_1\cdots p_n} = \infty \qquad (25.12)$$

Lema 25.4 *Independientemente de la recurrencia o transitorieadad, existe una y s?lo una, salvo m?ltiplos, soluci?n a $v\Lambda = 0$, dada por*

$$v_n = \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} v_0 \tag{25.13}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Corolario 25.6 *En el caso recurrente, la medida estacionaria μ para $\{Y_n\}$ est? dada por*

$$\mu_n = \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n} \mu_0 \tag{25.14}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Se define a $S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n}$

Corolario 25.7 *$\{X_t\}$ es erg?dica si y s?lo si la ecuaci?n (30.133) se cumple y adem?s $S < \infty$, en cuyo caso la distribuci?n erg?dica, π, est? dada por*

$$\pi_0 = \frac{1}{S},\ \pi_n = \frac{1}{S} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \tag{25.15}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

25.4.2. Cola M/M/1

Este modelo corresponde a un proceso de nacimiento y muerte con $\beta_n = \beta$ y $\delta_n = \delta$ independiente del valor de n. La intensidad de tr?fico $\rho = \frac{\beta}{\delta}$, implica que el criterio de recurrencia (ecuaci?n 30.133) quede de la forma:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} = \infty.$$

Equivalentemente el proceso es recurrente si y s?lo si

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n < \infty \Leftrightarrow \frac{\beta}{\delta} < 1$$

Entonces $S = \frac{\delta}{\delta - \beta}$, luego por la ecuaci?n 30.136 se tiene que

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{\delta - \beta}{\delta} = 1 - \frac{\beta}{\delta} \\
\pi_n &= \pi_0 \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n = \left(1 - \frac{\beta}{\delta}\right)\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n = (1 - \rho)\,\rho^n
\end{aligned}$$

Lo cual nos lleva a la siguiente

Proposición 25.9 *La cola $M/M/1$ con intendisad de tr?fico ρ, es recurrente si y s?lo si $\rho \leq 1$.*

Entonces por el corolario 30.30

Proposición 25.10 *La cola $M/M/1$ con intensidad de tr?fico ρ es erg?dica si y s?lo si $\rho < 1$. En cuyo caso, la distribuci?n de equilibrio π de la longitud de la cola es geom?trica, $\pi_n = (1 - \rho)\,\rho^n$, para $n = 1, 2, \ldots$.*

De la proposici?n anterior se desprenden varios hechos importantes.

a) *$\mathbb{P}[X_t = 0] = \pi_0 = 1 - \rho$, es decir, la probabilidad de que el sistema se encuentre ocupado.*

b) *De las propiedades de la distribuci?n Geom?trica se desprende que*

   1) *$\mathbb{E}[X_t] = \frac{\rho}{1-\rho}$,*
   2) *$Var[X_t] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$.*

Si L es el n?mero esperado de clientes en el sistema, incluyendo los que est?n siendo atendidos, entonces

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Si adem?s W es el tiempo total del cliente en la cola: $W = W_q + W_s$ $\rho = \frac{\mathbb{E}[s]}{\mathbb{E}[\tau]} = \beta W_s$, puesto que $W_s = \mathbb{E}[s]$ y $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\delta}$. Por la f?rmula de Little $L = \lambda W$

$$\begin{aligned} W &= \frac{L}{\beta} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\beta} = \frac{\rho}{\delta}\frac{1}{1-\rho} = \frac{W_s}{1-\rho} \\ &= \frac{1}{\delta(1-\rho)} = \frac{1}{\delta-\beta} \end{aligned}$$

luego entonces

$$\begin{aligned} W_q &= W - W_s = \frac{1}{\delta-\beta} - \frac{1}{\delta} = \frac{\beta}{\delta(\delta-\beta)} \\ &= \frac{\rho}{1-\rho}\frac{1}{\delta} = \mathbb{E}[s]\frac{\rho}{1-\rho} \end{aligned}$$

Entonces

$$L_q = \beta W_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Finalmente

Proposición 25.11 a*) $W(t) = 1 - e^{-\frac{t}{W}}$.*

b*) $W_q(t) = 1 - \rho\exp^{-\frac{t}{W}}$.*
donde $W = \mathbb{E}(w)$.

25.4.3. Cola $M/M/\infty$

Este tipo de modelos se utilizan para estimar el n?mero de l?neas en uso en una gran red comunicaci?n o para estimar valores en los sistemas $M/M/c$ o $M/M/c/c$, en el se puede pensar que siempre hay un servidor disponible para cada cliente que llega.

Se puede considerar como un proceso de nacimiento y muerte con par?metros $\beta_n = \beta$ y $\mu_n = n\mu$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces por la ecuaci?n 30.136 se tiene que

$$\pi_0 = e^{\rho}$$
$$\pi_n = e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}$$

Entonces, el n?mero promedio de servidores ocupados es equivalente a considerar el n?mero de clientes en el sistema, es decir,

$$L = \mathbb{E}[N] = \rho$$
$$Var[N] = \rho$$

Adem?s se tiene que $W_q = 0$ y $L_q = 0$.

El tiempo promedio en el sistema es el tiempo promedio de servicio, es decir, $W = \mathbb{E}[s] = \frac{1}{\delta}$. Resumiendo, tenemos la sisuguiente proposici?n:

Proposición 25.12 *La cola $M/M/\infty$ es erg?dica para todos los valores de η. La distribuci?n de equilibrio π es Poisson con media η, $\pi_n = \frac{e^{-n}\eta^n}{n!}$.*

25.4.4. Cola M/M/m

Este sistema considera m servidores id?nticos, con tiempos entre arribos y de servicio exponenciales con medias $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\beta}$ *y* $\mathbb{E}[s] = \frac{1}{\delta}$*. definimos ahora la utilizaci?n por servidor como* $u = \frac{\rho}{m}$ *que tambi?n se puede interpretar como la fracci?n de tiempo promedio que cada servidor est? ocupado.*

La cola M/M/m se puede considerar como un proceso de nacimiento y muerte con par?metros: $\beta_n = \beta$ *para* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *y* $\delta_n = \begin{cases} n\delta & n = 0, 1, \ldots, m-1 \\ c\delta & n = m, \ldots \end{cases}$

entonces la condici?n de recurrencia se va a cumplir s? y s?lo si $\sum_{n\geq 1} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} < \infty$*, equivalentemente se debe de cumplir que*

$$\begin{aligned} S &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\beta^n}{n!\delta^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^m}{m!} u^n \end{aligned}$$

converja, lo cual ocurre si $u < 1$*, en este caso*

$$S = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^m}{m!} (1 - u)$$

luego, para este caso se tiene que

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1}{S} \\ \pi_n &= \begin{cases} \pi_0 \frac{\rho^n}{n!} & n = 0, 1, \ldots, m-1 \\ \pi_0 \frac{\rho^n}{m! m^{n-m}} & n = m, \ldots \end{cases} \end{aligned}$$

Al igual que se hizo antes, determinaremos los valores de L_q, W_q, W *y* L*:*

$$\begin{aligned} L_q &= \mathbb{E}[N_q] = \sum_{n=0}^{\infty} (n - m) \pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_{n+m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_0 \frac{\rho^{n+m}}{m! m^{n+m}} = \pi_0 \frac{\rho^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} n u^n = \pi_0 \frac{u\rho^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{du} u^n \\ &= \pi_0 \frac{u\rho^m}{m!} \frac{d}{du} \sum_{n=0}^{\infty} u^n = \pi_0 \frac{u\rho^m}{m!} \frac{d}{du} \left(\frac{1}{1-u} \right) = \pi_0 \frac{u\rho^m}{m!} \frac{1}{(1-u)^2} \end{aligned}$$

es decir

$$L_q = \frac{u \pi_0 \rho^m}{m! (1-u)^2} \tag{25.16}$$

luego

$$W_q = \frac{L_q}{\beta} \tag{25.17}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\delta} \tag{25.18}$$

Si definimos $C(m, \rho) = \frac{\pi_0 \rho^m}{m!(1-u)} = \frac{\pi_m}{1-u}$*, que es la probabilidad de que un cliente que llegue al sistema tenga que esperar en la cola. Entonces podemos reescribir las ecuaciones reci?n enunciadas:*

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{C(m, \rho) u}{1 - u} \\ W_q &= \frac{C(m, \rho) \mathbb{E}[s]}{m (1 - u)} \end{aligned}$$

Proposición 25.13 *La cola $M/M/m$ con intensidad de tr?fico ρ es erg?dica si y s?lo si $\rho < 1$. En este caso la distribuci?n erg?dica π est? dada por*

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{1}{S}\frac{\eta^n}{n!} & 0 \leq n \leq m \\ \frac{1}{S}\frac{\eta^m}{m!}\rho^{n-m} & m \leq n < \infty \end{cases}$$

Proposición 25.14 *Para $t \geq 0$*

a) $W_q(t) = 1 - C(m,\rho)\, e^{-c\delta t(1-u)}$

b)

$$W(t) = \begin{cases} 1 + e^{-\delta t}\frac{\rho - m + W_q(0)}{m-1-\rho} + e^{-m\delta t(1-u)}\frac{C(m,\rho)}{m-1-\rho} & \rho \neq m-1 \\ 1 - (1 + C(m,\rho)\,\delta t)\, e^{-\delta t} & \rho = m-1 \end{cases}$$

25.4.5. Cola M/G/1

Consideremos un sistema de espera con un servidor, en el que los tiempos entre arribos son exponenciales, y los tiempos de servicio tienen una distribuci?n general G. Sea $N(t)_{t\geq 0}$ el n?mero de clientes en el sistema al tiempo t, y sean $t_1 < t_2 < \ldots$ los tiempos sucesivos en los que los clientes completan su servicio y salen del sistema.

La sucesi?n $\{X_n\}$ definida por $X_n = N(t_n)$ es una cadena de Markov, en espec?fico es la Cadena encajada del proceso de llegadas de usuarios. Sea U_n el n?mero de clientes que llegan al sistema durante el tiempo de servicio del n-?simo cliente, entonces se tiene que

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + U_{n+1} & \text{si } X_n \geq 1, \\ U_{n+1} & \text{si } X_n = 0 \end{cases}$$

Dado que los procesos de arribos de los usuarios es Poisson con par?metro λ, la probabilidad condicional de que lleguen j clientes al sistema dado que el tiempo de servicio es $s = t$, resulta:

$$\mathbb{P}\{U = j | s = t\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!},\ j = 0, 1, \ldots$$

por el teorema de la probabilidad total se tiene que

$$a_j = \mathbb{P}\{U = j\} = \int_0^\infty \mathbb{P}\{U = j | s = t\}\, dG(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!} dG(t) \tag{25.19}$$

donde G es la distribuci?n de los tiempos de servicio. Las probabilidades de transici?n de la cadena est?n dadas por

$$p_{0j} = \mathbb{P}\{U_{n+1} = j\} = a_j,\ \text{para } j = 0, 1, \ldots \tag{25.20}$$

y para $i \geq 1$

$$p_{ij} = \begin{cases} \mathbb{P}\{U_{n+1} = j - i + 1\} = a_{j-i+1} & , \text{para } j \geq i-1 \\ 0 & j < i-1 \end{cases} \tag{25.21}$$

Entonces la matriz de transici?n es:

$$P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

Sea $\rho = \sum_{n=0} n a_n$, entonces se tiene el siguiente teorema:

Teorema 25.8 *La cadena encajada $\{X_n\}$ es*

a) *Recurrente positiva si $\rho < 1$,*

b) *Transitoria si $\rho > 1$,*

c) *Recurrente nula si $\rho = 1$.*

Recordemos que si la cadena de Markov $\{X_n\}$ tiene una distribuci?n estacionaria entonces existe una distribuci?n de probabilidad $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots,)$, con $\pi_i \geq 0$ y $\sum_{i\geq 1} \pi_i = 1$ tal que satisface la ecuaci?n $\pi = \pi P$, equivalentemente

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_k p_{ij}, \text{ para } j = 0, 1, 2, \ldots \tag{25.22}$$

que se puede ver como

$$\pi_j = \pi_0 a_j + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1}, \text{ para } j = 0, 1, \ldots \tag{25.23}$$

si definimos

$$\pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j$$

y

$$A(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

con $|z_j| \leq 1$. Si la ecuaci?n 30.114 la multiplicamos por z^j y sumando sobre j, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0 a_j z^j + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1} z^j \\
&= \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j + \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i a_{i-1} \\
&= \pi_0 A(z) + A(z) \left(\frac{\pi(z) - \pi_0}{z} \right)
\end{aligned}$$

es decir,

$$\pi(z) = \pi_0 A(z) + A(z) \left(\frac{\pi(z) - \pi_0}{z} \right) \Leftrightarrow \pi(z) = \frac{\pi_0 A(z)(z-1)}{z - A(z)} \tag{25.24}$$

Si $z \to 1$, entonces $A(z) \to A(1) = 1$, y adem?s $A'(z) \to A'(1) = \rho$. Si aplicamos la Regla de L'Hospital se tiene que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = lim_{z\to 1^-} \pi(z) = \pi_0 lim_{z\to 1^-} \frac{z-1}{z - A(z)} = \frac{\pi_0}{1-\rho}$$

Retomando,

$$a_j = \mathbb{P}\{U = j\} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(t), \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

entonces

$$\begin{aligned}
\rho &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(t) \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(t) = \int_0^{\infty} \lambda t dG(t) = \lambda \mathbb{E}[s]
\end{aligned}$$

Adem?s, se tiene que $\rho = \beta \mathbb{E}[s] = \frac{\beta}{\delta}$ y la distribuci?n estacionaria est? dada por

$$\pi_j = \pi_0 a_j + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1}, \text{ para } j = 0, 1, \ldots \tag{25.25}$$

$$\pi_0 = 1 - \rho \tag{25.26}$$

Por otra parte se tiene que

$$L = \pi'(1) = \rho + \frac{A''(1)}{2(1-\rho)} \tag{25.27}$$

pero $A^{''}(1) = \sum_{n=1} n(n-1)a_n = \mathbb{E}\left[U^2\right] - \mathbb{E}\left[U\right]$, $\mathbb{E}\left[U\right] = \rho$ *y* $\mathbb{E}\left[U^2\right] = \lambda^2\mathbb{E}\left[s^2\right] + \rho$. *Por lo tanto* $L = \rho + \frac{\beta^2\mathbb{E}\left[s^2\right]}{2(1-\rho)}$.
De las f?rmulas de Little, se tiene que $W = E(w) = \frac{L}{\beta}$, *tambi?n el tiempo de espera en la cola*

$$W_q = \mathbb{E}(q) = \mathbb{E}(w) - \mathbb{E}(s) = \frac{L}{\beta} - \frac{1}{\delta}, \tag{25.28}$$

adem?s el n?mero promedio de clientes en la cola es

$$L_q = \mathbb{E}(N_q) = \beta W_q = L - \rho \tag{25.29}$$

25.5. Redes de Colas

25.6. Estacionareidad

Sea $v = (v_i)_{i\in E}$ *medida no negativa en* E, *podemos definir una nueva medida* $v\mathbb{P}$ *que asigna masa* $\sum_{i\in E} v_i p_{ij}$ *a cada estado* j.

Definición 25.7 *La medida* v *es estacionaria si* $v_i < \infty$ *para toda* i *y adem?s* $v\mathbb{P} = v$.

En el caso de que v *sea distribuci?n, independientemente de que sea estacionaria o no, se cumple con*

$$\mathbb{P}_v\left[X_1 = j\right] = \sum_{i\in E} \mathbb{P}_v\left[X_0 = i\right] p_{ij} = \sum_{i\in E} v_i p_{ij} = (vP)_j$$

Teorema 25.9 *Supongamos que* v *es una distribuci?n estacionaria. Entonces*

i) La cadena es estrictamente estacionaria con respecto a $\mathbb{P}_v$, *es decir,* $\mathbb{P}_v$*-distribuci?n de* $\{X_n, X_{n+1}, \ldots\}$ *no depende de* n;

ii) Existe una versi?n estrictamente estacionaria $\{X_n\}_{n\in Z}$ *de la cadena con doble tiempo infinito y* $\mathbb{P}(X_n = i) = v_i$ *para toda* $n \in Z$.

Teorema 25.10 *Sea* i *estado fijo, recurrente. Entonces una medida estacionaria* v *puede definirse haciendo que* v_j *sea el n?mero esperado de visitas a* j *entre dos visitas consecutivas* i,

$$v_j = \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \mathbb{1}(X_n = i) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i\left[X_n = j, \tau(i) > n\right] \tag{25.30}$$

Teorema 25.11 *Si la cadena es irreducible y recurrente, entonces una medida estacionaria* v *existe, satisface* $0 < v_j < \infty$ *para toda* j *y es ?nica salvo factores multiplicativos, es decir, si* v, v^* *son estacionarias, entonces* $c = cv^*$ *para alguna* $c \in (0, \infty)$.

Corolario 25.8 *Si la cadena es irreducible y positiva recurrente, existe una ?nica distribuci?n estacionaria* π *dada por*

$$\pi_j = \frac{1}{\mathbb{E}_i\tau_i}\mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \mathbb{1}(X_n = j) = \frac{1}{\mathbb{E}_j\tau(j)}. \tag{25.31}$$

Corolario 25.9 *Cualquier cadena de Markov irreducible con un espacio de estados finito es positiva recurrente.*

Lema 25.5 *Sea* $\{X_n\}$ *cadena irreducible y se* F *subconjunto finito del espacio de estados. Entonces la cadena es positiva recurrente si* $\mathbb{E}_i\tau(F) < \infty$ *para todo* $i \in F$.

Proposición 25.15 *Sea* $\{X_n\}$ *cadena irreducible y transiente o cero recurrente, entonces* $p_{ij}^n \to 0$ *conforme* $n \to \infty$ *para cualquier* $i, j \in E$, E *espacio de estados.*

Utilizando el teorema (2.2) y el corolario refCor.3.5, se demuestra el siguiente resultado importante.

Teorema 25.12 *Sea* $\{X_n\}$ *cadena irreducible y aperi?dica positiva recurrente, y sea* $\pi = \{\pi_j\}_{j\in E}$

25.7. Procesos de Markov de Saltos

Sea E espacio discreto de estados, finito o numerable, y sea $\{X_t\}$ un proceso de Markov con espacio de estados E. Una medida μ en E definida por sus probabilidades puntuales μ_i, escribimos $p_{ij}^t = P^t(i, \{j\}) = P_i(X_t = j)$.

El monto del tiempo gastado en cada estado es positivo, de modo tal que las trayectorias muestrales son constantes por partes. Para un proceso de saltos denotamos por los tiempos de saltos a $S_0 = 0 < S_1 < S_2 \cdots$, los tiempos entre saltos consecutivos $T_n = S_{n+1} - S_n$ y la secuencia de estados visitados por $Y_0, Y_1, \ldots$, as? las trayectorias muestrales son constantes entre S_n consecutivos, continua por la derecha, es decir, $X_{S_n} = Y_n$.

Teorema 25.13 *Cualquier Proceso de Markov de Saltos satisface la Propiedad Fuerte de Markov*

Definición 25.8 *Una medida $v \neq 0$ es estacionaria si $0 \leq v_j < \infty$, $vP^t = v$ para toda t.*

Teorema 25.14 *Supongamos que $\{X_t\}$ es irreducible recurrente en E. Entonces existe una y s?lo una, salvo m?ltiplos, medida estacionaria v. Esta v tiene la propiedad de que $0 < v_j < \infty$ para todo j y puede encontrarse en cualquiera de las siguientes formas*

i) Para alg?n estado i, fijo pero arbitrario, v_j es el tiempo esperado utilizado en j entre dos llegadas consecutivas al estado i;

$$v_j = \mathbb{E}_i \int_0^{w(i)} \mathbb{1}(X_t = j)\, dt \tag{25.32}$$

con $w(i) = \inf\{t > 0 : X_t = i, X_{t^-} = \lim_{s\uparrow t} X_s \neq i\}$.

ii) $v_j = \frac{\mu_j}{\lambda(j)}$, donde μ es estacionaria para $\{Y_n\}$.

iii) como soluci?n de $v\Lambda = 0$.

Definición 25.9 *Un proceso irreducible recurrente con medida estacionaria de masa finita es llamado erg?dico.*

Teorema 25.15 *Un proceso de Markov de saltos irreducible no explosivo es erg?dico si y s?lo si se puede encontrar una soluci?n, de probabilidad, π, con $|\pi| = 1$ y $0 \leq \pi_j \leq 1$, a $\pi\Lambda = 0$. En este caso π es la distribuci?n estacionaria.*

Corolario 25.10 *Una condici?n suficiente para la ergodicidad de un proceso irreducible es la existencia de una probabilidad π que resuelva el sistema $\pi\Lambda = 0$ y que adem?s tenga la propiedad de que $\sum \pi_j \lambda(j)$.*

25.8. Notaci?n Kendall-Lee

A partir de este momento se har?n las siguientes consideraciones: Si t_n es el tiempo aleatorio en el que llega al sistema el n-?simo cliente, para $n = 1, 2, \ldots$, $t_0 = 0$ y $t_0 < t_1 < \cdots$ se definen los tiempos entre arribos $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ para $n = 1, 2, \ldots$, variables aleatorias independientes e id?nticamente distribuidas. Los tiempos entre arribos tienen un valor medio $E(\tau)$ finito y positivo $\frac{1}{\beta}$, es decir, β se puede ver como la tasa o intensidad promedio de arribos al sistema por unidad de tiempo. Adem?s se supondr? que los servidores son identicos y si s denota la variable aleatoria que describe el tiempo de servicio, entonces $E(s) = \frac{1}{\delta}$, δ es la tasa promedio de servicio por servidor.
La notaci?n de Kendall-Lee es una forma abreviada de describir un sisema de espera con las siguientes componentes:

i) **Fuente***: Poblaci?n de clientes potenciales del sistema, esta puede ser finita o infinita.*

ii) **Proceso de Arribos***: Proceso determinado por la funci?n de distribuci?n $A(t) = P\{\tau \leq t\}$ de los tiempos entre arribos.*

Adem?s tenemos las siguientes igualdades

$$N(t) = N_q(t) + N_s(s) \tag{25.33}$$

donde

- *$N(t)$ es el n?mero de clientes en el sistema al tiempo t.*

- $N_q(t)$ *es el n?mero de clientes en la cola al tiempo* t
- $N_s(t)$ *es el n?mero de clientes recibiendo servicio en el tiempo* t.

Bajo la hip?tesis de estacionareidad, es decir, las caracter?sticas de funcionamiento del sistema se han estabilizado en valores independientes del tiempo, entonces

$$N = N_q + N_s. \tag{25.34}$$

Los valores medios de las cantidades anteriores se escriben como $L = E(N)$, $L_q = E(N_q)$ *y* $L_s = E(N_s)$, *entonces de la ecuaci?n 30.97 se obtiene*

$$L = L_q + L_s \tag{25.35}$$

Si q *es el tiempo que pasa un cliente en la cola antes de recibir servicio, y* W *es el tiempo total que un cliente pasa en el sistema, entonces*

$$w = q + s$$

por lo tanto

$$W = W_q + W_s,$$

donde $W = E(w)$, $W_q = E(q)$ *y* $W_s = E(s) = \frac{1}{\delta}$.
La intensidad de tr?fico se define como

$$\rho = \frac{E(s)}{E(\tau)} = \frac{\beta}{\delta}. \tag{25.36}$$

La utilizaci?n por servidor es

$$u = \frac{\rho}{c} = \frac{\beta}{c\delta}. \tag{25.37}$$

donde c *es el n?mero de servidores.*

25.9. Procesos de Nacimiento y Muerte (Teor?a)

Proposición 25.16 *La recurrencia de* $\{X_t\}$, *o equivalentemente de* $\{Y_n\}$ *es equivalente a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\beta_1 \cdots \beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} = \infty \tag{25.38}$$

Lema 25.6 *Independientemente de la recurrencia o transitorieadad, existe una y s?lo una, salvo m?ltiplos, soluci?n a* $v\Lambda = 0$, *dada por*

$$v_n = \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} v_0 \tag{25.39}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Corolario 25.11 *En el caso recurrente, la medida estacionaria* μ *para* $\{Y_n\}$ *est? dada por*

$$\mu_n = \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n} \mu_0 \tag{25.40}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Se define a $S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n}$

Corolario 25.12 $\{X_t\}$ *es erg?dica si y s?lo si la ecuaci?n (30.133) se cumple y adem?s* $S < \infty$, *en cuyo caso la distribuci?n erg?dica,* π, *est? dada por*

$$\pi_0 = \frac{1}{S}, \; \pi_n = \frac{1}{S} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \tag{25.41}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

25.10. Procesos de Nacimiento y Muerte como Modelos de Colas

25.10.1. Cola $M/M/1$

Este modelo corresponde a un proceso de nacimiento y muerte con $\beta_n = \beta$ y $\delta_n = \delta$ independiente del valor de n. La intensidad de tr?fico $\rho = \frac{\beta}{\delta}$, implica que el criterio de recurrencia (ecuaci?n 30.133) quede de la forma:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} = \infty.$$

Equivalentemente el proceso es recurrente si y s?lo si

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n < \infty \Leftrightarrow \frac{\beta}{\delta} < 1$$

Entonces $S = \frac{\delta}{\delta - \beta}$, luego por la ecuaci?n 30.136 se tiene que

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{\delta - \beta}{\delta} = 1 - \frac{\beta}{\delta} \\
\pi_n &= \pi_0 \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n = \left(1 - \frac{\beta}{\delta}\right)\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n = (1 - \rho)\,\rho^n
\end{aligned}$$

Lo cual nos lleva a la siguiente

Proposición 25.17 *La cola $M/M/1$ con intendisad de tr?fico ρ, es recurrente si y s?lo si $\rho \leq 1$.*

Entonces por el corolario 30.30

Proposición 25.18 *La cola $M/M/1$ con intensidad de tr?fico ρ es erg?dica si y s?lo si $\rho < 1$. En cuyo caso, la distribuci?n de equilibrio π de la longitud de la cola es geom?trica, $\pi_n = (1 - \rho)\,\rho^n$, para $n = 1, 2, \ldots$.*

De la proposici?n anterior se desprenden varios hechos importantes.

a) *$\mathbb{P}[X_t = 0] = \pi_0 = 1 - \rho$, es decir, la probabilidad de que el sistema se encuentre ocupado.*

b) *De las propiedades de la distribuci?n Geom?trica se desprende que*

   1) $\mathbb{E}[X_t] = \frac{\rho}{1-\rho}$,

   2) $Var[X_t] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$.

Si L es el n?mero esperado de clientes en el sistema, incluyendo los que est?n siendo atendidos, entonces

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

Si adem?s W es el tiempo total del cliente en la cola: $W = W_q + W_s$ $\rho = \frac{\mathbb{E}[s]}{\mathbb{E}[\tau]} = \beta W_s$, puesto que $W_s = \mathbb{E}[s]$ y $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\delta}$. Por la f?rmula de Little $L = \lambda W$

$$\begin{aligned}
W &= \frac{L}{\beta} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\beta} = \frac{\rho}{\delta}\frac{1}{1-\rho} = \frac{W_s}{1-\rho} \\
&= \frac{1}{\delta(1-\rho)} = \frac{1}{\delta - \beta}
\end{aligned}$$

luego entonces

$$\begin{aligned}
W_q &= W - W_s = \frac{1}{\delta - \beta} - \frac{1}{\delta} = \frac{\beta}{\delta(\delta - \beta)} \\
&= \frac{\rho}{1-\rho}\frac{1}{\delta} = \mathbb{E}[s]\,\frac{\rho}{1-\rho}
\end{aligned}$$

Entonces

$$L_q = \beta W_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Finalmente

Proposición 25.19 a) *$W(t) = 1 - e^{-\frac{t}{W}}$.*
b) *$W_q(t) = 1 - \rho \exp^{-\frac{t}{W}}$.*
donde $W = \mathbb{E}(w)$.

25.11. Notaci?n Kendall-Lee, segunda parte

Esta notaci?n es una forma abreviada de describir un sistema de espera con componentes dados a continuaci?n, la notaci?n es

$$A/S/c/K/F/d \tag{25.42}$$

Cada una de las letras describe:

- *A es la distribuci?n de los tiempos entre arribos.*
- *S es la distribuci?n del tiempo de servicio.*
- *c es el n?mero de servidores.*
- *K es la capacidad del sistema.*
- *F es el n?mero de individuos en la fuente.*
- *d es la disciplina del servicio*

Usualmente se acostumbra suponer que $K = \infty$, $F = \infty$ y $d = FIFO$, es decir, First In First Out. Las distribuciones usuales para A y B son:

- *GI para la distribuci?n general de los tiempos entre arribos.*
- *G distribuci?n general del tiempo de servicio.*
- *M Distribuci?n exponencial para A o S.*
- *E_K Distribuci?n Erlang-K, para A o S.*
- *D tiempos entre arribos o de servicio constantes, es decir, deterministicos.*

25.12. Procesos de Nacimiento y Muerte como Modelos de Colas(Continuaci?n)

25.12.1. Cola $M/M/\infty$

Este modelo corresponde al caso en que $\beta_n = \beta$ y $\delta_n = n\delta$, en este caso el par?metro de inter?s $\eta = \frac{\beta}{\delta}$, luego, la ecuaci?n 30.133 queda de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\beta_1 \cdots \beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} n! \eta^{-n} = \infty$$

con $S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} = e$

Proposición 25.20 *La cola $M/M/\infty$ es erg?dica para todos los valores de η. La distribuci?n de equilibrio π es Poisson con media η, $\pi_n = \frac{e^{-n}\eta^n}{n!}$.*

25.12.2. Cola $M/M/m$

Para este caso $\beta_n = \beta$ y $\delta_n = m(n)\delta$, donde $m(n)$ es el n?mero de servidores ocupados en el estado n, es decir, $m(n) = m$, para $n \geq m$ y $m(n) = m$ para $1 \leq n \leq m$. La intensidad de tr?fico es $\rho = \frac{\beta}{m\delta}$ y $\frac{\beta_n}{\delta_n} = \rho$ para $n \geq m$. As?, al igual que en el caso $m = 1$, la ecuaci?n 30.133 y la recurrencia se cumplen si y s?lo si $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} = \infty$, es decir, cuando $\rho \leq 1$. Similarmente, con $\eta = \frac{\beta}{\delta}$ se tiene que

$$\begin{aligned} S &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} = \sum_{n \geq 0} \frac{\eta^n}{n!} + \frac{\eta^m}{m!} \sum_{n \geq 0} \rho^n \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\eta^n}{n!} + \frac{\eta^m}{m!} (1 - \rho)^{-1} \end{aligned}$$

es finita si y s?lo si $\rho < 1$, por tanto se tiene la siguiente

Proposición 25.21 *La cola $M/M/m$ con intensidad de tr?fico ρ es erg?dica si y s?lo si $\rho < 1$. En este caso la distribuci?n erg?dica π est? dada por*

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{1}{S}\frac{\eta^n}{n!} & 0 \leq n \leq m \\ \frac{1}{S}\frac{\eta^m}{m!}\rho^{n-m} & m \leq n < \infty \end{cases}$$

25.13. Cadenas de Markov

25.13.1. Estacionareidad

Sea $v = (v_i)_{i\in E}$ medida no negativa en E, podemos definir una nueva medida $v\mathbb{P}$ que asigna masa $\sum_{i\in E} v_i p_{ij}$ a cada estado j.

Definición 25.10 *La medida v es estacionaria si $v_i < \infty$ para toda i y adem?s $v\mathbb{P} = v$.*

En el caso de que v sea distribuci?n, independientemente de que sea estacionaria o no, se cumple con

$$\mathbb{P}_v [X_1 = j] = \sum_{i\in E} \mathbb{P}_v [X_0 = i] p_{ij} = \sum_{i\in E} v_i p_{ij} = (vP)_j$$

Teorema 25.16 *Supongamos que v es una distribuci?n estacionaria. Entonces*

i) La cadena es estrictamente estacionaria con respecto a $\mathbb{P}_v$, es decir, $\mathbb{P}_v$-distribuci?n de $\{X_n, X_{n+1}, \ldots\}$ no depende de n;

ii) Existe un aversi?n estrictamente estacionaria $\{X_n\}_{n\in Z}$ de la cadena con doble tiempo infinito y $\mathbb{P}(X_n = i) = v_i$ para toda $n \in Z$.

Teorema 25.17 *Sea i estado fijo, recurrente. Entonces una medida estacionaria v puede definirse haciendo que v_j sea el n?mero esperado de visitas a j entre dos visitas consecutivas i,*

$$v_j = \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \mathbb{1}(X_n = i) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i [X_n = j, \tau(i) > n] \tag{25.43}$$

Teorema 25.18 *Si la cadena es irreducible y recurrente, entonces una medida estacionaria v existe, satisface $0 < v_j < \infty$ para toda j y es ?nica salvo factores multiplicativos, es decir, si v, v^* son estacionarias, entonces $c = cv^*$ para alguna $c \in (0, \infty)$.*

Corolario 25.13 *Si la cadena es irreducible y positiva recurrente, existe una ?nica distribuci?n estacionaria π dada por*

$$\pi_j = \frac{1}{\mathbb{E}_i \tau_i} \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \mathbb{1}(X_n = j) = \frac{1}{\mathbb{E}_j \tau(j)}. \tag{25.44}$$

Corolario 25.14 *Cualquier cadena de Markov irreducible con un espacio de estados finito es positiva recurrente.*

25.13.2. Teor?a Erg?dica

Lema 25.7 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y se F subconjunto finito del espacio de estados. Entonces la cadena es positiva recurrente si $\mathbb{E}_i \tau(F) < \infty$ para todo $i \in F$.*

Proposición 25.22 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y transiente o cero recurrente, entonces $p_{ij}^n \to 0$ conforme $n \to \infty$ para cualquier $i, j \in E$, E espacio de estados.*

Utilizando el teorema (2.2) y el corolario refCor.3.5, se demuestra el siguiente resultado importante.

Teorema 25.19 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y aperi?dica positiva recurrente, y sea $\pi = \{\pi_j\}_{j\in E}$ la distribuci?n estacionaria. Entonces $p_{ij}^n \to \pi_j$ para todo i, j.*

Definición 25.11 *Una cadena irreducible aperiodica, positiva recurrente con medida estacionaria v, es llamada* erg?dica.

Proposición 25.23 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y recurrente con medida estacionaria v, entocnes para todo $i,j,k,l \in E$*

$$\frac{\sum_{n=0}^{m} p_{ij}^{n}}{\sum_{n=0}^{m} p_{lk}^{n}} \rightarrow \frac{v_j}{v_k},\ m \rightarrow \infty \tag{25.45}$$

Lema 25.8 *La matriz $\widetilde{P}$ con elementos $\widetilde{p}_{ij} = \frac{v_{ji} p_{ji}}{v_i}$ es una matriz de transici?n. Adem?s, el i-?simo elementos $\widetilde{p}_{ij}^{m}$ de la matriz potencia $\widetilde{P}^{m}$ est? dada por $\widetilde{p}_{ij}^{m} = \frac{v_{ji} p_{ji}^{m}}{v_i}$.*

Lema 25.9 *Def?nase $N_i^m = \sum_{n=0}^{m} \mathbb{1}\left(X_n = i\right)$ como el n?mero de visitas a i antes del tiempo m. Entonces si la cadena es reducible y recurrente, $lim_{m\rightarrow\infty} \frac{\mathbb{E}_j N_i^m}{\mathbb{E}_k N_i^m} = 1$ para todo $j,k \in E$.*

25.13.3. Funciones Arm?nicas, Recurrencia y Transitoriedad

Definición 25.12 *Una funci?n Arm?nica es el eigenvector derecho h de P corrrespondiente al eigenvalor 1.*

$$Ph = h \Leftrightarrow h\left(i\right) = \sum_{j\in E} p_{ij} h\left(j\right) = \mathbb{E}_i h\left(X_1\right) = \mathbb{E}\left[h\left(X_{n+1}\right)|X_n = i\right].$$

es decir, $\{h\left(X_n\right)\}$ es martingala.

Proposición 25.24 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y sea i estado fijo arbitrario. Entonces la cadena es transitoria s? y s?lo si existe una funci?n no cero, acotada $h : E - \{i\} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface*

$$h\left(j\right) = \sum_{k\neq i} p_{jk} h\left(k\right) \ \text{para}\ j \neq i. \tag{25.46}$$

25.14. Procesos de Markov de Saltos

Sea E espacio discreto de estados, finito o numerable, y sea $\{X_t\}$ un proceso de Markov con espacio de estados E. Una medida μ en E definida por sus probabilidades puntuales μ_i, escribimos $p_{ij}^{t} = P^{t}\left(i,\{j\}\right) = P_i\left(X_t = j\right)$.

El monto del tiempo gastado en cada estado es positivo, de modo tal que las trayectorias muestrales son constantes por partes. Para un proceso de saltos denotamos por los tiempos de saltos a $S_0 = 0 < S_1 < S_2 \cdots$, los tiempos entre saltos consecutivos $T_n = S_{n+1} - S_n$ y la secuencia de estados visitados por $Y_0, Y_1, \ldots$, as? las trayectorias muestrales son constantes entre S_n consecutivos, continua por la derecha, es decir, $X_{S_n} = Y_n$.

Teorema 25.20 *Cualquier Proceso de Markov de Saltos satisface la Propiedad Fuerte de Markov*

Definición 25.13 *Una medida $v \neq 0$ es estacionaria si $0 \leq v_j < \infty$, $vP^t = v$ para toda t.*

Teorema 25.21 *Supongamos que $\{X_t\}$ es irreducible recurrente en E. Entonces existe una y s?lo una, salvo m?ltiplos, medida estacionaria v. Esta v tiene la propiedad de que $0 < v_j < \infty$ para todo j y puede encontrarse en cualquiera de las siguientes formas*

i) Para alg?n estado i, fijo pero arbitrario, v_j es el tiempo esperado utilizado en j entre dos llegadas consecutivas al estado i;

$$v_j = \mathbb{E}_i \int_0^{w(i)} \mathbb{1}\left(X_t = j\right) dt \tag{25.47}$$

con $w\left(i\right) = \text{ínf}\{t > 0 : X_t = i, X_{t^-} = \text{lím}_{s\uparrow t} X_s \neq i\}$.

ii) $v_j = \frac{\mu_j}{\lambda(j)}$, donde μ es estacionaria para $\{Y_n\}$.

iii) como soluci?n de $v\Lambda = 0$.

Definición 25.14 *Un proceso irreducible recurrente con medida estacionaria de masa finita es llamado erg?dico.*

Teorema 25.22 *Un proceso de Markov de saltos irreducible no explosivo es erg?dico si y s?lo si se puede encontrar una soluci?n, de probabilidad, π, con $|\pi| = 1$ y $0 \leq \pi_j \leq 1$, a $\pi\Lambda = 0$. En este caso π es la distribuci?n estacionaria.*

Corolario 25.15 *Una condici?n suficiente para la ergodicidad de un proceso irreducible es la existencia de una probabilidad π que resuelva el sistema $\pi\Lambda = 0$ y que adem?s tenga la propiedad de que $\sum \pi_j \lambda\left(j\right)$.*

25.15. Notaci?n Kendall-Lee

25.15.1. Primera parte

A partir de este momento se har?n las siguientes consideraciones: Si t_n es el tiempo aleatorio en el que llega al sistema el n-?simo cliente, para $n = 1, 2, \ldots$, $t_0 = 0$ y $t_0 < t_1 < \cdots$ se definen los tiempos entre arribos $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ para $n = 1, 2, \ldots$, variables aleatorias independientes e id?nticamente distribuidas. Los tiempos entre arribos tienen un valor medio $E(\tau)$ finito y positivo $\frac{1}{\beta}$, es decir, β se puede ver como la tasa o intensidad promedio de arribos al sistema por unidad de tiempo. Adem?s se supondr? que los servidores son identicos y si s denota la variable aleatoria que describe el tiempo de servicio, entonces $E(s) = \frac{1}{\delta}$, δ es la tasa promedio de servicio por servidor.

La notaci?n de Kendall-Lee es una forma abreviada de describir un sisema de espera con las siguientes componentes:

i) **Fuente**: *Poblaci?n de clientes potenciales del sistema, esta puede ser finita o infinita.*

ii) **Proceso de Arribos**: *Proceso determinado por la funci?n de distribuci?n $A(t) = P\{\tau \leq t\}$ de los tiempos entre arribos.*

Adem?s tenemos las siguientes igualdades

$$N(t) = N_q(t) + N_s(s) \tag{25.48}$$

donde

- *$N(t)$ es el n?mero de clientes en el sistema al tiempo t.*
- *$N_q(t)$ es el n?mero de clientes en la cola al tiempo t*
- *$N_s(t)$ es el n?mero de clientes recibiendo servicio en el tiempo t.*

Bajo la hip?tesis de estacionareidad, es decir, las caracter?sticas de funcionamiento del sistema se han estabilizado en valores independientes del tiempo, entonces

$$N = N_q + N_s. \tag{25.49}$$

Los valores medios de las cantidades anteriores se escriben como $L = E(N)$, $L_q = E(N_q)$ y $L_s = E(N_s)$, entonces de la ecuaci?n 30.97 se obtiene

$$L = L_q + L_s \tag{25.50}$$

Si q es el tiempo que pasa un cliente en la cola antes de recibir servicio, y W es el tiempo total que un cliente pasa en el sistema, entonces

$$w = q + s$$

por lo tanto

$$W = W_q + W_s,$$

donde $W = E(w)$, $W_q = E(q)$ y $W_s = E(s) = \frac{1}{\delta}$.

La intensidad de tr?fico se define como

$$\rho = \frac{E(s)}{E(\tau)} = \frac{\beta}{\delta}. \tag{25.51}$$

La utilizaci?n por servidor es

$$u = \frac{\rho}{c} = \frac{\beta}{c\delta}. \tag{25.52}$$

donde c es el n?mero de servidores.

25.15.2. Segunda parte

Esta notaci?n es una forma abreviada de describir un sistema de espera con componentes dados a continuaci?n, la notaci?n es

$$A/S/c/K/F/d \tag{25.53}$$

Cada una de las letras describe:

- *A es la distribuci?n de los tiempos entre arribos.*

- *S es la distribuci?n del tiempo de servicio.*
- *c es el n?mero de servidores.*
- *K es la capacidad del sistema.*
- *F es el n?mero de individuos en la fuente.*
- *d es la disciplina del servicio*

Usualmente se acostumbra suponer que $K = \infty$, $F = \infty$ y $d = FIFO$, es decir, First In First Out. Las distribuciones usuales para A y B son:

- *GI para la distribuci?n general de los tiempos entre arribos.*
- *G distribuci?n general del tiempo de servicio.*
- *M Distribuci?n exponencial para A o S.*
- *E_K Distribuci?n Erlang-K, para A o S.*
- *D tiempos entre arribos o de servicio constantes, es decir, deterministicos.*

25.16. Procesos de Nacimiento y Muerte

Proposición 25.25 *La recurrencia de $\{X_t\}$, o equivalentemente de $\{Y_n\}$ es equivalente a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\beta_1 \cdots \beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} = \infty \tag{25.54}$$

Lema 25.10 *Independientemente de la recurrencia o transitorieadad, existe una y s?lo una, salvo m?ltiplos, soluci?n a $v\Lambda = 0$, dada por*

$$v_n = \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} v_0 \tag{25.55}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Corolario 25.16 *En el caso recurrente, la medida estacionaria μ para $\{Y_n\}$ est? dada por*

$$\mu_n = \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n} \mu_0 \tag{25.56}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Se define a $S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n}$

Corolario 25.17 *$\{X_t\}$ es erg?dica si y s?lo si la ecuaci?n (30.133) se cumple y adem?s $S < \infty$, en cuyo caso la distribuci?n erg?dica, π, est? dada por*

$$\pi_0 = \frac{1}{S}, \, \pi_n = \frac{1}{S} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \tag{25.57}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

25.16.1. Cola $M/M/1$

Este modelo corresponde a un proceso de nacimiento y muerte con $\beta_n = \beta$ y $\delta_n = \delta$ independiente del valor de n. La intensidad de tr?fico $\rho = \frac{\beta}{\delta}$, implica que el criterio de recurrencia (ecuaci?n 30.133) quede de la forma:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} = \infty.$$

Equivalentemente el proceso es recurrente si y s?lo si

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n < \infty \Leftrightarrow \frac{\beta}{\delta} < 1$$

Entonces $S = \frac{\delta}{\delta-\beta}$, *luego por la ecuaci?n 30.136 se tiene que*

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{\delta-\beta}{\delta} = 1 - \frac{\beta}{\delta}\\ \pi_n &= \pi_0\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n = \left(1-\frac{\beta}{\delta}\right)\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n = (1-\rho)\,\rho^n\end{aligned}$$

Lo cual nos lleva a la siguiente

Proposición 25.26 *La cola* $M/M/1$ *con intendisad de tr?fico* ρ, *es recurrente si y s?lo si* $\rho \leq 1$.

Entonces por el corolario 30.30

Proposición 25.27 *La cola* $M/M/1$ *con intensidad de tr?fico* ρ *es erg?dica si y s?lo si* $\rho < 1$. *En cuyo caso, la distribuci?n de equilibrio* π *de la longitud de la cola es geom?trica,* $\pi_n = (1-\rho)\,\rho^n$, *para* $n = 1, 2, \ldots$.

De la proposici?n anterior se desprenden varios hechos importantes.

a) $\mathbb{P}[X_t = 0] = \pi_0 = 1-\rho$, *es decir, la probabilidad de que el sistema se encuentre ocupado.*

b) *De las propiedades de la distribuci?n Geom?trica se desprende que*

  1) $\mathbb{E}[X_t] = \frac{\rho}{1-\rho}$,

  2) $Var[X_t] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$.

Si L *es el n?mero esperado de clientes en el sistema, incluyendo los que est?n siendo atendidos, entonces*

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Si adem?s W *es el tiempo total del cliente en la cola:* $W = W_q + W_s$ $\rho = \frac{\mathbb{E}[s]}{\mathbb{E}[\tau]} = \beta W_s$, *puesto que* $W_s = \mathbb{E}[s]$ *y* $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\delta}$. *Por la f?rmula de Little* $L = \lambda W$

$$\begin{aligned}W &= \frac{L}{\beta} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\beta} = \frac{\rho}{\delta}\frac{1}{1-\rho} = \frac{W_s}{1-\rho}\\ &= \frac{1}{\delta(1-\rho)} = \frac{1}{\delta-\beta}\end{aligned}$$

luego entonces

$$\begin{aligned}W_q &= W - W_s = \frac{1}{\delta-\beta} - \frac{1}{\delta} = \frac{\beta}{\delta(\delta-\beta)}\\ &= \frac{\rho}{1-\rho}\frac{1}{\delta} = \mathbb{E}[s]\,\frac{\rho}{1-\rho}\end{aligned}$$

Entonces

$$L_q = \beta W_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Finalmente

Proposición 25.28 a) $W(t) = 1 - e^{-\frac{t}{W}}$.

b) $W_q(t) = 1 - \rho\exp^{-\frac{t}{W}}$.
donde $W = \mathbb{E}(w)$.

25.16.2. Cola $M/M/\infty$

Este tipo de modelos se utilizan para estimar el n?mero de l?neas en uso en una gran red comunicaci?n o para estimar valores en los sistemas $M/M/c$ *o* $M/M/c/c$, *en el se puede pensar que siempre hay un servidor disponible para cada cliente que llega.*

Se puede considerar como un proceso de nacimiento y muerte con par?metros $\beta_n = \beta$ y $\mu_n = n\mu$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces por la ecuaci?n 30.136 se tiene que

$$\pi_0 = e^{\rho}$$
$$\pi_n = e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}$$

Entonces, el n?mero promedio de servidores ocupados es equivalente a considerar el n?mero de clientes en el sistema, es decir,

$$L = \mathbb{E}[N] = \rho$$
$$Var[N] = \rho$$

Adem?s se tiene que $W_q = 0$ y $L_q = 0$.

El tiempo promedio en el sistema es el tiempo promedio de servicio, es decir, $W = \mathbb{E}[s] = \frac{1}{\delta}$. Resumiendo, tenemos la sisuguiente proposici?n:

Proposición 25.29 *La cola $M/M/\infty$ es erg?dica para todos los valores de η. La distribuci?n de equilibrio π es Poisson con media η, $\pi_n = \frac{e^{-n}\eta^n}{n!}$.*

25.16.3. Cola $M/M/m$

Este sistema considera m servidores id?nticos, con tiempos entre arribos y de servicio exponenciales con medias $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\beta}$ y $\mathbb{E}[s] = \frac{1}{\delta}$. definimos ahora la utilizaci?n por servidor como $u = \frac{\rho}{m}$ que tambi?n se puede interpretar como la fracci?n de tiempo promedio que cada servidor est? ocupado.

La cola $M/M/m$ se puede considerar como un proceso de nacimiento y muerte con par?metros: $\beta_n = \beta$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ y $\delta_n = \begin{cases} n\delta & n = 0, 1, \ldots, m-1 \\ c\delta & n = m, \ldots \end{cases}$

entonces la condici?n de recurrencia se va a cumplir s? y s?lo si $\sum_{n\geq 1}\frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} < \infty$, equivalentemente se debe de cumplir que

$$\begin{aligned} S &= 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} = \sum_{n=0}^{m-1}\frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1}\frac{\beta^n}{n!\delta^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^m}{m!}u^n \end{aligned}$$

converja, lo cual ocurre si $u < 1$, en este caso

$$S = \sum_{n=0}^{m-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^m}{m!}(1-u)$$

luego, para este caso se tiene que

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1}{S} \\ \pi_n &= \begin{cases} \pi_0\frac{\rho^n}{n!} & n = 0, 1, \ldots, m-1 \\ \pi_0\frac{\rho^n}{m!m^{n-m}} & n = m, \ldots \end{cases} \end{aligned}$$

Al igual que se hizo antes, determinaremos los valores de L_q, W_q, W y L:

$$\begin{aligned} L_q &= \mathbb{E}[N_q] = \sum_{n=0}^{\infty}(n-m)\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty}n\pi_{n+m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}n\pi_0\frac{\rho^{n+m}}{m!m^{n+m}} = \pi_0\frac{\rho^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}nu^n = \pi_0\frac{u\rho^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{du}u^n \\ &= \pi_0\frac{u\rho^m}{m!}\frac{d}{du}\sum_{n=0}^{\infty}u^n = \pi_0\frac{u\rho^m}{m!}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{1-u}\right) = \pi_0\frac{u\rho^m}{m!}\frac{1}{(1-u)^2} \end{aligned}$$

es decir

$$L_q = \frac{u\pi_0\rho^m}{m!\,(1-u)^2} \tag{25.58}$$

luego

$$W_q = \frac{L_q}{\beta} \tag{25.59}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\delta} \tag{25.60}$$

Si definimos $C(m,\rho) = \frac{\pi_0\rho^m}{m!(1-u)} = \frac{\pi_m}{1-u}$, *que es la probabilidad de que un cliente que llegue al sistema tenga que esperar en la cola. Entonces podemos reescribir las ecuaciones reci?n enunciadas:*

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{C(m,\rho)\,u}{1-u} \\ W_q &= \frac{C(m,\rho)\,\mathbb{E}[s]}{m(1-u)} \end{aligned}$$

Proposición 25.30 *La cola* $M/M/m$ *con intensidad de tr?fico* ρ *es erg?dica si y s?lo si* $\rho < 1$. *En este caso la distribuci?n erg?dica* π *est? dada por*

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{1}{S}\frac{\eta^n}{n!} & 0 \leq n \leq m \\ \frac{1}{S}\frac{\eta^m}{m!}\rho^{n-m} & m \leq n < \infty \end{cases}$$

Proposición 25.31 *Para* $t \geq 0$

a) $W_q(t) = 1 - C(m,\rho)\,e^{-c\delta t(1-u)}$

b)

$$W(t) = \begin{cases} 1 + e^{-\delta t}\frac{\rho - m + W_q(0)}{m-1-\rho} + e^{-m\delta t(1-u)}\frac{C(m,\rho)}{m-1-\rho} & \rho \neq m-1 \\ 1 - (1 + C(m,\rho)\,\delta t)\,e^{-\delta t} & \rho = m-1 \end{cases}$$

25.17. Ejemplo de Cadena de Markov para dos Estados

Supongamos que se tiene la siguiente cadena:

$$\begin{pmatrix} 1-q & q \\ p & 1-p \end{pmatrix} \tag{25.61}$$

Si $P[X_0 = 0] = \pi_0(0) = a$ *y* $P[X_0 = 1] = \pi_0(1) = b = 1 - \pi_0(0)$, *con* $a + b = 1$, *entonces despu?s de un procedimiento m?s o menos corto se tiene que:*

$$\begin{aligned} P[X_n = 0] &= \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n\left(a - \frac{p}{p+q}\right) \\ P[X_n = 1] &= \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n\left(b - \frac{q}{p+q}\right) \end{aligned}$$

donde, como $0 < p, q < 1$, *se tiene que* $|1-p-q| < 1$, *entonces* $(1-p-q)^n \to 0$ *cuando* $n \to \infty$. *Por lo tanto*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} P[X_n = 0] &= \frac{p}{p+q} \\ lim_{n\to\infty} P[X_n = 1] &= \frac{q}{p+q} \end{aligned}$$

Si hacemos $v = \left(\frac{p}{p+q}, \frac{q}{p+q}\right)$, *entonces*

$$\left(\frac{p}{p+q}, \frac{q}{p+q}\right)\begin{pmatrix} 1-q & q \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

25.18. Cadenas de Markov

25.18.1. Estacionareidad

Sea $v = (v_i)_{i\in E}$ medida no negativa en E, podemos definir una nueva medida $v\mathbb{P}$ que asigna masa $\sum_{i\in E} v_i p_{ij}$ a cada estado j.

Definición 25.15 *La medida v es estacionaria si $v_i < \infty$ para toda i y adem?s $v\mathbb{P} = v$.*

En el caso de que v sea distribuci?n, independientemente de que sea estacionaria o no, se cumple con

$$\mathbb{P}_v [X_1 = j] = \sum_{i\in E} \mathbb{P}_v [X_0 = i] p_{ij} = \sum_{i\in E} v_i p_{ij} = (vP)_j$$

Teorema 25.23 *Supongamos que v es una distribuci?n estacionaria. Entonces*

i) La cadena es estrictamente estacionaria con respecto a $\mathbb{P}_v$, es decir, $\mathbb{P}_v$-distribuci?n de $\{X_n, X_{n+1}, \ldots\}$ no depende de n;

ii) Existe un aversi?n estrictamente estacionaria $\{X_n\}_{n\in Z}$ de la cadena con doble tiempo infinito y $\mathbb{P}(X_n = i) = v_i$ para toda $n \in Z$.

Teorema 25.24 *Sea i estado fijo, recurrente. Entonces una medida estacionaria v puede definirse haciendo que v_j sea el n?mero esperado de visitas a j entre dos visitas consecutivas i,*

$$v_j = \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \mathbb{1}(X_n = i) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i [X_n = j, \tau(i) > n] \tag{25.62}$$

Teorema 25.25 *Si la cadena es irreducible y recurrente, entonces una medida estacionaria v existe, satisface $0 < v_j < \infty$ para toda j y es ?nica salvo factores multiplicativos, es decir, si v, v^* son estacionarias, entonces $c = cv^*$ para alguna $c \in (0, \infty)$.*

Corolario 25.18 *Si la cadena es irreducible y positiva recurrente, existe una ?nica distribuci?n estacionaria π dada por*

$$\pi_j = \frac{1}{\mathbb{E}_i \tau_i} \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \mathbb{1}(X_n = j) = \frac{1}{\mathbb{E}_j \tau(j)}. \tag{25.63}$$

Corolario 25.19 *Cualquier cadena de Markov irreducible con un espacio de estados finito es positiva recurrente.*

25.18.2. Teor?a Erg?dica

Lema 25.11 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y se F subconjunto finito del espacio de estados. Entonces la cadena es positiva recurrente si $\mathbb{E}_i \tau(F) < \infty$ para todo $i \in F$.*

Proposición 25.32 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y transiente o cero recurrente, entonces $p_{ij}^n \to 0$ conforme $n \to \infty$ para cualquier $i, j \in E$, E espacio de estados.*

Utilizando el teorema (2.2) y el corolario refCor.3.5, se demuestra el siguiente resultado importante.

Teorema 25.26 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y aperi?dica positiva recurrente, y sea $\pi = \{\pi_j\}_{j\in E}$ la distribuci?n estacionaria. Entonces $p_{ij}^n \to \pi_j$ para todo i, j.*

Definición 25.16 *Una cadena irreducible aperiodica, positiva recurrente con medida estacionaria v, es llamada* erg?dica.

Proposición 25.33 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y recurrente con medida estacionaria v, entocnes para todo $i, j, k, l \in E$*

$$\frac{\sum_{n=0}^{m} p_{ij}^n}{\sum_{n=0}^{m} p_{lk}^n} \to \frac{v_j}{v_k},\ m \to \infty \tag{25.64}$$

Lema 25.12 *La matriz $\widetilde{P}$ con elementos $\widetilde{p}_{ij} = \frac{v_{ji} p_{ji}}{v_i}$ es una matriz de transici?n. Adem?s, el i-?simo elementos $\widetilde{p}_{ij}^m$ de la matriz potencia $\widetilde{P}^m$ est? dada por $\widetilde{p}_{ij}^m = \frac{v_{ji} p_{ji}^m}{v_i}$.*

Lema 25.13 *Def?nase $N_i^m = \sum_{n=0}^{m} \mathbb{1}(X_n = i)$ como el n?mero de visitas a i antes del tiempo m. Entonces si la cadena es reducible y recurrente, $lim_{m\to\infty} \frac{\mathbb{E}_j N_i^m}{\mathbb{E}_k N_i^m} = 1$ para todo $j, k \in E$.*

25.18.3. Funciones Arm?nicas, Recurrencia y Transitoriedad

Definición 25.17 *Una funci?n Arm?nica es el eigenvector derecho h de P corrrespondiente al eigenvalor 1.*

$$Ph = h \Leftrightarrow h(i) = \sum_{j \in E} p_{ij} h(j) = \mathbb{E}_i h(X_1) = \mathbb{E}\left[h(X_{n+1}) | X_n = i\right].$$

es decir, $\{h(X_n)\}$ es martingala.

Proposición 25.34 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y sea i estado fijo arbitrario. Entonces la cadena es transitoria s? y s?lo si existe una funci?n no cero, acotada $h : E - \{i\} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface*

$$h(j) = \sum_{k \neq i} p_{jk} h(k) \text{ para } j \neq i. \tag{25.65}$$

Proposición 25.35 *Supongamos que la cadena es irreducible y sea E_0 un subconjunto finito del espacio de estados, entonces*

i)

ii)

Proposición 25.36 *Suponga que la cadena es irreducible y sea E_0 un subconjunto finito de E tal que se cumple la ecuaci?n 5.2 para alguna funci?n h acotada que satisface $h(i) < h(j)$ para alg?n estado $i \notin E_0$ y todo $j \in E_0$. Entonces la cadena es transitoria.*

25.19. Procesos de Markov de Saltos

25.19.1. Estructura B?sica de los Procesos Markovianos de Saltos

- *Sea E espacio discreto de estados, finito o numerable, y sea $\{X_t\}$ un proceso de Markov con espacio de estados E. Una medida μ en E definida por sus probabilidades puntuales μ_i, escribimos $p_{ij}^t = P^t(i, \{j\}) = P_i(X_t = j)$.*
- *El monto del tiempo gastado en cada estado es positivo, de modo tal que las trayectorias muestrales son constantes por partes. Para un proceso de saltos denotamos por los tiempos de saltos a $S_0 = 0 < S_1 < S_2 \cdots$, los tiempos entre saltos consecutivos $T_n = S_{n+1} - S_n$ y la secuencia de estados visitados por $Y_0, Y_1, \ldots$, as? las trayectorias muestrales son constantes entre S_n consecutivos, continua por la derecha, es decir, $X_{S_n} = Y_n$.*
- *La descripci?n de un modelo pr?ctico est? dado usualmente en t?rminos de las intensidades $\lambda(i)$ y las probabilidades de salto q_{ij} m?s que en t?rminos de la matriz de transici?n P^t.*
- *Sup?ngase de ahora en adelante que $q_{ii} = 0$ cuando $\lambda(i) > 0$*

25.19.2. Matriz Intensidad

Definición 25.18 *La matriz intensidad $\Lambda = (\lambda(i,j))_{i,j \in E}$ del proceso de saltos $\{X_t\}_{t \geq 0}$ est? dada por*

$$\begin{aligned} \lambda(i,j) &= \lambda(i) q_{i,j},\ j \neq i \\ \lambda(i,i) &= -\lambda(i) \end{aligned}$$

Proposición 25.37 *Una matriz $E \times E$, Λ es la matriz de intensidad de un proceso markoviano de saltos $\{X_t\}_{t \geq 0}$ si y s?lo si*

$$\lambda(i,i) \leq 0,\ \lambda(i,j),\ i \neq j,\ \sum_{j \in E} \lambda(i,j) = 0.$$

Adem?s, Λ est? en correspondencia uno a uno con la distribuci?n del proceso minimal dado por el teorema 3.1.

Para el caso particular de la Cola $M/M/1$, la matr?z de itensidad est? dada por

$$\Lambda = \left[\begin{array}{cccccc} -\beta & \beta & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \delta & -\beta-\delta & \beta & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \delta & -\beta-\delta & \beta & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{array}\right]$$

25.19.3. Medidas Estacionarias

Definición 25.19 *Una medida $v \neq 0$ es estacionaria si $0 \leq v_j < \infty$, $vP^t = v$ para toda t.*

Teorema 25.27 *Supongamos que $\{X_t\}$ es irreducible recurrente en E. Entonces existe una y s?lo una, salvo m?ltiplos, medida estacionaria v. Esta v tiene la propiedad de que $0 < v_j < \infty$ para todo j y puede encontrarse en cualquiera de las siguientes formas*

i) Para alg?n estado i, fijo pero arbitrario, v_j es el tiempo esperado utilizado en j entre dos llegadas consecutivas al estado i;

$$v_j = \mathbb{E}_i \int_0^{w(i)} \mathbb{1}\left(X_t = j\right) dt \tag{25.66}$$

con $w(i) = \inf\{t > 0 : X_t = i, X_{t^-} = \lim_{s \uparrow t} X_s \neq i\}$.

ii) $v_j = \frac{\mu_j}{\lambda(j)}$, donde μ es estacionaria para $\{Y_n\}$.

iii) como soluci?n de $v\Lambda = 0$.

25.19.4. Criterios de Ergodicidad

Definición 25.20 *Un proceso irreducible recurrente con medida estacionaria de masa finita es llamado erg?dico.*

Teorema 25.28 *Un proceso de Markov de saltos irreducible no explosivo es erg?dico si y s?lo si se puede encontrar una soluci?n, de probabilidad, π, con $|\pi| = 1$ y $0 \leq \pi_j \leq 1$, a $\pi\Lambda = 0$. En este caso π es la distribuci?n estacionaria.*

Corolario 25.20 *Una condici?n suficiente para la ergodicidad de un proceso irreducible es la existencia de una probabilidad π que resuelva el sistema $\pi\Lambda = 0$ y que adem?s tenga la propiedad de que $\sum \pi_j \lambda(j) < \infty$.*

Proposición 25.38 *Si el proceso es erg?dico, entonces existe una versi?n estrictamente estacionaria $\{X_t\}_{-\infty < t < \infty}$ con doble tiempo infinito.*

Teorema 25.29 *Si $\{X_t\}$ es erg?dico y π es la distribuci?n estacionaria, entonces para todo i, j, $p_{ij}^t \rightarrow \pi_j$ cuando $t \rightarrow \infty$.*

Corolario 25.21 *Si $\{X_t\}$ es irreducible recurente pero no erg?dica, es decir $|v| = \infty$, entonces $p_{ij}^t \rightarrow 0$ para todo $i, j \in E$.*

Corolario 25.22 *Para cualquier proceso Markoviano de Saltos minimal, irreducible o no, los l?mites $li_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^t$ existe.*

25.20. Notaci?n Kendall-Lee

25.20.1. Primera parte

A partir de este momento se har?n las siguientes consideraciones: Si t_n es el tiempo aleatorio en el que llega al sistema el n-?simo cliente, para $n = 1, 2, \ldots$, $t_0 = 0$ y $t_0 < t_1 < \cdots$ se definen los tiempos entre arribos $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ para $n = 1, 2, \ldots$, variables aleatorias independientes e id?nticamente distribuidas. Los tiempos entre arribos tienen un valor medio $E(\tau)$ finito y positivo $\frac{1}{\beta}$, es decir, β se puede ver como la tasa o intensidad promedio de arribos al sistema por unidad de tiempo. Adem?s se supondr? que los servidores son identicos y si s denota la variable aleatoria que describe el tiempo de servicio, entonces $E(s) = \frac{1}{\delta}$, δ es la tasa promedio de servicio por servidor.

La notaci?n de Kendall-Lee es una forma abreviada de describir un sisema de espera con las siguientes componentes:

i) **Fuente**: *Poblaci?n de clientes potenciales del sistema, esta puede ser finita o infinita.*

ii) **Proceso de Arribos**: *Proceso determinado por la funci?n de distribuci?n $A(t) = P\{\tau \leq t\}$ de los tiempos entre arribos.*

Adem?s tenemos las siguientes igualdades

$$N(t) = N_q(t) + N_s(s) \tag{25.67}$$

donde

- $N(t)$ *es el n?mero de clientes en el sistema al tiempo* t.
- $N_q(t)$ *es el n?mero de clientes en la cola al tiempo* t
- $N_s(t)$ *es el n?mero de clientes recibiendo servicio en el tiempo* t.

Bajo la hip?tesis de estacionareidad, es decir, las caracter?sticas de funcionamiento del sistema se han estabilizado en valores independientes del tiempo, entonces

$$N = N_q + N_s. \tag{25.68}$$

Los valores medios de las cantidades anteriores se escriben como $L = E(N)$, $L_q = E(N_q)$ *y* $L_s = E(N_s)$, *entonces de la ecuaci?n 30.97 se obtiene*

$$L = L_q + L_s \tag{25.69}$$

Si q *es el tiempo que pasa un cliente en la cola antes de recibir servicio, y* W *es el tiempo total que un cliente pasa en el sistema, entonces*

$$w = q + s$$

por lo tanto

$$W = W_q + W_s,$$

donde $W = E(w)$, $W_q = E(q)$ *y* $W_s = E(s) = \frac{1}{\delta}$.
La intensidad de tr?fico se define como

$$\rho = \frac{E(s)}{E(\tau)} = \frac{\beta}{\delta}. \tag{25.70}$$

La utilizaci?n por servidor es

$$u = \frac{\rho}{c} = \frac{\beta}{c\delta}. \tag{25.71}$$

donde c *es el n?mero de servidores.*

25.20.2. Segunda parte

Esta notaci?n es una forma abreviada de describir un sistema de espera con componentes dados a continuaci?n, la notaci?n es

$$A/S/c/K/F/d \tag{25.72}$$

Cada una de las letras describe:

- A *es la distribuci?n de los tiempos entre arribos.*
- S *es la distribuci?n del tiempo de servicio.*
- c *es el n?mero de servidores.*
- K *es la capacidad del sistema.*
- F *es el n?mero de individuos en la fuente.*
- d *es la disciplina del servicio*

Usualmente se acostumbra suponer que $K = \infty$, $F = \infty$ *y* $d = FIFO$, *es decir, First In First Out.*
Las distribuciones usuales para A *y* B *son:*

- GI *para la distribuci?n general de los tiempos entre arribos.*
- G *distribuci?n general del tiempo de servicio.*
- M *Distribuci?n exponencial para* A *o* S.
- E_K *Distribuci?n Erlang-*K, *para* A *o* S.
- D *tiempos entre arribos o de servicio constantes, es decir, deterministicos.*

25.21. Procesos de Nacimiento y Muerte

25.21.1. Procesos de Nacimiento y Muerte Generales

Por un proceso de nacimiento y muerte se entiende un proceso de saltos de markov $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *con espacio de estados a lo m?s numerable, con la propiedad de que s?lo puede ir al estado* $n+1$ *o al estado* $n-1$*, es decir, su matriz de intensidad es de la forma*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\beta_0 & \beta_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \delta_1 & -\beta_1-\delta_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \delta_2 & -\beta_2-\delta_2 & \beta_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

donde β_n *son las intensidades de nacimiento y* δ_n *las intensidades de muerte, o tambi?n se puede ver como a* X_t *el n?mero de usuarios en una cola al tiempo* t*, un salto hacia arriba corresponde a la llegada de un nuevo usuario y un salto hacia abajo como al abandono de un usuario despu?s de haber recibido su servicio.*
La cadena de saltos $\{Y_n\}$ *tiene matriz de transici?n dada por*

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

donde $p_n = \frac{\beta_n}{\beta_n+\delta_n}$ *y* $q_n = 1-p_n = \frac{\delta_n}{\beta_n+\delta_n}$*, donde adem?s se asumne por el momento que* p_n *no puede tomar el valor* 0 *?* 1 *para cualquier valor de* n*.*

Proposición 25.39 *La recurrencia de* $\{X_t\}$*, o equivalentemente de* $\{Y_n\}$ *es equivalente a*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_1\cdots\delta_n}{\beta_1\cdots\beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_1\cdots q_n}{p_1\cdots p_n} = \infty \tag{25.73}$$

Lema 25.14 *Independientemente de la recurrencia o transitorieadad, existe una y s?lo una, salvo m?ltiplos, soluci?n a* $v\Lambda = 0$*, dada por*

$$v_n = \frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n}v_0 \tag{25.74}$$

para $n = 1, 2, \ldots$*.*

Corolario 25.23 *En el caso recurrente, la medida estacionaria* μ *para* $\{Y_n\}$ *est? dada por*

$$\mu_n = \frac{p_1\cdots p_{n-1}}{q_1\cdots q_n}\mu_0 \tag{25.75}$$

para $n = 1, 2, \ldots$*.*
Se define a $S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_0\beta_1\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}$

Corolario 25.24 $\{X_t\}$ *es erg?dica si y s?lo si la ecuaci?n (30.133) se cumple y adem?s* $S < \infty$*, en cuyo caso la distribuci?n erg?dica,* π*, est? dada por*

$$\pi_0 = \frac{1}{S},\ \pi_n = \frac{1}{S}\frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} \tag{25.76}$$

para $n = 1, 2, \ldots$*.*

25.21.2. Cola M/M/1

Este modelo corresponde a un proceso de nacimiento y muerte con $\beta_n = \beta$ *y* $\delta_n = \delta$ *independiente del valor de* n*. La intensidad de tr?fico* $\rho = \frac{\beta}{\delta}$*, implica que el criterio de recurrencia (ecuaci?n 30.133) quede de la forma:*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\rho^{-n} = \infty.$$

Equivalentemente el proceso es recurrente si y s?lo si

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^{n}<\infty\Leftrightarrow\frac{\beta}{\delta}<1$$

Entonces $S=\frac{\delta}{\delta-\beta}$*, luego por la ecuaci?n 30.136 se tiene que*

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{\delta-\beta}{\delta}=1-\frac{\beta}{\delta}\\ \pi_n &= \pi_0\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^{n}=\left(1-\frac{\beta}{\delta}\right)\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^{n}=(1-\rho)\,\rho^{n}\end{aligned}$$

Lo cual nos lleva a la siguiente

Proposición 25.40 *La cola* $M/M/1$ *con intendisad de tr?fico* ρ*, es recurrente si y s?lo si* $\rho\leq 1$.

Entonces por el corolario 30.30

Proposición 25.41 *La cola* $M/M/1$ *con intensidad de tr?fico* ρ *es erg?dica si y s?lo si* $\rho<1$*. En cuyo caso, la distribuci?n de equilibrio* π *de la longitud de la cola es geom?trica,* $\pi_n=(1-\rho)\,\rho^{n}$*, para* $n=1,2,\ldots$*.*

De la proposici?n anterior se desprenden varios hechos importantes.

a*)* $\mathbb{P}[X_t=0]=\pi_0=1-\rho$*, es decir, la probabilidad de que el sistema se encuentre ocupado.*

b*) De las propiedades de la distribuci?n Geom?trica se desprende que*

1) $\mathbb{E}[X_t]=\frac{\rho}{1-\rho}$,

2) $Var[X_t]=\frac{\rho}{(1-\rho)^2}$.

Si L es el n?mero esperado de clientes en el sistema, incluyendo los que est?n siendo atendidos, entonces

$$L=\frac{\rho}{1-\rho}$$

Si adem?s W *es el tiempo total del cliente en la cola:* $W=W_q+W_s$ $\rho=\frac{\mathbb{E}[s]}{\mathbb{E}[\tau]}=\beta W_s$*, puesto que* $W_s=\mathbb{E}[s]$ *y* $\mathbb{E}[\tau]=\frac{1}{\delta}$*. Por la f?rmula de Little* $L=\lambda W$

$$\begin{aligned}W &= \frac{L}{\beta}=\frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\beta}=\frac{\rho}{\delta}\frac{1}{1-\rho}=\frac{W_s}{1-\rho}\\ &= \frac{1}{\delta\,(1-\rho)}=\frac{1}{\delta-\beta}\end{aligned}$$

luego entonces

$$\begin{aligned}W_q &= W-W_s=\frac{1}{\delta-\beta}-\frac{1}{\delta}=\frac{\beta}{\delta(\delta-\beta)}\\ &= \frac{\rho}{1-\rho}\frac{1}{\delta}=\mathbb{E}[s]\,\frac{\rho}{1-\rho}\end{aligned}$$

Entonces

$$L_q=\beta W_q=\frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Finalmente

Proposición 25.42 a*)* $W(t)=1-e^{-\frac{t}{W}}$.

b*)* $W_q(t)=1-\rho\exp^{-\frac{t}{W}}$.

donde $W=\mathbb{E}(w)$.

25.21.3. Cola $M/M/\infty$

Este tipo de modelos se utilizan para estimar el n?mero de l?neas en uso en una gran red comunicaci?n o para estimar valores en los sistemas $M/M/c$ o $M/M/c/c$, en el se puede pensar que siempre hay un servidor disponible para cada cliente que llega.

Se puede considerar como un proceso de nacimiento y muerte con par?metros $\beta_n = \beta$ y $\mu_n = n\mu$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces por la ecuaci?n 30.136 se tiene que

$$\pi_0 = e^{\rho}$$
$$\pi_n = e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}$$

Entonces, el n?mero promedio de servidores ocupados es equivalente a considerar el n?mero de clientes en el sistema, es decir,

$$L = \mathbb{E}[N] = \rho$$
$$Var[N] = \rho$$

Adem?s se tiene que $W_q = 0$ y $L_q = 0$.

El tiempo promedio en el sistema es el tiempo promedio de servicio, es decir, $W = \mathbb{E}[s] = \frac{1}{\delta}$. Resumiendo, tenemos la sisuguiente proposici?n:

Proposición 25.43 *La cola $M/M/\infty$ es erg?dica para todos los valores de η. La distribuci?n de equilibrio π es Poisson con media η, $\pi_n = \frac{e^{-n}\eta^n}{n!}$.*

25.21.4. Cola M/M/m

Este sistema considera m servidores id?nticos, con tiempos entre arribos y de servicio exponenciales con medias $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\beta}$ y $\mathbb{E}[s] = \frac{1}{\delta}$. definimos ahora la utilizaci?n por servidor como $u = \frac{\rho}{m}$ que tambi?n se puede interpretar como la fracci?n de tiempo promedio que cada servidor est? ocupado.

La cola $M/M/m$ se puede considerar como un proceso de nacimiento y muerte con par?metros: $\beta_n = \beta$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ y $\delta_n = \begin{cases} n\delta & n = 0, 1, \ldots, m-1 \\ c\delta & n = m, \ldots \end{cases}$

entonces la condici?n de recurrencia se va a cumplir s? y s?lo si $\sum_{n\geq 1} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} < \infty$, equivalentemente se debe de cumplir que

$$\begin{aligned} S &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\beta^n}{n!\delta^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^m}{m!} u^n \end{aligned}$$

converja, lo cual ocurre si $u < 1$, en este caso

$$S = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^m}{m!}(1-u)$$

luego, para este caso se tiene que

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1}{S} \\ \pi_n &= \begin{cases} \pi_0 \frac{\rho^n}{n!} & n = 0, 1, \ldots, m-1 \\ \pi_0 \frac{\rho^n}{m! m^{n-m}} & n = m, \ldots \end{cases} \end{aligned}$$

Al igual que se hizo antes, determinaremos los valores de L_q, W_q, W y L:

$$\begin{aligned} L_q &= \mathbb{E}[N_q] = \sum_{n=0}^{\infty} (n-m)\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_{n+m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_0 \frac{\rho^{n+m}}{m! m^{n+m}} = \pi_0 \frac{\rho^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} n u^n = \pi_0 \frac{u\rho^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{du} u^n \\ &= \pi_0 \frac{u\rho^m}{m!} \frac{d}{du} \sum_{n=0}^{\infty} u^n = \pi_0 \frac{u\rho^m}{m!} \frac{d}{du}\left(\frac{1}{1-u}\right) = \pi_0 \frac{u\rho^m}{m!} \frac{1}{(1-u)^2} \end{aligned}$$

es decir

$$L_q = \frac{u\pi_0\rho^m}{m!\,(1-u)^2} \tag{25.77}$$

luego

$$W_q = \frac{L_q}{\beta} \tag{25.78}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\delta} \tag{25.79}$$

Si definimos $C(m,\rho) = \frac{\pi_0\rho^m}{m!(1-u)} = \frac{\pi_m}{1-u}$, *que es la probabilidad de que un cliente que llegue al sistema tenga que esperar en la cola. Entonces podemos reescribir las ecuaciones reci?n enunciadas:*

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{C(m,\rho)\,u}{1-u} \\ W_q &= \frac{C(m,\rho)\,\mathbb{E}[s]}{m(1-u)} \end{aligned}$$

Proposición 25.44 *La cola* $M/M/m$ *con intensidad de tr?fico* ρ *es erg?dica si y s?lo si* $\rho < 1$. *En este caso la distribuci?n erg?dica* π *est? dada por*

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{1}{S}\frac{\eta^n}{n!} & 0 \leq n \leq m \\ \frac{1}{S}\frac{\eta^m}{m!}\rho^{n-m} & m \leq n < \infty \end{cases}$$

Proposición 25.45 *Para* $t \geq 0$

a) $W_q(t) = 1 - C(m,\rho)\,e^{-c\delta t(1-u)}$

b)

$$W(t) = \begin{cases} 1 + e^{-\delta t}\frac{\rho-m+W_q(0)}{m-1-\rho} + e^{-m\delta t(1-u)}\frac{C(m,\rho)}{m-1-\rho} & \rho \neq m-1 \\ 1 - (1 + C(m,\rho)\,\delta t)\,e^{-\delta t} & \rho = m-1 \end{cases}$$

25.21.5. Cola M/G/1

Consideremos un sistema de espera con un servidor, en el que los tiempos entre arribos son exponenciales, y los tiempos de servicio tienen una distribuci?n general G. *Sea* $N(t)_{t\geq 0}$ *el n?mero de clientes en el sistema al tiempo* t, *y sean* $t_1 < t_2 < \ldots$ *los tiempos sucesivos en los que los clientes completan su servicio y salen del sistema.*

La sucesi?n $\{X_n\}$ *definida por* $X_n = N(t)$ *es una cadena de Markov, en espec?fico es la Cadena encajada del proceso de llegadas de usuarios. Sea* U_n *el n?mero de clientes que llegan al sistema durante el tiempo de servicio del n-?simo cliente, entonces se tiene que*

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + U_{n+1} & si\ X_n \geq 1, \\ U_{n+1} & si\ X_n = 0 \end{cases}$$

Dado que los procesos de arribos de los usuarios es Poisson con par?metro λ, *la probabilidad condicional de que lleguen* j *clientes al sistema dado que el tiempo de servicio es* $s = t$, *resulta:*

$$\mathbb{P}\{U = j|s = t\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!},\ j = 0, 1, \ldots$$

por el teorema de la probabilidad total se tiene que

$$a_j = \mathbb{P}\{U = j\} = \int_0^\infty \mathbb{P}\{U = j|s = t\}\,dG(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}dG(t) \tag{25.80}$$

donde G *es la distribuci?n de los tiempos de servicio. Las probabilidades de transici?n de la cadena est?n dadas por*

$$p_{0j} = \mathbb{P}\{U_{n+1} = j\} = a_j,\ para\ j = 0, 1, \ldots \tag{25.81}$$

y para $i \geq 1$

$$p_{ij} = \begin{cases} \mathbb{P}\{U_{n+1} = j - i + 1\} = a_{j-i+1} & ,\ para\ j \geq i-1 \\ 0 & j < i-1 \end{cases} \tag{25.82}$$

Sea $\rho = \sum_{n=0} na_n$, *entonces se tiene el siguiente teorema:*

Teorema 25.30 *La cadena encajada $\{X_n\}$ es*

a) Recurrente positiva si $\rho < 1$,

b) Transitoria si $\rho > 1$,

c) Recurrente nula si $\rho = 1$.

Adem?s, se tiene que $\rho = \beta\mathbb{E}[s] = \frac{\beta}{\delta}$ y la distribuci?n estacionaria est? dada por

$$\pi_j = \pi_0 a_j + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1}, \text{ para } j = 0, 1, \ldots \tag{25.83}$$

$$\pi_0 = 1 - \rho \tag{25.84}$$

Adem?s se tiene que

$$L = \pi^{'}(1) = \rho + \frac{A^{''}(1)}{2(1-\rho)} \tag{25.85}$$

pero $A^{''}(1) = \sum_{n=1} n(n-1)a_n = \mathbb{E}[U^2] - \mathbb{E}[U]$, $\mathbb{E}[U] = \rho$ y $\mathbb{E}[U^2] = \lambda^2\mathbb{E}[s^2] + \rho$. Por lo tanto $L = \rho + \frac{\beta^2\mathbb{E}[s^2]}{2(1-\rho)}$.

De las f?rmulas de Little, se tiene que $W = E(w) = \frac{L}{\beta}$, tambi?n el tiempo de espera en la cola

$$W_q = \mathbb{E}(q) = \mathbb{E}(w) - \mathbb{E}(s) = \frac{L}{\beta} - \frac{1}{\delta}, \tag{25.86}$$

adem?s el n?mero promedio de clientes en la cola es

$$L_q = \mathbb{E}(N_q) = \beta W_q = L - \rho \tag{25.87}$$

25.21.6. Cola M/M/m/m

Consideremos un sistema con m servidores id?nticos, pero ahora cada uno es de capacidad finita m. Si todos los servidores se encuentran ocupados, el siguiente usuario en llegar se pierde pues no se le deja esperar a que reciba servicio. Este tipo de sistemas pueden verse como un proceso de nacimiento y muerte con

$$\beta_n = \begin{cases} \beta & n = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \\ 0 & n \geq m \end{cases}$$

$$\delta_n = \begin{cases} n\delta & n = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \\ 0 & n \geq m \end{cases}$$

El proceso tiene epacio de estados finitos, $S = \{0, 1, \ldots, m\}$, entonces de las ecuaciones que determinan la distribuci?n estacionaria se tiene que

$$\pi_n = \begin{cases} \pi_0 \frac{\rho^n}{n!} & n = 0, 1, 2, \ldots, m \\ 0 & n \geq m \end{cases} \tag{25.88}$$

y ademas

$$\pi_0 = \left(\sum_{n=0}^{m} \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1} \tag{25.89}$$

A la ecuaci?n 30.88 se le llama distribuci?n truncada.

Si definimos $\pi_m = B(m, \rho) = \pi_0 \frac{\rho^m}{m!}$, π_m representa la probabilidad de que todos los servidores se encuentren ocupados, y tambi?n se le conoce como f?rmula de p?rdida de Erlang.

Necesariamente en este caso el tiempo de espera en la cola W_q y el n?mero promedio de clientes en la cola L_q deben de ser cero puesto que no se permite esperar para recibir servicio, m?s a?n el tiempode espera en el sistema y el tiempo de serivcio tienen la misma distribuci?n, es decir,

$$W(t) = \mathbb{P}\{w \leq t\} = 1 - e^{-\mu t}$$

, en particular

$$W = \mathbb{E}[w] = \mathbb{E}[s] = \frac{1}{\delta}$$

Por otra parte, el n?mero esperado de clientes en el sistema es

$$\begin{aligned} L &= \mathbb{E}[N] = \sum_{n=0}^{m} n\pi_n = \pi_0\rho\sum_{n=0}^{m}\frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \pi_0\rho\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\rho^n}{n!} \end{aligned}$$

entonces, se tiene que

$$L = \rho\left(1 - B\left(m,\rho\right)\right) = \mathbb{E}\left[s\right]\left(1 - B\left(m,\rho\right)\right). \tag{25.90}$$

Adem?s

$$\delta_q = \delta\left(1 - B\left(m,\rho\right)\right) \tag{25.91}$$

representa la tasa promedio efectiva de arribos al sistema.

25.22. Redes de Colas

25.22.1. Colas en Serie

25.22.2. Redes Abiertas de Jackson

25.22.3. Colas C?clicas

25.23. Cadenas de Markov

25.23.1. Estacionareidad

Sea $v = (v_i)_{i\in E}$ *medida no negativa en* E*, podemos definir una nueva medida* $v\mathbb{P}$ *que asigna masa* $\sum_{i\in E} v_i p_{ij}$ *a cada estado* j*.*

Definición 25.21 *La medida* v *es estacionaria si* $v_i < \infty$ *para toda* i *y adem?s* $v\mathbb{P} = v$*.*

En el caso de que v *sea distribuci?n, independientemente de que sea estacionaria o no, se cumple con*

$$\mathbb{P}_v\left[X_1 = j\right] = \sum_{i\in E}\mathbb{P}_v\left[X_0 = i\right]p_{ij} = \sum_{i\in E} v_i p_{ij} = \left(vP\right)_j$$

Teorema 25.31 *Supongamos que* v *es una distribuci?n estacionaria. Entonces*

i) La cadena es estrictamente estacionaria con respecto a $\mathbb{P}_v$*, es decir,* $\mathbb{P}_v$*-distribuci?n de* $\{X_n, X_{n+1}, \ldots\}$ *no depende de* n*;*

ii) Existe un aversi?n estrictamente estacionaria $\{X_n\}_{n\in Z}$ *de la cadena con doble tiempo infinito y* $\mathbb{P}(X_n = i) = v_i$ *para toda* $n \in Z$*.*

Teorema 25.32 *Sea* i *estado fijo, recurrente. Entonces una medida estacionaria* v *puede definirse haciendo que* v_j *sea el n?mero esperado de visitas a* j *entre dos visitas consecutivas* i*,*

$$v_j = \mathbb{E}_i\sum_{n=0}^{\tau(i)-1}\mathbb{1}\left(X_n = i\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}_i\left[X_n = j, \tau(i) > n\right] \tag{25.92}$$

Teorema 25.33 *Si la cadena es irreducible y recurrente, entonces una medida estacionaria* v *existe, satisface* $0 < v_j < \infty$ *para toda* j *y es ?nica salvo factores multiplicativos, es decir, si* v, v^* *son estacionarias, entonces* $c = cv^*$ *para alguna* $c \in (0,\infty)$*.*

Corolario 25.25 *Si la cadena es irreducible y positiva recurrente, existe una ?nica distribuci?n estacionaria* π *dada por*

$$\pi_j = \frac{1}{\mathbb{E}_i\tau_i}\mathbb{E}_i\sum_{n=0}^{\tau(i)-1}\mathbb{1}\left(X_n = j\right) = \frac{1}{\mathbb{E}_j\tau\left(j\right)}. \tag{25.93}$$

Corolario 25.26 *Cualquier cadena de Markov irreducible con un espacio de estados finito es positiva recurrente.*

25.23.2. Teor?a Erg?dica

Lema 25.15 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y se F subconjunto finito del espacio de estados. Entonces la cadena es positiva recurrente si $\mathbb{E}_i\tau(F) < \infty$ para todo $i \in F$.*

Proposición 25.46 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y transiente o cero recurrente, entonces $p_{ij}^n \rightarrow 0$ conforme $n \rightarrow \infty$ para cualquier $i, j \in E$, E espacio de estados.*

Utilizando el teorema (2.2) y el corolario refCor.3.5, se demuestra el siguiente resultado importante.

Teorema 25.34 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y aperi?dica positiva recurrente, y sea $\pi = \{\pi_j\}_{j\in E}$ la distribuci?n estacionaria. Entonces $p_{ij}^n \rightarrow \pi_j$ para todo i, j.*

Definición 25.22 *Una cadena irreducible aperiodica, positiva recurrente con medida estacionaria v, es llamada* erg?dica.

Proposición 25.47 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y recurrente con medida estacionaria v, entocnes para todo $i, j, k, l \in E$*

$$\frac{\sum_{n=0}^m p_{ij}^n}{\sum_{n=0}^m p_{lk}^n} \rightarrow \frac{v_j}{v_k},\ m \rightarrow \infty \tag{25.94}$$

Lema 25.16 *La matriz $\widetilde{P}$ con elementos $\widetilde{p}_{ij} = \frac{v_{ji}p_{ji}}{v_i}$ es una matriz de transici?n. Adem?s, el i-?simo elementos $\widetilde{p}_{ij}^m$ de la matriz potencia $\widetilde{P}^m$ est? dada por $\widetilde{p}_{ij}^m = \frac{v_{ji}p_{ji}^m}{v_i}$.*

Lema 25.17 *Def?nase $N_i^m = \sum_{n=0}^m \mathbb{1}(X_n = i)$ como el n?mero de visitas a i antes del tiempo m. Entonces si la cadena es reducible y recurrente, $lim_{m\rightarrow\infty} \frac{\mathbb{E}_j N_i^m}{\mathbb{E}_k N_i^m} = 1$ para todo $j, k \in E$.*

25.23.3. Funciones Arm?nicas, Recurrencia y Transitoriedad

Definición 25.23 *Una funci?n Arm?nica es el eigenvector derecho h de P corrrespondiente al eigenvalor 1.*

$$Ph = h \Leftrightarrow h(i) = \sum_{j\in E} p_{ij} h(j) = \mathbb{E}_i h(X_1) = \mathbb{E}\left[h(X_{n+1})\,|X_n = i\right].$$

es decir, $\{h(X_n)\}$ es martingala.

Proposición 25.48 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y sea i estado fijo arbitrario. Entonces la cadena es transitoria s? y s?lo si existe una funci?n no cero, acotada $h : E - \{i\} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface*

$$h(j) = \sum_{k\neq i} p_{jk} h(k) \ \ para\ j \neq i. \tag{25.95}$$

Proposición 25.49 *Supongamos que la cadena es irreducible y sea E_0 un subconjunto finito del espacio de estados, entonces*

i)

ii)

Proposición 25.50 *Suponga que la cadena es irreducible y sea E_0 un subconjunto finito de E tal que se cumple la ecuaci?n 5.2 para alguna funci?n h acotada que satisface $h(i) < h(j)$ para alg?n estado $i \notin E_0$ y todo $j \in E_0$. Entonces la cadena es transitoria.*

25.24. Procesos de Markov de Saltos

25.24.1. Estructura B?sica de los Procesos Markovianos de Saltos

- *Sea E espacio discreto de estados, finito o numerable, y sea $\{X_t\}$ un proceso de Markov con espacio de estados E. Una medida μ en E definida por sus probabilidades puntuales μ_i, escribimos $p_{ij}^t = P^t(i, \{j\}) = P_i(X_t = j)$.*

- *El monto del tiempo gastado en cada estado es positivo, de modo tal que las trayectorias muestrales son constantes por partes. Para un proceso de saltos denotamos por los tiempos de saltos a* $S_0 = 0 < S_1 < S_2 \cdots$, *los tiempos entre saltos consecutivos* $T_n = S_{n+1} - S_n$ *y la secuencia de estados visitados por* $Y_0, Y_1, \ldots$, *as? las trayectorias muestrales son constantes entre* S_n *consecutivos, continua por la derecha, es decir,* $X_{S_n} = Y_n$.
- *La descripci?n de un modelo pr?ctico est? dado usualmente en t?rminos de las intensidades* $\lambda(i)$ *y las probabilidades de salto* q_{ij} *m?s que en t?rminos de la matriz de transici?n* P^t.
- *Sup?ngase de ahora en adelante que* $q_{ii} = 0$ *cuando* $\lambda(i) > 0$

25.24.2. Matriz Intensidad

Definición 25.24 *La matriz intensidad* $\Lambda = (\lambda(i,j))_{i,j\in E}$ *del proceso de saltos* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *est? dada por*

$$\begin{aligned}\lambda(i,j) &= \lambda(i)\, q_{i,j},\ j \neq i\\ \lambda(i,i) &= -\lambda(i)\end{aligned}$$

Proposición 25.51 *Una matriz* $E \times E$, Λ *es la matriz de intensidad de un proceso markoviano de saltos* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *si y s?lo si*

$$\lambda(i,i) \leq 0,\ \lambda(i,j),\ i \neq j,\ \sum_{j\in E} \lambda(i,j) = 0.$$

Adem?s, Λ *est? en correspondencia uno a uno con la distribuci?n del proceso minimal dado por el teorema 3.1.*

Para el caso particular de la Cola $M/M/1$, *la matr?z de itensidad est? dada por*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\beta & \beta & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \delta & -\beta-\delta & \beta & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \delta & -\beta-\delta & \beta & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

25.24.3. Medidas Estacionarias

Definición 25.25 *Una medida* $v \neq 0$ *es estacionaria si* $0 \leq v_j < \infty$, $vP^t = v$ *para toda* t.

Teorema 25.35 *Supongamos que* $\{X_t\}$ *es irreducible recurrente en* E. *Entonces existe una y s?lo una, salvo m?ltiplos, medida estacionaria* v. *Esta* v *tiene la propiedad de que* $0 < v_j < \infty$ *para todo* j *y puede encontrarse en cualquiera de las siguientes formas*

i) Para alg?n estado i, *fijo pero arbitrario,* v_j *es el tiempo esperado utilizado en* j *entre dos llegadas consecutivas al estado* i;

$$v_j = \mathbb{E}_i \int_0^{w(i)} \mathbb{1}(X_t = j)\, dt \tag{25.96}$$

con $w(i) = \inf\{t > 0 : X_t = i, X_{t^-} = \lim_{s\uparrow t} X_s \neq i\}$.

ii) $v_j = \frac{\mu_j}{\lambda(j)}$, *donde* μ *es estacionaria para* $\{Y_n\}$.

iii) como soluci?n de $v\Lambda = 0$.

25.24.4. Criterios de Ergodicidad

Definición 25.26 *Un proceso irreducible recurrente con medida estacionaria de masa finita es llamado erg?dico.*

Teorema 25.36 *Un proceso de Markov de saltos irreducible no explosivo es erg?dico si y s?lo si se puede encontrar una soluci?n, de probabilidad,* π, *con* $|\pi| = 1$ *y* $0 \leq \pi_j \leq 1$, *a* $\pi\Lambda = 0$. *En este caso* π *es la distribuci?n estacionaria.*

Corolario 25.27 *Una condici?n suficiente para la ergodicidad de un proceso irreducible es la existencia de una probabilidad π que resuelva el sistema $\pi\Lambda = 0$ y que adem?s tenga la propiedad de que $\sum \pi_j \lambda(j) < \infty$.*

Proposición 25.52 *Si el proceso es erg?dico, entonces existe una versi?n estrictamente estacionaria $\{X_t\}_{-\infty<t<\infty}$ con doble tiempo infinito.*

Teorema 25.37 *Si $\{X_t\}$ es erg?dico y π es la distribuci?n estacionaria, entonces para todo i, j, $p_{ij}^t \rightarrow \pi_j$ cuando $t \rightarrow \infty$.*

Corolario 25.28 *Si $\{X_t\}$ es irreducible recurente pero no erg?dica, es decir $|v| = \infty$, entonces $p_{ij}^t \rightarrow 0$ para todo $i, j \in E$.*

Corolario 25.29 *Para cualquier proceso Markoviano de Saltos minimal, irreducible o no, los l?mites $li_{t\rightarrow\infty} p_{ij}^t$ existe.*

25.25. Notaci?n Kendall-Lee

A partir de este momento se har?n las siguientes consideraciones: Si t_n es el tiempo aleatorio en el que llega al sistema el n-?simo cliente, para $n = 1, 2, \ldots$, $t_0 = 0$ y $t_0 < t_1 < \cdots$ se definen los tiempos entre arribos $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ para $n = 1, 2, \ldots$, variables aleatorias independientes e id?nticamente distribuidas. Los tiempos entre arribos tienen un valor medio $E(\tau)$ finito y positivo $\frac{1}{\beta}$, es decir, β se puede ver como la tasa o intensidad promedio de arribos al sistema por unidad de tiempo. Adem?s se supondr? que los servidores son identicos y si s denota la variable aleatoria que describe el tiempo de servicio, entonces $E(s) = \frac{1}{\delta}$, δ es la tasa promedio de servicio por servidor.
La notaci?n de Kendall-Lee es una forma abreviada de describir un sisema de espera con las siguientes componentes:

i) **Fuente***: Poblaci?n de clientes potenciales del sistema, esta puede ser finita o infinita.*

ii) **Proceso de Arribos***: Proceso determinado por la funci?n de distribuci?n $A(t) = P\{\tau \leq t\}$ de los tiempos entre arribos.*

Adem?s tenemos las siguientes igualdades

$$N(t) = N_q(t) + N_s(s) \tag{25.97}$$

donde

- *$N(t)$ es el n?mero de clientes en el sistema al tiempo t.*
- *$N_q(t)$ es el n?mero de clientes en la cola al tiempo t*
- *$N_s(t)$ es el n?mero de clientes recibiendo servicio en el tiempo t.*

Bajo la hip?tesis de estacionareidad, es decir, las caracter?sticas de funcionamiento del sistema se han estabilizado en valores independientes del tiempo, entonces

$$N = N_q + N_s. \tag{25.98}$$

Los valores medios de las cantidades anteriores se escriben como $L = E(N)$, $L_q = E(N_q)$ y $L_s = E(N_s)$, entonces de la ecuaci?n 30.97 se obtiene

$$L = L_q + L_s \tag{25.99}$$

Si q es el tiempo que pasa un cliente en la cola antes de recibir servicio, y W es el tiempo total que un cliente pasa en el sistema, entonces

$$w = q + s$$

por lo tanto

$$W = W_q + W_s,$$

donde $W = E(w)$, $W_q = E(q)$ y $W_s = E(s) = \frac{1}{\delta}$.
La intensidad de tr?fico se define como

$$\rho = \frac{E(s)}{E(\tau)} = \frac{\beta}{\delta}. \tag{25.100}$$

La utilizaci?n por servidor es

$$u = \frac{\rho}{c} = \frac{\beta}{c\delta}. \tag{25.101}$$

donde c es el n?mero de servidores.

Esta notaci?n es una forma abreviada de describir un sistema de espera con componentes dados a continuaci?n, la notaci?n es

$$A/S/c/K/F/d \tag{25.102}$$

Cada una de las letras describe:

- A *es la distribuci?n de los tiempos entre arribos.*
- S *es la distribuci?n del tiempo de servicio.*
- c *es el n?mero de servidores.*
- K *es la capacidad del sistema.*
- F *es el n?mero de individuos en la fuente.*
- d *es la disciplina del servicio*

Usualmente se acostumbra suponer que $K = \infty$, $F = \infty$ *y* $d = FIFO$, *es decir, First In First Out.*

Las distribuciones usuales para A *y* B *son:*

- GI *para la distribuci?n general de los tiempos entre arribos.*
- G *distribuci?n general del tiempo de servicio.*
- M *Distribuci?n exponencial para* A *o* S.
- E_K *Distribuci?n Erlang-*K, *para* A *o* S.
- D *tiempos entre arribos o de servicio constantes, es decir, deterministicos.*

25.26. Procesos de Nacimiento y Muerte

25.26.1. Procesos de Nacimiento y Muerte Generales

Por un proceso de nacimiento y muerte se entiende un proceso de saltos de markov $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *con espacio de estados a lo m?s numerable, con la propiedad de que s?lo puede ir al estado* $n+1$ *o al estado* $n-1$, *es decir, su matriz de intensidad es de la forma*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\beta_0 & \beta_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \delta_1 & -\beta_1 - \delta_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \delta_2 & -\beta_2 - \delta_2 & \beta_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

donde β_n *son las intensidades de nacimiento y* δ_n *las intensidades de muerte, o tambi?n se puede ver como a* X_t *el n?mero de usuarios en una cola al tiempo* t, *un salto hacia arriba corresponde a la llegada de un nuevo usuario y un salto hacia abajo como al abandono de un usuario despu?s de haber recibido su servicio.*

La cadena de saltos $\{Y_n\}$ *tiene matriz de transici?n dada por*

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

donde $p_n = \frac{\beta_n}{\beta_n + \delta_n}$ *y* $q_n = 1 - p_n = \frac{\delta_n}{\beta_n + \delta_n}$, *donde adem?s se asumne por el momento que* p_n *no puede tomar el valor* 0 *?* 1 *para cualquier valor de* n.

Proposición 25.53 *La recurrencia de* $\{X_t\}$, *o equivalentemente de* $\{Y_n\}$ *es equivalente a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\beta_1 \cdots \beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} = \infty \tag{25.103}$$

Lema 25.18 *Independientemente de la recurrencia o transitorieadad, existe una y s?lo una, salvo m?ltiplos, soluci?n a $v\Lambda = 0$, dada por*

$$v_n = \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} v_0 \tag{25.104}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Corolario 25.30 *En el caso recurrente, la medida estacionaria μ para $\{Y_n\}$ est? dada por*

$$\mu_n = \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n} \mu_0 \tag{25.105}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Se define a $S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n}$

Corolario 25.31 *$\{X_t\}$ es erg?dica si y s?lo si la ecuaci?n (30.133) se cumple y adem?s $S < \infty$, en cuyo caso la distribuci?n erg?dica, π, est? dada por*

$$\pi_0 = \frac{1}{S}, \; \pi_n = \frac{1}{S} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \tag{25.106}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

25.26.2. Cola M/M/1

Este modelo corresponde a un proceso de nacimiento y muerte con $\beta_n = \beta$ y $\delta_n = \delta$ independiente del valor de n. La intensidad de tr?fico $\rho = \frac{\beta}{\delta}$, implica que el criterio de recurrencia (ecuaci?n 30.133) quede de la forma:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} = \infty.$$

Equivalentemente el proceso es recurrente si y s?lo si

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n < \infty \Leftrightarrow \frac{\beta}{\delta} < 1$$

Entonces $S = \frac{\delta}{\delta - \beta}$, luego por la ecuaci?n 30.136 se tiene que

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{\delta - \beta}{\delta} = 1 - \frac{\beta}{\delta} \\ \pi_n &= \pi_0 \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n = \left(1 - \frac{\beta}{\delta}\right) \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n = (1 - \rho)\, \rho^n \end{aligned}$$

Lo cual nos lleva a la siguiente

Proposición 25.54 *La cola $M/M/1$ con intendisad de tr?fico ρ, es recurrente si y s?lo si $\rho \leq 1$.*

Entonces por el corolario 30.30

Proposición 25.55 *La cola $M/M/1$ con intensidad de tr?fico ρ es erg?dica si y s?lo si $\rho < 1$. En cuyo caso, la distribuci?n de equilibrio π de la longitud de la cola es geom?trica, $\pi_n = (1 - \rho)\, \rho^n$, para $n = 1, 2, \ldots$.*

De la proposici?n anterior se desprenden varios hechos importantes.

a*)* *$\mathbb{P}[X_t = 0] = \pi_0 = 1 - \rho$, es decir, la probabilidad de que el sistema se encuentre ocupado.*

b*)* *De las propiedades de la distribuci?n Geom?trica se desprende que*

   1) $\mathbb{E}[X_t] = \frac{\rho}{1-\rho}$,

   2) $Var[X_t] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$.

Si L es el n?mero esperado de clientes en el sistema, incluyendo los que est?n siendo atendidos, entonces

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Si adem?s W es el tiempo total del cliente en la cola: $W = W_q + W_s$ $\rho = \frac{\mathbb{E}[s]}{\mathbb{E}[\tau]} = \beta W_s$, puesto que $W_s = \mathbb{E}[s]$ y $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\delta}$. Por la f?rmula de Little $L = \lambda W$

$$\begin{aligned} W &= \frac{L}{\beta} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\beta} = \frac{\rho}{\delta}\frac{1}{1-\rho} = \frac{W_s}{1-\rho} \\ &= \frac{1}{\delta(1-\rho)} = \frac{1}{\delta-\beta} \end{aligned}$$

luego entonces

$$\begin{aligned} W_q &= W - W_s = \frac{1}{\delta-\beta} - \frac{1}{\delta} = \frac{\beta}{\delta(\delta-\beta)} \\ &= \frac{\rho}{1-\rho}\frac{1}{\delta} = \mathbb{E}[s]\frac{\rho}{1-\rho} \end{aligned}$$

Entonces

$$L_q = \beta W_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Finalmente

Proposición 25.56 a) $W(t) = 1 - e^{-\frac{t}{W}}$.
b) $W_q(t) = 1 - \rho \exp^{-\frac{t}{W}}$.
donde $W = \mathbb{E}(w)$.

25.26.3. Cola $M/M/\infty$

Este tipo de modelos se utilizan para estimar el n?mero de l?neas en uso en una gran red comunicaci?n o para estimar valores en los sistemas $M/M/c$ o $M/M/c/c$, en el se puede pensar que siempre hay un servidor disponible para cada cliente que llega.

Se puede considerar como un proceso de nacimiento y muerte con par?metros $\beta_n = \beta$ y $\mu_n = n\mu$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces por la ecuaci?n 30.136 se tiene que

$$\pi_0 = e^{\rho}$$
$$\pi_n = e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}$$

Entonces, el n?mero promedio de servidores ocupados es equivalente a considerar el n?mero de clientes en el sistema, es decir,

$$L = \mathbb{E}[N] = \rho$$
$$Var[N] = \rho$$

Adem?s se tiene que $W_q = 0$ y $L_q = 0$.

El tiempo promedio en el sistema es el tiempo promedio de servicio, es decir, $W = \mathbb{E}[s] = \frac{1}{\delta}$. Resumiendo, tenemos la sisuguiente proposici?n:

Proposición 25.57 *La cola $M/M/\infty$ es erg?dica para todos los valores de η. La distribuci?n de equilibrio π es Poisson con media η, $\pi_n = \frac{e^{-n}\eta^n}{n!}$.*

25.26.4. Cola M/M/m

Este sistema considera m servidores id?nticos, con tiempos entre arribos y de servicio exponenciales con medias $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\beta}$ *y* $\mathbb{E}[s] = \frac{1}{\delta}$. *definimos ahora la utilizaci?n por servidor como* $u = \frac{\rho}{m}$ *que tambi?n se puede interpretar como la fracci?n de tiempo promedio que cada servidor est? ocupado.*

La cola M/M/m se puede considerar como un proceso de nacimiento y muerte con par?metros: $\beta_n = \beta$ *para* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *y* $\delta_n = \begin{cases} n\delta & n = 0, 1, \ldots, m-1 \\ c\delta & n = m, \ldots \end{cases}$

entonces la condici?n de recurrencia se va a cumplir s? y s?lo si $\sum_{n \geq 1} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} < \infty$, *equivalentemente se debe de cumplir que*

$$
\begin{aligned}
S &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\beta^n}{n! \delta^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^m}{m!} u^n
\end{aligned}
$$

converja, lo cual ocurre si $u < 1$, *en este caso*

$$
S = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^m}{m!} (1 - u)
$$

luego, para este caso se tiene que

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{1}{S} \\
\pi_n &= \begin{cases} \pi_0 \frac{\rho^n}{n!} & n = 0, 1, \ldots, m-1 \\ \pi_0 \frac{\rho^n}{m! m^{n-m}} & n = m, \ldots \end{cases}
\end{aligned}
$$

Al igual que se hizo antes, determinaremos los valores de L_q, W_q, W *y* L:

$$
\begin{aligned}
L_q &= \mathbb{E}[N_q] = \sum_{n=0}^{\infty} (n - m) \pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_{n+m} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_0 \frac{\rho^{n+m}}{m! m^{n+m}} = \pi_0 \frac{\rho^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} n u^n = \pi_0 \frac{u \rho^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{du} u^n \\
&= \pi_0 \frac{u \rho^m}{m!} \frac{d}{du} \sum_{n=0}^{\infty} u^n = \pi_0 \frac{u \rho^m}{m!} \frac{d}{du} \left(\frac{1}{1-u} \right) = \pi_0 \frac{u \rho^m}{m!} \frac{1}{(1-u)^2}
\end{aligned}
$$

es decir

$$
L_q = \frac{u \pi_0 \rho^m}{m! (1-u)^2} \tag{25.107}
$$

luego

$$
W_q = \frac{L_q}{\beta} \tag{25.108}
$$

$$
W = W_q + \frac{1}{\delta} \tag{25.109}
$$

Si definimos $C(m, \rho) = \frac{\pi_0 \rho^m}{m!(1-u)} = \frac{\pi_m}{1-u}$, *que es la probabilidad de que un cliente que llegue al sistema tenga que esperar en la cola. Entonces podemos reescribir las ecuaciones reci?n enunciadas:*

$$
\begin{aligned}
L_q &= \frac{C(m, \rho) u}{1 - u} \\
W_q &= \frac{C(m, \rho) \mathbb{E}[s]}{m (1 - u)}
\end{aligned}
$$

Proposición 25.58 *La cola $M/M/m$ con intensidad de tr?fico ρ es erg?dica si y s?lo si $\rho < 1$. En este caso la distribuci?n erg?dica π est? dada por*

$$\pi_n = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{S}\frac{\eta^n}{n!} & 0 \leq n \leq m \\ \frac{1}{S}\frac{\eta^m}{m!}\rho^{n-m} & m \leq n < \infty \end{array} \right.$$

Proposición 25.59 *Para $t \geq 0$*

a) $W_q(t) = 1 - C(m,\rho)\, e^{-c\delta t(1-u)}$

b)

$$W(t) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 + e^{-\delta t}\frac{\rho - m + W_q(0)}{m-1-\rho} + e^{-m\delta t(1-u)}\frac{C(m,\rho)}{m-1-\rho} & \rho \neq m-1 \\ 1 - (1 + C(m,\rho)\,\delta t)\, e^{-\delta t} & \rho = m-1 \end{array} \right.$$

25.26.5. Cola M/G/1

Consideremos un sistema de espera con un servidor, en el que los tiempos entre arribos son exponenciales, y los tiempos de servicio tienen una distribuci?n general G. Sea $N(t)_{t\geq 0}$ el n?mero de clientes en el sistema al tiempo t, y sean $t_1 < t_2 < \ldots$ los tiempos sucesivos en los que los clientes completan su servicio y salen del sistema.

La sucesi?n $\{X_n\}$ definida por $X_n = N(t_n)$ es una cadena de Markov, en espec?fico es la Cadena encajada del proceso de llegadas de usuarios. Sea U_n el n?mero de clientes que llegan al sistema durante el tiempo de servicio del n-?simo cliente, entonces se tiene que

$$X_{n+1} = \left\{ \begin{array}{cc} X_n - 1 + U_{n+1} & si\ X_n \geq 1, \\ U_{n+1} & si\ X_n = 0 \end{array} \right.$$

Dado que los procesos de arribos de los usuarios es Poisson con par?metro λ, la probabilidad condicional de que lleguen j clientes al sistema dado que el tiempo de servicio es $s = t$, resulta:

$$\mathbb{P}\{U = j | s = t\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!},\ j = 0, 1, \ldots$$

por el teorema de la probabilidad total se tiene que

$$a_j = \mathbb{P}\{U = j\} = \int_0^\infty \mathbb{P}\{U = j | s = t\}\, dG(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!} dG(t) \tag{25.110}$$

donde G es la distribuci?n de los tiempos de servicio. Las probabilidades de transici?n de la cadena est?n dadas por

$$p_{0j} = \mathbb{P}\{U_{n+1} = j\} = a_j,\ para\ j = 0, 1, \ldots \tag{25.111}$$

y para $i \geq 1$

$$p_{ij} = \left\{ \begin{array}{cc} \mathbb{P}\{U_{n+1} = j - i + 1\} = a_{j-i+1} & ,\ para\ j \geq i - 1 \\ 0 & j < i - 1 \end{array} \right. \tag{25.112}$$

Entonces la matriz de transici?n es:

$$P = \left[\begin{array}{ccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \end{array} \right]$$

Sea $\rho = \sum_{n=0} n a_n$, entonces se tiene el siguiente teorema:

Teorema 25.38 *La cadena encajada $\{X_n\}$ es*

a) *Recurrente positiva si $\rho < 1$,*

b) *Transitoria si $\rho > 1$,*

c) *Recurrente nula si $\rho = 1$.*

Recordemos que si la cadena de Markov $\{X_n\}$ tiene una distribuci?n estacionaria entonces existe una distribuci?n de probabilidad $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots,)$, con $\pi_i \geq 0$ y $\sum_{i\geq 1} \pi_i = 1$ tal que satisface la ecuaci?n $\pi = \pi P$, equivalentemente

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_k p_{ij}, \text{ para } j = 0, 1, 2, \ldots \tag{25.113}$$

que se puede ver como

$$\pi_j = \pi_0 a_j + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1}, \text{ para } j = 0, 1, \ldots \tag{25.114}$$

si definimos

$$\pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j$$

y

$$A(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

con $|z_j| \leq 1$. Si la ecuaci?n 30.114 la multiplicamos por z^j y sumando sobre j, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0 a_j z^j + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1} z^j \\
&= \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j + \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i a_{i-1} \\
&= \pi_0 A(z) + A(z) \left(\frac{\pi(z) - \pi_0}{z} \right)
\end{aligned}$$

es decir,

$$\pi(z) = \pi_0 A(z) + A(z) \left(\frac{\pi(z) - \pi_0}{z} \right) \Leftrightarrow \pi(z) = \frac{\pi_0 A(z)(z-1)}{z - A(z)} \tag{25.115}$$

Si $z \rightarrow 1$, entonces $A(z) \rightarrow A(1) = 1$, y adem?s $A^{'}(z) \rightarrow A^{'}(1) = \rho$. Si aplicamos la Regla de L'Hospital se tiene que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = lim_{z\rightarrow 1^-} \pi(z) = \pi_0 lim_{z\rightarrow 1^-} \frac{z-1}{z - A(z)} = \frac{\pi_0}{1-\rho}$$

Retomando,

$$a_j = \mathbb{P}\{U = j\} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(t), \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

entonces

$$\begin{aligned}
\rho &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(t) \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(t) = \int_0^{\infty} \lambda t dG(t) = \lambda \mathbb{E}[s]
\end{aligned}$$

Adem?s, se tiene que $\rho = \beta \mathbb{E}[s] = \frac{\beta}{\delta}$ y la distribuci?n estacionaria est? dada por

$$\pi_j = \pi_0 a_j + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1}, \text{ para } j = 0, 1, \ldots \tag{25.116}$$

$$\pi_0 = 1 - \rho \tag{25.117}$$

Por otra parte se tiene que

$$L = \pi^{'}(1) = \rho + \frac{A^{''}(1)}{2(1-\rho)} \tag{25.118}$$

pero $A^{''}(1) = \sum_{n=1} n(n-1)a_n = \mathbb{E}\left[U^2\right] - \mathbb{E}[U]$, $\mathbb{E}[U] = \rho$ *y* $\mathbb{E}\left[U^2\right] = \lambda^2\mathbb{E}\left[s^2\right] + \rho$. *Por lo tanto* $L = \rho + \frac{\beta^2\mathbb{E}\left[s^2\right]}{2(1-\rho)}$.
De las f?rmulas de Little, se tiene que $W = E(w) = \frac{L}{\beta}$, *tambi?n el tiempo de espera en la cola*

$$W_q = \mathbb{E}(q) = \mathbb{E}(w) - \mathbb{E}(s) = \frac{L}{\beta} - \frac{1}{\delta}, \tag{25.119}$$

adem?s el n?mero promedio de clientes en la cola es

$$L_q = \mathbb{E}(N_q) = \beta W_q = L - \rho \tag{25.120}$$

25.27. Redes de Colas

25.27.1. Sistemas Abiertos

Considerese un sistema con dos servidores, en los cuales los usuarios llegan de acuerdo a un proceso poisson con intensidad λ_1 *al primer servidor, despu?s de ser atendido se pasa a la siguiente cola en el segundo servidor. Cada servidor atiende a un usuario a la vez con tiempo exponencial con raz?n* μ_i, *para* $i = 1, 2$. *A este tipo de sistemas se les conoce como siemas secuenciales.*
Def?nase el par (n, m) *como el n?mero de usuarios en el servidor 1 y 2 respectivamente. Las ecuaciones de balance son*

$$\lambda P_{0,0} = \mu_2 P_{0,1} \tag{25.121}$$
$$(\lambda+\mu_1)P_{n,0} = \mu_2 P_{n,1} + \lambda P_{n-1,0} \tag{25.122}$$
$$(\lambda+\mu_2)P_{0,m} = \mu_2 P_{0,m+1} + \mu_1 P_{1,m-1} \tag{25.123}$$
$$(\lambda+\mu_1+\mu_2)P_{n,m} = \mu_2 P_{n,m+1} + \mu_1 P_{n+1,m-1} + \lambda P_{n-1,m} \tag{25.124}$$

Cada servidor puede ser visto como un modelo de tipo $M/M/1$, *de igual manera el proceso de salida de una cola* $M/M/1$ *con raz?n* λ, *nos permite asumir que el servidor 2 tambi?n es una cola* $M/M/1$. *Adem?s la probabilidad de que haya* n *usuarios en el servidor 1 es*

$$\begin{aligned}
P\{n \text{ en el servidor } 1\} &= \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{\mu_1}\right) = \rho_1^n(1-\rho_1)\\
P\{m \text{ en el servidor } 2\} &= \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{\mu_2}\right) = \rho_2^m(1-\rho_2)
\end{aligned}$$

Si el n?mero de usuarios en los servidores 1 y 2 son variables aleatorias independientes, se sigue que:

$$P_{n,m} = \rho_1^n(1-\rho_1)\rho_2^m(1-\rho_2) \tag{25.125}$$

Verifiquemos que $P_{n,m}$ *satisface las ecuaciones de balance (30.121) Antes de eso, enunciemos unas igualdades que nos ser?n de utilidad:*

$$\mu_i\rho_i = \lambda \text{ para } i = 1, 2.$$

$$\begin{aligned}
\lambda P_{0,0} &= \lambda(1-\rho_1)(1-\rho_2)\\
y\ \mu_2 P_{0,1} &= \mu_2(1-\rho_1)\rho_2(1-\rho_2)\\
\Rightarrow \lambda P_{0,0} &= \mu_2 P_{0,1}\\
(\lambda+\mu_2)P_{0,m} &= (\lambda+\mu_2)(1-\rho_1)\rho_2^m(1-\rho_2)\\
\mu_2 P_{0,m+1} &= \lambda(1-\rho_1)\rho_2^m(1-\rho_2)\\
&= \mu_2(1-\rho_1)\rho_2^m(1-\rho_2)\\
\mu_1 P_{1,m-1} &= \frac{\lambda}{\rho_2}(1-\rho_1)\rho_2^m(1-\rho_2)\\
\Rightarrow (\lambda+\mu_2)P_{0,m} &= \mu_2 P_{0,m+1} + \mu_1 P_{1,m-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\lambda+\mu_1+\mu_2\right) P_{n,m} &= \left(\lambda+\mu_1+\mu_2\right)\rho^n\left(1-\rho_1\right)\rho_2^m\left(1-\rho_2\right)\\
\mu_2 P_{n,m+1} &= \mu_2\rho_2\rho_1^n\left(1-\rho_1\right)\rho_2^m\left(1-\rho_2\right)\\
\mu_1 P_{n-1,m-1} &= \mu_1\frac{\rho_1}{\rho_2}\rho_1^n\left(1-\rho_1\right)\rho_2^m\left(1-\rho_2\right)\\
\lambda P_{n-1,m} &= \frac{\lambda}{\rho_1}\rho_1^n\left(1-\rho_1\right)\rho_2^m\left(1-\rho_2\right)\\
\Rightarrow\left(\lambda+\mu_1+\mu_2\right) P_{n,m} &= \mu_2 P_{n,m+1}+\mu_1 P_{n-1,m-1}+\lambda P_{n-1,m}
\end{aligned}
$$

entonces efectivamente la ecuaci?n (30.125) satisface las ecuaciones de balance (30.121). El n?mero promedio de usuarios en el sistema, est? dado por

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_{n,m}(n+m) P_{n,m}=\sum_{n,m} nP_{n,m}+\sum_{n,m} mP_{n,m}\\
&= \sum_n\sum_m nP_{n,m}+\sum_m\sum_n mP_{n,m}=\sum_n n\sum_m P_{n,m}+\sum_m m\sum_n P_{n,m}\\
&= \sum_n n\sum_m \rho_1^n\left(1-\rho_1\right)\rho_2^m\left(1-\rho_2\right)+\sum_m m\sum_n \rho_1^n\left(1-\rho_1\right)\rho_2^m\left(1-\rho_2\right)\\
&= \sum_n n\rho_1^n\left(1-\rho_1\right)\sum_m \rho_2^m\left(1-\rho_2\right)+\sum_m m\rho_2^m\left(1-\rho_2\right)\sum_n \rho_1^n\left(1-\rho_1\right)\\
&= \sum_n n\rho_1^n\left(1-\rho_1\right)+\sum_m m\rho_2^m\left(1-\rho_2\right)\\
&= \frac{\lambda}{\mu_1-\lambda}+\frac{\lambda}{\mu_2-\lambda}
\end{aligned}
$$

25.28. Ejemplo de Cadena de Markov para dos Estados

Supongamos que se tiene la siguiente cadena:

$$
\left(\begin{array}{cc} 1-q & q \\ p & 1-p \end{array}\right) \tag{25.126}
$$

Si $P\left[X_0=0\right]=\pi_0(0)=a$ *y* $P\left[X_0=1\right]=\pi_0(1)=b=1-\pi_0(0)$, *con* $a+b=1$, *entonces despu?s de un procedimiento m?s o menos corto se tiene que:*

$$
\begin{aligned}
P\left[X_n=0\right]=\frac{p}{p+q}+(1-p-q)^n\left(a-\frac{p}{p+q}\right)\\
P\left[X_n=1\right]=\frac{q}{p+q}+(1-p-q)^n\left(b-\frac{q}{p+q}\right)
\end{aligned}
$$

donde, como $0<p,q<1$, *se tiene que* $|1-p-q|<1$, *entonces* $(1-p-q)^n\rightarrow 0$ *cuando* $n\rightarrow\infty$. *Por lo tanto*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} P\left[X_n=0\right]=\frac{p}{p+q}\\
lim_{n\rightarrow\infty} P\left[X_n=1\right]=\frac{q}{p+q}
\end{aligned}
$$

Si hacemos $v=\left(\frac{p}{p+q},\frac{q}{p+q}\right)$, *entonces*

$$
\left(\frac{p}{p+q},\frac{q}{p+q}\right)\left(\begin{array}{cc} 1-q & q \\ p & 1-p \end{array}\right)
$$

25.29. Cadenas de Markov: Estacionareidad

Teorema 25.39 *seserseraeraer*

25.30. Teoría Ergódica

Teorema 25.40 *Supongamos que* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *es irreducible recurrente en* E*. Entonces existe una y sólo una, salvo múltiplos, medida estacionaria* ν*. Esta* ν *tiene la propiedad de que* $0 \leq \nu_j < \infty$ *para toda* j *y puede encontrarse en las siguentes formas:*

i) Para algún estado fijo pero arbitrario, i*,* ν_j *es el tiempo esperado utilizado en* j *entre dos llegas consecutivas al estado* i*;*

$$\nu_j = \mathbb{E}_i \int_0^{\omega(i)} \mathbb{1}\left(X_t = j\right) dt, \tag{25.127}$$

con $\omega\left(i\right) = inf\left\{t > 0 : X_t = i, X_{t^-} = \lim_{s\uparrow t} X_s \neq i\right\}$

ii) $\nu_j = \frac{\mu_j}{\lambda(j)}$*, donde* μ *es estacionaria para* $\{Y_n\}$*;*

iii) como solución de $\nu\Lambda = 0$*.*

25.31. Queueing Theory at Markovian Level

25.31.1. General Death Birth Processes

Consideremos un estado que comienza en el estado x_0 *al tiempo* 0*, supongamos que el sistema permanece en* x_0 *hasta algún tiempo positivo* τ_1*, tiempo en el que el sistema salta a un nuevo estado* $x_1 \neq x_0$*. Puede ocurrir que el sistema permanezca en* x_0 *de manera indefinida, en este caso hacemos* $\tau_1 = \infty$*. Si* τ_1 *es finito, el sistema permanecerá en* x_1 *hasta* τ_2*, y así sucesivamente. Sea*

$$X\left(t\right) = \begin{cases} x_0 & 0 \leq t < \tau_1 \\ x_1 & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ x_2 & \tau_2 \leq t < \tau_3 \\ \vdots & \end{cases} \tag{25.128}$$

A este proceso se le llama proceso de salto*. Si*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\tau_n = \begin{cases} < \infty & X_t \text{ explota} \\ = \infty & X_t \text{ no explota} \end{cases} \tag{25.129}$$

Un proceso puro de saltos es un proceso de saltos que satisface la propiedad de Markov.

Proposición 25.60 *Un proceso de saltos es Markoviano si y sólo si todos los estados no absorbentes* x *son tales que*

$$P_x\left(\tau_1 > t + s|\tau_1 > s\right) = P_x\left(\tau_1 > t\right)$$

para $s, t \geq 0$*, equivalentemente*

$$\frac{1 - F_x\left(t + s\right)}{1 - F_x\left(s\right)} = 1 - F_x\left(t\right). \tag{25.130}$$

Nota 25.1 *Una distribución* F_x *satisface la ecuación (30.130) si y sólo si es una función de distribución exponencial para todos los estados no absorbentes* x*.*

Por un proceso de nacimiento y muerte se entiende un proceso de Markov de Saltos, $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *en* $E = \mathbb{N}$ *tal que del estado* n *sólo se puede mover a* $n-1$ *o* $n+1$*, es decir, la matriz intensidad es de la forma:*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\beta_0 & \beta_0 & 0 & 0 & \ldots \\ \delta_1 & -\beta_1 - \delta_1 & \beta_1 & 0 & \ldots \\ 0 & \delta_2 & -\beta_2 - \delta_2 & \beta_2 & \ldots \\ \vdots & & & \ddots & \end{pmatrix} \tag{25.131}$$

donde β_n *son las probabilidades de nacimiento y* δ_n *las probabilidades de muerte.*

La matriz de transición es

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & \dots \\ \vdots & & & \ddots & \end{pmatrix} \tag{25.132}$$

con $p_n = \frac{\beta_n}{\beta_n+\delta_n}$ *y* $q_n = \frac{\delta_n}{\beta_n+\delta_n}$

Proposición 25.61 *La recurrencia de un Proceso Markoviano de Saltos* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *con espacio de estados numerable, o equivalentemente de la cadena encajada* $\{Y_n\}$ *es equivalente a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\beta_1 \cdots \beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} = \infty \tag{25.133}$$

Lema 25.1 *Independientemente de la recurrencia o transitoriedad de la cadena, hay una y sólo una, salvo múltiplos, solución* ν *a* $\nu\Lambda = 0$*, dada por*

$$\nu_n = \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n}\nu_0 \tag{25.134}$$

Corolario 25.1 *En el caso recurrente, la medida estacionaria* μ *para* $\{Y_n\}$ *está dada por*

$$\mu_n = \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n}\mu_0 \tag{25.135}$$

para $n = 1, 2, \dots$

Definición 25.27 *Una medida* ν *es estacionaria si* $0 \leq \nu_j < \infty$ *y para toda* t *se cumple que* $\nu P^t = nu$.

Definición 25.28 *Un proceso irreducible recurrente con medida estacionaria con masa finita es llamado ergódico.*

Teorema 25.41 *Un Proceso de Saltos de Markov irreducible no explosivo es ergódico si y sólo si uno puede encontrar una solución* π *de probabilidad,* $|\pi| = 1$, $0 \leq \pi_j \leq 1$ *para* $\nu\Lambda = 0$*. En este caso* π *es la distribución estacionaria.*

Corolario 25.2 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *es ergódica si y sólo si (30.133) se cumple y* $S < \infty$*, en cuyo caso la distribución estacionaria* π *está dada por*

$$\pi_0 = \frac{1}{S},\ \pi_n = \frac{1}{S}\frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n},\ n = 1, 2, \dots \tag{25.136}$$

25.32. Birth-Death Processes as Queueing Models

25.32.1. Cola M/M/1

Proposición 25.62 *La cola M/M/1 con intensidad de tráfico* ρ *es recurrente si y sólo si* $\rho \leq 1$

Proposición 25.63 *La cola M/M/1 con intensidad de tráfica* ρ *es ergodica si y sólo si* $\rho < 1$*. En este caso, la distribución de equilibrio* π *de la longitud de la cola es geométrica,* $\pi_n = (1-\rho)\rho^n$*, para* $n = 0, 1, 2, \dots$.

25.32.2. Cola con Infinidad de Servidores

Este caso corresponde a $\beta_n = \beta$ *y* $\delta_n = n\delta$*. El parámetro de interés es* $\eta = \frac{\beta}{\delta}$*, de donde se obtiene:*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\beta_1 \cdots \beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} n!\eta^n = \infty,$$

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} = e^n.$$

Proposición 25.64 *La cola* $M/M/\infty$ *es ergodica para todos los valores de* η*. La distribución de equilibrio* π *es Poisson con media* η, $\pi_n = \frac{e^{-n}\eta}{n!}$

25.32.3. Cola M/M/m

En este caso $\beta_n = \beta$ *y* $\delta_n = m\left(n\right)\delta$*, donde* $m\left(n\right) = n$*,* $1 \leq n \leq m$*. La intensidad de tráfico es* $\rho = \frac{\beta}{m\delta}$*, se tiene entonces que* $\beta_n/\delta_n = \rho$ *para* $n \geq m$*. Así, para el caso* $m = 1$*,*

CAPÍTULO 26

Procesos Estocasticos

26.1. Procesos Estocásticos: Introducción

Definición 26.1 *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y* $\mathbf{E}$ *un conjunto no vacío, finito o numerable. Una sucesión de variables aleatorias* $\{X_n : \Omega \rightarrow \mathbf{E}, n \geq 0\}$ *se le llama Cadena de Markov con espacio de estados* $\mathbf{E}$ *si satisface la condición de Markov, esto es, si para todo* $n \geq 1$ *y toda sucesión* $x_0, x_1, \ldots, x_n, x, y \in \mathbf{E}$ *se cumple que*

$$P\left\{X_n = y | X_{n-1} = x, \ldots, X_0 = x_0\right\} = P\left\{X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}\right\} \tag{26.1}$$

La distribución de X_0 *se llama distribución inicial y se denotará por* π.

Las probabilidades condicionales $P\left\{X_n = y | X_{n-1} = x\right\}$ *se les llama probabilidades condicionales*
En este trabajo se considerarán solamente aquellas cadenas de Markov con probabilidades de transición estacionarias, es decir, aquellas que no dependen del valor de n *(se dice que es una cadena homogénea), es decir, cuando se diga* $X_n, n \geq 0$ *es cadena de Markov, se entiende que es una sucesión de variables aleatorias que satisfacen la propiedad de Markov y que tienen probabilidades de transición estacionarias.*

Nota 26.1 *Para una cadena de Markov Homogénea se tiene la siguiente denotación*

$$P\left\{X_n = y | X_{n-1} = x\right\} = P_{x,y} \tag{26.2}$$

Nota 26.2 *Para* $m \geq 1$ *se denotará por* $P_{x,y}^{(m)}$ *a* $P\left\{X_{n+m} = y | X_n = x\right\}$, *que significa la probabilidad de ir en* m *pasos o unidades de tiempo de* x *a* y, *y se le llama probabilidad de transición en* m *pasos.*

Nota 26.3 *Para* $x, y \in \mathbf{E}$ *se define a* $P_{x,y}^{(0)}$ *como* $\delta_{x,y}$, *donde* $\delta_{x,y}$ *es la delta de Kronecker, es decir, vale 1 si* $x = y$ *y 0 en otro caso.*

Nota 26.4 *En el caso de que* $\mathbf{E}$ *sea finito, se considera la matrix* $P = \left(P_{x,y}\right)_{x,y \in \mathbf{E}}$ *y se le llama matriz de transición.*

Nota 26.5 *Si la distribución inicial* π *es igual al vector* $\left(\delta_{x,y}\right)_{y \in \mathbf{E}}$, *es decir*

$$P\left(X_0 = x\right) = 1) \;\; y \; P\left(X_0 \neq x\right) = 0,$$

entonces se toma la notación

$$P_x\left(A\right) = P\left(A | X_0 = x\right), A \in \mathcal{F}, \tag{26.3}$$

y se dice que la cadena empieza en A. *Se puede demostrar que* P_x *es una nueva medida de probabilidad en el espacio* $(\Omega, \mathcal{F})$.

Nota 26.6 *La suma de las entradas de los renglones de la matriz de transición es igual a uno, es decir, para todo* $x \in \mathbf{E}$ *se tiene* $\sum_{y \in \mathbf{E}} P_{x,y} = 1$.

Para poder obtener uno de los resultados más importantes en cadenas de Markov, la ecuación de Chapman-kolmogorov se requieren los siguientes resultados:

Lema 26.1 *Sean $x, y, z \in \mathbf{E}$ y $0 \leq m \leq n-1$, entonces se cumple que*

$$P\left(X_{n+1} = y | X_n = z, X_m = x\right) = P_{z,y}. \tag{26.4}$$

Proposición 26.1 *Si $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbf{E}$ y $\pi\left(x_0\right) = P\left(X_0 = x_0\right)$, entonces*

$$P\left(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, X_0 = x_0\right) = \pi\left(x_0\right) P_{x_0,x_1} \cdot P_{x_1,x_2} \cdots P_{x_{n-1},x_n} \tag{26.5}$$

De la proposición anterior se tiene

$$P\left(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | X_0 = x_0\right) = P_{x_0,x_1} \cdot P_{x_1,x_2} \cdots P_{x_{n-1},x_n}. \tag{26.6}$$

finalmente tenemos la siguiente proposición

Proposición 26.2 *Sean $n, k \in \mathbb{N}$ fijos y $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+k} \in \mathbf{E}$, entonces*

$$\begin{aligned} & P\left(X_{n+1} = x_{n+1}, \dots, X_{n+k} = x_{n+k} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\right) \\ = \; & P\left(X_1 = x_{n+1}, X_2 = x_{n+2}, \cdots, X_k = x_{n+k} | X_0 = x_n\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 26.1 *Sea X_n una variable aleatoria al tiempo n tal que*

$$P\left(X_{n+1} = 1 | X_n = 0\right) = p \tag{26.7}$$
$$P\left(X_{n+1} = 0 | X_n = 1\right) = q = 1 - p \tag{26.8}$$
$$P\left(X_0 = 0\right) = \pi_0\left(0\right). \tag{26.9}$$

Se puede demostrar que

$$P\left(X_n = 0\right) = \frac{q}{p+q} \tag{26.10}$$
$$P\left(X_n = 1\right) = \frac{p}{p+q} \tag{26.11}$$

Ejemplo 26.2 *El problema de la Caminata Aleatoria*

Ejemplo 26.3 *El problema de la ruina del jugador*

Ejemplo 26.4 *Sea $\left\{Y_i\right\}_{i=0}^{\infty}$ sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas, definidas sobre un espacio de probabilidad $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$ y que toman valores enteros, se tiene que la sucesión $\left\{X_i\right\}_{i=0}^{\infty}$ definida por $X_j \sum i = 0^j Y_j$ es una cadena de Markov en el conjunto de los números enteros.*

Proposición 26.3 *Para una cadena de Markov $\left(X_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ con espacio de estados $\mathbf{E}$ y para todo $n, m \in \mathbb{N}$ y toda pareja $x, y \in \mathbf{E}$ se cumple*

$$P\left(X_{n+m} = y | X_0 = x\right) = \sum_{z \in \mathbf{E}} P_{x,z}^{(m)} P_{z,y}^{(n)} = P_{x,y}^{(n+m)} \tag{26.12}$$

Nota 26.7 *Para una cadena de Markov con un número finito de estados, se puede pensar a P^n como la n-ésima potencia de la matriz P. Sea π_0 distribución inicial de la cadena de Markov, como*

$$P\left(X_n = y\right) = \sum_x P\left(X_0 = x, X_n = y\right) = \sum_x P\left(X_0 = x\right) P\left(X_n = y | X_0 = x\right) \tag{26.13}$$

se puede comprobar que

$$P\left(X_n = y\right) = \sum_x \pi_0\left(X\right) P^n\left(x, y\right). \tag{26.14}$$

Con lo anterior es posible calcular la distribuición de X_n en términos de la distribución inicial π_0 y la función de transición de n-pasos P^n,

$$P\left(X_{n+1} = y\right) = \sum_x P\left(X_n = x\right) P\left(x, y\right). \tag{26.15}$$

Si se conoce la distribución de X_0 se puede conocer la distribución de X_1.

26.2. Clasificación de Estados

Definición 26.2 *Para A conjunto en el espacio de estados, se define un tiempo de paro T_A de A como*

$$T_A = min_{n>0} (X_n \in A) \tag{26.16}$$

Nota 26.8 *Si $X_n \notin A$ para toda $n > 0$, $T_A = \infty$, es decir, T_A es el primer tiempo positivo que la cadena de Markov está en A.*

Una vez que se tiene la definición anterior se puede demostrar la siguiente igualdad:

Proposición 26.4 $P^n(x, y) = \sum_{m=1}^{n} P_x(T_y = m) P^{n.m}(y, x), n \geq 1$

Definición 26.3 *En una cadena de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con espacio de estados $\mathbf{E}$, matriz de transición $(P_{x,y})_{x,y\in\mathbf{E}}$ y para $x, y \in \mathbf{E}$, se dice que*

a) *De x se accede a y si existe $n \geq 0$ tal que $P_{x,y}^{(n)} > 0$ y se denota por $(x \to y)$*

b) *x y y se comunican entre sí, lo que se denota por $(x \leftrightarrow y)$, si se cumplen $(x \to y)$ y $(y \to x)$.*

c) *Un estado $x \in \mathbf{E}$ es estado recurrente si*

$$P(X_n = x \text{ para algún } n \in \mathbb{N} | X_0 = x) \equiv 1.$$

d) *Un estado $x \in \mathbf{E}$ es estado transitorio si*

$$P(X_n = x \text{ para algún } n \in \mathbb{N} | X_0 = x) < 1.$$

e) *Un estado $x \in \mathbf{E}$ se llama absorbente si $P_{x,x} \equiv 1$.*

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 26.5 *$x \leftrightarrow y$ es una relación de equivalencia y da lugar a una partición del espacio de estados $\mathbf{E}$*

Definición 26.4 *1. Se dice que $C \subset \mathbf{E}$ es una clase de comunicación si cualesquiera dos estados de C se comunicán entre sí*

2. Dado $x \in \mathbf{E}$, su clase de comunicación se denota por: $C(x) = \{y \in \mathbf{E} : x \leftrightarrow y\}$.

3. Se dice que un conjunto de estados $C \subset \mathbf{E}$ es cerrado si ningún estado de $\mathbf{E} - C$ puede ser accedido desde un estado de C.

Definición 26.5 *Se dice que la cadena es irreducible si cualquiera de las siguientes condiciones, equivalentes entre sí, se cumplen*

a) Desde cualquier estado de $\mathbf{E}$ se puede acceder a cualquier otro.

b) Todos los estados se comunican entre sí.

c) $C(x) = \mathbf{E}$ para algún $x \in \mathbf{E}$.

d) $C(x) = \mathbf{E}$ para todo $x \in \mathbf{E}$.

e) El único conjunto cerrado es el total.

Proposición 26.6 *a) Un estado $x \in \mathbf{E}$ es recurrente si y sólo si $P(T_x < \infty | x_0 = x) = 1$.*

b) Un estado $x \in \mathbf{E}$ es transitorio si y sólo si $P(T_x < \infty | x_0 = x) < 1$.

c) Un estado $x \in \mathbf{E}$ es absorbente si y sólo si $P(T_x = 1 | x_0 = x) = 1$.

CAPÍTULO 27

Procesos Regenerativos

27.1. Procesos Regenerativos

Definición 27.1 *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 27.2 *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 27.3 *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 27.4 *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 27.5 *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 27.6 *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 27.7 *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 27.8 *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 27.9 *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{27.1}$$

Nota 27.1 *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (32.2.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{27.2}$$

Teorema 27.1 *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{27.3}$$

en $\{T < \infty\}$.

Definición 27.10 *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 27.11 *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 27.12 *Sea X el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 27.13 *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a $\mathcal{F}$. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 27.14 *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots$,. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 27.15 *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 27.16 *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 27.17 *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 27.18 *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s,t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B|\mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B|X(s)\}. \tag{27.4}$$

Nota 27.2 *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (32.2.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B|X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B|X(s)\} \tag{27.5}$$

Teorema 27.2 *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty|\mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{27.6}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{\bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\right\}.$$

donde lM son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{27.7}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{27.8}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{27.9}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.
Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\,ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{27.10}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 27.1 (Supuesto 3.1, Davis [14]) *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{27.11}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[1] se cumple para cualquier tiempo de paro. En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 27.19 *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{27.12}$$

Definición 27.20 *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 27.3 *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.
Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de Ãndices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[2], $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 27.21 *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B)\,^3. \tag{27.13}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[4] (32.2.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{27.15}$$

Definición 27.22 *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}^5.$$

[1] Revisar página 362, y 364 de Davis [14].
[2] qué se quiere decir con el término: más general?
[3] Ecuación de Chapman-Kolmogorov
[4]
$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{27.14}$$

[5] Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

Nota 27.3 *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (32.2.310) con función de transición homogénea (P_t) *tiene la propiedad característica*

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_{t+s}\right)|\mathcal{G}_t\right\} = P_s f\left(X_t\right) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{27.16}$$

La ecuación anterior es la Propiedad Simple de Markov *de* X *relativa a* (P_t).
En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ *cumple con la propiedad de Markov (32.2.311) relativa a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *con semigrupo de transición* (P_t).

Definición 27.23 *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 27.24 (HD1) *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considérese la colección de variables aleatorias X_t *definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas* $\mathbf{P}^x$ *tales que* $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$*, y bajo cualquier* $\mathbf{P}^x$*,* X_t *es de Markov con semigrupo* (P_t). $\mathbf{P}^x$ *puede considerarse como la distribución condicional de* $\mathbf{P}$ *dado* $X_0 = x$.

Definición 27.25 *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E, \mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \;\; y \; X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{27.17}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (32.2.311) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 27.26 (HD2) *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 27.27 *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 32.100, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 32.101, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

27.1.1. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel* A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (* puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0, t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 27.28 *Se define el proceso estacionario,* $\left\{V^{*}\left(t\right),t\geq0\right\}$, *para* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ *por*

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right)\in A\right\}=\frac{1}{\mathbb{E}\left[X\right]}\int_{0}^{\infty}\mathbb{P}\left\{V\left(t+x\right)\in A|X>x\right\}\left(1-F\left(x\right)\right)dx,$$

para todo $t\geq0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 27.29 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0,\lambda,2\lambda,\ldots$ *para alguna* $\lambda>0$ *entera.*

Definición 27.30 *Una modificación medible de un proceso* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$, *es una versión de este,* $\left\{V\left(t,w\right)\right\}$ *conjuntamente medible para* $t\geq0$ *y para* $w\in S$, S *espacio de estados para* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$.

Teorema 27.4 *Sea* $\left\{V\left(t\right),t\geq\right\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}\left[X\right]<\infty$. *Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t, *además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]<\infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]<\infty$,*entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t}V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$.

Corolario 27.1 *Sea* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E}<\infty$, F *es no-aritmética, y para todo* $x\geq0$, $P\left\{V\left(t\right)\leq x,C>x\right\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $\left[0,\tau\right]$, *entonces* $V\left(t\right)$ *converge en distribución cuando* $t\rightarrow\infty$ *y*

$$\mathbb{E}V=\frac{\mathbb{E}\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V\left(t\right)$ *cuando* $t\rightarrow\infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

27.1.2. Procesos de Renovación

Definición 27.31 *Sean* $0\leq T_{1}\leq T_{2}\leq\ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_{n} *en el intervalo* $\left[0,t\right)$ *es*

$$N\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\left(T_{n}\leq t\right), \tag{27.18}$$

para $t\geq0$.

Si se consideran los puntos T_{n} *como elementos de* $\mathbb{R}_{+}$, *y* $N\left(t\right)$ *es el número de puntos en* $\mathbb{R}$. *El proceso denotado por* $\left\{N\left(t\right):t\geq0\right\}$, *denotado por* $N\left(t\right)$, *es un proceso puntual en* $\mathbb{R}_{+}$. *Los* T_{n} *son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual* $N\left(t\right)$ *es simple si su número de ocurrencias son distintas:* $0<T_{1}<T_{2}<\ldots$ *casi seguramente.*

Definición 27.32 *Un proceso puntual* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_{n}=T_{n}-T_{n-1}$, *para* $n\geq1$, *son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F, *donde* $F\left(0\right)=0$ *y* $T_{0}=0$. *Los* T_{n} *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_{n} *son los tiempos de inter-renovación, y* $N\left(t\right)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $\left[0,t\right)$

Nota 27.4 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F, *con* $F\left(0\right)=0$, *para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_{1},\xi_{2},\ldots$ *definidas en este con distribución* F. *Entonces las otras cantidades son* $T_{n}=\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}$ *y* $N\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\left(T_{n}\leq t\right)$, *donde* $T_{n}\rightarrow\infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

27.1.3. Teorema Principal de Renovación

Nota 27.5 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.5 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 27.1 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.33 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t) | T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.2 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t) \mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 27.6 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t) \mathbb{1}(T > t)\right]$.

27.1.4. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.3 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.6 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.7 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (27.19)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (27.20)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.2 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$
t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.21)
$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.34 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$
M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|
$$

Teorema 27.8 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (27.22)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (27.23)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.3 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z(T_1) - Z(T_0)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.24)
$$

27.1.5. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\
T_{N(t)} \leq &\ t < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N(T_n) = n$, y

$$
N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}
$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$
P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)
$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\
P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)
\end{aligned}
$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$
\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)
$$

Proposición 27.4 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.7 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.9 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (27.25) \\
lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (27.26)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.4 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$
t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.27}
$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.35 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$
M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|
$$

Teorema 27.10 *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (27.28) \\
lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (27.29)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.5 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.30}
$$

27.1.6. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.5 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.8 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.11 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.31}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.32}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.6 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.33}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.36 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.12 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} \quad (27.34)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.35)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.7 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.36)
$$

27.1.7. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$
\begin{aligned}
\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\
T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$
N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}
$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$
P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)
$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$
\begin{aligned}
\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\
P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right)
\end{aligned}
$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$
\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)
$$

Proposición 27.6 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.9 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 27.13 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \quad (27.37)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.38)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 27.8 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.39}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.37 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.14 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.40}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.41}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.9 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.42}$$

27.1.8. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq \; & t \; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.7 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.10 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.15 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \qquad (27.43) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \qquad (27.44) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.10 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (27.45)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.38 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.16 *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \qquad (27.46) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \qquad (27.47) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.11 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (27.48)$$

27.1.9. Función de Renovación

Definición 27.39 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \ t \geq 0, \qquad (27.49)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.8 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.17 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

27.1.10. Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.40 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \;\; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.9 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 27.41 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.10 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.11 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.18 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.12 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

27.1.11. Procesos de Renovación

Definición 27.42 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.50}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.43 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.12 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

27.1.12. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[35]

Definición 27.44 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.51}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.45 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.13 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.11 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Ejemplo 27.1 (Proceso Poisson) *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación* $N(t)$ *tienen distribución exponencial* $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ *con tasa* λ*. Entonces* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*.*

Nota 27.14 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 27.19 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.52}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.53}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 27.13 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.54}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 27.46 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.20 *Supóngase que* $n^{-1} T_n \to \mu$ *c.s. cuando* $n \to \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.55}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.56}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 27.14 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.57}$$

Supóngase que $N(t)$ *es un proceso de renovación con distribución* F *con media finita* μ*.*

Definición 27.47 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.12 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 27.48 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.13 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.15 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.21 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.15 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 27.49 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \ t \geq 0, \tag{27.58}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.14 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.22 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.50 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.15 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 27.51 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.16 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.16 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.23 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.16 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}\left[N(t) + 1\right], \, t \geq 0,$$

Definición 27.52 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \, t \geq 0, \tag{27.59}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.17 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.24 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 27.17 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 27.25 (Teorema Principal de Renovación) *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 27.18 *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.53 *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)\,|T] = \mathbb{E}[X(t)]\,,\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.19 *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T, *que tiene distribución* F. *Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]\,.$$

Teorema 27.26 (Regeneración Cruda) *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T, *y defínase* $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. *Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 27.18 *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 27.27 (Teorema Principal de Renovación) *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 27.20 *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.54 *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)\,|T] = \mathbb{E}[X(t)]\,,\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.21 *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T, *que tiene distribución* F. *Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]\,.$$

Teorema 27.28 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Definición 27.55 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.19 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 27.20 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 27.21 *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.56 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.22 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 27.29 (Procesos Regenerativos) *Suponga que el proceso*

Definición 27.57 (Renewal Process Trinity) *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- *$A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- *$B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- *$L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 27.23 *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{27.60}$$

Ejemplo 27.2 (Tiempos de recurrencia Poisson) *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (34.8.10) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 27.24 *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 27.58 *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 27.25 *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ *en* $\mathbb{R}_+$, *con puntos* $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 27.22 *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 27.30 *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación* N *es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante* $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 27.26 *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 27.17 *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

27.1.13. Procesos Regenerativos

Nota 27.27 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 27.28 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.59 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2, *independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1. *Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, *se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X.

Definición 27.60 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}\left[R_1\right]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.29 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

27.1.14. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.61 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.30 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 27.31 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.62 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 27.32 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.63 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.33 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

27.1.15. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.64 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.65 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 27.66 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 27.31 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

27.1.16. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración, *y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.67 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.68 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 27.69 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 27.32 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

27.1.17. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[35]

Definición 27.70 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.61}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.71 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.34 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.23 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.35 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.33 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.62}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.63}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.18 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.64}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.72 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.34 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (27.65)$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.66)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 27.19 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.67)$$

Supóngase que $N(t)$ *es un proceso de renovación con distribución* F *con media finita* μ*.*

Definición 27.73 *La función de renovación asociada con la distribución* F*, del proceso* $N(t)$*, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$*.*

Proposición 27.24 *Supóngase que la distribución de inter-renovación* F *tiene densidad* f*. Entonces* $U(t)$ *también tiene densidad, para* $t > 0$*, y es* $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$*. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 27.74 *La Transformada de Laplace-Stieljes de* F *está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.25 *La Transformada de Laplace* $\hat{U}(\alpha)$ *y* $\hat{F}(\alpha)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$*.*

Nota 27.36 *Un proceso de renovación* $N(t)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$*, para* $t \geq 0$*.*

Teorema 27.35 *Sea* $N(t)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ *es finita para cada* t*. Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$*,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N(t)$ *tal que* $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$*, independiente de* n*. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.20 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right],\ t \geq 0,$$

Definición 27.75 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s),\ t \geq 0, \tag{27.68}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.26 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.36 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.76 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.27 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 27.77 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t}dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.28 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.37 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.37 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\,d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n|T_n = s\right] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\,d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.21 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right], \ t \geq 0,$$

Definición 27.78 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s), \ t \geq 0, \tag{27.69}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.29 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.38 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 27.38 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 27.39 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 27.30 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.79 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.31 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 27.40 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 27.39 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 27.41 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+}h(s)\,ds.$$

Proposición 27.32 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t)\,,\text{ donde } h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 27.80 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\text{ para } t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.33 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t)\,,\text{ donde } h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}\,(T>t)\right].$$

Teorema 27.42 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}\,(T>t)\right]$.

27.1.18. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t):t\geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n=T_n-T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.81 *Para el proceso $\{(N(t),X(t)):t\geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1},T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n=\left(\xi_n,\{X(T_{n-1}+t):0\leq t<\xi_n\}\right)$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 27.1 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t)=f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f:\tilde{S}\rightarrow S$.*

Observación 27.2 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.82 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X=\{X(t):t\geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1>0$ tal que*

- *i)* $\{X(t+R_1):t\geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t):t<R_1\},\}$
- *ii)* $\{X(t+R_1):t\geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t):t>0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k\equiv R_1+R_2+\cdots+R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 27.40 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.83 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.41 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

27.1.19. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.84 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 27.3 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 27.4 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.85 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 27.42 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.86 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty}\leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.43 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

27.1.20. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t\geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t)\in A|X_1+X_2+\cdots+X_{R(t)}=s,\{V(\tau),\tau<s\}\right\}=\mathbb{P}\{V(t-s)\in A|X_1>t-s\},$$

*para todo $0\leq s\leq t$, donde $R(t)=\max\{X_1+X_2+\cdots+X_j\leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0,X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t),t\geq 0\}$, $[X_1,X_1+X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X=X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.87 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t\geq 0\}$, para $\{V(t), t\geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t)\in A\}=\frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty}\mathbb{P}\{V(t+x)\in A|X>x\}(1-F(x))\,dx,$$

para todo $t\geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.88 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 27.89 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t\geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t\geq 0$ y para $w\in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t\geq 0\}$.*

Teorema 27.43 *Sea $\{V(t), t\geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X]<\infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{X} V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)]<\infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]<\infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$.

27.1.21. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (* puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0, t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea F la función de distrbución de X*

Definición 27.90 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel A.*

Definición 27.91 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.92 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*, S espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.44 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

27.1.22. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n *están relacionados con los conteos de* $N(t)$ *por*

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$*, y*

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.34 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Nota 27.44 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 27.45 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.70}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.71}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 27.22 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.72}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 27.93 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.46 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.73}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.74}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 27.23 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.75}$$

27.1.23. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.35 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.45 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.47 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.76}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.77}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.24 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.78}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.94 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.48 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} \quad (27.79) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.80) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.25 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.81)$$

27.1.24. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\} \\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 27.36 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.46 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 27.49 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \quad (27.82) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.83) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 27.26 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.84}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.95 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.50 *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (27.85)\\ lim_{t\to\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (27.86)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.27 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1}Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.87}$$

27.1.25. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.37 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.47 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.51 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.88}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.89}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.28 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.90}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.96 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.52 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.91}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.92}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.29 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.93}$$

27.1.26. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.97 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.98 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.99 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.53 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$*.*

27.1.27. Procesos de Renovación

Definición 27.100 *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.94}$$

para $t \geq 0$*.*

Si se consideran los puntos T_n *como elementos de* $\mathbb{R}_+$*, y* $N(t)$ *es el número de puntos en* $\mathbb{R}$*. El proceso denotado por* $\{N(t) : t \geq 0\}$*, denotado por* $N(t)$*, es un proceso puntual en* $\mathbb{R}_+$*. Los* T_n *son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual* $N(t)$ *es simple si su número de ocurrencias son distintas:* $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ *casi seguramente.*

Definición 27.101 *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, para* $n \geq 1$*, son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F*, donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$*. Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 27.48 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F*, con* $F(0) = 0$*, para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F*. Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$*, donde* $T_n \to \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

27.1.28. Teorema Principal de Renovación

Nota 27.49 *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 27.54 (Teorema Principal de Renovación) *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 27.38 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,, \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.102 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.39 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\,, \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 27.55 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

27.1.29. Función de Renovación

Definición 27.103 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s)\,,\ t \geq 0, \tag{27.95}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.40 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.56 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

27.1.30. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq &\quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\
P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)
\end{aligned}
$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$
\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)
$$

Proposición 27.41 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Nota 27.50 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la* n*-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 27.57 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \qquad (27.96) \\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \qquad (27.97)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 27.30 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$
t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (27.98)
$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 27.104 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$
M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|
$$

Teorema 27.58 *Supóngase que* $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \qquad (27.99) \\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \qquad (27.100)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 27.31 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (27.101)
$$

27.1.31. Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.105 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.42 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 27.106 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.43 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.51 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.59 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.32 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \, t \geq 0,$$

27.1.32. Procesos de Renovación

Definición 27.107 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.102}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.108 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.52 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

27.1.33. Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\left\{T_1^i, T_2^i, \ldots, T_k^i, \ldots\right\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_i$. Además se sabe que para

$$T^* = \min\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

T^* se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{4} \mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad y \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min\{\tilde{r}, \hat{r}\},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad \textit{y por tanto} \quad \overline{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \overline{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\overline{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

27.1.34. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ*.*

Definición 27.109 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Observación 27.5 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Observación 27.6 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.110 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X*.*

Nota 27.53 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.111 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.54 *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_∞

27.1.35. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[35]

Definición 27.112 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\left(T_n \leq t\right), \tag{27.103}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N\left(t\right)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\left\{N\left(t\right) : t \geq 0\right\}$, denotado por $N\left(t\right)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N\left(t\right)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.113 *Un proceso puntual $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F\left(0\right) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N\left(t\right)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 27.55 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F\left(0\right) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\left(T_n \leq t\right)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{array}{rcl}\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &=& \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N\left(t\right)} \leq & t & < T_{N\left(t\right)+1},\end{array}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &=& \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &=& 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 27.44 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.56 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 27.60 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_{n} &= \mu, \; c.s. \qquad (27.104)\\
lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu, \; c.s. \qquad (27.105)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.33 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N\left(t\right)\rightarrow 1/\mu, \; c.s. \text{ cuando } t\rightarrow\infty. \qquad (27.106)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.114 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_{n}=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_{n}}|Z\left(t\right)-Z\left(T_{n-1}\right)|$$

Teorema 27.61 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_{n}\right) &= a, \; c.s. \qquad (27.107)\\
lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \; c.s. \qquad (27.108)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.34 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right)\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_{1}\right)-Z\left(T_{0}\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_{1}\right]}, \; c.s. \text{ cuando } t\rightarrow\infty. \qquad (27.109)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.115 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}\left(t\right), \; t\geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.45 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right)>N\left(t-\right)\right\}=0, \; t\geq 0.$$

Definición 27.116 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right)=\int_{\mathbb{R}_{+}}e^{-\alpha t}dF\left(t\right), \; \alpha\geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F}\left(\alpha\right)^{n}=\frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 27.46 *La Transformada de Laplace* $\hat{U}(\alpha)$ *y* $\hat{F}(\alpha)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.

Nota 27.57 *Un proceso de renovación* $N(t)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$*, para* $t \geq 0$.

Teorema 27.62 *Sea* $N(t)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ *es finita para cada* t*. Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N(t)$ *tal que* $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$*, independiente de* n*. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.35 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación* $N(t)$,

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t) + 1\right]\,,\ t \geq 0,$$

Definición 27.117 *Sea* $h(t)$ *función de valores reales en* $\mathbb{R}$ *acotada en intervalos finitos e igual a cero para* $t < 0$ *La ecuación de renovación para* $h(t)$ *y la distribución* F *es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s)\,,\ t \geq 0, \tag{27.110}$$

donde $H(t)$ *es una función de valores reales. Esto es* $H = h + F \star H$*. Decimos que* $H(t)$ *es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para* $t < 0$.

Proposición 27.47 *La función* $U \star h(t)$ *es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.63 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ *es un proceso de renovación con distribución* F *con media finita* μ.

Definición 27.118 *La función de renovación asociada con la distribución* F*, del proceso* $N(t)$*, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)\,,\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.48 *Supóngase que la distribución de inter-renovación* F *tiene densidad* f*. Entonces* $U(t)$ *también tiene densidad, para* $t > 0$*, y es* $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$*. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 27.119 *La Transformada de Laplace-Stieljes de* F *está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t)\,,\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.49 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.58 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.64 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.36 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 27.120 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{27.111}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.50 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.65 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 27.59 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.66 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 27.51 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.121 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)],\ \text{para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.52 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 27.67 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 27.60 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.68 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 27.53 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.122 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T + t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.54 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 27.69 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]$.

27.1.36. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.123 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 27.7 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Observación 27.8 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.124 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 27.61 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.125 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.62 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

27.1.37. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.126 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 27.9 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Observación 27.10 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.127 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X*.*

Nota 27.63 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.128 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.64 *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_∞

27.1.38. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t - s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0, t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 27.129 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t + x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel A.*

Definición 27.130 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.131 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t,w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.70 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

27.1.39. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \dots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (* puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0,t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 27.132 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 27.133 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.134 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t,w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.71 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

27.1.40. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \ t \ < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.55 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.65 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.72 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.112}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.113}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.37 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.114}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.135 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.73 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} & (27.115)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (27.116)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.38 *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.117)
$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$
\begin{aligned}
\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\
T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$
N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}
$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$
P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)
$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$
\begin{aligned}
\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\
P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right)
\end{aligned}
$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$
\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)
$$

Proposición 27.56 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.66 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 27.74 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (27.118)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (27.119)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 27.39 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$
t^{-1} N\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.120)
$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.136 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.75 *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \quad (27.121) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.122) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.40 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.123)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \;\; t \;\; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.57 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.67 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.76 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \quad (27.124) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.125) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.41 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.126}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.137 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.77 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (27.127)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (27.128)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.42 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.129}$$

27.1.41. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.58 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.68 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.78 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} \quad (27.130)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.131)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.43 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$
t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.132)
$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.138 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$
M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|
$$

Teorema 27.79 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \quad (27.133)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.134)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.44 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.135)
$$

27.1.42. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$
\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},
$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.139 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$
\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,
$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.140 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.141 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.80 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

27.1.43. Procesos de Renovación

Definición 27.142 *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.136}$$

para $t \geq 0$*.*

Si se consideran los puntos T_n *como elementos de* $\mathbb{R}_+$*, y* $N(t)$ *es el número de puntos en* $\mathbb{R}$*. El proceso denotado por* $\{N(t) : t \geq 0\}$*, denotado por* $N(t)$*, es un proceso puntual en* $\mathbb{R}_+$*. Los* T_n *son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual* $N(t)$ *es simple si su número de ocurrencias son distintas:* $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ *casi seguramente.*

Definición 27.143 *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, para* $n \geq 1$*, son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F*, donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$*. Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 27.69 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F*, con* $F(0) = 0$*, para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F*. Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$*, donde* $T_n \rightarrow \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

27.1.44. Teorema Principal de Renovación

Nota 27.70 *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 27.81 (Teorema Principal de Renovación) *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 27.59 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.144 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.60 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 27.82 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]$.

27.1.45. Función de Renovación

Definición 27.145 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s), \; t \geq 0, \tag{27.137}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.61 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.83 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

27.1.46. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.62 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Nota 27.71 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la* n*-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 27.84 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \quad (27.138)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.139)\end{aligned}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 27.45 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.140)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 27.146 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.85 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \quad (27.141)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.142)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 27.46 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.143)$$

27.1.47. Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.147 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.63 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 27.148 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.64 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.72 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.86 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.47 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \, t \geq 0,$$

27.1.48. Procesos de Renovación

Definición 27.149 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.144}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 27.150 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 27.73 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

27.1.49. Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\left\{T_1^i, T_2^i, \dots, T_k^i, \dots\right\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_i$. Además se sabe que para

$$T^* = \min\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

T^* se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{4} \mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad y \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min\{\tilde{r}, \hat{r}\},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad y \text{ por tanto} \quad \overline{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \overline{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\overline{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

27.1.50. Ya revisado

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \ldots, L_N(t)]$. *Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los* $L_j(\tau_i(m)) = 0$ *para* $i = 1, 2$ *son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.*
Sea M_i *el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea* $C_i^{(m)}$, *para* $m = 1, 2, \ldots, M_i$ *la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio* $\mathbb{E}[C_i]$ *como*

$$\mathbb{E}[C_i] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}[M_i]}$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, *el número de usuarios en la cola* $Q_i(z)$ *en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de* $z^{L_i(t)}$ *sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:*

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i *es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con* $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, *se sigue del lema de Wald que:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ *solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de* $P_i(z)$, *por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1 - \mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1 - P_i(z)} \\
&= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$
\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z} \cdot \frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \\
&= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)} \cdot \frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z} \cdot \frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}
\end{aligned}
$$

Definición 27.151 *Sea L_i^*el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[L_i^*] &= f_i(i) & (27.145)\\
Var[L_i^*] &= f_i(i,i) + \mathbb{E}[L_i^*] - \mathbb{E}[L_i^*]^2. & (27.146)
\end{aligned}
$$

Definición 27.152 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
S_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right] = F_i(\theta(z)),\\
F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\
P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\
F_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right], \theta_i(z) - zP_i
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{1-\mu_i},\\
Var[S_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{(1-\mu_i)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^3}
\end{aligned}
$$

donde recordemos que

$$
Var[L_i^*] = f_i(i,i) + f_i(i) - f_i(i)^2.
$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$
\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]
$$

entonces, si

$$
I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]
$$

se tienen que

$$
F_i(z) = I_i[P_i(z)]
$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[L_i^*] &= \mu_i\mathbb{E}[I_i]\\
Var[L_i^*] &= \mu_i^2 Var[I_i] + \sigma^2\mathbb{E}[I_i]
\end{aligned}
$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\mathbb{E}\left[I_i\right] = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i},$$

además

$$Var\left[I_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i\left(i\right).$$

Si $C_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$ el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i\left(z\right) = I_i\left[\theta_i\left(z\right)\right],$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}\\
Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[C_i\right],\\
\mathbb{E}\left[I_i\right] &= \left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right]
\end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_i\left(z\right)}{dz} &= \frac{\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)}\\
&- \frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)}\\
&- \frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)\left(P_i^{'}\left(z\right)-1\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)^2}\\
&+ \frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)}\\
&+ \frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)^2\left(P_i\left(z\right)-z\right)}
\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z \rightarrow 1^+$:

$$Q_i^{(1)}\left(z\right) = \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{dQ_i\left(z\right)}{dz} = \lim_{z\rightarrow 1}\frac{\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} \tag{27.147}$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} \tag{27.148}$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)\left(P_i^{'}\left(z\right)-1\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)^2} \tag{27.149}$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} \tag{27.150}$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)^2\left(P_i\left(z\right)-z\right)} \tag{27.151}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)+\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)+(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}} = \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}\right]}\\
=&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} = \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
=&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} = \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
=&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

En nuestra notación $V\left(t\right)\equiv C_{i}$ y $X_{i}=C_{i}^{(m)}$ para nuestra segunda definición, mientras que para la primera la notación es: $X\left(t\right)\equiv C_{i}$ y $R_{i}\equiv C_{i}^{(m)}$.

Definición 27.153 *Sea L_{i}^{*}el número de usuarios en la cola Q_{i} cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right] &= f_{i}\left(i\right) && (27.152)\\
Var\left[L_{i}^{*}\right] &= f_{i}\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]-\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]^{2}. && (27.153)
\end{aligned}$$

Definición 27.154 *El tiempo de Ciclo C_{i} es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_{i}\left(m+1\right)-\tau_{i}\left(m\right)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_{i}\left(m+1\right)-\overline{\tau}_{i}\left(m\right)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 27.155 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
S_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right]=F_i(\theta(z)),\\
F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\
P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\
F_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right],\theta_i(z)-zP_i
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{1-\mu_i}=\frac{f_i(i)}{1-\mu_i},\\
Var[S_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{(1-\mu_i)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^3}
\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var[L_i^*] = f_i(i,i)+f_i(i)-f_i(i)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t=\tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m),\tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right]=\mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i(z)=I_i[P_i(z)]$$

para $i=1,2$, por tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L_i^*] &= \mu_i\mathbb{E}[I_i]\\
Var[L_i^*] &= \mu_i^2 Var[I_i]+\sigma^2\mathbb{E}[I_i]
\end{aligned}$$

para $i=1,2$, por tanto

$$\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},$$

además

$$Var[I_i] = \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2}-\frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2}f_i(i).$$

Si $C_i(z)=\mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$ el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i(z) = I_i[\theta_i(z)],$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i]\,\mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)}\\ Var[C_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_i] &= \mu_i\mathbb{E}[C_i],\\ \mathbb{E}[I_i] &= (1-\mu_i)\,\mathbb{E}[C_i]\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \ldots, L_N(t)]$. *Los puntos cuando la cola* i *es visitada y todos los* $L_j(\tau_i(m)) = 0$ *para* $i = 1, 2$ *son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.*
Sea M_i *el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea* $C_i^{(m)}$, *para* $m = 1, 2, \ldots, M_i$ *la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio* $\mathbb{E}[C_i]$ *como*

$$\mathbb{E}[C_i] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}[M_i]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ *contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que* $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, *además, como* $M_i > 0$, *se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que*

$$\mathbb{E}[C_i] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Nota 27.74 *En Stidham[41] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ *contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que* $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, *además, como* $M_i > 0$, *se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que*

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Nota incompleta!!

27.1.51. Procesos de Renovación y Regenerativos

Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \left\{P_i(z)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i(z)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)} \\
&= \frac{1-I_i\left[P_i(z)\right]}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que
Sea

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]} \cdot \frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z} \cdot \frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Consideremos una cola de la red de sistemas de visitas cíclicas fija, Q_l.
Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (34.422), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_l es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 27.156 *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 27.157 *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 27.158 *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

En nuestra notación $V(t) \equiv C_i$ y $X_i = C_i^{(m)}$ para nuestra segunda definición, mientras que para la primera la notación es: $X(t) \equiv C_i$ y $R_i \equiv C_i^{(m)}$.

Definición 27.159 *Sea L_i^*el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= f_i\left(i\right) &(27.154)\\ Var\left[L_i^*\right] &= f_i\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. &(27.155)\end{aligned}$$

Definición 27.160 *El tiempo de Ciclo C_i es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}S_i\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right]=F_i\left(\theta\left(z\right)\right),\\ F\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\ P\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\ F_i\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right],\theta_i\left(z\right)-zP_i\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1-\mu_i}=\frac{f_i\left(i\right)}{1-\mu_i},\\ Var\left[S_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^3}\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var\left[L_i^*\right] = f_i\left(i,i\right)+f_i\left(i\right)-f_i\left(i\right)^2.$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[I_i\right] = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i},$$

además

$$Var\left[I_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2}-\frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2}f_i\left(i\right).$$

Si $C_i\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$ el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i\left(z\right)=I_i\left[\theta_i\left(z\right)\right],$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right]=\frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i}=\frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}\\ Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \mu_i \mathbb{E}\left[C_i\right],\\
\mathbb{E}\left[I_i\right] &= \left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right]
\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $\left[L_1\left(t\right), L_2\left(t\right), \ldots, L_N\left(t\right)\right]$. *Los puntos cuando la cola* i *es visitada y todos los* $L_j\left(\tau_i\left(m\right)\right)=0$ *para* $i=1,2$ *son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.*
Sea M_i *el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea* $C_i^{(m)}$, *para* $m=1,2,\ldots,M_i$ *la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio* $\mathbb{E}\left[C_i\right]$ *como*

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ *contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que* $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, *además, como* $M_i > 0$, *se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que*

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, *el número de usuarios en la cola* $Q_i\left(z\right)$ *en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de* $z^{L_i(t)}$ *sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:*

$$Q_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

M_i *es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con* $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, *se sigue del lema de Wald que:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i\left(z\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)} \\
&= \frac{1-I_i\left[P_i(z)\right]}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]} \cdot \frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z} \cdot \frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \\
&= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)} \cdot \frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z} \cdot \frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \\
&- \frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \\
&- \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} \\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}
\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z \rightarrow 1^+$:

$$\begin{aligned}
Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \lim_{z\rightarrow 1}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} && (27.156) \\
&- \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} && (27.157) \\
&- \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} && (27.158) \\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} && (27.159) \\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} && (27.160)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)}{\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(-z+P_i\left(z\right)\right)\right]}\\ &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)+\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(-1+P_i^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)\right]}\\ &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)+(1-z)F_i^{'}\left(z\right)P_i^{'}\left(z\right)+(1-z)P_i\left(z\right)F_i^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(-1+P_i^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)\left(P_i^{'}\left(z\right)-1\right)}{\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)^{2}} = \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)\left(P_i^{'}\left(z\right)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)^{2}\right]}\\ =& \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)\left(-1+P_i^{'}\left(z\right)\right)-(1-z)P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)\left(-1+P_i^{'}\left(z\right)\right)}{2\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(-z+P_i\left(z\right)\right)\left(-1+P_i^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_i\left(z\right)\right)^{2}P_i^{'}\left(z\right)}\\ +& \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{+(1-z)\left(1-F_i\left(z\right)\right)\left(-1+P_i^{'}\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}{2\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(-z+P_i\left(z\right)\right)\left(-1+P_i^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_i\left(z\right)\right)^{2}P_i^{'}\left(z\right)}\\ +& \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{+(1-z)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)P_i^{''}\left(z\right)}{2\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(-z+P_i\left(z\right)\right)\left(-1+P_i^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_i\left(z\right)\right)^{2}P_i^{'}\left(z\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} = \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)\right]}\\ =& \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)-(1-z)F_i^{'}\left(z\right)P_i^{'}\left(z\right)+\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(-1+P_i^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_i\left(z\right)\right)^{2}\left(P_i\left(z\right)-z\right)} = \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)P_i^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_i\left(z\right)\right)^{2}\left(P_i\left(z\right)-z\right)\right]}\\ =& \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)P_i^{'}\left(z\right)-(1-z)P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)P_i^{'}[z]}{\left(1-P_i\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_i^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(-z+P_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}\\ +& \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)^{2}+\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)P_i^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_i\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_i^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(-z+P_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}\end{aligned}$$

Definición 27.161 *Sea L_i^{*}el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[L_i^{*}\right] &= f_i\left(i\right) &(27.161)\\ Var\left[L_i^{*}\right] &= f_i\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_i^{*}\right]-\mathbb{E}\left[L_i^{*}\right]^{2}. &(27.162)\end{aligned}$$

Definición 27.162 *El tiempo de Ciclo C_i es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 27.163 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
S_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right] = F_i(\theta(z)),\\
F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\
P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\
F_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right], \theta_i(z) - zP_i
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{1-\mu_i},\\
Var[S_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{(1-\mu_i)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^3}
\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var[L_i^*] = f_i(i,i) + f_i(i) - f_i(i)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i(z) = I_i[P_i(z)]$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L_i^*] &= \mu_i\mathbb{E}[I_i]\\
Var[L_i^*] &= \mu_i^2 Var[I_i] + \sigma^2\mathbb{E}[I_i]
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},$$

además

$$Var[I_i] = \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).$$

Si $C_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$ el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i(z) = I_i[\theta_i(z)],$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right]=\frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i}=\frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}\\
Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[C_i\right],\\
\mathbb{E}\left[I_i\right] &= \left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right]
\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $\left[L_1\left(t\right),L_2\left(t\right),\ldots,L_N\left(t\right)\right]$. *Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los* $L_j\left(\tau_i\left(m\right)\right)=0$ *para* $i=1,2$ *son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.*
Sea M_i *el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea* $C_i^{(m)}$, *para* $m=1,2,\ldots,M_i$ *la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio* $\mathbb{E}\left[C_i\right]$ *como*

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}C_i^{(m)}\right]<\infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ *contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que* $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$, *además, como* $M_i>0$, *se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que*

$$\mathbb{E}\left[C_i\right]<\infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N}\mu_k<1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, *el número de usuarios en la cola* $Q_i\left(z\right)$ *en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de* $z^{L_i(t)}$ *sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:*

$$Q_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

M_i *es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con* $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$, *se sigue del lema de Wald que:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ *solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de* $P_i(z)$*, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)} \\
&= \frac{1-I_i\left[P_i(z)\right]}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \\
&= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

Sea $V_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\frac{I_i(z)-1}{z-P_i(z)}$

$$\frac{\partial V_i(z)}{\partial z} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\left[\frac{I_i{}'(z)(z-P_i(z))}{z-P_i(z)} - \frac{(I_i(z)-1)(1-P_i{}'(z))}{(z-P_i(z))^2}\right]$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$U_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\cdot\frac{I_i(z)-1}{1-z}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}V_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\right)\frac{I_i(z)-1}{1-z} + \frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\frac{d}{dz}\left(\frac{I_i(z)-1}{1-z}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\left\{\frac{-P_i(z)(z-P_i(z))-(1-P_i(z))\left(1-P_i^{'}(z)\right)}{(z-P_i(z))^2}\cdot\frac{I_i(z)-1}{1-z}\right\} \\
&+ \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\left\{\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\cdot\frac{I_i^{'}(z)(1-z)+(I_i(z)-1)}{(1-z)^2}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_i\left(z\right)}{\partial z} &= \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])}{(1-z)^2\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}+\frac{(1-P_i[z])I_i^{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}-\frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])\left(1-P'[z]\right)}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])^2}\\
&- \frac{(-1+I_i[z])P_i{}'[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}
\end{aligned}
$$

Sea

$$
Q_i\left(z\right) = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i\left(z\right)}{P_i\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}
$$

derivando con respecto a z

$$
\begin{aligned}
\frac{dQ_i\left(z\right)}{dz} &= \frac{\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)}\\
&- \frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)}\\
&- \frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)\left(P_i^{'}\left(z\right)-1\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)^2}\\
&+ \frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)}\\
&+ \frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)^2\left(P_i\left(z\right)-z\right)}
\end{aligned}
$$

Calculando el límite cuando $z\rightarrow1^{+}$:

$$
\begin{aligned}
Q_i^{(1)}\left(z\right)=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{dQ_i\left(z\right)}{dz} &= \lim_{z\rightarrow1}\frac{\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} && (27.163)\\
&- \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} && (27.164)\\
&- \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)\left(P_i^{'}\left(z\right)-1\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)^2} && (27.165)\\
&+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} && (27.166)\\
&+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)^2\left(P_i\left(z\right)-z\right)} && (27.167)
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)}{\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(-z+P_i\left(z\right)\right)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)+\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(-1+P_i^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)+(1-z)F_i^{'}\left(z\right)P_i^{'}\left(z\right)+(1-z)P_i\left(z\right)F_i^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(-1+P_i^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

$$\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}}=\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}\right]}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}=\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}$$

$$= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}$$

$$\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}=\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

27.1.52. Tiempo de Ciclo Promedio

Consideremos una cola de la red de sistemas de visitas cíclicas fija, Q_l.
Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (34.422), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_l es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1\left(T_i\right)=0, L_2\left(T_i\right)=0, \hat{L}_1\left(T_i\right)=0$ y $\hat{L}_2\left(T_i\right)=0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 27.164 *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 27.165 *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 27.166 *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m=1,2,\ldots,M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

En nuestra notación $V\left(t\right)\equiv C_i$ y $X_i=C_i^{(m)}$ para nuestra segunda definición, mientras que para la primera la notación es: $X\left(t\right)\equiv C_i$ y $R_i\equiv C_i^{(m)}$.

27.1.53. Tiempos de Ciclo e Intervisita

Definición 27.167 *Sea L_i^{*}el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_i^{*}\right] &= f_i\left(i\right) && (27.168)\\
Var\left[L_i^{*}\right] &= f_i\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_i^{*}\right]-\mathbb{E}\left[L_i^{*}\right]^{2}. && (27.169)
\end{aligned}$$

Definición 27.168 *El tiempo de Ciclo C_i es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1)-\tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 27.169 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
S_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right] = F_i(\theta(z)),\\
F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\
P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\
F_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right], \theta_i(z)-zP_i
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{1-\mu_i},\\
Var[S_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{(1-\mu_i)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^3}
\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var[L_i^*] = f_i(i,i)+f_i(i)-f_i(i)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t=\tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m),\tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i(z) = I_i[P_i(z)]$$

para $i=1,2$, por tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L_i^*] &= \mu_i\mathbb{E}[I_i]\\
Var[L_i^*] &= \mu_i^2 Var[I_i] + \sigma^2\mathbb{E}[I_i]
\end{aligned}$$

para $i=1,2$, por tanto

$$\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},$$

además

$$Var\left[I_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i\left(i\right).$$

Si $C_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1) - \overline{\tau}_i(m)}\right]$ *el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que*

$$C_i\left(z\right) = I_i\left[\theta_i\left(z\right)\right],$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}\\
Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \mu_i \mathbb{E}\left[C_i\right],\\
\mathbb{E}\left[I_i\right] &= \left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right]
\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $\left[L_1\left(t\right), L_2\left(t\right), \ldots, L_N\left(t\right)\right]$. *Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los* $L_j\left(\tau_i\left(m\right)\right) = 0$ *para* $i = 1, 2$ *son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.*

Sea M_i *el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea* $C_i^{(m)}$, *para* $m = 1, 2, \ldots, M_i$ *la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio* $\mathbb{E}\left[C_i\right]$ *como*

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ *contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que* $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, *además, como* $M_i > 0$, *se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que*

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, *el número de usuarios en la cola* $Q_i\left(z\right)$ *en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de* $z^{L_i(t)}$ *sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:*

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i]<\infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\ \mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{1-I_i[P_i(z)]}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

27.1.54. Longitudes de la Cola en cualquier tiempo

Sea

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}$$

derivando con respecto a z

$$
\begin{aligned}
\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2}\\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}
\end{aligned}
$$

Calculando el límite cuando $z \rightarrow 1^+$:

$$
\begin{aligned}
Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \lim_{z\rightarrow 1}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} && (27.170)\\
&- \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} && (27.171)\\
&- \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} && (27.172)\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} && (27.173)\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} && (27.174)
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-F_i(z))P_i(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{-P_i(z)F_i^{'}(z)+(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{-P_i(z)F_i^{'}(z)+(1-z)F_i^{'}(z)P_i^{'}(z)+(1-z)P_i(z)F_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} = \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{-(1-F_i(z))P_i(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2P_i^{'}(z)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{+(1-z)(1-F_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)P_i^{'}(z)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2P_i^{'}(z)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{+(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{''}(z)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} = \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{-(1-F_i(z))P_i^{'}(z)-(1-z)F_i^{'}(z)P_i^{'}(z)+(1-z)(1-F_i(z))P_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
=&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}'[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

27.1.55. Por resolver

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial Q_{i}\left(z\right)}{\partial z}=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}\right\}\\
=&\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\right)\cdot\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}+\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}\right)\right\}\\
=&\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\right)+\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}\right)\\
=&\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}\cdot\frac{-F_{i}^{'}\left(z\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)}{\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}}\\
+&\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-P_{i}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{i}^{(1)}\left(z\right)&=\frac{\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}-\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}\\
&-\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}}+\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}\\
&+\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}
\end{aligned}
$$

Sea $V_{i}\left(z\right)=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{z-P_{i}\left(z\right)}$

$$
\frac{\partial V_{i}\left(z\right)}{\partial z}=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left[\frac{I_{i}{'}\left(z\right)\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}-\frac{\left(I_{i}\left(z\right)-1\right)\left(1-P_{i}{'}\left(z\right)\right)}{\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}}\right]
$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$
U_{i}\left(z\right)=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\cdot\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}V_{i}\left(z\right)&=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\right)\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}+\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\frac{d}{dz}\left(\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left\{\frac{-P_{i}\left(z\right)\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)-\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(1-P_{i}^{'}\left(z\right)\right)}{\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}}\cdot\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}\right\}\\
&+\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left\{\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\cdot\frac{I_{i}^{'}\left(z\right)\left(1-z\right)+\left(I_{i}\left(z\right)-1\right)}{\left(1-z\right)^{2}}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_{i}\left(z\right)}{\partial z}&=\frac{(-1+I_{i}[z])(1-P_{i}[z])}{(1-z)^{2}\mathbb{E}[I_{i}](z-P_{i}[z])}+\frac{(1-P_{i}[z])I_{i}^{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_{i}](z-P_{i}[z])}-\frac{(-1+I_{i}[z])(1-P_{i}[z])\left(1-P{'}[z]\right)}{(1-z)\mathbb{E}[I_{i}](z-P_{i}[z])^{2}}\\
&-\frac{(-1+I_{i}[z])P_{i}{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_{i}](z-P_{i}[z])}
\end{aligned}
$$

27.1.56. Tiempos de Ciclo e Intervisita

Definición 27.170 *Sea L_i^*el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= f_i\left(i\right) &(27.175)\\ Var\left[L_i^*\right] &= f_i\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. &(27.176)\end{aligned}$$

Definición 27.171 *El tiempo de Ciclo C_i es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 27.172 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}S_i\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right]=F_i\left(\theta\left(z\right)\right),\\ F\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\ P\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\ F_i\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right],\theta_i\left(z\right)-zP_i\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1-\mu_i}=\frac{f_i\left(i\right)}{1-\mu_i},\\ Var\left[S_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^3}\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var\left[L_i^*\right] = f_i\left(i,i\right)+f_i\left(i\right)-f_i\left(i\right)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t=\tau_i\left(m+1\right)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $\left[\overline{\tau}\left(m\right),\tau_i\left(m+1\right)\right]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z_i\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si

$$I_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i\left(z\right)=I_i\left[P_i\left(z\right)\right]$$

para $i=1,2$, por tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[I_i\right]\\ Var\left[L_i^*\right] &= \mu_i^2Var\left[I_i\right]+\sigma^2\mathbb{E}\left[I_i\right]\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\mathbb{E}\left[I_i\right] = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i},$$

además

$$Var\left[I_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i\left(i\right).$$

Si $C_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$ *el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que*

$$C_i\left(z\right) = I_i\left[\theta_i\left(z\right)\right],$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)} \\
Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \mu_i \mathbb{E}\left[C_i\right], \\
\mathbb{E}\left[I_i\right] &= \left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right]
\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $\left[L_1\left(t\right), L_2\left(t\right), \ldots, L_N\left(t\right)\right]$. *Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los* $L_j\left(\tau_i\left(m\right)\right) = 0$ *para* $i = 1, 2$ *son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.*
Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, *para* $m = 1, 2, \ldots, M_i$ *la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio* $\mathbb{E}\left[C_i\right]$ *como*

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ *contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que* $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, *además, como* $M_i > 0$, *se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que*

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i]<\infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)}\\
&= \frac{1-I_i[P_i(z)]}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\\
&= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$
\begin{aligned}
\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))\,P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)^2}\\
&+ \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)}\\
&+ \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))^2\,(P_i(z)-z)}
\end{aligned}
$$

Calculando el límite cuando $z\rightarrow 1^{+}$:

$$
\begin{aligned}
Q_i^{(1)}(z)=\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \lim_{z\rightarrow 1}\frac{(1-F_i(z))\,P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} && (27.177)\\
&- \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} && (27.178)\\
&- \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)^2} && (27.179)\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} && (27.180)\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))^2\,(P_i(z)-z)} && (27.181)
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-F_i(z))\,P_i(z)}{(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-F_i(z))\,P_i(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_i(z)\,F_i^{'}(z)+(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))\,P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_i(z)\,F_i^{'}(z)+(1-z)F_i^{'}(z)\,P_i^{'}(z)+(1-z)P_i(z)\,F_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))\,P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)^2}=\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)^2\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(1-z)P_i(z)\,F_i^{'}(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)}{2\,(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2\,P_i^{'}(z)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{+(1-z)\,(1-F_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)P_i^{'}(z)}{2\,(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2\,P_i^{'}(z)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{+(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{''}(z)}{2\,(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2\,P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)}=\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)-(1-z)F_i^{'}(z)\,P_i^{'}(z)+(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))\,P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
=&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{\prime}[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

27.1.57. Longitudes de la Cola en cualquier tiempo

Sea $V_{i}\left(z\right)=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{z-P_{i}\left(z\right)}$

$$\frac{\partial V_{i}\left(z\right)}{\partial z}=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left[\frac{I_{i}{'}\left(z\right)\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}-\frac{\left(I_{i}\left(z\right)-1\right)\left(1-P_{i}{'}\left(z\right)\right)}{\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}}\right]$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$U_{i}\left(z\right)=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\cdot\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}V_{i}\left(z\right)&=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\right)\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}+\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\frac{d}{dz}\left(\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left\{\frac{-P_{i}\left(z\right)\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)-\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(1-P_{i}^{'}\left(z\right)\right)}{\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}}\cdot\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}\right\}\\
&+\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left\{\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\cdot\frac{I_{i}^{'}\left(z\right)\left(1-z\right)+\left(I_{i}\left(z\right)-1\right)}{\left(1-z\right)^{2}}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{i}\left(z\right)}{\partial z}&=\frac{(-1+I_{i}[z])(1-P_{i}[z])}{(1-z)^{2}\mathbb{E}[I_{i}](z-P_{i}[z])}+\frac{(1-P_{i}[z])I_{i}^{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_{i}](z-P_{i}[z])}-\frac{(-1+I_{i}[z])(1-P_{i}[z])\left(1-P^{\prime}[z]\right)}{(1-z)\mathbb{E}[I_{i}](z-P_{i}[z])^{2}}\\
&-\frac{(-1+I_{i}[z])P_{i}{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_{i}](z-P_{i}[z])}
\end{aligned}$$

27.1.58. Material por agregar

Teorema 27.87 *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo* $M/M/1$*. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas* $Q_{1}\leftrightarrow Q_{3}$ *y* $Q_{2}\leftrightarrow Q_{4}$*. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo* t*,* $A_{j}\left(t\right)=\left\{0 \text{ arribos en } Q_{j} \text{ al tiempo } t\right\}$ *para algún tiempo* $t\geq0$ *y* Q_{j} *la cola* j*-ésima en la RSVC, para* $j=1,2,3,4$*. Existe un intervalo* $I\neq\emptyset$ *tal que para* $T^{*}\in I$*, tal que* $\mathbb{P}\left\{A_{1}\left(T^{*}\right),A_{2}\left(Tt^{*}\right),A_{3}\left(T^{*}\right),A_{4}\left(T^{*}\right)|T^{*}\in I\right\}>0$*.*

Demostración 27.1 *Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola* Q_{1} *del primer sistema que conforma la RSVC.*

Sea $n\geq1$*, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que* $L_{j}\left(\overline{\tau}_{1}\left(n\right)\right)=0$*, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado* $r_{1}\left(n\right)>0$*, entonces tenemos que* $\tau_{2}\left(n\right)=\overline{\tau}_{1}\left(n\right)+r_{1}\left(n\right)$*.*

Definamos el intervalo $I_{1}\equiv\left[\overline{\tau}_{1}\left(n\right),\tau_{2}\left(n\right)\right]$ *de longitud* $\xi_{1}=r_{1}\left(n\right)$*.*

Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$\mathbb{P}\left\{A_1(t)\,|t \in I_1(n)\right\} = e^{-\tilde{\mu}_1\xi_1(n)}. \tag{27.182}$$

Por otra parte, para la cola Q_2 el tiempo $\overline{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\overline{\tau}_2(n-1)) = 0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n.

Entonces tenemos un sgundo intervalo $I_2 \equiv [\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$\mathbb{P}\left\{A_2(t)\,|t \in I_2(n)\right\} = e^{-\tilde{\mu}_2\xi_2(n)}, \tag{27.183}$$

$$\xi_2(n) = \tau_2(n) - \overline{\tau}_2(n-1) \tag{27.184}$$

Ahora, dado que $I_1(n) \subset I_2(n)$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
\xi_1(n) \leq \xi_2(n) & \Leftrightarrow & -\xi_1(n) \geq -\xi_2(n) \\
-\tilde{\mu}_2\xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2\xi_2(n) & \Leftrightarrow & e^{-\tilde{\mu}_2\xi_1(n)} \geq e^{-\tilde{\mu}_2\xi_2(n)} \\
\mathbb{P}\left\{A_2(t)\,|t \in I_1(n)\right\} & \geq & \mathbb{P}\left\{A_2(t)\,|t \in I_2(n)\right\}.
\end{array}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\left\{A_1(t), A_2(t)\,|t \in I_1(n)\right\} & = & \mathbb{P}\left\{A_1(t)\,|t \in I_1(n)\right\}\mathbb{P}\left\{A_2(t)\,|t \in I_1(n)\right\} \\
& \geq & \mathbb{P}\left\{A_1(t)\,|t \in I_1(n)\right\}\mathbb{P}\left\{A_2(t)\,|t \in I_2(n)\right\} \\
& = & e^{-\tilde{\mu}_1\xi_1(n)}e^{-\tilde{\mu}_2\xi_2(n)} = e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)]}.
\end{array}$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_1(t), A_2(t)\,|t \in I_1(n)\right\} = e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)]} > 0. \tag{27.185}$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC para algún $m \geq 1$ se tiene que $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$ por lo tanto se cumple cualquiera de los siguientes cuatro casos

a) $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \overline{\tau}_3(m)$

b) $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$

c) $\tau_4(m) < \tau_2(n) < \overline{\tau}_4(m)$

d) $\overline{\tau}_4(m) < \tau_2(n) < \tau_3(m+1)$

Sea el intervalo $I_3(m) \equiv [\tau_3(m), \overline{\tau}_3(m)]$ tal que $\tau_2(n) \in I_3(m)$, con longitud de intervalo $\xi_3 \equiv \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m)$, entonces se tiene que para Q_3

$$\mathbb{P}\left\{A_3(t)\,|t \in I_3(m)\right\} = e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(m)}. \tag{27.186}$$

mientras que para Q_4 consideremos el intervalo $I_4(m) \equiv [\tau_4(m-1), \overline{\tau}_3(m)]$, entonces por construcción $I_3(m) \subset I_4(m)$, por lo tanto

$$\begin{array}{rcl}
\xi_3(m) \leq \xi_4(m) & \Leftrightarrow & -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\
-\tilde{\mu}_4\xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4\xi_4(m) & \Leftrightarrow & e^{-\tilde{\mu}_4\xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(n)} \\
\mathbb{P}\left\{A_4(t)\,|t \in I_3(m)\right\} & \geq & \mathbb{P}\left\{A_4(t)\,|t \in I_4(m)\right\}.
\end{array}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t)\,|t \in I_3(m)\right\} & = & \mathbb{P}\left\{A_3(t)\,|t \in I_3(m)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4(t)\,|t \in I_3(m)\right\} \\
& \geq & \mathbb{P}\left\{A_3(t)\,|t \in I_3(m)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4(t)\,|t \in I_4(m)\right\} \\
& = & e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(m)}e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(m)} = e^{-(\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m))}.
\end{array}$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right),A_4\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\}\geq e^{-\left(\tilde{\mu}_3\xi_3\left(m\right)+\tilde{\mu}_4\xi_4\left(m\right)\right)}>0. \tag{27.187}$$

Sea el intervalo $I_3\left(m\right)\equiv\left[\overline{\tau}_3\left(m\right),\tau_4\left(m\right)\right]$ *con longitud* $\xi_3\equiv\tau_4\left(m\right)-\overline{\tau}_3\left(m\right)$*, entonces se tiene que para* Q_3

$$\mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\}=e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3\left(m\right)}. \tag{27.188}$$

mientras que para Q_4 *consideremos el intervalo* $I_4\left(m\right)\equiv\left[\overline{\tau}_4\left(m-1\right),\tau_4\left(m\right)\right]$*, entonces por construcción* $I_3\left(m\right)\subset I_4\left(m\right)$*, y al igual que en el caso anterior se tiene que*

$$\begin{array}{rcl}\xi_3\left(m\right)\leq\xi_4\left(m\right)&\Leftrightarrow&-\xi_3\left(m\right)\geq-\xi_4\left(m\right)\\-\tilde{\mu}_4\xi_3\left(m\right)\geq-\tilde{\mu}_4\xi_4\left(m\right)&\Leftrightarrow&e^{-\tilde{\mu}_4\xi_3\left(m\right)}\geq e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4\left(n\right)}\\\mathbb{P}\left\{A_4\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\}&\geq&\mathbb{P}\left\{A_4\left(t\right)|t\in I_4\left(m\right)\right\}.\end{array}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right),A_4\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\}&=&\mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\}\\&\geq&\mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4\left(t\right)|t\in I_4\left(m\right)\right\}\\&=&e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3\left(m\right)}e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4\left(m\right)}=e^{-\left(\tilde{\mu}_3\xi_3\left(m\right)+\tilde{\mu}_4\xi_4\left(m\right)\right)}.\end{array}$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right),A_4\left(t\right)|t\in I_4\left(m\right)\right\}\geq e^{-\left(\tilde{\mu}_3+\tilde{\mu}_4\right)\xi_3\left(m\right)}>0. \tag{27.189}$$

Para el intervalo $I_3\left(m\right)=\left[\tau_4\left(m\right),\overline{\tau}_4\left(m\right)\right]$*, se tiene que este caso es análogo al caso (a).*
Para el intevalo $I_3\left(m\right)\equiv\left[\overline{\tau}_4\left(m\right),\tau_4\left(m+1\right)\right]$*, se tiene que es análogo al caso (b).*
Por construcción se tiene que $I\left(n,m\right)\equiv I_1\left(n\right)\cap I_3\left(m\right)\neq\emptyset$*,entonces en particular se tienen las contenciones* $I\left(n,m\right)\subseteq I_1\left(n\right)$ *y* $I\left(n,m\right)\subseteq I_3\left(m\right)$*, por lo tanto si definimos* $\xi_{n,m}\equiv\ell\left(I\left(n,m\right)\right)$ *tenemos que*

$$\begin{array}{c}\xi_{n,m}\leq\xi_1\left(n\right)\text{ y }\xi_{n,m}\leq\xi_3\left(m\right)\text{ entonces}\\-\xi_{n,m}\geq-\xi_1\left(n\right)\text{ y }-\xi_{n,m}\leq-\xi_3\left(m\right)\end{array}$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{array}{ll}-\tilde{\mu}_1\xi_{n,m}\geq-\tilde{\mu}_1\xi_1\left(n\right),&-\tilde{\mu}_2\xi_{n,m}\geq-\tilde{\mu}_2\xi_1\left(n\right)\geq-\tilde{\mu}_2\xi_2\left(n\right),\\-\tilde{\mu}_3\xi_{n,m}\geq-\tilde{\mu}_3\xi_3\left(m\right),&-\tilde{\mu}_4\xi_{n,m}\geq-\tilde{\mu}_4\xi_3\left(m\right)\geq-\tilde{\mu}_4\xi_4\left(m\right).\end{array}$$

Sea $T^*\in I\left(n,m\right)$*, entonces dado que en particular* $T^*\in I_1\left(n\right)$*, se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas* Q_1 *y* Q_2*, en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para* Q_3 *y* Q_4*, es decir,* $\tilde{\mu}_1=\mu_1$*,* $\tilde{\mu}_2=\mu_2$*,* $\tilde{\mu}_3=\mu_3$*,* $\tilde{\mu}_4=\mu_4$*, es decir, los eventos* Q_1 *y* Q_3 *son condicionalmente independientes en el intervalo* $I\left(n,m\right)$*; lo mismo ocurre para las colas* Q_2 *y* Q_4*, por lo tanto tenemos que*

$$\begin{array}{l}\mathbb{P}\left\{A_1\left(T^*\right),A_2\left(T^*\right),A_3\left(T^*\right),A_4\left(T^*\right)|T^*\in I\left(n,m\right)\right\}\\=\prod_{j=1}^4\mathbb{P}\left\{A_j\left(T^*\right)|T^*\in I\left(n,m\right)\right\}\\\geq\mathbb{P}\left\{A_1\left(T^*\right)|T^*\in I_1\left(n\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_2\left(T^*\right)|T^*\in I_2\left(n\right)\right\}\\\mathbb{P}\left\{A_3\left(T^*\right)|T^*\in I_3\left(m\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4\left(T^*\right)|T^*\in I_4\left(m\right)\right\}\\=e^{-\mu_1\xi_1\left(n\right)}e^{-\mu_2\xi_2\left(n\right)}e^{-\mu_3\xi_3\left(m\right)}e^{-\mu_4\xi_4\left(m\right)}\\=e^{-\left[\tilde{\mu}_1\xi_1\left(n\right)+\tilde{\mu}_2\xi_2\left(n\right)+\tilde{\mu}_3\xi_3\left(m\right)+\tilde{\mu}_4\xi_4\left(m\right)\right]}>0.\end{array} \tag{27.190}$$

Ahora solo resta demostrar que para $n\geq1$*, existe* $m\geq1$ *tal que se cumplen cualquiera de los cuatro casos arriba mencionados:*

a) $\tau_3\left(m\right)<\tau_2\left(n\right)<\overline{\tau}_3\left(m\right)$

b) $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$

c) $\tau_4(m) < \tau_2(n) < \overline{\tau}_4(m)$

d) $\overline{\tau}_4(m) < \tau_2(n) < \tau_3(m+1)$

Consideremos nuevamente el primer caso. Supongamos que no existe $m \geq 1$*, tal que* $I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$*, es decir, para toda* $m \geq 1$*,* $I_1(n) \cap I_3(m) = \emptyset$*, entonces se tiene que ocurren cualquiera de los dos casos*

a) $\tau_2(n) \leq \tau_3(m)$*: Recordemos que* $\tau_2(m) = \overline{\tau}_1 + r_1(m)$ *donde cada una de las variables aleatorias son tales que* $\mathbb{E}[\overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n)] < \infty$*,* $\mathbb{E}[R_1] < \infty$ *y* $\mathbb{E}[\tau_3(m)] < \infty$*, lo cual contradice el hecho de que no exista un ciclo* $m \geq 1$ *que satisfaga la condición deseada.*

b) $\tau_2(n) \geq \overline{\tau}_3(m)$*: por un argumento similar al anterior se tiene que no es posible que no exista un ciclo* $m \geq 1$ *tal que satisface la condición deseada.*

Para el resto de los casos la demostración es análoga. Por lo tanto, se tiene que efectivamente existe $m \geq 1$ *tal que* $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$*.*

En Sigman, Thorison y Wolff [40] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ *en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración* R_1*, donde* $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$*. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, y proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *con espacio de estados* $(S, \mathcal{R})$*, con* $\mathcal{R}$ σ*-álgebra.*

Proposición 27.65 *Si existe una variable aleatoria no negativa* R_1 *tal que* $\theta_{R1} X =_D X$*, entonces* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias* $R = \{R_k : k \geq 1\}$*, tal que para* $k \geq 1$*,*

$$\theta_k (X, R) =_D (X, R) .$$

Además, para $k \geq 1$*,* $\theta_k R$ *es condicionalmente independiente de* $(X, R_1, \ldots, R_k)$*, dado* $\theta_{\tau k} X$*.*

- *Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera* $M/G/\infty$*, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.*
- *Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola* $M/M/s$ *es un proceso Poisson.*
- *Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:*

  Teorema 27.88 *Para el sistema de espera* $M/G/1/L$ *con disciplina FIFO, el proceso* $\boldsymbol{I}$ *es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*

  b) $L = 0$*, para cualquier proceso de servicio* S*;*

  c) $L = 1$ *y* $G = D$*;*

  d) $L = \infty$ *y* $G = M$*.*

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ *son*

  a) $1 - e^{-\lambda t}$*,* $t \geq 0$*;*

  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$*,* $t \geq 0$*;*

  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$*,* $t \geq 0$*;*

  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$*,* $t \geq 0$*.*

- *Finch (1959) mostró que para los sistemas* $M/G/1/L$*, con* $1 \leq L \leq \infty$ *con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema* $M/M/1/\infty$ *tiene proceso de salida de renovación estacionario.*
- *King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario* $M/G/1/1$ *tiene sus tiempos de interpartida sucesivas* D_n *y* D_{n+1} *son independientes, si y sólo si,* $G = D$*, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.*
- *Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario* $M/G/1/L$*, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas* $M/M/1$ *y* $M/D/1/1$*.*
- *El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)*

  Teorema 27.89 *En un sistema de espera* $M/G/s$*, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*

  c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para* $L < \infty$

  d) $G = M$*.*

- *El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)*

  Teorema 27.90 *En cualquier sistema de colas* $GI/G/1/L$ *con* $1 \leq L < \infty$ *y distribución de interarribos* A *y distribución de los tiempos de servicio* B*, tal que* $A(0) = 0$*,* $A(t)(1 - B(t)) > 0$ *para alguna* $t > 0$ *y* $B(t)$ *para toda* $t > 0$*, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Definición 27.173 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X*.*

Nota 27.75 *La existencia de un primer tiempo de regeneración,* R_1*, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos* $R_1, R_2 \ldots$*, que satisfacen la propiedad deseada [40].*

Nota 27.76 *Para la cola* $GI/GI/1$ *los usuarios arriban con tiempos* t_n *y son atendidos con tiempos de servicio* S_n*, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)*$T_n = t_n - t_{n-1}$*, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que* $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$*.*

Definición 27.174 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.77 *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si* $X(t)$ *es regenerativo y se define el proceso* $Y(t)$ *por* $Y(t) = f(X(t))$ *para alguna función Borel medible* $f(\cdot)$*. Además* Y *es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que* X*.*
En general, los tiempos de renovación, Z_k *de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de* $X(t)$*.*

Nota 27.78 *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 27.79 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 27.80 *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel* A*,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (* puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0, t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 27.175 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$, *para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 27.176 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.177 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$, *es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$, S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 27.91 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$. *Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t, *además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,*entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 27.48 *Sea* $\{V(t), t \geq 0\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E} < \infty$, F *es no-aritmética, y para todo* $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $[0, \tau]$, *entonces* $V(t)$ *converge en distribución cuando* $t \rightarrow \infty$ *y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V(t)$ *cuando* $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 27.178 *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.191}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n *como elementos de* $\mathbb{R}_+$, *y* $N(t)$ *es el número de puntos en* $\mathbb{R}$. *El proceso denotado por* $\{N(t) : t \geq 0\}$, *denotado por* $N(t)$, *es un proceso puntual en* $\mathbb{R}_+$. *Los* T_n *son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual* $N(t)$ *es simple si su número de ocurrencias son distintas:* $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ *casi seguramente.*

Definición 27.179 *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, *para* $n \geq 1$, *son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F, *donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$. *Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 27.81 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F, *con* $F(0) = 0$, *para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F. *Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, *donde* $T_n \rightarrow \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 27.82 *Una función $h:\mathbb{R}_+\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)|\leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 27.92 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+}h(s)\,ds.$$

Proposición 27.66 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 27.180 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.67 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 27.93 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t)\geq n\} & = & \{T_n\leq t\}\\ T_{N(t)}\leq & t & <T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n)=n$, y

$$N(t)=\max\{n:T_n\leq t\}=\min\{n:T_{n+1}>t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n\leq t\}=F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t)\geq n\} & = & \{T_n\leq t\}\\ P\{N(t)\leq n\} & = & 1-F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N(t)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.68 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.83 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.94 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.192}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.193}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.49 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.194}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.181 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.95 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.195}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.196}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.50 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.197}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ P\{N(t)\leq n\} &= 1-F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.69 *Para cada* $t\geq 0$, *la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m]<\infty$, *para* $m\geq 1$.

Nota 27.84 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n, *para* $n\geq 2$, *a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G, *entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G\star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 27.96 *Para una constante* $\mu\leq\infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned}lim_{n\to\infty}n^{-1}T_n &= \mu,\ c.s. &(27.198)\\ lim_{t\to\infty}t^{-1}N(t) &= 1/\mu,\ c.s. &(27.199)\end{aligned}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 27.51 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu\leq\infty$, *entonces*

$$t^{-1}N(t)\to 1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t\to\infty. \tag{27.200}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t):t\geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 27.182 *Para el proceso* $\{Z(t):t\geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1},T_n]$:

$$M_n=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_n}|Z(t)-Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.97 *Supóngase que* $n^{-1}T_n\to\mu$ *c.s. cuando* $n\to\infty$, *donde* $\mu\leq\infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned}lim_{n\to\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a,\ c.s. &(27.201)\\ lim_{t\to\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu,\ c.s. &(27.202)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\to\infty}n^{-1}M_n=0$ *c.s.*

Corolario 27.52 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n)-Z(T_{n-1}),M_n)$, *para* $n\geq 1$, *son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty}t^{-1}Z(t)\to\frac{\mathbb{E}[Z(T_1)-Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]},\ c.s.\ cuando\ t\to\infty. \tag{27.203}$$

Los tiempos T_n *están relacionados con los conteos de* $N(t)$ *por*

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ T_{N(t)}\leq &\quad t\quad <T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n)=n$, *y*

$$N(t) = \text{máx}\{n : T_n \leq t\} = \text{mín}\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.70 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.85 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.98 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (27.204) \\ lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (27.205) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.53 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.206}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.183 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.99 *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (27.207) \\ lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (27.208) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.54 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.209}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \text{máx}\{n : T_n \leq t\} = \text{mín}\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &=& 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.71 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.86 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.100 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.210}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.211}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.55 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.212}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.184 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.101 *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.213}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.214}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.56 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.215}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \text{máx}\{n : T_n \leq t\} = \text{mín}\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.72 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.87 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.102 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.216}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.217}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.57 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.218}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.185 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.103 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} \quad (27.219)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.220)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.58 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.221)$$

Definición 27.186 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H\left(t\right) = h\left(t\right) + \int_{[0,t]} H\left(t-s\right) dF\left(s\right), \ t \geq 0, \quad (27.222)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.73 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.104 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.187 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.74 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 27.188 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF\left(t\right), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 27.75 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.88 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.105 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.59 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 27.189 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.223}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.190 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.89 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 27.191 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.224}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.192 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.90 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.76 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 27.3 (Proceso Poisson) *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 27.91 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.106 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (27.225)$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.226)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.60 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.227)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.193 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.107 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \quad (27.228)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.229)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 27.61 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.230)$$

Supóngase que $N(t)$ *es un proceso de renovación con distribución* F *con media finita* μ*.*

Definición 27.194 *La función de renovación asociada con la distribución* F*, del proceso* $N(t)$*, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$*.*

Proposición 27.77 *Supóngase que la distribución de inter-renovación* F *tiene densidad* f*. Entonces* $U(t)$ *también tiene densidad, para* $t > 0$*, y es* $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$*. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 27.195 *La Transformada de Laplace-Stieljes de* F *está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.78 *La Transformada de Laplace* $\hat{U}(\alpha)$ *y* $\hat{F}(\alpha)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$*.*

Nota 27.92 *Un proceso de renovación* $N(t)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$*, para* $t \geq 0$*.*

Teorema 27.108 *Sea* $N(t)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ *es finita para cada* t*. Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$*,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N(t)$ *tal que* $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$*, independiente de* n*. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.62 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right],\ t \geq 0,$$

Definición 27.196 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s),\ t \geq 0, \tag{27.231}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.79 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.109 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.197 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.80 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 27.198 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t}\,dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.81 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.93 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.110 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\,d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\,d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.63 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right]=\mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right],\ t\geq 0,$$

Definición 27.199 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t)=h(t)+\int_{[0,t]}H(t-s)\,dF(s)\,,\ t\geq 0, \tag{27.232}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 27.82 *La función $U\star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.111 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t)\rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t\rightarrow\infty.$$

Nota 27.94 *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.112 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds.$$

Proposición 27.83 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t)\,,\ \textit{donde}\ h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 27.200 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ \textit{para}\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.84 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t)\,,\ \textit{donde}\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 27.113 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\left\{|X(t)|:t\leq T\right\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Nota 27.95 *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.114 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 27.85 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\textit{ donde } h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 27.201 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\textit{ para } t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.86 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\textit{ donde } h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 27.115 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Definición 27.202 *Para el proceso $\{(N(t),X(t)):t\geq0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1},T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_{n}=\left(\xi_{n},\{X\left(T_{n-1}+t\right):0\leq t<\xi_{n}\}\right)$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.96 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t)=f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f:\tilde{S}\rightarrow S$.*

Nota 27.97 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 27.98 *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t):t\geq0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t):t\geq0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n=T_n-T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.203 *Para el proceso $\{(N(t),X(t)):t\geq0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1},T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_{n}=\left(\xi_{n},\{X\left(T_{n-1}+t\right):0\leq t<\xi_{n}\}\right)$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.99 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 27.116 (Procesos Regenerativos) *Suponga que el proceso*

Definición 27.204 (Renewal Process Trinity) *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 27.100 *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{27.233}$$

Ejemplo 27.4 (Tiempos de recurrencia Poisson) *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (34.8.10) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 27.101 *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 27.205 *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 27.102 *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 27.87 *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 27.117 *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación N es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 27.103 *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 27.64 *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 27.104 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Nota 27.105 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.206 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 27.207 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.106 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.208 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.107 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 27.108 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.209 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 27.109 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.210 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.110 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración, *y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.211 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.212 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 27.213 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 27.118 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (* puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0, t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea F la función de distrbución de X*

Definición 27.214 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel A.*

Definición 27.215 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.216 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*, S espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.119 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$*.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución F de media finita* μ*.*
Sean $T_1, T_2, \ldots$ *los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola* Q_j *es visitada por el servidor para dar servicio, es decir,* $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ *y* $\hat{L}_2(T_i) = 0$*, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Sea la función generadora de momentos para* L_i*, el número de usuarios en la cola* $Q_i(z)$ *en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de* $z^{L_i(t)}$ *sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:*

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i *es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con* $\mathbb{E}[M_i] < \infty$[6]*, se sigue del lema de Wald que:*

[6]En Stidham[41] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}
$$

por tanto se tiene que

$$
Q_i\left(z\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}
$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
*Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (**??**): $n \to t-\tau_i\left(m\right)$, $T \to \overline{\tau}_i\left(m\right)-\tau_i\left(m\right)$, $L_n \to L_i\left(t\right)$ y $F\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{L_0}\right] \to F_i\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{L_i\tau_i(m)}\right]$, se puede ver que*

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)} \tag{27.234}
$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i\left(t\right)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i\left(z\right)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \left\{P_i\left(z\right)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i\left(z\right)}\\
&= \frac{1-I_i\left[P_i\left(z\right)\right]}{1-P_i\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

por tanto

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
Q_i\left(z\right) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right]+\mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\left\{z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)}+\frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}\right\}
\end{aligned}
$$

es decir

$$
Q_i\left(z\right) = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i\left(z\right)}{P_i\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)} \tag{27.235}
$$

Teorema 27.120 *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t, $A_j\left(t\right) = \left\{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\right\}$ para algún tiempo $t \geq 0$ y Q_j la cola j-ésima en la RSVC, para $j = 1,2,3,4$. Existe un intervalo $I \neq \emptyset$ tal que para $T^* \in I$, tal que $\mathbb{P}\left\{A_1\left(T^*\right), A_2\left(Tt^*\right), A_3\left(T^*\right), A_4\left(T^*\right) | T^* \in I\right\} > 0$.*

Demostración 27.2 *Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.*
Sea $n > 0$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j\left(\overline{\tau}_1(n)\right) = 0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1(n) > 0$, entonces tenemos que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1(n)$.
Definamos el intervalo $I_1 \equiv \left[\overline{\tau}_1(n), \tau_2(n)\right]$ de longitud $\xi_1 = r_1(n)$. Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$\mathbb{P}\left\{A_1(t) | t \in I_1(n)\right\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)}. \tag{27.236}$$

Por otra parte, para la cola Q_2, el tiempo $\overline{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2\left(\overline{\tau}_2(n-1)\right) = 0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n. Entonces tenemos un sgundo intervalo $I_2 \equiv \left[\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)\right]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$\mathbb{P}\left\{A_2(t) | t \in I_2(n)\right\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)}, \tag{27.237}$$

donde $\xi_2(n) = \tau_2(n) - \overline{\tau}_2(n-1)$.
Entonces, se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\left\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\right\} & = & \mathbb{P}\left\{A_1(t) | t \in I_1(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_2(t) | t \in I_1(n)\right\} \\
& \geq & \mathbb{P}\left\{A_1(t) | t \in I_1(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_2(t) | t \in I_2(n)\right\} \\
& = & e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)} = e^{-\left[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)\right]}.
\end{array}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\right\} = e^{-\left[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)\right]} > 0. \tag{27.238}$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC, se afirma que existe $m > 0$ tal que $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$.
Para Q_3 sea $I_3 = \left[\overline{\tau}_3(m), \tau_4(m)\right]$ con longitud $\xi_3(m) = r_3(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\left\{A_3(t) | t \in I_3(n)\right\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(n)}. \tag{27.239}$$

Análogamente que como se hizo para Q_2, tenemos que para Q_4 se tiene el intervalo $I_4 = \left[\overline{\tau}_4(m-1), \tau_4(m)\right]$ con longitud $\xi_4(m) = \tau_4(m) - \overline{\tau}_4(m-1)$, entonces

$$\mathbb{P}\left\{A_4(t) | t \in I_4(m)\right\} = e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(n)}. \tag{27.240}$$

Al igual que para el primer sistema, dado que $I_3(m) \subset I_4(m)$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
\xi_3(m) \leq \xi_4(m) & \Leftrightarrow & -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\
-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m) & \Leftrightarrow & e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} \\
\mathbb{P}\left\{A_4(t) | t \in I_3(m)\right\} & \geq & \mathbb{P}\left\{A_4(t) | t \in I_4(m)\right\}
\end{array}$$

Entonces, dado que los eventos A_3 y A_4 son independientes, se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\right\} & = & \mathbb{P}\left\{A_3(t) | t \in I_3(m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(t) | t \in I_3(m)\right\} \\
& \geq & \mathbb{P}\left\{A_3(t) | t \in I_3(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(t) | t \in I_4(n)\right\} \\
& = & e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)} e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} = e^{-\left[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)\right]}.
\end{array}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\right\} = e^{-\left[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)\right]} > 0. \tag{27.241}$$

Por construcción se tiene que $I(n,m) \equiv I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$, entonces en particular se tienen las contenciones $I(n,m) \subseteq I_1(n)$ y $I(n,m) \subseteq I_3(m)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m} \equiv \ell(I(n,m))$ tenemos que

$$\xi_{n,m} \leq \xi_1(n) \text{ y } \xi_{n,m} \leq \xi_3(m) \text{ entonces } -\xi_{n,m} \geq -\xi_1(n) \text{ y } -\xi_{n,m} \leq -\xi_3(m)$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{array}{ll} -\tilde{\mu}_1\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_1\xi_1(n), & -\tilde{\mu}_2\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_2\xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2\xi_2(n), \\ -\tilde{\mu}_3\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_3\xi_3(m), & -\tilde{\mu}_4\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_4\xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4\xi_4(m). \end{array}$$

Sea $T^* \in I_{n,m}$, entonces dado que en particular $T^* \in I_1(n)$ se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2, en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4, es decir, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$, $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I_{n,m}$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4, por lo tanto tenemos que

$$\begin{array}{l} \mathbb{P}\left\{A_1(T^*), A_2(T^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I_{n,m}\right\} = \prod_{j=1}^{4} \mathbb{P}\left\{A_j(T^*) | T^* \in I_{n,m}\right\} \\ \geq \mathbb{P}\left\{A_1(T^*) | T^* \in I_1(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_2(T^*) | T^* \in I_2(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_3(T^*) | T^* \in I_3(m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(T^*) | T^* \in I_4(m)\right\} \\ = e^{-\mu_1\xi_1(n)} e^{-\mu_2\xi_2(n)} e^{-\mu_3\xi_3(m)} e^{-\mu_4\xi_4(m)} = e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)+\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m)]} > 0. \end{array} \tag{27.242}$$

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [13] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- *Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.*
- *Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.*
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- *Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:*

  Teorema 27.121 *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\ var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right) 2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2 (1-\delta)^{-1}. \end{aligned}$$

  Teorema 27.122 *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 27.123 *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

En Sigman, Thorison y Wolff [40] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 27.88 *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1}X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- *Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.*
- *Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.*
- *Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:*

  Teorema 27.124 *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*

  b) $L = 0$*, para cualquier proceso de servicio* S*;*

  c) $L = 1$ *y* $G = D$*;*

  d) $L = \infty$ *y* $G = M$*.*

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\left\{T_{n+1} - T_n \leq t\right\}$ *son*

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$*;*

  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$*;*

  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$*;*

  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- *Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.*
- *King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.*
- *Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.*
- *El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)*

  Teorema 27.125 *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*

  c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para* $L < \infty$

  d) $G = M$.

- *El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)*

  Teorema 27.126 *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [13] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- *Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.*
- *Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.*
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- *Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:*

Teorema 27.127 *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu\left(\mu+\theta\right)^{-1}\left[\delta\theta-\mu\left(1-\delta\right)\alpha\left(\theta\right)\right]\left[\theta-\mu\left(1-\delta\right)^{-1}\right]\\ \alpha\left(\theta\right) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right]\\ var\left(D_n\right) &= var\left(T_0\right)-\left(\tau^{-1}-\delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}\left(S_0\right)\right)^2\left(1-\delta\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Teorema 27.128 *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 27.129 *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

Sean Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 en una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC). Supongamos que cada una de las colas es del tipo $M/M/1$ con tasa de arribo μ_i y que la transferencia de usuarios entre los dos sistemas ocurre entre $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$ con respectiva tasa de arribo igual a la tasa de salida $\hat{\mu}_i = \mu_i$, esto se sabe por lo desarrollado en la sección anterior.
Consideremos, sin pérdida de generalidad como base del análisis, la cola Q_1 además supongamos al servidor lo comenzamos a observar una vez que termina de atender a la misma para desplazarse y llegar a Q_2, es decir al tiempo τ_2.
Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, ciclo del servidor en que regresa a Q_1 para dar servicio y atender conforme a la política exhaustiva, entonces se tiene que $\overline{\tau}_1(n)$ es el tiempo del servidor en el sistema 1 en que termina de dar servicio a todos los usuarios presentes en la cola, por lo tanto se cumple que $L_1(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, entonces el servidor para llegar a Q_2 incurre en un tiempo de traslado r_1 y por tanto se cumple que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1$. Dado que los tiempos entre arribos son exponenciales se cumple que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n)+r_1\right]\right\} &= e^{-\tilde{\mu}_1 r_1},\\ \mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n)+r_1\right]\right\} &= e^{-\tilde{\mu}_2 r_1}.\end{aligned}$$

El evento que nos interesa consiste en que no haya arribos desde que el servidor abandonó Q_2 y regresa nuevamente para dar servicio, es decir en el intervalo de tiempo $\left[\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)\right]$. Entonces, si hacemos

$$\begin{aligned}\varphi_1(n) &\equiv \overline{\tau}_1(n)+r_1 = \overline{\tau}_2(n-1)+r_1+r_2+\overline{\tau}_1(n)-\tau_1(n)\\ &= \overline{\tau}_2(n-1)+\overline{\tau}_1(n)-\tau_1(n)+r,,\end{aligned}$$

y longitud del intervalo

$$\begin{aligned}\xi &\equiv \overline{\tau}_1(n)+r_1-\overline{\tau}_2(n-1) = \overline{\tau}_2(n-1)+\overline{\tau}_1(n)-\tau_1(n)+r-\overline{\tau}_2(n-1)\\ &= \overline{\tau}_1(n)-\tau_1(n)+r.\end{aligned}$$

Entonces, determinemos la probabilidad del evento no arribos a Q_2 en $\left[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)\right]$:

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi}. \quad (27.243)$$

De manera análoga, tenemos que la probabilidad de no arribos a Q_1 en $\left[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)\right]$ esta dada por

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi}, \quad (27.244)$$

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi}. \quad (27.245)$$

Por tanto

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ y } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2\left(n-1\right), \varphi_1\left(n\right)\right]\right\}\\&=\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2\left(n-1\right), \varphi_1\left(n\right)\right]\right\}\\&\times\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2\left(n-1\right), \varphi_1\left(n\right)\right]\right\}=e^{-\tilde{\mu}_1\xi}e^{-\tilde{\mu}_2\xi}=e^{-\tilde{\mu}\xi}.\end{aligned} \tag{27.246}$$

Para el segundo sistema, consideremos nuevamente $\overline{\tau}_1\left(n\right)+r_1$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $m>0$ tal que $\overline{\tau}_3\left(m\right)<\overline{\tau}_1+r_1<\tau_4\left(m\right)$, entonces

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_3\left(m\right), \overline{\tau}_1\left(n\right)+r_1\right]\right\}=e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3}, \tag{27.247}$$

donde

$$\xi_3=\overline{\tau}_1\left(n\right)+r_1-\overline{\tau}_3\left(m\right)=\overline{\tau}_1\left(n\right)-\overline{\tau}_3\left(m\right)+r_1, \tag{27.248}$$

mientras que para Q_4 al igual que con Q_2 escribiremos $\tau_4\left(m\right)$ en términos de $\overline{\tau}_4\left(m-1\right)$:
$\varphi_2\equiv\tau_4\left(m\right)=\overline{\tau}_4\left(m-1\right)+r_4+\overline{\tau}_3\left(m\right)-\tau_3\left(m\right)+r_3=\overline{\tau}_4\left(m-1\right)+\overline{\tau}_3\left(m\right)-\tau_3\left(m\right)+\hat{r}$, *además,*
$\xi_2\equiv\varphi_2\left(m\right)-\overline{\tau}_1-r_1=\overline{\tau}_4\left(m-1\right)+\overline{\tau}_3\left(m\right)-\tau_3\left(m\right)-\overline{\tau}_1\left(n\right)+\hat{r}-r_1$.
Entonces

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_4 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1\left(n\right)+r_1, \varphi_2\left(m\right)\right]\right\}=e^{-\tilde{\mu}_4\xi_2}, \tag{27.249}$$

mientras que para Q_3 se tiene que

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1\left(n\right)+r_1, \varphi_2\left(m\right)\right]\right\}=e^{-\tilde{\mu}_3\xi_2} \tag{27.250}$$

Por tanto

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3\wedge Q_4 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1\left(n\right)+r_1, \varphi_2\left(m\right)\right]\right\}=e^{-\hat{\mu}\xi_2} \tag{27.251}$$

donde $\hat{\mu}=\tilde{\mu}_3+\tilde{\mu}_4$.
Ahora, definamos los intervalos $\mathcal{I}_1=\left[\overline{\tau}_1\left(n\right)+r_1, \varphi_1\left(n\right)\right]$ y $\mathcal{I}_2=\left[\overline{\tau}_1\left(n\right)+r_1, \varphi_2\left(m\right)\right]$, entonces, sea $\mathcal{I}=\mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2$ el intervalo donde cada una de las colas se encuentran vacías, es decir, si tomamos $T^*\in\mathcal{I}$, entonces $L_1\left(T^*\right)=L_2\left(T^*\right)=L_3\left(T^*\right)=L_4\left(T^*\right)=0$.
Ahora, dado que por construcción $\mathcal{I}\neq\emptyset$ y que para $T^*\in\mathcal{I}$ en ninguna de las colas han llegado usuarios, se tiene que no hay transferencia entre las colas, por lo tanto, el sistema 1 y el sistema 2 son condicionalmente independientes en $\mathcal{I}$, es decir

$$\mathbb{P}\left\{L_1\left(T^*\right), L_2\left(T^*\right), L_3\left(T^*\right), L_4\left(T^*\right)|T^*\in\mathcal{I}\right\}=\prod_{j=1}^{4}\mathbb{P}\left\{L_j\left(T^*\right)\right\}, \tag{27.252}$$

para $T^*\in\mathcal{I}$.

Definición 27.217 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X=\left\{X\left(t\right):t\geq0\right\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1>0$ tal que*

i) $\left\{X\left(t+R_1\right):t\geq0\right\}$ *es independiente de* $\left\{\left\{X\left(t\right):t<R_1\right\},\right\}$

ii) $\left\{X\left(t+R_1\right):t\geq0\right\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\left\{X\left(t\right):t>0\right\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\left\{X\left(t+R_1\right)\right\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\left\{R_n\right\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k\equiv R_1+R_2+\cdots+R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.*

Nota 27.111 *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2\ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [40].*

Nota 27.112 *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 27.218 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.113 *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*
En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 27.114 *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 27.115 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 27.116
a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.
b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.219 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.220 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 27.221 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 27.130 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 27.65 *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\,ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 27.222 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.253}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.223 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.117 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃ^{o}meros.*

Nota 27.118 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.131 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 27.89 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,, \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.224 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.90 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\,, \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 27.132 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.91 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.119 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.133 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.254}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.255}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.66 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.256}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.225 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.134 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (27.257)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (27.258) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.67 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.259}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.92 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.120 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.135 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \quad (27.260) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.261) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.68 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.262)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.226 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.136 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \quad (27.263) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.264) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.69 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.265)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.93 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.121 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.137 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \quad (27.266) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.267) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.70 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.268)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.227 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.138 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \quad (27.269) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.270) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.71 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.271)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\
P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)
\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.94 *Para cada* $t \geq 0$, *la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, *para* $m \geq 1$.

Nota 27.122 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n, *para* $n \geq 2$, *a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G, *entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 27.139 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.272}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.273}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 27.72 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$, *entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.274}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 27.228 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.140 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \to \mu$ *c.s. cuando* $n \to \infty$, *donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.275}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.276}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 27.73 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, *para* $n \geq 1$, *son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.277}$$

Los tiempos T_n *están relacionados con los conteos de* $N(t)$ *por*

$$\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\
T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},
\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, *y*

$$N(t) = \text{máx}\{n : T_n \leq t\} = \text{mín}\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.95 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Nota 27.123 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 27.141 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.278}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.279}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 27.74 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.280}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 27.229 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.142 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \to \mu$ *c.s. cuando* $n \to \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.281}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.282}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 27.75 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.283}$$

Definición 27.230 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{27.284}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 27.96 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.143 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.231 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.97 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t>0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 27.232 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.98 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.124 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.144 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.76 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1], \; t \geq 0,$$

Definición 27.233 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.285}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 27.234 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.125 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 27.235 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.286}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 27.236 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.126 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq \; & t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.99 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Ejemplo 27.5 (Proceso Poisson) *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación* $N(t)$ *tienen distribución exponencial* $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ *con tasa* λ*. Entonces* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*.*

Nota 27.127 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 27.145 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.287}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.288}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 27.77 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.289}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 27.237 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.146 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \to \mu$ *c.s. cuando* $n \to \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.290}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.291}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 27.78 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.292}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.238 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.100 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 27.239 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.101 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.128 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.147 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.79 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 27.240 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \ t \geq 0, \tag{27.293}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.102 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.148 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu, \ \textit{cuando} \ t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.241 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.103 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 27.242 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_{+}} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^{n} = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.104 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.129 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.149 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.80 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \, t \geq 0,$$

Definición 27.243 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \, t \geq 0, \tag{27.294}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.105 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.150 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 27.130 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.151 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 27.106 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.244 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.107 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 27.152 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 27.131 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.153 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 27.108 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.245 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.109 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 27.154 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Definición 27.246 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = \left(\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\}\right)$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.132 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 27.133 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 27.134 *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.247 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = \left(\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\}\right)$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.135 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 27.155 (Procesos Regenerativos) *Suponga que el proceso*

Definición 27.248 (Renewal Process Trinity) *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- *$A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- *$B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- *$L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 27.136 *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t + y) - N((t - x)) = 0\} \tag{27.295}$$

Ejemplo 27.6 (Tiempos de recurrencia Poisson) *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (34.8.10) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 27.137 *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 27.249 *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 27.138 *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ *en* $\mathbb{R}_+$, *con puntos* $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 27.110 *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 27.156 *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación* N *es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante* $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 27.139 *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 27.81 *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 27.140 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \to S$.

Nota 27.141 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.250 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2, *independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1. *Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, *se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X.

Definición 27.251 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.142 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.252 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.143 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Nota 27.144 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.253 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 27.145 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.254 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.146 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (* puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0, t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 27.255 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 27.256 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.257 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.157 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (* puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0, t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 27.258 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 27.259 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.260 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 27.158 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces
Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t. Entonces, determinando el primer momento es posible ver que

Definición 27.261 *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 27.262 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.*

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si $I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$ se tiene que $F_i(z) = I_i[P_i(z)]$ para $i = 1, 2$.
Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (34.422), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 27.263 *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 27.264 *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 27.265 *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

[7]

[7] In Stidham and Heyman [41] shows that is sufficient for the regenerative process to be stationary that the mean regenerative cycle time is finite: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$,

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1$.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.266 *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.*

Nota 27.147 *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 27.267 *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma\left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 27.268 *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 27.159 *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i \left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 27.269 *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 27.270 *Dos espacios medibles $(E, \mathcal{E})$ y $(G, \mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \rightarrow G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 27.271 *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G, \mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 27.148 *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 27.272 *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ es una familia $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E, \mathcal{E})$.*

Definición 27.273 *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}} (E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 27.149 *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 27.150 *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E,\mathcal{E}) = (\mathbb{R},\mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_1} \leq x_1, \ldots, Z_{t_n} \leq x_n\right), x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{27.296}$$

Nota 27.151 *Para espacios polacos $(E,\mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 27.274 *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 27.152 *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H,\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{27.297}$$

Nota 27.153 *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ a $(H,\mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H,\mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 27.154 *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H,\mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 27.275 *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0,\infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w).w \in \Omega.$$

Definición 27.276 *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible* ***(CM)*** *si el mapeo que toma $(w,t) \in \Omega \times [0,\infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 27.155 *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w,T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w,T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 27.277 *Un PEOSCT con espacio de estados $(H,\mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible* ***(CCM)*** *si el mapeo $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 27.156 *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0,\infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w,t) en $(Z(w),t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w),t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 27.278 *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante* ***(ISI)*** *si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s\in[0,\infty)} : z \in H\right\} = H,\ t \in [0,\infty).$$

Definición 27.279 *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0,\infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s\in[0,\infty)},\ z \in H.$$

Definición 27.280 *Se dice que un proceso Z es shift-medible* ***(SM)*** *si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ medible.*

Nota 27.157 *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 27.158 *• Dado el espacio polaco $(E, \mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0, \infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*

- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 27.159 *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 27.160 *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 27.281 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s \in [0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^{\infty}$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L, \mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{ (s_k)_0^{\infty} \in [0, \infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty \right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.
Así el par (Z, S) es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0, \infty), \mathcal{B}[0, \infty))$.

Definición 27.282 *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t \left(z, (s_k)_0^{\infty} \right) = \theta_t \left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t \right)_0^{\infty} \right)$$

donde $n_{t-} = inf \{ n \geq 1 : s_n \geq t \}$.

Nota 27.160 *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 27.283 *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0 \right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $((Z_s) \, s \in [0, S_n), S_0, \dots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z, S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 27.161 *Si el par (Z, S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \dots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 27.161 *Supóngase que el par (Z, S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z, S) con periodo d.*

Definición 27.284 *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx > 0$ con $X_2, X_3, \dots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x) \, dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 27.285 *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0 \right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \dots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z, S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 27.162 *• El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*

- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z, S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 27.163 *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 27.162 *Supongase que el par (Z, S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S).*

Teorema 27.163 *Supongase que (Z, S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0, 1)$ e independiente de $\left(Z^0, S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]}d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*, S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right)ds\right]/\mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x]/\mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 27.164 *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1}Z = \theta_{S_0}Z \text{ en distribución.} \tag{27.298}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{27.299}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1}Z. \tag{27.300}$$

Also the intervisit time I_i is defined as the period beginning at the time of its service completion in a cycle and ending at the time when it is polled in the next cycle; its duration is given by $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.
So we the following are still true

$$\begin{array}{ll}
\mathbb{E}[L_i] = \mu_i\mathbb{E}[I_i], & \mathbb{E}[C_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)}, \\
\mathbb{E}[S_i] = \mu_i\mathbb{E}[C_i], & \mathbb{E}[I_i] = (1-\mu_i)\mathbb{E}[C_i], \\
Var[L_i] = \mu_i^2 Var[I_i] + \sigma^2\mathbb{E}[I_i], & Var[C_i] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}, \\
Var[S_i] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^3}, & Var[I_i] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2}f_i(i).
\end{array} \tag{27.301}$$

Definición 27.286 *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 27.287 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.*

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si $I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$ se tiene que $F_i(z) = I_i[P_i(z)]$ para $i = 1, 2$.
Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (34.422), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 27.288 *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 27.289 *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 27.290 *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$[8], se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
*Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (**??**): $n \to t - \tau_i(m)$, $T \to \overline{\tau}_i(m) - \tau_i(m)$, $L_n \to L_i(t)$ y $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right] \to F_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i\tau_i(m)}\right]$, se puede ver que*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} \tag{27.302}$$

[8]En Stidham[41] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1$.

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{1-I_i\left[P_i(z)\right]}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\ &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} + \sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\ &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\}\\ &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)} + \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}\right\}\\ &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

es decir

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \tag{27.303}$$

Si hacemos:

$$\begin{aligned}S(z) &= 1-F(z) &(27.304)\\ T(z) &= z-P(z) &(27.305)\\ U(z) &= 1-P(z) &(27.306)\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[C_i\right]Q(z) = \frac{(z-1)S(z)P(z)}{T(z)U(z)} \tag{27.307}$$

A saber, si $a_k = P\{L(t)=k\}$

$$S(z) = 1-F(z) = 1-\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

entonces

$S^{'}(z) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}$, *por tanto* $S^{(1)}(1) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k = -\mathbb{E}\left[L(t)\right]$, *luego* $S^{''}(z) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k z^{k-2}$ *y* $S^{(2)}(1) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k = \mathbb{E}\left[L(L-1)\right]$; *de la misma manera* $S^{'''}(z) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-$

$1)(k-2)a_k z^{k-3}$ *y* $S^{(3)}(1) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)a_k = -\mathbb{E}\left[L(L-1)(L-2)\right] = -\mathbb{E}\left[L^3\right] + 3 - \mathbb{E}\left[L^2\right] - 2 - \mathbb{E}\left[L\right]$.
Es decir

$$
\begin{aligned}
S^{(1)}(1) &= -\mathbb{E}\left[L(t)\right],\\
S^{(2)}(1) &= -\mathbb{E}\left[L(L-1)\right] = -\mathbb{E}\left[L^2\right] + \mathbb{E}\left[L\right],\\
S^{(3)}(1) &= -\mathbb{E}\left[L(L-1)(L-2)\right] = -\mathbb{E}\left[L^3\right] + 3\mathbb{E}\left[L^2\right] - 2\mathbb{E}\left[L\right].
\end{aligned}
$$

Expandiendo alrededor de $z = 1$

$$
\begin{aligned}
S(z) &= S(1) + \frac{S^{'}(1)}{1!}(z-1) + \frac{S^{''}(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{S^{'''}(1)}{3!}(z-1)^3 + \ldots +\\
&= (z-1)\left\{S^{'}(1) + \frac{S^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{S^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \ldots +\right\}\\
&= (z-1)R_1(z)
\end{aligned}
$$

con $R_1(z) \neq 0$*, pues*

$$R_1(z) = -\mathbb{E}\left[L\right] \tag{27.308}$$

entonces

$$R_1(z) = S^{'}(1) + \frac{S^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{S^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \frac{S^{iv}(1)}{4!}(z-1)^3 + \ldots + \tag{27.309}$$

Calculando las derivadas y evaluando en $z = 1$

$$R_1(1) = S^{(1)}(1) = -\mathbb{E}\left[L\right] \tag{27.310}$$

$$R_1^{(1)}(1) = \frac{1}{2}S^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[L^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[L\right] \tag{27.311}$$

$$R_1^{(2)}(1) = \frac{2}{3!}S^{(3)}(1) = -\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[L^3\right] + \mathbb{E}\left[L^2\right] - \frac{2}{3}\mathbb{E}\left[L\right] \tag{27.312}$$

De manera análoga se puede ver que para $T(z) = z - P(z)$ *se puede encontrar una expanción alrededor de* $z = 1$
Expandiendo alrededor de $z = 1$

$$
\begin{aligned}
T(z) &= T(1) + \frac{T^{'}(1)}{1!}(z-1) + \frac{T^{''}(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{T^{'''}(1)}{3!}(z-1)^3 + \ldots +\\
&= (z-1)\left\{T^{'}(1) + \frac{T^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{T^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \ldots +\right\}\\
&= (z-1)R_2(z)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
T^{(1)}(1) &= -\mathbb{E}\left[X(t)\right] = -\mu,\\
T^{(2)}(1) &= -\mathbb{E}\left[X(X-1)\right] = -\mathbb{E}\left[X^2\right] + \mathbb{E}\left[X\right] = -\mathbb{E}\left[X^2\right] + \mu,\\
T^{(3)}(1) &= -\mathbb{E}\left[X(X-1)(X-2)\right] = -\mathbb{E}\left[X^3\right] + 3\mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}\left[X\right]\\
&= -\mathbb{E}\left[X^3\right] + 3\mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mu.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $R_2(1) \neq 0$*, pues*

$$R_2(1) = 1 - \mathbb{E}\left[X\right] = 1 - \mu \tag{27.313}$$

entonces

$$R_2(z) = T^{'}(1) + \frac{T^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{T^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \frac{T^{(iv)}(1)}{4!}(z-1)^3 + \ldots + \quad (27.314)$$

Calculando las derivadas y evaluando en $z = 1$

$$R_2(1) = T^{(1)}(1) = 1 - \mu \quad (27.315)$$

$$R_2^{(1)}(1) = \frac{1}{2}T^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right] + \frac{1}{2}\mu \quad (27.316)$$

$$R_2^{(2)}(1) = \frac{2}{3!}T^{(3)}(1) = -\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[X^3\right] + \mathbb{E}\left[X^2\right] - \frac{2}{3}\mu \quad (27.317)$$

Finalmente para de manera análoga se puede ver que para $U(z) = 1 - P(z)$ *se puede encontrar una expanción alrededor de* $z = 1$

$$\begin{aligned} U(z) &= U(1) + \frac{U^{'}(1)}{1!}(z-1) + \frac{U^{''}(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{U^{'''}(1)}{3!}(z-1)^3 + \ldots + \\ &= (z-1)\left\{U^{'}(1) + \frac{U^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{U^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \ldots + \right\} \\ &= (z-1)R_3(z) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} U^{(1)}(1) &= -\mathbb{E}[X(t)] = -\mu, \\ U^{(2)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)] = -\mathbb{E}\left[X^2\right] + \mathbb{E}[X] = -\mathbb{E}\left[X^2\right] + \mu, \\ U^{(3)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)] = -\mathbb{E}\left[X^3\right] + 3\mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}[X] \\ &= -\mathbb{E}\left[X^3\right] + 3\mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mu. \end{aligned}$$

Por lo tanto $R_3(1) \neq 0$, *pues*

$$R_3(1) = -\mathbb{E}[X] = -\mu \quad (27.318)$$

entonces

$$R_3(z) = U^{'}(1) + \frac{U^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{U^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \frac{U^{(iv)}(1)}{4!}(z-1)^3 + \ldots + \quad (27.319)$$

Calculando las derivadas y evaluando en $z = 1$

$$R_3(1) = U^{(1)}(1) = -\mu \quad (27.320)$$

$$R_3^{(1)}(1) = \frac{1}{2}U^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right] + \frac{1}{2}\mu \quad (27.321)$$

$$R_3^{(2)}(1) = \frac{2}{3!}U^{(3)}(1) = -\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[X^3\right] + \mathbb{E}\left[X^2\right] - \frac{2}{3}\mu \quad (27.322)$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}[C_i]\,Q(z) = \frac{(z-1)(z-1)R_1(z)P(z)}{(z-1)R_2(z)(z-1)R_3(z)} = \frac{R_1(z)P(z)}{R_2(z)R_3(z)} \equiv \frac{R_1P}{R_2R_3} \quad (27.323)$$

Entonces

$$\left[\frac{R_1(z)P(z)}{R_2(z)R_3(z)}\right]^{'} = \frac{PR_2R_3R_1^{'} + R_1R_2R_3P^{'} - R_3R_1PR_2 - R_2R_1PR_3^{'}}{(R_2R_3)^2} \quad (27.324)$$

Evaluando en $z=1$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R_2(1)R_3(1)R_1^{(1)}(1)+R_1(1)R_2(1)R_3(1)P^{'}(1)-R_3(1)R_1(1)R_2(1)^{(1)}-R_2(1)R_1(1)R_3^{'}(1)}{\left(R_2(1)R_3(1)\right)^2}\\
&= \frac{1}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}L\right)\left(1-\mu\right)\left(-\mu\right)+\left(-\mathbb{E}L\right)\left(1-\mu\right)\left(-\mu\right)\mu\right.\\
&\left.-\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\right)\left(-\mu\right)\left(-\mathbb{E}L\right)-\left(1-\mu\right)\left(-\mathbb{E}L\right)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}L\right)\left(\mu^2-\mu\right)+\left(\mu^2-\mu^3\right)\mathbb{E}L\right.\\
&\left.-\mu\mathbb{E}L\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\right)+\left(\mathbb{E}L-\mu\mathbb{E}L\right)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\left\{-\frac{1}{2}\mu^2\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mu\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mu^2\mathbb{E}L-\mu^3\mathbb{E}L+\mu\mathbb{E}L\mathbb{E}X^2-\frac{1}{2}\mathbb{E}L\mathbb{E}X^2\right\}\\
&= \frac{1}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\left\{\frac{1}{2}\mu\mathbb{E}L^2\left(1-\mu\right)+\mathbb{E}L\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\left(\mu^2-\mathbb{E}X^2\right)\right\}\\
&= \frac{1}{2\mu\left(1-\mu\right)}\mathbb{E}L^2-\frac{\frac{1}{2}-\mu}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\sigma^2\mathbb{E}L
\end{aligned}$$

por lo tanto (para Takagi)

$$Q^{(1)}=\frac{1}{\mathbb{E}C}\left\{\frac{1}{2\mu\left(1-\mu\right)}\mathbb{E}L^2-\frac{\frac{1}{2}-\mu}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\sigma^2\mathbb{E}L\right\}$$

donde

$$\mathbb{E}C=\frac{\mathbb{E}L}{\mu\left(1-\mu\right)}$$

entonces

$$\begin{aligned}
Q^{(1)} &= \frac{1}{2}\frac{\mathbb{E}L^2}{\mathbb{E}L}-\frac{\frac{1}{2}-\mu}{\left(1-\mu\right)\mu}\sigma^2=\frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}L}-\frac{\sigma^2}{2}\left\{\frac{2\mu-1}{\left(1-\mu\right)\mu}\right\}\\
&= \frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}L}+\frac{\sigma^2}{2}\left\{\frac{1}{1-\mu}+\frac{1}{\mu}\right\}
\end{aligned}$$

Mientras que para nosotros

$$Q^{(1)}=\frac{1}{\mu\left(1-\mu\right)}\frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}C}-\sigma^2\frac{\mathbb{E}L}{2\mathbb{E}C}\cdot\frac{1-2\mu}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}$$

Retomando la ecuación (34.2.307)

$$\left[\frac{R_1\left(z\right)P\left(z\right)}{R_2\left(z\right)R_3\left(z\right)}\right]^{'} = \frac{PR_2R_3R_1^{'}+R_1R_2R_3P^{'}-R_3R_1PR_2-R_2R_1PR_3^{'}}{\left(R_2R_3\right)^2}=\frac{F\left(z\right)}{G\left(z\right)}$$

donde

$$\begin{aligned}
F\left(z\right) &= PR_2R_3R_1^{'}+R_1R_2R_3P^{'}-R_3R_1PR_2^{'}-R_2R_1PR_3^{'}\\
G\left(z\right) &= R_2^2R_3^2\\
G^2\left(z\right) &= R_2^4R_3^4=\left(1-\mu\right)^4\mu^4
\end{aligned}$$

y por tanto

$$
\begin{aligned}
G^{'}(z) &= 2R_2R_3\left[R_2^{'}R_3+R_2R_3^{'}\right]\\
G^{'}(1) &= -2(1-\mu)\mu\left[\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right]+\frac{1}{2}\mu\right)(-\mu)+(1-\mu)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right]+\frac{1}{2}\mu\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
F^{'}(z) = \left[(R_2R_3)R_1^{''}-(R_1R_3)R_2^{''}-(R_1R_2)R_3^{''}-2\left(R_2^{'}R_3^{'}\right)R_1\right]P+2(R_2R_3)R_1^{'}P^{'}+(R_1R_2R_3)P^{''}
$$

Por lo tanto, encontremos $F^{'}(z)G(z)+F(z)G^{'}(z)$*:*

$$
\begin{aligned}
&F^{'}(z)G(z)+F(z)G^{'}(z)=\left\{\left[(R_2R_3)R_1^{''}-(R_1R_3)R_2^{''}-(R_1R_2)R_3^{''}-2\left(R_2^{'}R_3^{'}\right)R_1\right]P\right.\\
&+2(R_2R_3)R_1^{'}P^{'}+(R_1R_2R_3)P^{''}\Big\}R_2^2R_3^2-\left\{\left[PR_2R_3R_1^{'}+R_1R_2R_3P^{'}-R_3R_1PR_2^{'}\right.\right.\\
&\left.\left.-R_2R_1PR_3^{'}\right]\left[2R_2R_3\left(R_2^{'}R_3+R_2R_3^{'}\right)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Evaluando en $z=1$

$$
\begin{aligned}
&= (1+R_3)^3R_3^3R_1^{''}-(1+R_3)^2R_1R_3^3R_3^{''}-(1+R_3)^3R_3^2R_1R_3^{''}-2(1+R_3)^2R_3^2\left(R_3^{'}\right)^2\\
&+ 2(1+R_3)^3R_3^3R_1^{'}P^{'}+(1+R_3)^3R_3^3R_1P^{''}-2(1+R_3)^2R_3^2(1+2R_3)R_3^{'}R_1^{'}\\
&- 2(1+R_3)^2R_3^2R_1R_3^{'}(1+2R_3)P^{'}+2(1+R_3)(1+2R_3)R_3^3R_1\left(R_3^{'}\right)^2\\
&+ 2(1+R_3)^2(1+2R_3)R_1R_3R_3^{'}\\
&= -(1-\mu)^3\mu^3R_1^{''}-(1-\mu)^2\mu^2R_1(1-2\mu)R_3^{''}-(1-\mu)^3\mu^3R_1P^{''}\\
&+ 2(1-\mu)\mu^2\left[(1-2\mu)R_1-(1-\mu)\right]\left(R_3^{'}\right)^2-2(1-\mu)^2\mu R_1(1-2\mu)R_3^{'}\\
&- 2(1-\mu)^3\mu^4R_1^{'}-2\mu(1-\mu)(1-2\mu)R_3^{'}R_1^{'}-2\mu^3(1-\mu)^2(1-2\mu)R_1R_1^{'}
\end{aligned}
$$

por tanto

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{F(z)}{G(z)}\right]^{'} &= \frac{1}{\mu^3(1-\mu)^3}\left\{-(1-\mu)^2\mu^2R_1^{''}-\mu(1-\mu)(1-2\mu)R_1R_3^{''}-\mu^2(1-\mu)^2R_1P^{''}\right.\\
&+2\mu\left[(1-2\mu)R_1-(1-\mu)\right]\left(R_3^{'}\right)^2-2(1-\mu)(1-2\mu)R_1R_3^{'}-2\mu^3(1-\mu)^2R_1^{'}\\
&\left.-2(1-2\mu)R_3^{'}R_1^{'}-2\mu^2(1-\mu)(1-2\mu)R_1R_1^{'}\right\}
\end{aligned}
$$

recordemos que

$$
\begin{aligned}
R_1 &= -\mathbb{E}L\\
R_3 &= -\mu\\
R_1^{'} &= -\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}L\\
R_3^{'} &= -\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\\
R_1^{''} &= -\frac{1}{3}\mathbb{E}L^3+\mathbb{E}L^2-\frac{2}{3}\mathbb{E}L\\
R_3^{''} &= -\frac{1}{3}\mathbb{E}X^3+\mathbb{E}X^2-\frac{2}{3}\mu\\
R_1R_3^{'} &= \frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L-\frac{1}{2}\mathbb{E}X\mathbb{E}L\\
R_1R_1^{'} &= \frac{1}{2}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}L+\frac{1}{2}\mathbb{E}^2L\\
R_3^{'}R_1^{'} &= \frac{1}{4}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L^2-\frac{1}{4}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L-\frac{1}{4}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}X+\frac{1}{4}\mathbb{E}X\mathbb{E}L\\
R_1R_3^{''} &= \frac{1}{6}\mathbb{E}X^3\mathbb{E}L^2-\frac{1}{6}\mathbb{E}X^3\mathbb{E}L-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L+\frac{1}{3}\mathbb{E}X\mathbb{E}L^2-\frac{1}{3}\mathbb{E}X\mathbb{E}L\\
R_1P^{''} &= -\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L\\
\left(R_3^{'}\right)^2 &= \frac{1}{4}\mathbb{E}^2X^2-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}X+\frac{1}{4}\mathbb{E}^2X
\end{aligned}
$$

Definición 27.291 *Let L_i^* be the number of users at queue Q_i when it is polled, then*

$$\mathbb{E}\left[L_i^*\right]=f_i\left(i\right),\quad Var\left[L_i^*\right]=f_i\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. \tag{27.325}$$

Definición 27.292 *The cycle time C_i for the queue Q_i is the period beginning at the time when it is polled in a cycle and ending at the time when it is polled in the next cycle; it's duration is given by $\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)$, equivalently $\overline{\tau}_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$ under steady state assumption.*

Definición 27.293 *The intervisit time I_i is defined as the period beginning at the time of its service completion in a cycle and ending at the time when it is polled in the next cycle; its duration is given by $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$.*

The intervisit time duration $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)$ given the number of users found at queue Q_i at time $t=\tau_i\left(m+1\right)$ is equal to the number of arrivals during the preceding intervisit time $\left[\overline{\tau}\left(m\right),\tau_i\left(m+1\right)\right]$. So we have

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i\left(\tau_i\left(m+1\right)\right)}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z_i\right)\right\}^{\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)}\right]$$

if $I_i\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)}\right]$ we have $F_i\left(z\right)=I_i\left[P_i\left(z\right)\right]$ for $i=1,2$. Futhermore can be proved that

$$
\begin{array}{ll}
\mathbb{E}\left[L_i\right]=\mu_i\mathbb{E}\left[I_i\right], & \mathbb{E}\left[C_i\right]=\frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)},\\
\mathbb{E}\left[S_i\right]=\mu_i\mathbb{E}\left[C_i\right], & \mathbb{E}\left[I_i\right]=\left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right],\\
Var\left[L_i\right]=\mu_i^2Var\left[I_i\right]+\sigma^2\mathbb{E}\left[I_i\right], & Var\left[C_i\right]=\frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2},\\
Var\left[S_i\right]=\frac{Var\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^3}, & Var\left[I_i\right]=\frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2}-\frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2}f_i\left(i\right).
\end{array}
\tag{27.326}
$$

Let consider the points when the process $\left[L_1\left(1\right),L_2\left(1\right),L_3\left(1\right),L_4\left(1\right)\right]$ becomes zero at the same time, this points, $T_1,T_2,\ldots$ will be denoted as regeneration points, then we have that

Definición 27.294 *the interval between two such succesive regeneration points will be called regenerative cycle.*

Definición 27.295 *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 27.296 *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m=1,2,\ldots,M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1-z)P_i(z)}{1 - P_i(z)}. \qquad (27.327)$$

Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t. Entonces, determinando el primer momento es posible ver que
M_i is an stopping time for the regenerative process with $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, from Wald's lemma follows that:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]
\end{aligned}$$

therefore

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

Doing the following substitutions en (??): $n \to t - \tau_i(m)$, $T \to \overline{\tau}_i(m) - \tau_i(m)$, $L_n \to L_i(t)$ and $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right] \to F_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i \tau_i(m)}\right]$, we obtain

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} \qquad (27.328)$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1 - \mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1 - P_i(z)}\\
&= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]} = \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} + \sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}\left\{z\frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} + \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1-z)P_i(z)}{1 - P_i(z)}
\end{aligned}$$

es decir

$$
\begin{array}{ll}
S^{'}(z) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}, & S^{(1)}(1) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k = -\mathbb{E}\left[L(t)\right], \\
S^{''}(z) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k z^{k-2}, & S^{(2)}(1) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k = \mathbb{E}\left[L(L-1)\right], \\
S^{'''}(z) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2) a_k z^{k-3}, & S^{(3)}(1) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2) a_k \\
 & = -\mathbb{E}\left[L(L-1)(L-2)\right] \\
 & = -\mathbb{E}\left[L^3\right] + 3 - \mathbb{E}\left[L^2\right] - 2 - \mathbb{E}\left[L\right];
\end{array}
\quad (27.329)
$$

27.1.59. Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [81]

Definición 27.297 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X*.*

Nota 27.164 *La existencia de un primer tiempo de regeneración,* R_1*, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos* $R_1, R_2 \ldots,$ *que satisfacen la propiedad deseada [40].*

Nota 27.165 *Para la cola* $GI/GI/1$ *los usuarios arriban con tiempos* t_n *y son atendidos con tiempos de servicio* S_n*, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (*`i.i.d.`*)*$T_n = t_n - t_{n-1}$*, además los tiempos de servicio son* `i.i.d.` *e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que* $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$*.*

Definición 27.298 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$
\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du,
\end{aligned}
$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$
\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}\left[R_1\right]},
$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.166 *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si* $X(t)$ *es regenerativo y se define el proceso* $Y(t)$ *por* $Y(t) = f(X(t))$ *para alguna función Borel medible* $f(\cdot)$*. Además* Y *es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que* X*.*
En general, los tiempos de renovación, Z_k *de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de* $X(t)$*.*

Nota 27.167 *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 27.168 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 27.169 *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.299 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.300 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 27.301 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 27.165 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 27.82 *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) \, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 27.302 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.330}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.303 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.170 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 27.171 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.166 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 27.111 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.304 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.112 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 27.167 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq \; & t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.113 *Para cada* $t \geq 0$, *la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, *para* $m \geq 1$.

Nota 27.172 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n, *para* $n \geq 2$, *a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G, *entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 27.168 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.331}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.332}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 27.83 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$, *entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.333}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 27.305 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.169 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \to \mu$ *c.s. cuando* $n \to \infty$, *donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.334}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.335}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 27.84 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, *para* $n \geq 1$, *son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.336}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &=& 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.114 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.173 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.170 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.337}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.338}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.85 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.339}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.306 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.171 *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.340}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.341}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.86 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.342}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\
T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1},
\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\
P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)
\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.115 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.174 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.172 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.343}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.344}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.87 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.345}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.307 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.173 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} &(27.346)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} &(27.347)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.88 *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.348)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 27.116 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.175 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 27.174 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} &(27.349)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} &(27.350)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.89 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.351)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 27.308 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.175 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \to \mu$ *c.s. cuando* $n \to \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \quad (27.352)\\ lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.353) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 27.90 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \quad (27.354)$$

Los tiempos T_n *están relacionados con los conteos de* $N(t)$ *por*

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$*, y*

$$N(t) = \text{máx}\{n : T_n \leq t\} = \text{mín}\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F*. Entonces*

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.117 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Nota 27.176 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 27.176 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \quad (27.355)\\ lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.356) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.91 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.357}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.309 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.177 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (27.358)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (27.359)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.92 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.360}$$

Definición 27.310 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{27.361}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.118 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.178 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.311 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.119 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 27.312 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.120 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.177 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.179 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.93 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1],\ t \geq 0,$$

Definición 27.313 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.362}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t): t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.314 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 27.178 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 27.315 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.363}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.316 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.179 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\; t < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.121 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 27.7 (Proceso Poisson) *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 27.180 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.180 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.364}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.365}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.94 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.366}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.317 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.181 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (27.367)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (27.368) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.95 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.369}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.318 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.122 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 27.319 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.123 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.181 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.182 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.96 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1]\,,\; t \geq 0,$$

Definición 27.320 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s)\,,\; t \geq 0, \tag{27.370}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.124 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.183 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.321 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)\,,\;\; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.125 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\; t \geq 0.$$

Definición 27.322 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t)\,,\; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.126 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.182 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.184 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\,d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n|T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\,d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.97 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t) + 1]\,,\ t \geq 0,$$

Definición 27.323 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s)\,,\ t \geq 0, \tag{27.371}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.127 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.185 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Nota 27.183 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.186 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 27.128 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ \textit{donde}\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.324 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)]\,,\ \textit{para}\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.129 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t)\,,\ \textit{donde}\ h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]\,.$$

Teorema 27.187 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h\left(s\right) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 27.184 *Una función $h : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.188 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h\left(s\right) ds.$$

Proposición 27.130 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right) = U\star h\left(t\right), \textit{ donde } h\left(t\right) = H\left(t\right) - F\star H\left(t\right)$$

Definición 27.325 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right] = \mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right], \textit{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.131 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right] = U\star h\left(t\right), \textit{ donde } h\left(t\right) = \mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T > t\right)\right].$$

Teorema 27.189 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h\left(s\right) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Definición 27.326 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = \left(\xi_n, \{X\left(T_{n-1}+t\right) : 0 \leq t < \xi_n\}\right)$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.185 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 27.186 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 27.187 *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.327 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.188 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 27.190 (Procesos Regenerativos) *Suponga que el proceso*

Definición 27.328 (Renewal Process Trinity) *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- *$A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- *$B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- *$L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 27.189 *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{27.372}$$

Ejemplo 27.8 (Tiempos de recurrencia Poisson) *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (34.8.10) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 27.190 *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 27.329 *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 27.191 *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 27.132 *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 27.191 *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 27.192 *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 27.98 *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 27.193 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 27.194 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.330 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

- *i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$*
- *ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$*

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 27.331 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.195 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.332 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.196 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 27.197 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.333 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 27.198 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.334 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.199 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.335 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t + x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.336 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.337 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.192 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel* A*,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (* puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0, t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 27.338 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 27.339 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.340 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.193 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$[9], se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

*Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (**??**): $n \rightarrow t - \tau_i(m)$, $T \rightarrow \overline{\tau}_i(m) - \tau_i(m)$, $L_n \rightarrow L_i(t)$ y $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right] \rightarrow F_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i \tau_i(m)}\right]$, se puede ver que*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} \tag{27.373}$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1 - \mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1 - P_i(z)} \\
&= \frac{1 - I_i\left[P_i(z)\right]}{1 - P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

[9] En Stidham[41] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1$.

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right]+\mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}+\frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}\right\}
\end{aligned}$$

es decir

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \quad (27.374)$$

Teorema 27.194 *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t, $A_j(t) = \{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\}$ para algún tiempo $t \geq 0$ y Q_j la cola j-ésima en la RSVC, para $j = 1,2,3,4$. Existe un intervalo $I \neq \emptyset$ tal que para $T^* \in I$, tal que $\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(Tt^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I\} > 0$.*

Demostración 27.3 *Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.*
Sea $n > 0$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1(n) > 0$, entonces tenemos que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1(n)$.
Definamos el intervalo $I_1 \equiv [\overline{\tau}_1(n), \tau_2(n)]$ de longitud $\xi_1 = r_1(n)$. Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$\mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_1\xi_1(n)}. \quad (27.375)$$

Por otra parte, para la cola Q_2, el tiempo $\overline{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\overline{\tau}_2(n-1)) = 0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n. Entonces tenemos un sgundo intervalo $I_2 \equiv [\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_2\xi_2(n)}, \quad (27.376)$$

donde $\xi_2(n) = \tau_2(n) - \overline{\tau}_2(n-1)$.
Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} &= \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\}\,\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\} \\
&\geq \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\}\,\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} \\
&= e^{-\tilde{\mu}_1\xi_1(n)}e^{-\tilde{\mu}_2\xi_2(n)} = e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)]}.
\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)]} > 0. \quad (27.377)$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC, se afirma que existe $m > 0$ tal que $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$.
Para Q_3 sea $I_3 = [\overline{\tau}_3(m), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_3(m) = r_3(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(n)}. \tag{27.378}$$

Análogamente que como se hizo para Q_2, tenemos que para Q_4 se tiene el intervalo $I_4 = [\overline{\tau}_4(m-1), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_4(m) = \tau_4(m) - \overline{\tau}_4(m-1)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} = e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(n)}. \tag{27.379}$$

Al igual que para el primer sistema, dado que $I_3(m) \subset I_4(m)$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \xi_3(m) \leq \xi_4(m) & \Leftrightarrow & -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\ -\tilde{\mu}_4\xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4\xi_4(m) & \Leftrightarrow & e^{-\tilde{\mu}_4\xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(m)} \\ \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} & \geq & \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} \end{array}$$

Entonces, dado que los eventos A_3 y A_4 son independientes, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\} & = & \mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(m)\} \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} \\ & \geq & \mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(n)\} \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(n)\} \\ & = & e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(m)} e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(m)} = e^{-[\tilde{\mu}_3\xi_3(m) + \tilde{\mu}_4\xi_4(m)]}. \end{array}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\} = e^{-[\tilde{\mu}_3\xi_3(m) + \tilde{\mu}_4\xi_4(m)]} > 0. \tag{27.380}$$

Por construcción se tiene que $I(n,m) \equiv I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$,entonces en particular se tienen las contenciones $I(n,m) \subseteq I_1(n)$ y $I(n,m) \subseteq I_3(m)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m} \equiv \ell(I(n,m))$ tenemos que

$$\xi_{n,m} \leq \xi_1(n) \text{ y } \xi_{n,m} \leq \xi_3(m) \text{ entonces } -\xi_{n,m} \geq -\xi_1(n) \text{ y } -\xi_{n,m} \leq -\xi_3(m)$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{array}{ll} -\tilde{\mu}_1\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_1\xi_1(n), & -\tilde{\mu}_2\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_2\xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2\xi_2(n), \\ -\tilde{\mu}_3\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_3\xi_3(m), & -\tilde{\mu}_4\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_4\xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4\xi_4(m). \end{array}$$

Sea $T^* \in I_{n,m}$, entonces dado que en particular $T^* \in I_1(n)$ se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2, en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4, es decir, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$, $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I_{n,m}$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4, por lo tanto tenemos que

$$\begin{array}{l} \mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(T^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I_{n,m}\} = \prod_{j=1}^4 \mathbb{P}\{A_j(T^*) | T^* \in I_{n,m}\} \\ \geq \mathbb{P}\{A_1(T^*) | T^* \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(T^*) | T^* \in I_2(n)\} \mathbb{P}\{A_3(T^*) | T^* \in I_3(m)\} \mathbb{P}\{A_4(T^*) | T^* \in I_4(m)\} \\ = e^{-\mu_1\xi_1(n)} e^{-\mu_2\xi_2(n)} e^{-\mu_3\xi_3(m)} e^{-\mu_4\xi_4(m)} = e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n) + \tilde{\mu}_2\xi_2(n) + \tilde{\mu}_3\xi_3(m) + \tilde{\mu}_4\xi_4(m)]} > 0. \end{array} \tag{27.381}$$

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [13] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- *Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.*
- *Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.*
- *$\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.*

- *Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:*

  Teorema 27.195 *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu\left(\mu+\theta\right)^{-1}\left[\delta\theta-\mu\left(1-\delta\right)\alpha\left(\theta\right)\right]\left[\theta-\mu\left(1-\delta\right)^{-1}\right]\\ \alpha\left(\theta\right) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right]\\ var\left(D_n\right) &= var\left(T_0\right)-\left(\tau^{-1}-\delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}\left(S_0\right)\right)^2\left(1-\delta\right)^{-1}.\end{aligned}$$

  Teorema 27.196 *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 27.197 *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

En Sigman, Thorison y Wolff [40] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 27.133 *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1}X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k\left(X, R\right) =_D \left(X, R\right).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k}X$.

- *Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.*
- *Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.*
- *Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:*

  Teorema 27.198 *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) Los tiempos de servicio son identicamente cero;

  b) $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;

  c) $L = 1$ y $G = D$;

  d) $L = \infty$ y $G = M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;

  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;

  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;

  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- *Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.*
- *King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.*
- *Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.*

- *El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)*

  Teorema 27.199 *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.

  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$

  d) $G = M$.

- *El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)*

  Teorema 27.200 *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [13] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- *Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.*
- *Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.*
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- *Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:*

  Teorema 27.201 *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right]\\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right]\\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2(1-\delta)^{-1}.
\end{aligned}$$

  Teorema 27.202 *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 27.203 *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

Sean Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 en una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC). Supongamos que cada una de las colas es del tipo $M/M/1$ con tasa de arribo μ_i y que la transferencia de usuarios entre los dos sistemas ocurre entre $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$ con respectiva tasa de arribo igual a la tasa de salida $\hat{\mu}_i = \mu_i$, esto se sabe por lo desarrollado en la sección anterior.

Consideremos, sin pérdida de generalidad como base del análisis, la cola Q_1 además supongamos al servidor lo comenzamos a observar una vez que termina de atender a la misma para desplazarse y llegar a Q_2, es decir al tiempo τ_2.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, ciclo del servidor en que regresa a Q_1 para dar servicio y atender conforme a la política exhaustiva, entonces se tiene que $\overline{\tau}_1(n)$ es el tiempo del servidor en el sistema 1 en que termina de dar servicio a todos los usuarios presentes en la cola, por lo tanto se cumple que $L_1(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, entonces el servidor para llegar a Q_2 incurre en un tiempo de traslado r_1 y por tanto se cumple que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1$. Dado que los tiempos entre arribos son exponenciales se cumple que

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n) + r_1]\} = e^{-\tilde{\mu}_1 r_1},$$
$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n) + r_1]\} = e^{-\tilde{\mu}_2 r_1}.$$

El evento que nos interesa consiste en que no haya arribos desde que el servidor abandonó Q_2 y regresa nuevamente para dar servicio, es decir en el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Entonces, si hacemos

$$\begin{aligned}\varphi_1(n) &\equiv \overline{\tau}_1(n) + r_1 = \overline{\tau}_2(n-1) + r_1 + r_2 + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n)\\ &= \overline{\tau}_2(n-1) + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r,,\end{aligned}$$

y longitud del intervalo

$$\begin{aligned}\xi &\equiv \overline{\tau}_1(n) + r_1 - \overline{\tau}_2(n-1) = \overline{\tau}_2(n-1) + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r - \overline{\tau}_2(n-1)\\ &= \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r.\end{aligned}$$

Entonces, determinemos la probabilidad del evento no arribos a Q_2 *en* $[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]$*:*

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_2\xi}. \tag{27.382}$$

De manera análoga, tenemos que la probabilidad de no arribos a Q_1 *en* $[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]$ *esta dada por*

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_1\xi}, \tag{27.383}$$

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_2\xi}. \tag{27.384}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ y } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\right\}\\ &= \mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\right\}\\ &\times\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_1\xi}e^{-\tilde{\mu}_2\xi} = e^{-\tilde{\mu}\xi}.\end{aligned} \tag{27.385}$$

Para el segundo sistema, consideremos nuevamente $\overline{\tau}_1(n) + r_1$*, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe* $m > 0$ *tal que* $\overline{\tau}_3(m) < \overline{\tau}_1 + r_1 < \tau_4(m)$*, entonces*

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_3(m), \overline{\tau}_1(n) + r_1]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3}, \tag{27.386}$$

donde

$$\xi_3 = \overline{\tau}_1(n) + r_1 - \overline{\tau}_3(m) = \overline{\tau}_1(n) - \overline{\tau}_3(m) + r_1, \tag{27.387}$$

mientras que para Q_4 *al igual que con* Q_2 *escribiremos* $\tau_4(m)$ *en términos de* $\overline{\tau}_4(m-1)$*:*
$\varphi_2 \equiv \tau_4(m) = \overline{\tau}_4(m-1) + r_4 + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) + r_3 = \overline{\tau}_4(m-1) + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) + \hat{r}$*, además,*
$\xi_2 \equiv \varphi_2(m) - \overline{\tau}_1 - r_1 = \overline{\tau}_4(m-1) + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) - \overline{\tau}_1(n) + \hat{r} - r_1$.
Entonces

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_4 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_4\xi_2}, \tag{27.388}$$

mientras que para Q_3 *se tiene que*

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_3\xi_2} \tag{27.389}$$

Por tanto

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3 \wedge Q_4 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]\right\} = e^{-\hat{\mu}\xi_2} \tag{27.390}$$

donde $\hat{\mu} = \tilde{\mu}_3 + \tilde{\mu}_4$.

Ahora, definamos los intervalos $\mathcal{I}_1 = \left[\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_1(n)\right]$ *y* $\mathcal{I}_2 = \left[\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)\right]$*, entonces, sea* $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ *el intervalo donde cada una de las colas se encuentran vacías, es decir, si tomamos* $T^* \in \mathcal{I}$*, entonces* $L_1(T^*) = L_2(T^*) = L_3(T^*) = L_4(T^*) = 0$.

Ahora, dado que por construcción $\mathcal{I} \neq \emptyset$ *y que para* $T^* \in \mathcal{I}$ *en ninguna de las colas han llegado usuarios, se tiene que no hay transferencia entre las colas, por lo tanto, el sistema 1 y el sistema 2 son condicionalmente independientes en* $\mathcal{I}$*, es decir*

$$\mathbb{P}\left\{L_1(T^*), L_2(T^*), L_3(T^*), L_4(T^*) | T^* \in \mathcal{I}\right\} = \prod_{j=1}^{4} \mathbb{P}\left\{L_j(T^*)\right\}, \tag{27.391}$$

para $T^* \in \mathcal{I}$.

Definición 27.341 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X.

Nota 27.200 *La existencia de un primer tiempo de regeneración,* R_1*, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos* $R_1, R_2 \ldots,$ *que satisfacen la propiedad deseada [40].*

Nota 27.201 *Para la cola* $GI/GI/1$ *los usuarios arriban con tiempos* t_n *y son atendidos con tiempos de servicio* S_n*, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)*$T_n = t_n - t_{n-1}$*, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que* $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.

Definición 27.342 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.202 *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si* $X(t)$ *es regenerativo y se define el proceso* $Y(t)$ *por* $Y(t) = f(X(t))$ *para alguna función Borel medible* $f(\cdot)$*. Además* Y *es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que* X.

En general, los tiempos de renovación, Z_k *de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de* $X(t)$.

Nota 27.203 *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 27.204 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 27.205 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.343 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.344 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 27.345 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 27.204 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Corolario 27.99 *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \to \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) \, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \to \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 27.346 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.392}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.347 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.206 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃ^{o}meros.*

Nota 27.207 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.205 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 27.134 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,, \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.348 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T + t) | T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.135 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\,, \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 27.206 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \text{máx}\{n : T_n \leq t\} = \text{mín}\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.136 *Para cada* $t \geq 0$, *la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, *para* $m \geq 1$.

Nota 27.208 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n, *para* $n \geq 2$, *a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G, *entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 27.207 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.393}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.394}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 27.100 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$, *entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.395}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 27.349 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.208 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \to \mu$ *c.s. cuando* $n \to \infty$, *donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.396}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.397}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 27.101 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, *para* $n \geq 1$, *son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.398}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.137 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.209 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.209 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.399}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.400}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.102 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.401}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.350 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.210 *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.402}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.403}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.103 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.404}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.138 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.210 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.211 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.405}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.406}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.104 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.407}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.351 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.212 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (27.408)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (27.409)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.105 *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (27.410)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 27.139 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.211 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 27.213 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (27.411)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (27.412)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.106 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (27.413)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.352 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.214 *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (27.414) \\ lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (27.415) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.107 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \quad (27.416)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \;\; t \;\; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.140 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.212 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.215 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (27.417) \\ lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (27.418) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.108 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.419}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.353 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.216 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.420}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.421}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.109 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.422}$$

Definición 27.354 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{27.423}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.141 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.217 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.355 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.142 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 27.356 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.143 *La Transformada de Laplace* $\hat{U}(\alpha)$ *y* $\hat{F}(\alpha)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.

Nota 27.213 *Un proceso de renovación* $N(t)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, *para* $t \geq 0$.

Teorema 27.218 *Sea* $N(t)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ *es finita para cada* t. *Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N(t)$ *tal que* $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, *independiente de* n. *Entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.110 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación* $N(t)$,

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 27.357 *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.424}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n *como elementos de* $\mathbb{R}_+$, *y* $N(t)$ *es el número de puntos en* $\mathbb{R}$. *El proceso denotado por* $\{N(t) : t \geq 0\}$, *denotado por* $N(t)$, *es un proceso puntual en* $\mathbb{R}_+$. *Los* T_n *son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual* $N(t)$ *es simple si su número de ocurrencias son distintas:* $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ *casi seguramente.*

Definición 27.358 *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, *para* $n \geq 1$, *son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F, *donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$. *Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 27.214 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F, *con* $F(0) = 0$, *para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F. *Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, *donde* $T_n \rightarrow \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

27.1.60. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[35]

Definición 27.359 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.425}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.360 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 27.215 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.144 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 27.9 (Proceso Poisson) *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 27.216 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.219 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.426}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.427}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.111 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.428}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.361 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.220 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.429}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.430}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.112 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.431}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.362 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.145 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 27.363 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.146 *La Transformada de Laplace* $\hat{U}(\alpha)$ *y* $\hat{F}(\alpha)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.

Nota 27.217 *Un proceso de renovación* $N(t)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, *para* $t \geq 0$.

Teorema 27.221 *Sea* $N(t)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ *es finita para cada* t. *Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N(t)$ *tal que* $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, *independiente de* n. *Entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.113 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación* $N(t)$,

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1],\ t \geq 0,$$

Definición 27.364 *Sea* $h(t)$ *función de valores reales en* $\mathbb{R}$ *acotada en intervalos finitos e igual a cero para* $t < 0$ *La ecuación de renovación para* $h(t)$ *y la distribución* F *es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{27.432}$$

donde $H(t)$ *es una función de valores reales. Esto es* $H = h + F \star H$. *Decimos que* $H(t)$ *es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para* $t < 0$.

Proposición 27.147 *La función* $U \star h(t)$ *es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.222 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ *es un proceso de renovación con distribución* F *con media finita* μ.

Definición 27.365 *La función de renovación asociada con la distribución* F, *del proceso* $N(t)$, *es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.148 *Supóngase que la distribución de inter-renovación* F *tiene densidad* f. *Entonces* $U(t)$ *también tiene densidad, para* $t > 0$, *y es* $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. *Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 27.366 *La Transformada de Laplace-Stieljes de* F *está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.149 *La Transformada de Laplace* $\hat{U}(\alpha)$ *y* $\hat{F}(\alpha)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.

Nota 27.218 *Un proceso de renovación* $N(t)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, *para* $t \geq 0$.

Teorema 27.223 *Sea* $N(t)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ *es finita para cada* t. *Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N(t)$ *tal que* $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, *independiente de* n. *Entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.114 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación* $N(t)$,

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 27.367 *Sea* $h(t)$ *función de valores reales en* $\mathbb{R}$ *acotada en intervalos finitos e igual a cero para* $t < 0$ *La ecuación de renovación para* $h(t)$ *y la distribución* F *es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{27.433}$$

donde $H(t)$ *es una función de valores reales. Esto es* $H = h + F \star H$. *Decimos que* $H(t)$ *es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para* $t < 0$.

Proposición 27.150 *La función* $U \star h(t)$ *es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.224 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Nota 27.219 *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 27.225 (Teorema Principal de Renovación) *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 27.151 *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ \textit{donde}\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.368 *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)],\ \textit{para}\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.152 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 27.226 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 27.220 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.227 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 27.153 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.369 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T + t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.154 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 27.228 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 27.370 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.221 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 27.222 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 27.223 *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ*.*

Definición 27.371 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 27.224 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 27.229 (Procesos Regenerativos) *Suponga que el proceso*

Definición 27.372 (Renewal Process Trinity) *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t*.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t*, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t*.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$*, la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t*.*

Nota 27.225 *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n*, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$*. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{27.434}$$

Ejemplo 27.10 (Tiempos de recurrencia Poisson) *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*, entonces de la expresión (34.8.10) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$*.*

Nota 27.226 *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 27.373 *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$*,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 27.227 *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$*,* $t \geq 0$*.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ *en* $\mathbb{R}_+$*, con puntos* $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$*.*

Proposición 27.155 *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$*, entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$*,* $t \geq 0$

Teorema 27.230 *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N *es estacionario.*

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 27.228 *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 27.115 *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 27.229 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 27.230 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.374 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.*

Definición 27.375 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\, du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\, du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.231 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.376 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.232 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Nota 27.233 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.377 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 27.234 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.378 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.235 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.379 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t + x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.380 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.381 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.231 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Procesos Regenerativos: Sigman[81]

Definición 27.382 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X*.*

Definición 27.383 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.236 *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_∞

27.1.61. Procesos de Renovación

Definición 27.384 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.435}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 27.385 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 27.237 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

27.1.62. Procesos de Renovación

Definición 27.386 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.436}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 27.387 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 27.238 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

27.1.63. Procesos de Renovación

Definición 27.388 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.437}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 27.389 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 27.239 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

27.1.64. Procesos de Renovación

Definición 27.390 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.438}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 27.391 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 27.240 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

27.1.65. Procesos de Renovación

Definición 27.392 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.439}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 27.393 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.241 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

27.1.66. Procesos Regenerativos Estacionarios: Visión clásica

Definición 27.394 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.440}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 27.395 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.242 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

27.1.67. Teorema Principal de Renovación

Nota 27.243 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.232 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 27.156 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.396 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.157 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 27.233 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

27.1.68. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &=& 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.158 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.244 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.234 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (27.441)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (27.442)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.116 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.443)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.397 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.235 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (27.444)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (27.445)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.117 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.446)$$

27.1.69. Función de Renovación

Definición 27.398 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \quad (27.447)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.159 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.236 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

27.1.70. Procesos de Renovación

Definición 27.399 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.448}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 27.400 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.245 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

27.1.71. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[35]

Definición 27.401 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.449}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 27.402 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.246 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.160 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 27.11 (Proceso Poisson) *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 27.247 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.237 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.450}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.451}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.118 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.452}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.403 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.238 *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.453}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.454}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.119 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.455}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.404 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.161 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 27.405 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.162 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.248 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.239 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.120 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 27.406 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \; t \geq 0, \tag{27.456}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.163 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.240 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.407 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.164 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 27.408 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_{+}} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^{n} = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.165 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.249 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.241 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.121 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}\left[N(t) + 1\right], \; t \geq 0,$$

Definición 27.409 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{27.457}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.166 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.242 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 27.250 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 27.243 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 27.167 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.410 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.168 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 27.244 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 27.251 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 27.245 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 27.169 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.411 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.170 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t)\,, \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]\,.$$

Teorema 27.246 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 27.412 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.252 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Nota 27.253 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 27.254 *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.413 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.255 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 27.247 (Procesos Regenerativos) *Suponga que el proceso*

Definición 27.414 (Renewal Process Trinity) *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- *$A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- *$B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- *$L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 27.256 *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{27.458}$$

Ejemplo 27.12 (Tiempos de recurrencia Poisson) *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (34.8.10) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 27.257 *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 27.415 *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 27.258 *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 27.171 *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 27.248 *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 27.259 *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 27.122 *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 27.260 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 27.261 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.416 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 27.417 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.262 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.418 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.263 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 27.264 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.419 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 27.265 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.420 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.266 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración, *y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.421 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.422 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 27.423 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 27.249 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración, *y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.424 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.425 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 27.426 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 27.250 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces
Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t. Entonces, determinando el primer momento es posible ver que

Definición 27.427 *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 27.428 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.*

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si $I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$ se tiene que $F_i(z) = I_i[P_i(z)]$ para $i = 1, 2$.
Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (34.422), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 27.429 *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 27.430 *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 27.431 *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

[10]

[10]In Stidham and Heyman [41] shows that is sufficient for the regenerative process to be stationary that the mean regenerative cycle time is finite: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$,

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1$.

27.1.72. Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [40]

Definición 27.432 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X*.*

Nota 27.267 *La existencia de un primer tiempo de regeneración,* R_1*, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos* $R_1, R_2 \ldots,$ *que satisfacen la propiedad deseada [40].*

Nota 27.268 *Para la cola* $GI/GI/1$ *los usuarios arriban con tiempos* t_n *y son atendidos con tiempos de servicio* S_n*, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)*$T_n = t_n - t_{n-1}$*, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que* $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$*.*

Definición 27.433 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.269 *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si* $X(t)$ *es regenerativo y se define el proceso* $Y(t)$ *por* $Y(t) = f(X(t))$ *para alguna función Borel medible* $f(\cdot)$*. Además* Y *es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que* X*.*
En general, los tiempos de renovación, Z_k *de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de* $X(t)$*.*

Nota 27.270 *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 27.271 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 27.272 *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_∞

27.1.73. Procesos Regenerativos

Nota 27.273 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 27.274 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Procesos Regenerativos: Sigman[81]

Definición 27.434 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 27.435 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.275 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

27.1.74. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t - s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.436 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t + x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.437 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 27.438 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t,w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.251 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

27.1.75. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ*.*

Definición 27.439 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Observación 27.11 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Observación 27.12 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.440 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t+R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X*.*

Nota 27.276 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.441 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} \quad = \quad \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X\left(t\right) dt\right]}{\mathbb{E}\left[R_1\right]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.277 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e\left(t\right)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

27.1.76. Procesos Regenerativos Estacionarios: Visión clásica

Definición 27.442 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\left(T_n \leq t\right), \tag{27.459}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N\left(t\right)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N\left(t\right) : t \geq 0\}$, denotado por $N\left(t\right)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N\left(t\right)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.443 *Un proceso puntual $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F\left(0\right) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N\left(t\right)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.278 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F\left(0\right) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\left(T_n \leq t\right)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

27.1.77. Teorema Principal de Renovación

Nota 27.279 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h\left(t\right) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h\left(t\right)| \leq b\left(t\right)$, donde b es DRI.

Teorema 27.252 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h\left(t\right)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h\left(s\right) ds.$$

Proposición 27.172 *Cualquier función $H\left(t\right)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right) = U \star h\left(t\right), \text{ donde } h\left(t\right) = H\left(t\right) - F \star H\left(t\right)$$

Definición 27.444 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.173 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t),\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 27.253 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\left\{|X(t)|:t\leq T\right\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T>t)\right]$.

27.1.78. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\left\{N(t)\geq n\right\}&=\left\{T_n\leq t\right\}\\ T_{N(t)}\leq\ &\ t\ <T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n)=n$, y

$$N(t)=\max\left\{n:T_n\leq t\right\}=\min\left\{n:T_{n+1}>t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n\leq t\right\}=F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\left\{N(t)\geq n\right\}&=\left\{T_n\leq t\right\}\\ P\left\{N(t)\leq n\right\}&=1-F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N(t)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{N(t)\geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N(t)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.174 *Para cada $t\geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right]<\infty$, para $m\geq 1$.*

Nota 27.280 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n\geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G\star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.254 *Para una constante $\mu\leq\infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n=\mu,\ c.s.\tag{27.460}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N(t)=1/\mu,\ c.s.\tag{27.461}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.123 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.462}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.445 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.255 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.463}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.464}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.124 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.465}$$

27.1.79. Función de Renovación

Definición 27.446 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s), \; t \geq 0, \tag{27.466}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.175 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.256 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

27.1.80. Procesos de Renovación

Definición 27.447 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.467}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.448 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.281 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

27.1.81. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[35]

Definición 27.449 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \qquad (27.468)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.450 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.282 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{N\left(t\right)\geq n\right\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 27.176 *Para cada* $t\geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^{m}\right]<\infty$*, para* $m\geq 1$*.*

Ejemplo 27.13 (Proceso Poisson) *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación* $N\left(t\right)$ *tienen distribución exponencial* $F\left(t\right)=q-e^{-\lambda t}$ *con tasa* λ*. Entonces* $N\left(t\right)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*.*

Nota 27.283 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_{1} *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_{n}*, para* $n\geq 2$*, a* $N\left(t\right)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_{n} *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G\star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$

Teorema 27.257 *Para una constante* $\mu\leq\infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_{n} &= \mu,\ c.s. && (27.469)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu,\ c.s. && (27.470)\end{aligned}$$

Es decir, T_{n} *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 27.125 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu\leq\infty$*, entonces*

$$t^{-1}N\left(t\right)\rightarrow 1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \tag{27.471}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\left\{Z\left(t\right):t\geq 0\right\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N\left(t\right)$

Definición 27.451 *Para el proceso* $\left\{Z\left(t\right):t\geq 0\right\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z\left(t\right)$ *en el intervalo* $\left(T_{n-1},T_{n}\right]$*:*

$$M_{n}=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_{n}}\left|Z\left(t\right)-Z\left(T_{n-1}\right)\right|$$

Teorema 27.258 *Supóngase que* $n^{-1}T_{n}\rightarrow\mu$ *c.s. cuando* $n\rightarrow\infty$*, donde* $\mu\leq\infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_{n}\right) &= a,\ c.s. && (27.472)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu,\ c.s. && (27.473)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_{n}=0$ *c.s.*

Corolario 27.126 *Si* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación, y* $\left(Z\left(T_{n}\right)-Z\left(T_{n-1}\right),M_{n}\right)$*, para* $n\geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right)\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_{1}\right)-Z\left(T_{0}\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_{1}\right]},\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \tag{27.474}$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación con distribución* F *con media finita* μ*.*

Definición 27.452 *La función de renovación asociada con la distribución* F*, del proceso* $N\left(t\right)$*, es*

$$U\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}\left(t\right),\ t\geq 0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right)=\mathbb{1}\left(t\geq 0\right)$*.*

Proposición 27.177 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 27.453 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.178 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.284 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.259 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.127 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1],\ t \geq 0,$$

Definición 27.454 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{27.475}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.179 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.260 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.455 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.180 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 27.456 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.181 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.285 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.261 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.128 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 27.457 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{27.476}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.182 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.262 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 27.286 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.263 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 27.183 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\textit{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 27.458 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\textit{ para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.184 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\textit{ donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 27.264 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Nota 27.287 *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.265 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 27.185 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\textit{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 27.459 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\textit{ para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.186 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\textit{ donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 27.266 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Definición 27.460 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 27.288 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 27.289 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 27.290 *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ*.*

Definición 27.461 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 27.291 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 27.267 (Procesos Regenerativos) *Suponga que el proceso*

Definición 27.462 (Renewal Process Trinity) *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t*.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t*, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t*.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$*, la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t*.*

Nota 27.292 *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n*, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$*. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t + y) - N((t - x)) = 0\} \qquad (27.477)$$

Ejemplo 27.14 (Tiempos de recurrencia Poisson) *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*, entonces de la expresión (34.8.10) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$*.*

Nota 27.293 *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 27.463 *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 27.294 *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 27.187 *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 27.268 *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 27.295 *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 27.129 *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 27.296 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Nota 27.297 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.464 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 27.465 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.298 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.466 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.299 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Nota 27.300 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.467 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 27.301 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.468 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.302 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$, *sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, *donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (* puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0, t]$. *El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración, *y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 27.469 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$, *para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel A.*

Definición 27.470 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.471 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$, *es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$, S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 27.269 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$. *Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t, *además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,*entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$, *sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, *donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (* puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0, t]$. *El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración, *y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 27.472 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$, *para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel A.*

Definición 27.473 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.474 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.270 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Sea la función generadora de momentos para L_i*, el número de usuarios en la cola* $Q_i(z)$ *en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de* $z^{L_i(t)}$ *sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces*
Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t*. Entonces, determinando el primer momento es posible ver que*

Definición 27.475 *El tiempo de Ciclo* C_i *es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola* i *es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por* $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$*, o equivalentemente* $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ *bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 27.476 *El tiempo de intervisita* I_i *es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por* $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$*.*

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$*. Dado que el número de usuarios presentes en* Q_i *al tiempo* $t = \tau_i(m+1)$ *es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo* $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si $I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$ *se tiene que* $F_i(z) = I_i[P_i(z)]$ *para* $i = 1, 2$*.*
Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (34.422), sean $T_1, T_2, \ldots$ *los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola* Q_j *es visitada por el servidor para dar servicio, es decir,* $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ *y* $\hat{L}_2(T_i) = 0$*, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,*

Definición 27.477 *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 27.478 *Para* T_i *se define,* M_i*, el número de ciclos de visita a la cola* Q_l*, durante el ciclo regenerativo, es decir,* M_i *es un proceso de renovación.*

Definición 27.479 *Para cada uno de los* M_i*'s, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo,* $C_i^{(m)}$*, para* $m = 1, 2, \ldots, M_i$*, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

[11]

[11] In Stidham and Heyman [41] shows that is sufficient for the regenerative process to be stationary that the mean regenerative cycle time is finite: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$,

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1$.

27.1.82. Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [40]

Definición 27.480 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X*.*

Nota 27.303 *La existencia de un primer tiempo de regeneración,* R_1*, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos* $R_1, R_2 \ldots,$ *que satisfacen la propiedad deseada [40].*

Nota 27.304 *Para la cola* $GI/GI/1$ *los usuarios arriban con tiempos* t_n *y son atendidos con tiempos de servicio* S_n*, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (*`i.i.d.`*)*$T_n = t_n - t_{n-1}$*, además los tiempos de servicio son* `i.i.d.` *e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que* $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$*.*

Definición 27.481 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.305 *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si* $X(t)$ *es regenerativo y se define el proceso* $Y(t)$ *por* $Y(t) = f(X(t))$ *para alguna función Borel medible* $f(\cdot)$*. Además* Y *es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que* X*.*
En general, los tiempos de renovación, Z_k *de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de* $X(t)$*.*

Nota 27.306 *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 27.307 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 27.308 *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_∞

27.1.83. Procesos Regenerativos

Nota 27.309 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 27.310 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Procesos Regenerativos: Sigman[81]

Definición 27.482 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X.

Definición 27.483 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.311 *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_∞

27.1.84. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t - s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (* puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0, t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 27.484 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t + x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 27.485 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.486 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.271 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

27.1.85. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ*.*

Definición 27.487 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Observación 27.13 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Observación 27.14 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.488 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X*.*

Nota 27.312 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.489 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.313 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

27.1.86. Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [40]

Definición 27.490 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 27.314 *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [40].*

Nota 27.315 *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 27.491 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.316 *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 27.317 *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 27.318 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 27.319 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

27.1.87. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.492 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.493 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 27.494 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 27.272 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 27.130 *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) \, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

27.1.88. Procesos de Renovación

Definición 27.495 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.478}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 27.496 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 27.320 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

27.1.89. Teorema Principal de Renovación

Nota 27.321 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.273 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 27.188 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,, \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.497 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)]\,, \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.189 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t)\,, \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]\,.$$

Teorema 27.274 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]$.

27.1.90. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \ t \ < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.190 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.322 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.275 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.479}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.480}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.131 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.481}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.498 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.276 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z\left(T_n\right) = a, \text{ c.s.} \quad (27.482)$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.483)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.132 *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.484)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned}\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq \quad t &< T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 27.191 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.323 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 27.277 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (27.485)$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N\left(t\right) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.486)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 27.133 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.487)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.499 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.278 *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n \to \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.488}$$
$$lim_{t \to \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.489}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n \to \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.134 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t \to \infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.490}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.192 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.324 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.279 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n \to \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.491}$$
$$lim_{t \to \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.492}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.135 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.493}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.500 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.280 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} &(27.494)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} &(27.495)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.136 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.496}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.193 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.325 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.281 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.497}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.498}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.137 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.499}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.501 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.282 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.500}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.501}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.138 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.502}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.194 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.326 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.283 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.503}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.504}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.139 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.505}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.502 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.284 *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.506}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.507}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.140 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z(T_1) - Z(T_0)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.508}$$

27.1.91. Función de Renovación

Definición 27.503 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{27.509}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.195 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.285 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.504 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.196 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 27.505 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.197 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.327 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.286 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.141 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 27.506 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.510}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.507 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.328 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

27.1.92. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[35]

Definición 27.508 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.511}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.509 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.329 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N(t) \geq n\right\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.198 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$*, para* $m \geq 1$.

Ejemplo 27.15 (Proceso Poisson) *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación* $N(t)$ *tienen distribución exponencial* $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ *con tasa* λ*. Entonces* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ.

Nota 27.330 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 27.287 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.512}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.513}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 27.142 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.514}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\left\{Z(t) : t \geq 0\right\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 27.510 *Para el proceso* $\left\{Z(t) : t \geq 0\right\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.288 *Supóngase que* $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.515}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.516}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 27.143 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z(T_1) - Z(T_0)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.517}$$

Supóngase que $N(t)$ *es un proceso de renovación con distribución* F *con media finita* μ.

Definición 27.511 *La función de renovación asociada con la distribución* F*, del proceso* $N(t)$*, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.199 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 27.512 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_{+}} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^{n} = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.200 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.331 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.289 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n|T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.144 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t)+1],\ t \geq 0,$$

Definición 27.513 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{27.518}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.201 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.290 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.514 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.202 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 27.515 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.203 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.332 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.291 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.145 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 27.516 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{27.519}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.204 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.292 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 27.333 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 27.293 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds.$$

Proposición 27.205 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 27.517 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.206 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 27.294 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Nota 27.334 *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.295 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds.$$

Proposición 27.207 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 27.518 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.208 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 27.296 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Definición 27.519 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, *sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 27.335 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 27.336 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 27.337 *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S, *espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S, *que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$, *con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, *con misma distribución* F *de media finita* μ.

Definición 27.520 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, *sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 27.338 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 27.297 (Procesos Regenerativos) *Suponga que el proceso*

Definición 27.521 (Renewal Process Trinity) *Para un proceso de renovación* $N(t)$, *los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t, *que es el tiempo desde la última renovación para* t.
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t, *residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t.
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t.

Nota 27.339 *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n, *y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$. *Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t + y) - N((t - x)) = 0\} \tag{27.520}$$

Ejemplo 27.16 (Tiempos de recurrencia Poisson) *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ, *entonces de la expresión (34.8.10) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 27.522 *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 27.340 *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ *en* $\mathbb{R}_+$, *con puntos* $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 27.209 *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 27.298 *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación* N *es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante* $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 27.341 *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 27.146 *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

27.1.93. Procesos Regenerativos

Nota 27.342 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \to S$.

Nota 27.343 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.523 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2, *independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1. *Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, *se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X.

Definición 27.524 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.344 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.525 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.345 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Nota 27.346 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.526 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 27.347 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.527 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.348 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.528 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.529 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 27.530 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 27.299 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.531 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.532 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 27.533 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t,w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.300 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ*.*

27.1.94. Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i *se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por*

$$\left\{T_1^i, T_2^i, \ldots, T_k^i, \ldots\right\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_i$*. Además se sabe que para*

$$T^* = \min\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

T^* *se distribuye de manera exponencial con parámetro*

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{4} \mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad y \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min\{\tilde{r}, \hat{r}\},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad y \text{ por tanto} \quad \overline{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \overline{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\overline{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* *tal que en el intervalo* $(0, t^*)$ *no ha llegado ningún usuario, es decir,*

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

27.1.95. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ.

Definición 27.534 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Observación 27.15 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \to S$.

Observación 27.16 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.535 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X.

Nota 27.349 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.536 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.350 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

27.1.96. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[35]

Definición 27.537 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.521}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.538 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 27.351 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.210 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^{m}\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.352 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 27.301 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.522}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.523}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.147 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.524}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\left\{Z\left(t\right) : t \geq 0\right\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N\left(t\right)$

Definición 27.539 *Para el proceso $\left\{Z\left(t\right) : t \geq 0\right\}$ se define la fluctuación máxima de $Z\left(t\right)$ en el intervalo $\left(T_{n-1}, T_n\right]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z\left(t\right) - Z\left(T_{n-1}\right)|$$

Teorema 27.302 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) = a, \text{ c.s.} \tag{27.525}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.526}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.148 *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.527}$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.540 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N\left(t\right)$, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = \mathbb{1}\left(t \geq 0\right)$.

Proposición 27.211 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U\left(t\right)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 27.541 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_{+}} e^{-\alpha t} dF\left(t\right), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.212 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.353 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.303 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.149 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1],\ t \geq 0,$$

Definición 27.542 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{27.528}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.213 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.304 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \text{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.543 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.214 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 27.544 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.215 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.354 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.305 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.150 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1],\ t \geq 0,$$

Definición 27.545 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{27.529}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.216 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.306 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Nota 27.355 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 27.307 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 27.217 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ \textit{donde}\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.546 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right], \textit{ para } t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.218 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right), \textit{ donde } h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 27.308 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Nota 27.356 *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t)\geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 27.309 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 27.219 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right), \textit{ donde } h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 27.547 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right], \textit{ para } t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.220 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right), \textit{ donde } h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 27.310 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

27.1.97. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.548 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 27.17 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 27.18 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.549 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 27.357 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.550 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.358 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

27.1.98. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ*.*

Definición 27.551 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Observación 27.19 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Observación 27.20 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.552 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X*.*

Nota 27.359 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.553 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.360 *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_∞

27.1.99. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0, t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 27.554 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel A.*

Definición 27.555 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.556 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.311 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

27.1.100. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0, t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 27.557 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel A.*

Definición 27.558 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.559 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.312 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$*.*

27.1.101. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n *están relacionados con los conteos de* $N(t)$ *por*

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq \quad t &< T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$*, y*

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n*-ésima convolución de* F*. Entonces*

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.221 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Nota 27.361 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la* n*-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 27.313 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_{n} &= \mu,\ c.s. \quad (27.530)\\
lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu,\ c.s. \quad (27.531)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.151 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N\left(t\right) \rightarrow 1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t \rightarrow \infty. \quad (27.532)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\left\{Z\left(t\right): t \geq 0\right\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N\left(t\right)$

Definición 27.560 *Para el proceso $\left\{Z\left(t\right): t \geq 0\right\}$ se define la fluctuación máxima de $Z\left(t\right)$ en el intervalo $\left(T_{n-1}, T_n\right]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z\left(t\right) - Z\left(T_{n-1}\right)|$$

Teorema 27.314 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_{n}\right) &= a,\ c.s. \quad (27.533)\\
lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu,\ c.s. \quad (27.534)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.152 *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]},\ c.s.\ cuando\ t \rightarrow \infty. \quad (27.535)$$

27.1.102. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$
\begin{aligned}
\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\
T_{N\left(t\right)} \leq & \ t < T_{N\left(t\right)+1},
\end{aligned}
$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$
\begin{aligned}
\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\
P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{\left(n+1\right)\star}\left(t\right)
\end{aligned}
$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 27.222 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.362 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.315 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.536}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.537}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.153 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.538}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.561 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.316 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.539}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.540}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.154 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.541}$$

27.1.103. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.223 *Para cada* $t \geq 0$, *la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, *para* $m \geq 1$.

Nota 27.363 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n, *para* $n \geq 2$, *a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G, *entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 27.317 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (27.542) \\ lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (27.543) \end{aligned}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 27.155 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$, *entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.544}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 27.562 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.318 *Supóngase que* $n^{-1} T_n \to \mu$ *c.s. cuando* $n \to \infty$, *donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (27.545) \\ lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (27.546) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 27.156 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, *para* $n \geq 1$, *son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.547}$$

27.1.104. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.224 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.364 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.319 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.548}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.549}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.157 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.550}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.563 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.320 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) = a, \text{ c.s.} \tag{27.551}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.552}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 27.158 *Si* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación, y* $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.553}$$

27.1.105. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\left\{V\left(t\right), t \geq 0\right\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\left\{X_1, X_2, \ldots\right\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \left\{V\left(\tau\right), \tau < s\right\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V\left(t-s\right) \in A | X_1 > t-s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R\left(t\right) = \max\left\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\right\}$ *=número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0,t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\left\{V\left(t\right), t \geq 0\right\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 27.564 *Se define el proceso estacionario,* $\left\{V^*\left(t\right), t \geq 0\right\}$*, para* $\left\{V\left(t\right), t \geq 0\right\}$ *por*

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right) \in A\right\} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[X\right]}\int_0^{\infty}\mathbb{P}\left\{V\left(t+x\right) \in A | X > x\right\}\left(1 - F\left(x\right)\right)dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel A.*

Definición 27.565 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.566 *Una modificación medible de un proceso* $\left\{V\left(t\right), t \geq 0\right\}$*, es una versión de este,* $\left\{V\left(t,w\right)\right\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*, S espacio de estados para* $\left\{V\left(t\right), t \geq 0\right\}$*.*

Teorema 27.321 *Sea* $\left\{V\left(t\right), t \geq\right\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}\left[X\right] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^*\left(0\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^*\left(0\right)\right] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V\left(s\right)ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V\left(s\right)ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

27.1.106. Procesos de Renovación

Definición 27.567 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.554}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.568 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.365 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

27.1.107. Teorema Principal de Renovación

Nota 27.366 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.322 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 27.225 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.569 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T + t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.226 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 27.323 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$.

27.1.108. Función de Renovación

Definición 27.570 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s)\,,\ t \geq 0, \tag{27.555}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.227 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.324 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \to \infty.$$

27.1.109. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.228 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.367 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.325 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu,\ c.s. \tag{27.556}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu,\ c.s. \tag{27.557}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.159 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.558)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.571 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.326 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (27.559)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (27.560)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.160 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.561)$$

27.1.110. Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.572 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.229 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 27.573 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.230 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.368 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.327 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.161 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t) + 1\right],\ t \geq 0,$$

27.1.111. Procesos de Renovación

Definición 27.574 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)\,, \tag{27.562}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.575 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.369 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

27.1.112. Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\left\{T_1^i, T_2^i, \ldots, T_k^i, \ldots\right\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_i$. Además se sabe que para

$$T^* = \min\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

T^* se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{4} \mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad y \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min\{\tilde{r}, \hat{r}\},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad y \text{ por tanto} \quad \overline{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \overline{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\overline{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

27.1.113. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.576 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 27.21 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Observación 27.22 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.577 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 27.370 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.578 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.371 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

27.1.114. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[35]

Definición 27.579 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.563}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.580 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 27.372 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \;t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \text{máx}\{n : T_n \leq t\} = \text{mín}\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.231 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.373 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.328 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.564}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.565}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.162 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.566}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.581 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.329 *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.567}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.568}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.163 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.569}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.582 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.232 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 27.583 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.233 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.374 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.330 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.164 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \, t \geq 0,$$

Definición 27.584 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \, t \geq 0, \tag{27.570}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.234 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.331 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.585 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.235 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 27.586 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.236 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.375 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.332 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.165 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \, t \geq 0,$$

Definición 27.587 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \, t \geq 0, \tag{27.571}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.237 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.333 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 27.376 *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h\left(t\right)\geq0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $\left|h\left(t\right)\right|\leq b\left(t\right)$, donde b es DRI.*

Teorema 27.334 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h\left(t\right)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 27.238 *Cualquier función $H\left(t\right)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right)\text{, donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 27.588 *Un proceso estocástico $X\left(t\right)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]\text{, para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.239 *Supóngase que $X\left(t\right)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right)\text{, donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 27.335 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X\left(t\right)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\left\{\left|X\left(t\right)\right|:t\leq T\right\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right]$.

Nota 27.377 *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h\left(t\right)\geq0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $\left|h\left(t\right)\right|\leq b\left(t\right)$, donde b es DRI.*

Teorema 27.336 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h\left(t\right)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 27.240 *Cualquier función $H\left(t\right)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right)\text{, donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 27.589 *Un proceso estocástico $X\left(t\right)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]\text{, para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.241 *Supóngase que $X\left(t\right)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right)\text{, donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 27.337 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$.

27.1.115. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.590 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 27.23 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 27.24 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.591 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

- *i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$*
- *ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$*

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 27.378 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.592 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.379 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

27.1.116. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ*.*

Definición 27.593 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Observación 27.25 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \to S$*.*

Observación 27.26 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.594 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X*.*

Nota 27.380 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.595 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.381 *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_∞

27.1.117. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (* puntos de regeneración *) que ocurren en* $[0, t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 27.596 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 27.597 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.598 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.338 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$*.*

27.1.118. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (* puntos de regeneración *) que ocurren en* $[0, t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 27.599 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 27.600 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.601 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.339 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

27.1.119. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n *están relacionados con los conteos de* $N(t)$ *por*

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$*, y*

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F*. Entonces*

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.242 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Nota 27.382 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 27.340 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (27.572)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (27.573) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.166 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.574}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.602 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.341 *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (27.575)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (27.576) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.167 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.577}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \ t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.243 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.383 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.342 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (27.578)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (27.579) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.168 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.580}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.603 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.343 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (27.581)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (27.582) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.169 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z(T_1) - Z(T_0)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.583}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq \quad t &< T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.244 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Nota 27.384 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 27.344 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.584}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.585}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 27.170 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.586}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 27.604 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.345 *Supóngase que* $n^{-1} T_n \to \mu$ *c.s. cuando* $n \to \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.587}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.588}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 27.171 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.589}$$

27.1.120. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &=& 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.245 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.385 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.346 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.590}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.591}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.172 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.592}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.605 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.347 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (27.593)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (27.594)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.173 *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (27.595)$$

27.1.121. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\left\{V\left(t\right), t \geq 0\right\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\left\{X_1, X_2, \ldots\right\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \left\{V\left(\tau\right), \tau < s\right\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V\left(t - s\right) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R\left(t\right) = \max\left\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\right\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\left\{V\left(t\right), t \geq 0\right\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración, *y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.606 *Se define el proceso estacionario, $\left\{V^*\left(t\right), t \geq 0\right\}$, para $\left\{V\left(t\right), t \geq 0\right\}$ por*

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right) \in A\right\} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[X\right]}\int_0^{\infty}\mathbb{P}\left\{V\left(t + x\right) \in A | X > x\right\}\left(1 - F\left(x\right)\right)dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.607 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 27.608 *Una modificación medible de un proceso $\left\{V\left(t\right), t \geq 0\right\}$, es una versión de este, $\left\{V\left(t, w\right)\right\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\left\{V\left(t\right), t \geq 0\right\}$.*

Teorema 27.348 *Sea $\left\{V\left(t\right), t \geq\right\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}\left[X\right] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^*\left(0\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^*\left(0\right)\right] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V\left(s\right)ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V\left(s\right)ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

27.1.122. Procesos de Renovación

Definición 27.609 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.596}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 27.610 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 27.386 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

27.1.123. Teorema Principal de Renovación

Nota 27.387 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.349 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 27.246 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.611 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.247 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 27.350 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$.

27.1.124. Función de Renovación

Definición 27.612 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s)\,,\; t\geq 0, \tag{27.597}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 27.248 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.351 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu,\; cuando\; t \rightarrow \infty.$$

27.1.125. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{eqnarray*}
\{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\}\\
T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},
\end{eqnarray*}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{eqnarray*}
\{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\}\\
P\{N(t) \leq n\} &=& 1 - F^{(n+1)\star}(t)
\end{eqnarray*}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.249 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.388 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.352 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{eqnarray}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &=& \mu,\; c.s. \tag{27.598}\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) &=& 1/\mu,\; c.s. \tag{27.599}
\end{eqnarray}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.174 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.600}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.613 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.353 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (27.601)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (27.602)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.175 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.603}$$

27.1.126. Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.614 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.250 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 27.615 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.251 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.389 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.354 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.176 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t) + 1]\,,\ t \geq 0,$$

27.1.127. Procesos de Renovación

Definición 27.616 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)\,, \tag{27.604}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.617 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.390 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

27.1.128. Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\left\{T_1^i, T_2^i, \ldots, T_k^i, \ldots\right\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_i$. Además se sabe que para

$$T^* = \min\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

T^* se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{4} \mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad y \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min\{\tilde{r}, \hat{r}\},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \overline{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \overline{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\overline{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.
Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.618 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.252 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 27.619 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.253 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.391 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.355 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.177 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

27.1.129. Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.620 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.254 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 27.621 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.255 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.392 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.356 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.178 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

27.1.130. Función de Renovación

Definición 27.622 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t)=h(t)+\int_{[0,t]}H(t-s)\,dF(s)\,,\ t\geq 0,\tag{27.605}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 27.256 *La función $U\star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.357 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t)\rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t\rightarrow\infty.$$

27.1.131. Función de Renovación

Definición 27.623 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t)=h(t)+\int_{[0,t]}H(t-s)\,dF(s)\,,\ t\geq 0,\tag{27.606}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 27.257 *La función $U\star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.358 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t)\rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t\rightarrow\infty.$$

27.1.132. Función de Renovación

Definición 27.624 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t)=h(t)+\int_{[0,t]}H(t-s)\,dF(s)\,,\ t\geq 0,\tag{27.607}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 27.258 *La función $U\star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.359 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t)\rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t\rightarrow\infty.$$

27.1.133. Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.625 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)\,,\ t\geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t)=\mathbb{1}(t\geq 0)$.

Proposición 27.259 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 27.626 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.260 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.393 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.360 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.179 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

27.1.134. Función de Renovación

Definición 27.627 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{27.608}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.261 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.361 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

27.1.135. Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.628 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.262 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 27.629 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.263 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.394 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.362 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.180 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \, t \geq 0,$$

27.1.136. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.630 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Observación 27.27 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Observación 27.28 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.631 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X*.*

Nota 27.395 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.632 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.396 *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_{∞}

Definición 27.633 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X*.*

Nota 27.397 *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [40].*

Nota 27.398 *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 27.634 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.399 *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*
En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 27.400 *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 27.401 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 27.402 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.635 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.636 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 27.637 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t,w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.363 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$*.*

Corolario 27.181 *Sea* $\{V(t), t \geq 0\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E} < \infty$*,* F *es no-aritmética, y para todo* $x \geq 0$*,* $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $[0,\tau]$*, entonces* $V(t)$ *converge en distribución cuando* $t \to \infty$ *y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\,ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V(t)$ *cuando* $t \to \infty$*.*

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 27.638 *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0,t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \qquad (27.609)$$

para $t \geq 0$*.*

Si se consideran los puntos T_n *como elementos de* $\mathbb{R}_+$*, y* $N(t)$ *es el número de puntos en* $\mathbb{R}$*. El proceso denotado por* $\{N(t) : t \geq 0\}$*, denotado por* $N(t)$*, es un proceso puntual en* $\mathbb{R}_+$*. Los* T_n *son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual* $N(t)$ *es simple si su número de ocurrencias son distintas:* $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ *casi seguramente.*

Definición 27.639 *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, para* $n \geq 1$*, son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F*, donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$*. Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0,t)$

Nota 27.403 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F*, con* $F(0) = 0$*, para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F*. Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$*, donde* $T_n \to \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 27.404 *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 27.364 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+}h(s)\,ds.$$

Proposición 27.264 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t)\,,\text{ donde } h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 27.640 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\text{ para } t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.265 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t)\,,\text{ donde } h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 27.365 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t)\geq n\} & = & \{T_n\leq t\}\\ T_{N(t)}\leq & t & <T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n)=n$, y

$$N(t)=\max\{n:T_n\leq t\}=\min\{n:T_{n+1}>t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n\leq t\}=F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t)\geq n\} & = & \{T_n\leq t\}\\ P\{N(t)\leq n\} & = & 1-F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N(t)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.266 *Para cada $t\geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right]<\infty$, para $m\geq 1$.*

Nota 27.405 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.366 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (27.610)$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.611)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.182 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.612)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.641 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.367 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (27.613)$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.614)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.183 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.615)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.267 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^{m}\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.406 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 27.368 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} \qquad (27.616)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \qquad (27.617)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.184 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (27.618)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z\left(t\right) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N\left(t\right)$

Definición 27.642 *Para el proceso $\{Z\left(t\right) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z\left(t\right)$ en el intervalo $\left(T_{n-1}, T_n\right]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z\left(t\right) - Z\left(T_{n-1}\right)|$$

Teorema 27.369 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} \qquad (27.619)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} \qquad (27.620)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.185 *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (27.621)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \{N\left(t\right) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq &\quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.268 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$.

Nota 27.407 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 27.370 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \quad (27.622)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.623)\end{aligned}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N /t) la cumple.*

Corolario 27.186 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.624)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 27.643 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.371 *Supóngase que* $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \quad (27.625)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.626)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 27.187 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.627)$$

Los tiempos T_n *están relacionados con los conteos de* $N(t)$ *por*

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$*, y*

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.269 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.408 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.372 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.628}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.629}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.188 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.630}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.644 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.373 *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.631}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.632}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.189 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.633}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \text{máx}\{n : T_n \leq t\} = \text{mín}\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.270 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.409 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.374 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.634}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.635}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.190 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.636}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.645 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.375 *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.637}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.638}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.191 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.639}$$

Definición 27.646 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s), \; t \geq 0, \tag{27.640}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.271 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.376 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.647 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.272 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 27.648 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.273 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.410 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.377 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\,d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n|T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\,d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.192 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right], \, t \geq 0,$$

Definición 27.649 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.641}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.650 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.411 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃ^{o}meros.*

Definición 27.651 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.642}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.652 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.412 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \text{máx}\{n : T_n \leq t\} = \text{mín}\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.274 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 27.17 (Proceso Poisson) *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 27.413 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.378 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} &(27.643)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} &(27.644)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.193 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.645)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.653 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.379 *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} &(27.646)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} &(27.647)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.194 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.648}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.654 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.275 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 27.655 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.276 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.414 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.380 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.195 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 27.656 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{27.649}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.277 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.381 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.657 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.278 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 27.658 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.279 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.415 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.382 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.196 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 27.659 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \ t \geq 0, \tag{27.650}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.280 *La función* $U \star h(t)$ *es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.383 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 27.416 *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 27.384 (Teorema Principal de Renovación) *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 27.281 *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.660 *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.282 *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 27.385 (Regeneración Cruda) *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$*.*

Nota 27.417 *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 27.386 (Teorema Principal de Renovación) *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 27.283 *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.661 *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.284 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 27.387 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 27.662 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.418 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 27.419 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 27.420 *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.663 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.421 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 27.388 (Procesos Regenerativos) *Suponga que el proceso*

Definición 27.664 (Renewal Process Trinity) *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- *$A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- *$B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- *$L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 27.422 *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t + y) - N((t - x)) = 0\} \tag{27.651}$$

Ejemplo 27.18 (Tiempos de recurrencia Poisson) *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (34.8.10) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x+y$.

Nota 27.423 *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 27.665 *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 27.424 *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 27.285 *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 27.389 *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 27.425 *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 27.197 *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 27.426 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 27.427 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.666 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 27.667 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} \quad = \quad \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.428 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t): t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.668 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)): t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t): 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.429 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f: \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 27.430 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.669 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t): t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1): t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t): t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1): t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t): t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 27.431 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.670 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} \quad = \quad \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.432 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración, *y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.671 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.672 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 27.673 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 27.390 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración, *y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.674 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.675 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.676 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.391 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ*.*
Sean $T_1, T_2, \ldots$ *los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola* Q_j *es visitada por el servidor para dar servicio, es decir,* $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ *y* $\hat{L}_2(T_i) = 0$*, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Sea la función generadora de momentos para* L_i*, el número de usuarios en la cola* $Q_i(z)$ *en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de* $z^{L_i(t)}$ *sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:*

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i *es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con* $\mathbb{E}[M_i] < \infty$[12]*, se sigue del lema de Wald que:*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right] = \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

[12] En Stidham[41] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1$.

Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (??): $n \rightarrow t - \tau_i(m)$, $T \rightarrow \overline{\tau}_i(m) - \tau_i(m)$, $L_n \rightarrow L_i(t)$ y $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right] \rightarrow F_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i \tau_i(m)}\right]$, se puede ver que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} \tag{27.652}$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1 - \mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1 - P_i(z)} \\ &= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)}\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]} \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}\left\{z\frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} + \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}\right\}\end{aligned}$$

es decir

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \tag{27.653}$$

Teorema 27.392 *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t, $A_j(t) = \{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\}$ para algún tiempo $t \geq 0$ y Q_j la cola j-ésima en la RSVC, para $j = 1, 2, 3, 4$. Existe un intervalo $I \neq \emptyset$ tal que para $T^* \in I$, tal que $\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(Tt^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I\} > 0$.*

Demostración 27.4 *Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.*

Sea $n > 0$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1(n) > 0$, entonces tenemos que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1(n)$.

Definamos el intervalo $I_1 \equiv [\overline{\tau}_1(n), \tau_2(n)]$ de longitud $\xi_1 = r_1(n)$. Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$\mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)}. \tag{27.654}$$

Por otra parte, para la cola Q_2, el tiempo $\overline{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\overline{\tau}_2(n-1))=0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n. Entonces tenemos un sgundo intervalo $I_2 \equiv [\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)}, \tag{27.655}$$

donde $\xi_2(n) = \tau_2(n) - \overline{\tau}_2(n-1)$.
Entonces, se tiene que

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} & = & \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\} \\ & \geq & \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} \\ & = & e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]}.\end{array}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]} > 0. \tag{27.656}$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC, se afirma que existe $m>0$ tal que $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$.
Para Q_3 sea $I_3 = [\overline{\tau}_3(m), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_3(m) = r_3(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(n)}. \tag{27.657}$$

Análogamente que como se hizo para Q_2, tenemos que para Q_4 se tiene el intervalo $I_4 = [\overline{\tau}_4(m-1), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_4(m) = \tau_4(m) - \overline{\tau}_4(m-1)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} = e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(n)}. \tag{27.658}$$

Al igual que para el primer sistema, dado que $I_3(m) \subset I_4(m)$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl}\xi_3(m) \leq \xi_4(m) & \Leftrightarrow & -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\ -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m) & \Leftrightarrow & e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} \\ \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} & \geq & \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\}\end{array}$$

Entonces, dado que los eventos A_3 y A_4 son independientes, se tiene que

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\} & = & \mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(m)\} \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} \\ & \geq & \mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(n)\} \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(n)\} \\ & = & e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)} e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} = e^{-[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)]}.\end{array}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\} = e^{-[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)]} > 0. \tag{27.659}$$

Por construcción se tiene que $I(n,m) \equiv I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$,entonces en particular se tienen las contenciones $I(n,m) \subseteq I_1(n)$ y $I(n,m) \subseteq I_3(m)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m} \equiv \ell(I(n,m))$ tenemos que

$$\xi_{n,m} \leq \xi_1(n) \text{ y } \xi_{n,m} \leq \xi_3(m) \text{ entonces } -\xi_{n,m} \geq -\xi_1(n) \text{ y } -\xi_{n,m} \leq -\xi_3(m)$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{array}{ll}-\tilde{\mu}_1 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_1 \xi_1(n), & -\tilde{\mu}_2 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_2(n), \\ -\tilde{\mu}_3 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_3 \xi_3(m), & -\tilde{\mu}_4 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m).\end{array}$$

Sea $T^* \in I_{n,m}$, entonces dado que en particular $T^* \in I_1(n)$ se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2, en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4, es decir, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$, $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I_{n,m}$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4, por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{A_1(T^*), A_2(T^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I_{n,m}\right\} = \prod_{j=1}^{4} \mathbb{P}\left\{A_j(T^*) | T^* \in I_{n,m}\right\} \\
&\geq \mathbb{P}\left\{A_1(T^*) | T^* \in I_1(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_2(T^*) | T^* \in I_2(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_3(T^*) | T^* \in I_3(m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(T^*) | T^* \in I_4(m)\right\} \\
&= e^{-\mu_1 \xi_1(n)} e^{-\mu_2 \xi_2(n)} e^{-\mu_3 \xi_3(m)} e^{-\mu_4 \xi_4(m)} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n) + \tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)]} > 0.
\end{aligned} \tag{27.660}$$

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [13] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- *Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.*
- *Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.*
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- *Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:*

  Teorema 27.393 *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right) 2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2 (1-\delta)^{-1}.
\end{aligned}$$

  Teorema 27.394 *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 27.395 *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

En Sigman, Thorison y Wolff [40] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 27.286 *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- *Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.*
- *Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.*
- *Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:*

  Teorema 27.396 *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso **I** es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*

  b) *$L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;*

  c) *$L = 1$ y $G = D$;*

d) $L = \infty$ *y* $G = M$.

En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ *son*

a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;

b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;

c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;

d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- *Finch (1959) mostró que para los sistemas* $M/G/1/L$, *con* $1 \leq L \leq \infty$ *con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema* $M/M/1/\infty$ *tiene proceso de salida de renovación estacionario.*
- *King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario* $M/G/1/1$ *tiene sus tiempos de interpartida sucesivas* D_n *y* D_{n+1} *son independientes, si y sólo si,* $G = D$, *en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.*
- *Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario* $M/G/1/L$, *que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas* $M/M/1$ *y* $M/D/1/1$.
- *El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)*

  Teorema 27.397 *En un sistema de espera* $M/G/s$, *el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.

  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$

  d) $G = M$.

- *El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)*

  Teorema 27.398 *En cualquier sistema de colas* $GI/G/1/L$ *con* $1 \leq L < \infty$ *y distribución de interarribos* A *y distribución de los tiempos de servicio* B, *tal que* $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ *para alguna* $t > 0$ *y* $B(t)$ *para toda* $t > 0$, *es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [13] para $\{T_n\}$ *intervalos de inter-arribo,* $\{D_n\}$ *intervalos de inter-salida y* $\{S_n\}$ *tiempos de servicio.*

- *Si el proceso* $\{T_n\}$ *es Poisson, el proceso* $\{D_n\}$ *es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si* $\{S_n\}$ *son exponenciales negativas.*
- *Si* $\{S_n\}$ *son exponenciales negativas,* $\{D_n\}$ *es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si* $\{T_n\}$ *es un proceso Poisson.*
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- *Para un sistema de visitas* $GI/M/1$ *se tiene el siguiente teorema:*

  Teorema 27.399 *En un sistema estacionario* $GI/M/1$ *los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2(1-\delta)^{-1}.
\end{aligned}$$

Teorema 27.400 *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario* $GI/M/1$ *es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 27.401 *Los intervalos de interpartida* $\{D_n\}$ *de un sistema* $M/G/1$ *estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo* $M/M/1$.

Sean Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 en una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC). Supongamos que cada una de las colas es del tipo $M/M/1$ con tasa de arribo μ_i y que la transferencia de usuarios entre los dos sistemas ocurre entre $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$ con respectiva tasa de arribo igual a la tasa de salida $\hat{\mu}_i = \mu_i$, esto se sabe por lo desarrollado en la sección anterior.

Consideremos, sin pérdida de generalidad como base del análisis, la cola Q_1 además supongamos al servidor lo comenzamos a observar una vez que termina de atender a la misma para desplazarse y llegar a Q_2, es decir al tiempo τ_2.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, ciclo del servidor en que regresa a Q_1 para dar servicio y atender conforme a la política exhaustiva, entonces se tiene que $\overline{\tau}_1(n)$ es el tiempo del servidor en el sistema 1 en que termina de dar servicio a todos los usuarios presentes en la cola, por lo tanto se cumple que $L_1(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, entonces el servidor para llegar a Q_2 incurre en un tiempo de traslado r_1 y por tanto se cumple que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1$. Dado que los tiempos entre arribos son exponenciales se cumple que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{0 \textit{ arribos en } Q_1 \textit{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n) + r_1]\} = e^{-\tilde{\mu}_1 r_1},\\ \mathbb{P}\{0 \textit{ arribos en } Q_2 \textit{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n) + r_1]\} = e^{-\tilde{\mu}_2 r_1}.\end{aligned}$$

El evento que nos interesa consiste en que no haya arribos desde que el servidor abandonó Q_2 y regresa nuevamente para dar servicio, es decir en el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Entonces, si hacemos

$$\begin{aligned}\varphi_1(n) &\equiv \overline{\tau}_1(n) + r_1 = \overline{\tau}_2(n-1) + r_1 + r_2 + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n)\\ &= \overline{\tau}_2(n-1) + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r,,\end{aligned}$$

y longitud del intervalo

$$\begin{aligned}\xi &\equiv \overline{\tau}_1(n) + r_1 - \overline{\tau}_2(n-1) = \overline{\tau}_2(n-1) + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r - \overline{\tau}_2(n-1)\\ &= \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r.\end{aligned}$$

Entonces, determinemos la probabilidad del evento no arribos a Q_2 en $[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]$:

$$\mathbb{P}\{0 \textit{ arribos en } Q_2 \textit{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi}. \tag{27.661}$$

De manera análoga, tenemos que la probabilidad de no arribos a Q_1 en $[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]$ esta dada por

$$\mathbb{P}\{0 \textit{ arribos en } Q_1 \textit{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi}, \tag{27.662}$$

$$\mathbb{P}\{0 \textit{ arribos en } Q_2 \textit{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi}. \tag{27.663}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\{0 \textit{ arribos en } Q_1 \textit{ y } Q_2 \textit{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\}\\ &= \mathbb{P}\{0 \textit{ arribos en } Q_1 \textit{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\}\\ &\times \mathbb{P}\{0 \textit{ arribos en } Q_2 \textit{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi} = e^{-\tilde{\mu} \xi}.\end{aligned} \tag{27.664}$$

Para el segundo sistema, consideremos nuevamente $\overline{\tau}_1(n) + r_1$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $m > 0$ tal que $\overline{\tau}_3(m) < \overline{\tau}_1 + r_1 < \tau_4(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\{0 \textit{ arribos en } Q_3 \textit{ en el intervalo } [\overline{\tau}_3(m), \overline{\tau}_1(n) + r_1]\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3}, \tag{27.665}$$

donde

$$\xi_3 = \overline{\tau}_1(n) + r_1 - \overline{\tau}_3(m) = \overline{\tau}_1(n) - \overline{\tau}_3(m) + r_1, \tag{27.666}$$

mientras que para Q_4 al igual que con Q_2 escribiremos $\tau_4(m)$ en términos de $\overline{\tau}_4(m-1)$:
$\varphi_2 \equiv \tau_4(m) = \overline{\tau}_4(m-1) + r_4 + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) + r_3 = \overline{\tau}_4(m-1) + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) + \hat{r}$, *además,*
$\xi_2 \equiv \varphi_2(m) - \overline{\tau}_1 - r_1 = \overline{\tau}_4(m-1) + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) - \overline{\tau}_1(n) + \hat{r} - r_1$.
Entonces

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_4 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_2}, \tag{27.667}$$

mientras que para Q_3 se tiene que

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_2} \tag{27.668}$$

Por tanto

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3 \wedge Q_4 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)\right]\right\} = e^{-\hat{\mu} \xi_2} \tag{27.669}$$

donde $\hat{\mu} = \tilde{\mu}_3 + \tilde{\mu}_4$.
Ahora, definamos los intervalos $\mathcal{I}_1 = \left[\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_1(n)\right]$ y $\mathcal{I}_2 = \left[\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)\right]$, entonces, sea $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ el intervalo donde cada una de las colas se encuentran vacías, es decir, si tomamos $T^* \in \mathcal{I}$, entonces $L_1(T^*) = L_2(T^*) = L_3(T^*) = L_4(T^*) = 0$.
Ahora, dado que por construcción $\mathcal{I} \neq \emptyset$ y que para $T^* \in \mathcal{I}$ en ninguna de las colas han llegado usuarios, se tiene que no hay transferencia entre las colas, por lo tanto, el sistema 1 y el sistema 2 son condicionalmente independientes en $\mathcal{I}$, es decir

$$\mathbb{P}\left\{L_1(T^*), L_2(T^*), L_3(T^*), L_4(T^*) | T^* \in \mathcal{I}\right\} = \prod_{j=1}^{4} \mathbb{P}\left\{L_j(T^*)\right\}, \tag{27.670}$$

para $T^* \in \mathcal{I}$.

Definición 27.677 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 27.433 *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [40].*

Nota 27.434 *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 27.678 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.435 *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*
En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 27.436 *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 27.437 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 27.438 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.679 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.680 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 27.681 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 27.402 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Corolario 27.198 *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \to \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \to \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 27.682 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.671}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.683 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.439 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 27.440 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.403 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \to \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 27.287 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,, \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.684 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)\,|T] = \mathbb{E}[X(t)]\,, \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.288 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t)\,, \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]\,.$$

Teorema 27.404 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &=& 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.289 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.441 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.405 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.672}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.673}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.199 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.674}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.685 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.406 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (27.675)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (27.676) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.200 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.677}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 27.290 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.442 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 27.407 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (27.678)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (27.679) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 27.201 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.680}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 27.686 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.408 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \to \mu$ *c.s. cuando* $n \to \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (27.681)$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.682)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 27.202 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \quad (27.683)$$

Los tiempos T_n *están relacionados con los conteos de* $N(t)$ *por*

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$*, y*

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F*. Entonces*

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.291 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Nota 27.443 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 27.409 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (27.684)$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (27.685)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.203 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.686}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.687 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.410 *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.687}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.688}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.204 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1}Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.689}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.292 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.444 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.411 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (27.690)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (27.691)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.205 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.692)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.688 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.412 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (27.693)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (27.694)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.206 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.695)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\
T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\
P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)
\end{aligned}
$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.293 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^{m}\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.445 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 27.413 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.696}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.697}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.207 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.698}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\left\{Z\left(t\right) : t \geq 0\right\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N\left(t\right)$

Definición 27.689 *Para el proceso $\left\{Z\left(t\right) : t \geq 0\right\}$ se define la fluctuación máxima de $Z\left(t\right)$ en el intervalo $\left(T_{n-1}, T_n\right]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z\left(t\right) - Z\left(T_{n-1}\right)|$$

Teorema 27.414 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) = a, \text{ c.s.} \tag{27.699}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.700}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.208 *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.701}$$

Definición 27.690 *Sea $h\left(t\right)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h\left(t\right)$ y la distribución F es*

$$H\left(t\right) = h\left(t\right) + \int_{[0,t]} H\left(t-s\right)dF\left(s\right), \ t \geq 0, \tag{27.702}$$

donde $H\left(t\right)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H\left(t\right)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.294 *La función $U \star h\left(t\right)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.415 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.691 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.295 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 27.692 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.296 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.446 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.416 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.209 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 27.693 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.703}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.694 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.447 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 27.695 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.704}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.696 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.448 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.297 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 27.19 (Proceso Poisson) *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 27.449 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.417 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} &(27.705)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} &(27.706)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.210 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.707}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.697 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.418 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} &(27.708)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} &(27.709)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.211 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.710}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.698 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.298 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 27.699 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.299 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.450 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.419 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.212 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 27.700 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{27.711}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.300 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.420 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.701 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.301 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 27.702 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.302 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.451 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.421 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.213 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1], \, t \geq 0,$$

Definición 27.703 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \, t \geq 0, \tag{27.712}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.303 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.422 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 27.452 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.423 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \to \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) \, ds.$$

Proposición 27.304 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.704 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ \text{para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.305 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\,,\ \text{donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 27.424 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 27.453 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 27.425 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 27.306 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.705 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ \text{para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.307 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\,,\ \text{donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 27.426 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Definición 27.706 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 27.454 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \to S$*.*

Nota 27.455 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 27.456 *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ*.*

Definición 27.707 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 27.457 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 27.427 (Procesos Regenerativos) *Suponga que el proceso*

Definición 27.708 (Renewal Process Trinity) *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t*.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t*, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t*.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$*, la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t*.*

Nota 27.458 *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n*, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$*. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t + y) - N((t - x)) = 0\} \tag{27.713}$$

Ejemplo 27.20 (Tiempos de recurrencia Poisson) *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*, entonces de la expresión (34.8.10) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$*.*

Nota 27.459 *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 27.709 *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 27.460 *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ *en* $\mathbb{R}_+$, *con puntos* $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 27.308 *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 27.428 *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N *es estacionario.*

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 27.461 *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 27.214 *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 27.462 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \to S$.

Nota 27.463 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.710 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2, *independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1. *Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, *se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X.

Definición 27.711 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.464 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.712 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.465 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 27.466 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.713 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 27.467 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.714 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.468 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (* puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0,t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 27.715 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A\right\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\left\{V(t+x) \in A | X > x\right\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 27.716 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.717 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.429 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (* puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0,t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 27.718 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A\right\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\left\{V(t+x) \in A | X > x\right\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 27.719 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.720 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.430 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$*.*

Sea la función generadora de momentos para L_i*, el número de usuarios en la cola* $Q_i(z)$ *en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de* $z^{L_i(t)}$ *sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces*
Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t*. Entonces, determinando el primer momento es posible ver que*

Definición 27.721 *El tiempo de Ciclo* C_i *es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola* i *es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por* $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$*, o equivalentemente* $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ *bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 27.722 *El tiempo de intervisita* I_i *es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por* $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$*.*

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$*. Dado que el número de usuarios presentes en* Q_i *al tiempo* $t = \tau_i(m+1)$ *es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo* $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si $I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$ *se tiene que* $F_i(z) = I_i[P_i(z)]$ *para* $i = 1, 2$*.*
Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (34.422), sean $T_1, T_2, \ldots$ *los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola* Q_j *es visitada por el servidor para dar servicio, es decir,* $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ *y* $\hat{L}_2(T_i) = 0$*, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,*

Definición 27.723 *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 27.724 *Para* T_i *se define,* M_i*, el número de ciclos de visita a la cola* Q_l*, durante el ciclo regenerativo, es decir,* M_i *es un proceso de renovación.*

Definición 27.725 *Para cada uno de los* M_i*'s, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo,* $C_i^{(m)}$*, para* $m = 1, 2, \ldots, M_i$*, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

[13]

[13] In Stidham and Heyman [41] shows that is sufficient for the regenerative process to be stationary that the mean regenerative cycle time is finite: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$,

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1$.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.726 *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.*

Nota 27.469 *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 27.727 *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma\left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 27.728 *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 27.431 *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 27.729 *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 27.730 *Dos espacios medibles $(E, \mathcal{E})$ y $(G, \mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \rightarrow G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 27.731 *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G, \mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 27.470 *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 27.732 *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ es una familia $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E, \mathcal{E})$.*

Definición 27.733 *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}}(E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 27.471 *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 27.472 *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E,\mathcal{E}) = (\mathbb{R},\mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_1} \leq x_1, \ldots, Z_{t_n} \leq x_n\right), x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{27.714}$$

Nota 27.473 *Para espacios polacos $(E,\mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 27.734 *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 27.474 *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H,\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{27.715}$$

Nota 27.475 *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ a $(H,\mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H,\mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 27.476 *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H,\mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 27.735 *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0,\infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w)\,.w \in \Omega.$$

Definición 27.736 *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible **(CM)** si el mapeo que toma $(w,t) \in \Omega \times [0,\infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 27.477 *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w,T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w,T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 27.737 *Un PEOSCT con espacio de estados $(H,\mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible **(CCM)** si el mapeo $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 27.478 *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0,\infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w,t) en $(Z(w),t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w),t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 27.738 *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s\in[0,\infty)} : z \in H\right\} = H,\ t \in [0,\infty).$$

Definición 27.739 *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0,\infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s\in[0,\infty)}\,,\ z \in H.$$

Definición 27.740 *Se dice que un proceso Z es shift-medible **(SM)** si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ medible.*

Nota 27.479 *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 27.480 • *Dado el espacio polaco $(E, \mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0,\infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*

- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 27.481 *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 27.432 *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 27.741 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L, \mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^\infty \in [0,\infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.
Así el par (Z, S) es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 27.742 *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z, (s_k)_0^\infty\right) = \theta_t\left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^\infty\right)$$

donde $n_{t-} = inf\{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 27.482 *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 27.743 *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0, S_n), S_0, \dots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 27.483 *Si el par (Z,S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \dots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 27.433 *Supóngase que el par (Z,S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z,S) con periodo d.*

Definición 27.744 *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_\mathbb{R} f(x)\,dx > 0$ con $X_2, X_3, \dots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\,dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 27.745 *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \dots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 27.484 • *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*

- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 27.485 *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 27.434 *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 27.435 *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0,S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega,\mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^*=\frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]}d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*,S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0,S^0\right)\in\cdot\right)$. Entonces $(Z*,S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*,S^*)]=\mathbb{E}\left[\int_0^{X_1}f\left(\theta_s\left(Z^0,S^0\right)\right)ds\right]/\mathbb{E}[X_1]$$

$f\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x):=\frac{\mathbb{E}[X_1]\wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x\geq0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1>x]/\mathbb{E}[X_1]$, con $x\geq0$.

Teorema 27.436 *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0\leq S_0<S_1$ y*

$$\theta_{S_1}Z=\theta_{S_0}Z\text{ en distribución.}\tag{27.716}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z,S)=\left(Z^0,S^0\right),n\geq0,\text{ en distribución,}\tag{27.717}$$

$$(Z,S_0,S_1)\text{ depende de }(X_2,X_3,\ldots)\text{ solamente a traves de }\theta_{S_1}Z.\tag{27.718}$$

Also the intervisit time I_i is defined as the period beginning at the time of its service completion in a cycle and ending at the time when it is polled in the next cycle; its duration is given by $\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$.
So we the following are still true

$$\begin{array}{ll}\mathbb{E}[L_i]=\mu_i\mathbb{E}[I_i], & \mathbb{E}[C_i]=\frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)},\\ \mathbb{E}[S_i]=\mu_i\mathbb{E}[C_i], & \mathbb{E}[I_i]=(1-\mu_i)\mathbb{E}[C_i],\\ Var[L_i]=\mu_i^2Var[I_i]+\sigma^2\mathbb{E}[I_i], & Var[C_i]=\frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2},\\ Var[S_i]=\frac{Var\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^3}, & Var[I_i]=\frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2}-\frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2}f_i(i).\end{array}\tag{27.719}$$

Definición 27.746 *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1)-\tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 27.747 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$.*

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si $I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$ se tiene que $F_i(z) = I_i[P_i(z)]$ para $i = 1, 2$.

Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (34.422), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 27.748 *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 27.749 *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 27.750 *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) \quad = \quad \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$[14], se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) \quad = \quad \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

*Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (**??**): $n \rightarrow t - \tau_i(m)$, $T \rightarrow \overline{\tau}_i(m) - \tau_i(m)$, $L_n \rightarrow L_i(t)$ y $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right] \rightarrow F_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i\tau_i(m)}\right]$, se puede ver que*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} \tag{27.720}$$

[14] En Stidham[41] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N}\mu_k < 1$.

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{1-I_i[P_i(z)]}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]} = \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\ &= \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} + \sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\ &= \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\}\\ &= \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]}\left\{z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)} + \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}\right\}\\ &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

es decir

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \tag{27.721}$$

Si hacemos:

$$S(z) = 1-F(z) \tag{27.722}$$

$$T(z) = z-P(z) \tag{27.723}$$

$$U(z) = 1-P(z) \tag{27.724}$$

entonces

$$\mathbb{E}[C_i]\,Q(z) = \frac{(z-1)S(z)P(z)}{T(z)U(z)} \tag{27.725}$$

A saber, si $a_k = P\{L(t)=k\}$

$$S(z) = 1-F(z) = 1-\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

entonces
$S'(z) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}$, *por tanto* $S^{(1)}(1) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k = -\mathbb{E}[L(t)]$, *luego* $S''(z) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k z^{k-2}$ *y* $S^{(2)}(1) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k = \mathbb{E}[L(L-1)]$; *de la misma manera* $S'''(z) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-$

$1)(k-2)a_k z^{k-3}$ *y* $S^{(3)}(1) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)a_k = -\mathbb{E}\left[L\left(L-1\right)\left(L-2\right)\right] = -\mathbb{E}\left[L^3\right]+3-\mathbb{E}\left[L^2\right]-2-\mathbb{E}\left[L\right]$.
Es decir

$$\begin{aligned}
S^{(1)}(1) &= -\mathbb{E}\left[L\left(t\right)\right],\\
S^{(2)}(1) &= -\mathbb{E}\left[L\left(L-1\right)\right] = -\mathbb{E}\left[L^2\right]+\mathbb{E}\left[L\right],\\
S^{(3)}(1) &= -\mathbb{E}\left[L\left(L-1\right)\left(L-2\right)\right] = -\mathbb{E}\left[L^3\right]+3\mathbb{E}\left[L^2\right]-2\mathbb{E}\left[L\right].
\end{aligned}$$

Expandiendo alrededor de $z=1$

$$\begin{aligned}
S(z) &= S(1) + \frac{S^{'}(1)}{1!}(z-1) + \frac{S^{''}(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{S^{'''}(1)}{3!}(z-1)^3 + \ldots +\\
&= (z-1)\left\{S^{'}(1) + \frac{S^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{S^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \ldots +\right\}\\
&= (z-1)R_1(z)
\end{aligned}$$

con $R_1(z) \neq 0$*, pues*

$$R_1(z) = -\mathbb{E}\left[L\right] \tag{27.726}$$

entonces

$$R_1(z) = S^{'}(1) + \frac{S^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{S^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \frac{S^{iv}(1)}{4!}(z-1)^3 + \ldots + \tag{27.727}$$

Calculando las derivadas y evaluando en $z=1$

$$\begin{aligned}
R_1(1) &= S^{(1)}(1) = -\mathbb{E}\left[L\right] && (27.728)\\
R_1^{(1)}(1) &= \frac{1}{2}S^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[L^2\right]+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[L\right] && (27.729)\\
R_1^{(2)}(1) &= \frac{2}{3!}S^{(3)}(1) = -\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[L^3\right]+\mathbb{E}\left[L^2\right]-\frac{2}{3}\mathbb{E}\left[L\right] && (27.730)
\end{aligned}$$

De manera análoga se puede ver que para $T(z) = z - P(z)$ *se puede encontrar una expanción alrededor de* $z=1$
Expandiendo alrededor de $z=1$

$$\begin{aligned}
T(z) &= T(1) + \frac{T^{'}(1)}{1!}(z-1) + \frac{T^{''}(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{T^{'''}(1)}{3!}(z-1)^3 + \ldots +\\
&= (z-1)\left\{T^{'}(1) + \frac{T^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{T^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \ldots +\right\}\\
&= (z-1)R_2(z)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
T^{(1)}(1) &= -\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right] = -\mu,\\
T^{(2)}(1) &= -\mathbb{E}\left[X\left(X-1\right)\right] = -\mathbb{E}\left[X^2\right]+\mathbb{E}\left[X\right] = -\mathbb{E}\left[X^2\right]+\mu,\\
T^{(3)}(1) &= -\mathbb{E}\left[X\left(X-1\right)\left(X-2\right)\right] = -\mathbb{E}\left[X^3\right]+3\mathbb{E}\left[X^2\right]-2\mathbb{E}\left[X\right]\\
&= -\mathbb{E}\left[X^3\right]+3\mathbb{E}\left[X^2\right]-2\mu.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $R_2(1) \neq 0$*, pues*

$$R_2(1) = 1-\mathbb{E}\left[X\right] = 1-\mu \tag{27.731}$$

entonces

$$R_2(z) = T^{'}(1) + \frac{T^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{T^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \frac{T^{(iv)}(1)}{4!}(z-1)^3 + \ldots + \quad (27.732)$$

Calculando las derivadas y evaluando en $z=1$

$$R_2(1) = T^{(1)}(1) = 1-\mu \quad (27.733)$$

$$R_2^{(1)}(1) = \frac{1}{2}T^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right] + \frac{1}{2}\mu \quad (27.734)$$

$$R_2^{(2)}(1) = \frac{2}{3!}T^{(3)}(1) = -\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[X^3\right] + \mathbb{E}\left[X^2\right] - \frac{2}{3}\mu \quad (27.735)$$

Finalmente para de manera análoga se puede ver que para $U(z) = 1 - P(z)$ se puede encontrar una expanción alrededor de $z=1$

$$\begin{aligned} U(z) &= U(1) + \frac{U^{'}(1)}{1!}(z-1) + \frac{U^{''}(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{U^{'''}(1)}{3!}(z-1)^3 + \ldots + \\ &= (z-1)\left\{U^{'}(1) + \frac{U^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{U^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \ldots + \right\} \\ &= (z-1)R_3(z) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} U^{(1)}(1) &= -\mathbb{E}[X(t)] = -\mu, \\ U^{(2)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)] = -\mathbb{E}\left[X^2\right] + \mathbb{E}[X] = -\mathbb{E}\left[X^2\right] + \mu, \\ U^{(3)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)] = -\mathbb{E}\left[X^3\right] + 3\mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}[X] \\ &= -\mathbb{E}\left[X^3\right] + 3\mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mu. \end{aligned}$$

Por lo tanto $R_3(1) \neq 0$, pues

$$R_3(1) = -\mathbb{E}[X] = -\mu \quad (27.736)$$

entonces

$$R_3(z) = U^{'}(1) + \frac{U^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{U^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \frac{U^{(iv)}(1)}{4!}(z-1)^3 + \ldots + \quad (27.737)$$

Calculando las derivadas y evaluando en $z=1$

$$R_3(1) = U^{(1)}(1) = -\mu \quad (27.738)$$

$$R_3^{(1)}(1) = \frac{1}{2}U^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right] + \frac{1}{2}\mu \quad (27.739)$$

$$R_3^{(2)}(1) = \frac{2}{3!}U^{(3)}(1) = -\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[X^3\right] + \mathbb{E}\left[X^2\right] - \frac{2}{3}\mu \quad (27.740)$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}[C_i]Q(z) = \frac{(z-1)(z-1)R_1(z)P(z)}{(z-1)R_2(z)(z-1)R_3(z)} = \frac{R_1(z)P(z)}{R_2(z)R_3(z)} \equiv \frac{R_1P}{R_2R_3} \quad (27.741)$$

Entonces

$$\left[\frac{R_1(z)P(z)}{R_2(z)R_3(z)}\right]^{'} = \frac{PR_2R_3R_1^{'} + R_1R_2R_3P^{'} - R_3R_1PR_2 - R_2R_1PR_3^{'}}{(R_2R_3)^2} \quad (27.742)$$

Evaluando en $z = 1$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R_2(1)R_3(1)R_1^{(1)}(1) + R_1(1)R_2(1)R_3(1)P^{'}(1) - R_3(1)R_1(1)R_2(1)^{(1)} - R_2(1)R_1(1)R_3^{'}(1)}{\left(R_2(1)R_3(1)\right)^2}\\
&= \frac{1}{(1-\mu)^2\mu^2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}L\right)(1-\mu)(-\mu) + (-\mathbb{E}L)(1-\mu)(-\mu)\mu\right.\\
&\left.-\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2 + \frac{1}{2}\mu\right)(-\mu)(-\mathbb{E}L) - (1-\mu)(-\mathbb{E}L)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2 + \frac{1}{2}\mu\right)\right\}\\
&= \frac{1}{(1-\mu)^2\mu^2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}L\right)\left(\mu^2-\mu\right) + \left(\mu^2-\mu^3\right)\mathbb{E}L\right.\\
&\left.-\mu\mathbb{E}L\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2 + \frac{1}{2}\mu\right) + (\mathbb{E}L - \mu\mathbb{E}L)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2 + \frac{1}{2}\mu\right)\right\}\\
&= \frac{1}{(1-\mu)^2\mu^2}\left\{-\frac{1}{2}\mu^2\mathbb{E}L^2 + \frac{1}{2}\mu\mathbb{E}L^2 + \frac{1}{2}\mu^2\mathbb{E}L - \mu^3\mathbb{E}L + \mu\mathbb{E}L\mathbb{E}X^2 - \frac{1}{2}\mathbb{E}L\mathbb{E}X^2\right\}\\
&= \frac{1}{(1-\mu)^2\mu^2}\left\{\frac{1}{2}\mu\mathbb{E}L^2(1-\mu) + \mathbb{E}L\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\left(\mu^2 - \mathbb{E}X^2\right)\right\}\\
&= \frac{1}{2\mu(1-\mu)}\mathbb{E}L^2 - \frac{\frac{1}{2}-\mu}{(1-\mu)^2\mu^2}\sigma^2\mathbb{E}L
\end{aligned}$$

por lo tanto (para Takagi)

$$Q^{(1)} = \frac{1}{\mathbb{E}C}\left\{\frac{1}{2\mu(1-\mu)}\mathbb{E}L^2 - \frac{\frac{1}{2}-\mu}{(1-\mu)^2\mu^2}\sigma^2\mathbb{E}L\right\}$$

donde

$$\mathbb{E}C = \frac{\mathbb{E}L}{\mu(1-\mu)}$$

entonces

$$\begin{aligned}
Q^{(1)} &= \frac{1}{2}\frac{\mathbb{E}L^2}{\mathbb{E}L} - \frac{\frac{1}{2}-\mu}{(1-\mu)\mu}\sigma^2 = \frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}L} - \frac{\sigma^2}{2}\left\{\frac{2\mu-1}{(1-\mu)\mu}\right\}\\
&= \frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}L} + \frac{\sigma^2}{2}\left\{\frac{1}{1-\mu} + \frac{1}{\mu}\right\}
\end{aligned}$$

Mientras que para nosotros

$$Q^{(1)} = \frac{1}{\mu(1-\mu)}\frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}C} - \sigma^2\frac{\mathbb{E}L}{2\mathbb{E}C}\cdot\frac{1-2\mu}{(1-\mu)^2\mu^2}$$

Retomando la ecuación (34.2.307)

$$\left[\frac{R_1(z)P(z)}{R_2(z)R_3(z)}\right]^{'} = \frac{PR_2R_3R_1^{'} + R_1R_2R_3P^{'} - R_3R_1PR_2 - R_2R_1PR_3^{'}}{(R_2R_3)^2} = \frac{F(z)}{G(z)}$$

donde

$$\begin{aligned}
F(z) &= PR_2R_3R_1^{'} + R_1R_2R_3P^{'} - R_3R_1PR_2^{'} - R_2R_1PR_3^{'}\\
G(z) &= R_2^2R_3^2\\
G^2(z) &= R_2^4R_3^4 = (1-\mu)^4\mu^4
\end{aligned}$$

y por tanto

$$
\begin{aligned}
G^{'}(z) &= 2R_2R_3\left[R_2^{'}R_3+R_2R_3^{'}\right]\\
G^{'}(1) &= -2(1-\mu)\mu\left[\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right]+\frac{1}{2}\mu\right)(-\mu)+(1-\mu)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right]+\frac{1}{2}\mu\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
F^{'}(z) = \left[(R_2R_3)R_1^{''}-(R_1R_3)R_2^{''}-(R_1R_2)R_3^{''}-2\left(R_2^{'}R_3^{'}\right)R_1\right]P+2(R_2R_3)R_1^{'}P^{'}+(R_1R_2R_3)P^{''}
$$

Por lo tanto, encontremos $F^{'}(z)G(z)+F(z)G^{'}(z)$:

$$
\begin{aligned}
&F^{'}(z)G(z)+F(z)G^{'}(z) = \left\{\left[(R_2R_3)R_1^{''}-(R_1R_3)R_2^{''}-(R_1R_2)R_3^{''}-2\left(R_2^{'}R_3^{'}\right)R_1\right]P\right.\\
&\left.+2(R_2R_3)R_1^{'}P^{'}+(R_1R_2R_3)P^{''}\right\}R_2^2R_3^2-\left\{\left[PR_2R_3R_1^{'}+R_1R_2R_3P^{'}-R_3R_1PR_2^{'}\right.\right.\\
&\left.\left.-R_2R_1PR_3^{'}\right]\left[2R_2R_3\left(R_2^{'}R_3+R_2R_3^{'}\right)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Evaluando en $z=1$

$$
\begin{aligned}
&= (1+R_3)^3R_3^3R_1^{''}-(1+R_3)^2R_1R_3^3R_3^{''}-(1+R_3)^3R_3^2R_1R_3^{''}-2(1+R_3)^2R_3^2\left(R_3^{'}\right)^2\\
&+ 2(1+R_3)^3R_3^3R_1^{'}P^{'}+(1+R_3)^3R_3^3R_1P^{''}-2(1+R_3)^2R_3^2(1+2R_3)R_3^{'}R_1^{'}\\
&- 2(1+R_3)^2R_3^2R_1R_3^{'}(1+2R_3)P^{'}+2(1+R_3)(1+2R_3)R_3^3R_1\left(R_3^{'}\right)^2\\
&+ 2(1+R_3)^2(1+2R_3)R_1R_3R_3^{'}\\
&= -(1-\mu)^3\mu^3R_1^{''}-(1-\mu)^2\mu^2R_1(1-2\mu)R_3^{''}-(1-\mu)^3\mu^3R_1P^{''}\\
&+ 2(1-\mu)\mu^2\left[(1-2\mu)R_1-(1-\mu)\right]\left(R_3^{'}\right)^2-2(1-\mu)^2\mu R_1(1-2\mu)R_3^{'}\\
&- 2(1-\mu)^3\mu^4R_1^{'}-2\mu(1-\mu)(1-2\mu)R_3^{'}R_1^{'}-2\mu^3(1-\mu)^2(1-2\mu)R_1R_1^{'}
\end{aligned}
$$

por tanto

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{F(z)}{G(z)}\right]^{'} &= \frac{1}{\mu^3(1-\mu)^3}\left\{-(1-\mu)^2\mu^2R_1^{''}-\mu(1-\mu)(1-2\mu)R_1R_3^{''}-\mu^2(1-\mu)^2R_1P^{''}\right.\\
&+2\mu\left[(1-2\mu)R_1-(1-\mu)\right]\left(R_3^{'}\right)^2-2(1-\mu)(1-2\mu)R_1R_3^{'}-2\mu^3(1-\mu)^2R_1^{'}\\
&\left.-2(1-2\mu)R_3^{'}R_1^{'}-2\mu^2(1-\mu)(1-2\mu)R_1R_1^{'}\right\}
\end{aligned}
$$

recordemos que

$$
\begin{aligned}
R_1 &= -\mathbb{E}L\\
R_3 &= -\mu\\
R_1^{'} &= -\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}L\\
R_3^{'} &= -\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\\
R_1^{''} &= -\frac{1}{3}\mathbb{E}L^3+\mathbb{E}L^2-\frac{2}{3}\mathbb{E}L\\
R_3^{''} &= -\frac{1}{3}\mathbb{E}X^3+\mathbb{E}X^2-\frac{2}{3}\mu\\
R_1R_3^{'} &= \frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L-\frac{1}{2}\mathbb{E}X\mathbb{E}L\\
R_1R_1^{'} &= \frac{1}{2}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}L+\frac{1}{2}\mathbb{E}^2L\\
R_3^{'}R_1^{'} &= \frac{1}{4}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L^2-\frac{1}{4}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L-\frac{1}{4}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}X+\frac{1}{4}\mathbb{E}X\mathbb{E}L\\
R_1R_3^{''} &= \frac{1}{6}\mathbb{E}X^3\mathbb{E}L^2-\frac{1}{6}\mathbb{E}X^3\mathbb{E}L-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L+\frac{1}{3}\mathbb{E}X\mathbb{E}L^2-\frac{1}{3}\mathbb{E}X\mathbb{E}L\\
R_1P^{''} &= -\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L\\
\left(R_3^{'}\right)^2 &= \frac{1}{4}\mathbb{E}^2X^2-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}X+\frac{1}{4}\mathbb{E}^2X
\end{aligned}
$$

Definición 27.751 *Let L_i^* be the number of users at queue Q_i when it is polled, then*

$$\mathbb{E}\left[L_i^*\right]=f_i\left(i\right),\quad Var\left[L_i^*\right]=f_i\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. \tag{27.743}$$

Definición 27.752 *The cycle time C_i for the queue Q_i is the period beginning at the time when it is polled in a cycle and ending at the time when it is polled in the next cycle; it's duration is given by $\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)$, equivalently $\overline{\tau}_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$ under steady state assumption.*

Definición 27.753 *The intervisit time I_i is defined as the period beginning at the time of its service completion in a cycle and ending at the time when it is polled in the next cycle; its duration is given by $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$.*

The intervisit time duration $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)$ given the number of users found at queue Q_i at time $t=\tau_i\left(m+1\right)$ is equal to the number of arrivals during the preceding intervisit time $\left[\overline{\tau}\left(m\right),\tau_i\left(m+1\right)\right]$. So we have

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z_i\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

if $I_i\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$ we have $F_i\left(z\right)=I_i\left[P_i\left(z\right)\right]$ for $i=1,2$. Futhermore can be proved that

$$
\begin{array}{ll}
\mathbb{E}\left[L_i\right]=\mu_i\mathbb{E}\left[I_i\right], & \mathbb{E}\left[C_i\right]=\frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)},\\
\mathbb{E}\left[S_i\right]=\mu_i\mathbb{E}\left[C_i\right], & \mathbb{E}\left[I_i\right]=\left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right],\\
Var\left[L_i\right]=\mu_i^2Var\left[I_i\right]+\sigma^2\mathbb{E}\left[I_i\right], & Var\left[C_i\right]=\frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2},\\
Var\left[S_i\right]=\frac{Var\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^3}, & Var\left[I_i\right]=\frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2}-\frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2}f_i\left(i\right).
\end{array} \tag{27.744}
$$

Let consider the points when the process $\left[L_1\left(1\right),L_2\left(1\right),L_3\left(1\right),L_4\left(1\right)\right]$ becomes zero at the same time, this points, $T_1,T_2,\ldots$ will be denoted as regeneration points, then we have that

Definición 27.754 *the interval between two such succesive regeneration points will be called regenerative cycle.*

Definición 27.755 *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 27.756 *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m=1,2,\ldots,M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1-z) P_i(z)}{1 - P_i(z)}. \tag{27.745}$$

Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t. Entonces, determinando el primer momento es posible ver que
M_i is an stopping time for the regenerative process with $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, from Wald's lemma follows that:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]
\end{aligned}$$

therefore

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

Doing the following substitutions en (??): $n \to t - \tau_i(m)$, $T \to \overline{\tau}_i(m) - \tau_i(m)$, $L_n \to L_i(t)$ and $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right] \to F_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i \tau_i(m)}\right]$, we obtain

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} \tag{27.746}$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t - \overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1 - \mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)}\right]}{1 - P_i(z)} \\
&= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]} = \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} + \sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}\left\{z\frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} + \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}\right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1-z) P_i(z)}{1 - P_i(z)}
\end{aligned}$$

es decir

$$
\begin{array}{ll}
S^{'}(z) = -\sum_{k=1}^{+\infty} ka_k z^{k-1}, & S^{(1)}(1) = -\sum_{k=1}^{+\infty} ka_k = -\mathbb{E}\left[L(t)\right], \\
S^{''}(z) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k z^{k-2}, & S^{(2)}(1) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k = \mathbb{E}\left[L(L-1)\right], \\
S^{'''}(z) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)a_k z^{k-3}, & S^{(3)}(1) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)a_k \\
 & = -\mathbb{E}\left[L(L-1)(L-2)\right] \\
 & = -\mathbb{E}\left[L^3\right] + 3 - \mathbb{E}\left[L^2\right] - 2 - \mathbb{E}\left[L\right];
\end{array} \tag{27.747}
$$

Definición 27.757 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 27.486 *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [40].*

Nota 27.487 *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 27.758 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$
\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,
\end{aligned}
$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$
\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}\left[R_1\right]},
$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.488 *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*
En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 27.489 *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 27.490 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 27.491 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\left\{X_{1},X_{2},\ldots\right\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right)\in A|X_{1}+X_{2}+\cdots+X_{R(t)}=s,\left\{V\left(\tau\right),\tau<s\right\}\right\}=\mathbb{P}\left\{V\left(t-s\right)\in A|X_{1}>t-s\right\},$$

para todo $0\leq s\leq t$, donde $R\left(t\right)=\max\left\{X_{1}+X_{2}+\cdots+X_{j}\leq t\right\}$=número de renovaciones (puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0,X_{1})$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$, $[X_{1},X_{1}+X_{2})$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X=X_{1}$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.759 *Se define el proceso estacionario, $\left\{V^{*}\left(t\right),t\geq0\right\}$, para $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ por*

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right)\in A\right\}=\frac{1}{\mathbb{E}\left[X\right]}\int_{0}^{\infty}\mathbb{P}\left\{V\left(t+x\right)\in A|X>x\right\}\left(1-F\left(x\right)\right)dx,$$

para todo $t\geq0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.760 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0,\lambda,2\lambda,\ldots$ para alguna $\lambda>0$ entera.*

Definición 27.761 *Una modificación medible de un proceso $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$, es una versión de este, $\left\{V\left(t,w\right)\right\}$ conjuntamente medible para $t\geq0$ y para $w\in S$, S espacio de estados para $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$.*

Teorema 27.437 *Sea $\left\{V\left(t\right),t\geq\right\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}\left[X\right]<\infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]<\infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]<\infty$,entonces

$$\frac{\int_{0}^{t}V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$.

Corolario 27.215 *Sea $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E}<\infty$, F es no-aritmética, y para todo $x\geq0$, $P\left\{V\left(t\right)\leq x,C>x\right\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0,\tau]$, entonces $V\left(t\right)$ converge en distribución cuando $t\rightarrow\infty$ y*

$$\mathbb{E}V=\frac{\mathbb{E}\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V\left(t\right)$ cuando $t\rightarrow\infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 27.762 *Sean $0\leq T_{1}\leq T_{2}\leq\ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_{n} en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\left(T_{n}\leq t\right),\qquad(27.748)$$

para $t\geq0$.

Si se consideran los puntos T_{n} como elementos de $\mathbb{R}_{+}$, y $N\left(t\right)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\left\{N\left(t\right):t\geq0\right\}$, denotado por $N\left(t\right)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_{+}$. Los T_{n} son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N\left(t\right)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0<T_{1}<T_{2}<\ldots$ casi seguramente.

Definición 27.763 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.492 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 27.493 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.438 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 27.309 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.764 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.310 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 27.439 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\
P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)
\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.311 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$.

Nota 27.494 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 27.440 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{27.749}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{27.750}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 27.216 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \ c.s. \text{ cuando } t \to \infty. \tag{27.751}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 27.765 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.441 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \to \mu$ *c.s. cuando* $n \to \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \ c.s. \tag{27.752}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \ c.s. \tag{27.753}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 27.217 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \ c.s. \text{ cuando } t \to \infty. \tag{27.754}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \ t \ < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.312 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.495 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.442 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{27.755}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{27.756}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.218 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \to \infty. \tag{27.757}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.766 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.443 *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \ c.s. \tag{27.758}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \ c.s. \tag{27.759}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.219 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.760}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.313 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.496 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.444 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.761}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.762}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.220 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.763}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.767 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.445 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} & (27.764)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (27.765)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.221 *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.766)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 27.314 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.497 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 27.446 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (27.767)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (27.768)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 27.222 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (27.769)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.768 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.447 *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (27.770)\\ lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (27.771)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.223 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \quad (27.772)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.315 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.498 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.448 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (27.773)\\ lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (27.774)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.224 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.775}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.769 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.449 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.776}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.777}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.225 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.778}$$

Definición 27.770 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{27.779}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.316 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.450 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.771 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.317 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 27.772 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.318 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.499 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.451 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.226 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 27.773 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.780}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.774 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.500 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃ°meros.*

Definición 27.775 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.781}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.776 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.501 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq &\quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.319 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 27.21 (Proceso Poisson) *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 27.502 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.452 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} &(27.782)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} &(27.783)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.227 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.784}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.777 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.453 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (27.785)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (27.786)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.228 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.787}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.778 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.320 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 27.779 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.321 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.503 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.454 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.229 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 27.780 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{27.788}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.322 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.455 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.781 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.323 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 27.782 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.324 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.504 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.456 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n|T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.230 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t) + 1]\,,\ t \geq 0,$$

Definición 27.783 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s)\,,\ t \geq 0, \tag{27.789}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.325 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.457 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Nota 27.505 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.458 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 27.326 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ \textit{donde}\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.784 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)]\,,\ \textit{para}\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.327 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t)\,,\ \textit{donde}\ h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]\,.$$

Teorema 27.459 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 27.506 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.460 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 27.328 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.785 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)\,|T] = \mathbb{E}[X(t)]\,,\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.329 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]\,.$$

Teorema 27.461 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 27.786 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.507 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 27.508 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 27.509 *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.787 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.510 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 27.462 (Procesos Regenerativos) *Suponga que el proceso*

Definición 27.788 (Renewal Process Trinity) *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- *$A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- *$B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- *$L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 27.511 *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{27.790}$$

Ejemplo 27.22 (Tiempos de recurrencia Poisson) *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (34.8.10) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 27.512 *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 27.789 *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 27.513 *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 27.330 *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 27.463 *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 27.514 *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 27.231 *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 27.515 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 27.516 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.790 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2, *independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1. *Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, *se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X.

Definición 27.791 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.517 *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$, *donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_{∞}

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S, *que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$, *con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, *con misma distribución* F *de media finita* μ.

Definición 27.792 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, *sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 27.518 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 27.519 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.793 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 27.520 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.794 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.521 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t - s) \in A | X_1 > t - s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.795 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t + x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.796 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.797 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.464 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (* puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0, t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 27.798 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 27.799 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.800 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.465 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$[15], se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

*Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (**??**): $n \rightarrow t - \tau_i(m)$, $T \rightarrow \overline{\tau}_i(m) - \tau_i(m)$, $L_n \rightarrow L_i(t)$ y $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right] \rightarrow F_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i\tau_i(m)}\right]$, se puede ver que*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)} \tag{27.791}$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)}\\
&= \frac{1-I_i[P_i(z)]}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

[15]En Stidham[41] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N}\mu_k < 1$.

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right]+\mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}+\frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}\right\}
\end{aligned}$$

es decir

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \tag{27.792}$$

Teorema 27.466 *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t, $A_j(t) = \{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\}$ para algún tiempo $t \geq 0$ y Q_j la cola j-ésima en la RSVC, para $j = 1,2,3,4$. Existe un intervalo $I \neq \emptyset$ tal que para $T^* \in I$, tal que $\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(Tt^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I\} > 0$.*

Demostración 27.5 *Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.*
Sea $n > 0$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1(n) > 0$, entonces tenemos que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1(n)$.
Definamos el intervalo $I_1 \equiv [\overline{\tau}_1(n), \tau_2(n)]$ de longitud $\xi_1 = r_1(n)$. Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$\mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)}. \tag{27.793}$$

Por otra parte, para la cola Q_2, el tiempo $\overline{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\overline{\tau}_2(n-1)) = 0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n. Entonces tenemos un sgundo intervalo $I_2 \equiv [\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)}, \tag{27.794}$$

donde $\xi_2(n) = \tau_2(n) - \overline{\tau}_2(n-1)$.
Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} &= \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\}\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\}\\
&\geq \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\}\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\}\\
&= e^{-\tilde{\mu}_1\xi_1(n)}e^{-\tilde{\mu}_2\xi_2(n)} = e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)]}.
\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)]} > 0. \tag{27.795}$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC, se afirma que existe $m > 0$ *tal que* $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$.
Para Q_3 *sea* $I_3 = [\overline{\tau}_3(m), \tau_4(m)]$ *con longitud* $\xi_3(m) = r_3(m)$, *entonces*

$$\mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(n)}. \tag{27.796}$$

Análogamente que como se hizo para Q_2, *tenemos que para* Q_4 *se tiene el intervalo* $I_4 = [\overline{\tau}_4(m-1), \tau_4(m)]$ *con longitud* $\xi_4(m) = \tau_4(m) - \overline{\tau}_4(m-1)$, *entonces*

$$\mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} = e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(n)}. \tag{27.797}$$

Al igual que para el primer sistema, dado que $I_3(m) \subset I_4(m)$, *se tiene que*

$$\begin{array}{rcl}
\xi_3(m) \leq \xi_4(m) & \Leftrightarrow & -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\
-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m) & \Leftrightarrow & e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} \\
\mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} & \geq & \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\}
\end{array}$$

Entonces, dado que los eventos A_3 *y* A_4 *son independientes, se tiene que*

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\} & = & \mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(m)\} \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} \\
& \geq & \mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(n)\} \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(n)\} \\
& = & e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)} e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} = e^{-[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)]}.
\end{array}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\} = e^{-[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)]} > 0. \tag{27.798}$$

Por construcción se tiene que $I(n,m) \equiv I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$,*entonces en particular se tienen las contenciones* $I(n,m) \subseteq I_1(n)$ *y* $I(n,m) \subseteq I_3(m)$, *por lo tanto si definimos* $\xi_{n,m} \equiv \ell(I(n,m))$ *tenemos que*

$$\xi_{n,m} \leq \xi_1(n) \text{ y } \xi_{n,m} \leq \xi_3(m) \text{ entonces } -\xi_{n,m} \geq -\xi_1(n) \text{ y } -\xi_{n,m} \leq -\xi_3(m)$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{array}{ll}
-\tilde{\mu}_1 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_1 \xi_1(n), & -\tilde{\mu}_2 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_2(n), \\
-\tilde{\mu}_3 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_3 \xi_3(m), & -\tilde{\mu}_4 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m).
\end{array}$$

Sea $T^* \in I_{n,m}$, *entonces dado que en particular* $T^* \in I_1(n)$ *se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas* Q_1 *y* Q_2, *en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para* Q_3 *y* Q_4, *es decir,* $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$, $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$, *es decir, los eventos* Q_1 *y* Q_3 *son condicionalmente independientes en el intervalo* $I_{n,m}$; *lo mismo ocurre para las colas* Q_2 *y* Q_4, *por lo tanto tenemos que*

$$\begin{array}{l}
\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(T^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I_{n,m}\} = \prod_{j=1}^{4} \mathbb{P}\{A_j(T^*) | T^* \in I_{n,m}\} \\
\geq \mathbb{P}\{A_1(T^*) | T^* \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(T^*) | T^* \in I_2(n)\} \mathbb{P}\{A_3(T^*) | T^* \in I_3(m)\} \mathbb{P}\{A_4(T^*) | T^* \in I_4(m)\} \\
= e^{-\mu_1 \xi_1(n)} e^{-\mu_2 \xi_2(n)} e^{-\mu_3 \xi_3(m)} e^{-\mu_4 \xi_4(m)} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n) + \tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)]} > 0.
\end{array} \tag{27.799}$$

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [13] para $\{T_n\}$ *intervalos de inter-arribo,* $\{D_n\}$ *intervalos de inter-salida y* $\{S_n\}$ *tiempos de servicio.*

- *Si el proceso* $\{T_n\}$ *es Poisson, el proceso* $\{D_n\}$ *es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si* $\{S_n\}$ *son exponenciales negativas.*
- *Si* $\{S_n\}$ *son exponenciales negativas,* $\{D_n\}$ *es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si* $\{T_n\}$ *es un proceso Poisson.*
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.

- *Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:*

  Teorema 27.467 *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu\left(\mu+\theta\right)^{-1}\left[\delta\theta-\mu\left(1-\delta\right)\alpha\left(\theta\right)\right]\left[\theta-\mu\left(1-\delta\right)^{-1}\right] \\ \alpha\left(\theta\right) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\ var\left(D_n\right) &= var\left(T_0\right)-\left(\tau^{-1}-\delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}\left(S_0\right)\right)^2\left(1-\delta\right)^{-1}. \end{aligned}$$

  Teorema 27.468 *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 27.469 *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

En Sigman, Thorison y Wolff [40] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 27.331 *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1}X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k\left(X, R\right) =_D \left(X, R\right).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k}X$.

- *Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.*
- *Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.*
- *Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:*

  Teorema 27.470 *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso **I** es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*

  b) *$L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;*

  c) *$L = 1$ y $G = D$;*

  d) *$L = \infty$ y $G = M$.*

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;

  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;

  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;

  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- *Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.*
- *King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.*
- *Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.*

- *El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)*

  Teorema 27.471 *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*

  c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para* $L < \infty$

  d) $G = M$.

- *El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)*

  Teorema 27.472 *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [13] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- *Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.*
- *Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.*
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- *Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:*

  Teorema 27.473 *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2(1-\delta)^{-1}.
\end{aligned}$$

  Teorema 27.474 *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 27.475 *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

Sean Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 en una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC). Supongamos que cada una de las colas es del tipo $M/M/1$ con tasa de arribo μ_i y que la transferencia de usuarios entre los dos sistemas ocurre entre $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$ con respectiva tasa de arribo igual a la tasa de salida $\hat{\mu}_i = \mu_i$, esto se sabe por lo desarrollado en la sección anterior.

Consideremos, sin pérdida de generalidad como base del análisis, la cola Q_1 además supongamos al servidor lo comenzamos a observar una vez que termina de atender a la misma para desplazarse y llegar a Q_2, es decir al tiempo τ_2.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, ciclo del servidor en que regresa a Q_1 para dar servicio y atender conforme a la política exhaustiva, entonces se tiene que $\overline{\tau}_1(n)$ es el tiempo del servidor en el sistema 1 en que termina de dar servicio a todos los usuarios presentes en la cola, por lo tanto se cumple que $L_1(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, entonces el servidor para llegar a Q_2 incurre en un tiempo de traslado r_1 y por tanto se cumple que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1$. Dado que los tiempos entre arribos son exponenciales se cumple que

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n) + r_1\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_1 r_1},$$
$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n) + r_1\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_2 r_1}.$$

El evento que nos interesa consiste en que no haya arribos desde que el servidor abandonó Q_2 y regresa nuevamente para dar servicio, es decir en el intervalo de tiempo $\left[\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)\right]$. Entonces, si hacemos

$$\begin{aligned}\varphi_1(n) &\equiv \overline{\tau}_1(n) + r_1 = \overline{\tau}_2(n-1) + r_1 + r_2 + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n)\\ &= \overline{\tau}_2(n-1) + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r,,\end{aligned}$$

y longitud del intervalo

$$\begin{aligned}\xi &\equiv \overline{\tau}_1(n) + r_1 - \overline{\tau}_2(n-1) = \overline{\tau}_2(n-1) + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r - \overline{\tau}_2(n-1)\\ &= \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r.\end{aligned}$$

Entonces, determinemos la probabilidad del evento no arribos a Q_2 *en* $[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]$*:*

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_2\xi}. \tag{27.800}$$

De manera análoga, tenemos que la probabilidad de no arribos a Q_1 *en* $[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]$ *esta dada por*

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_1\xi}, \tag{27.801}$$

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_2\xi}. \tag{27.802}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ y } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\}\\ &= \mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\}\\ &\times\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_1\xi}e^{-\tilde{\mu}_2\xi} = e^{-\tilde{\mu}\xi}.\end{aligned} \tag{27.803}$$

Para el segundo sistema, consideremos nuevamente $\overline{\tau}_1(n) + r_1$*, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe* $m > 0$ *tal que* $\overline{\tau}_3(m) < \overline{\tau}_1 + r_1 < \tau_4(m)$*, entonces*

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_3(m), \overline{\tau}_1(n) + r_1]\} = e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3}, \tag{27.804}$$

donde

$$\xi_3 = \overline{\tau}_1(n) + r_1 - \overline{\tau}_3(m) = \overline{\tau}_1(n) - \overline{\tau}_3(m) + r_1, \tag{27.805}$$

mientras que para Q_4 *al igual que con* Q_2 *escribiremos* $\tau_4(m)$ *en términos de* $\overline{\tau}_4(m-1)$*:*
$\varphi_2 \equiv \tau_4(m) = \overline{\tau}_4(m-1) + r_4 + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) + r_3 = \overline{\tau}_4(m-1) + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) + \hat{r}$*, además,*
$\xi_2 \equiv \varphi_2(m) - \overline{\tau}_1 - r_1 = \overline{\tau}_4(m-1) + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) - \overline{\tau}_1(n) + \hat{r} - r_1$.
Entonces

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_4 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]\} = e^{-\tilde{\mu}_4\xi_2}, \tag{27.806}$$

mientras que para Q_3 *se tiene que*

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]\} = e^{-\tilde{\mu}_3\xi_2} \tag{27.807}$$

Por tanto

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_3 \wedge Q_4 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]\} = e^{-\hat{\mu}\xi_2} \tag{27.808}$$

donde $\hat{\mu} = \tilde{\mu}_3 + \tilde{\mu}_4$.

Ahora, definamos los intervalos $\mathcal{I}_1 = [\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_1(n)]$ *y* $\mathcal{I}_2 = [\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]$, *entonces, sea* $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ *el intervalo donde cada una de las colas se encuentran vacías, es decir, si tomamos* $T^* \in \mathcal{I}$, *entonces* $L_1(T^*) = L_2(T^*) = L_3(T^*) = L_4(T^*) = 0$.

Ahora, dado que por construcción $\mathcal{I} \neq \emptyset$ *y que para* $T^* \in \mathcal{I}$ *en ninguna de las colas han llegado usuarios, se tiene que no hay transferencia entre las colas, por lo tanto, el sistema 1 y el sistema 2 son condicionalmente independientes en* $\mathcal{I}$, *es decir*

$$\mathbb{P}\left\{L_1(T^*), L_2(T^*), L_3(T^*), L_4(T^*) | T^* \in \mathcal{I}\right\} = \prod_{j=1}^{4} \mathbb{P}\left\{L_j(T^*)\right\}, \tag{27.809}$$

para $T^* \in \mathcal{I}$.

Definición 27.801 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2, *independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1. *Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, *se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X.

Nota 27.522 *La existencia de un primer tiempo de regeneración,* R_1, *implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos* $R_1, R_2 \ldots$, *que satisfacen la propiedad deseada [40].*

Nota 27.523 *Para la cola* $GI/GI/1$ *los usuarios arriban con tiempos* t_n *y son atendidos con tiempos de servicio* S_n, *los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)*$T_n = t_n - t_{n-1}$, *además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que* $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.

Definición 27.802 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.524 *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si* $X(t)$ *es regenerativo y se define el proceso* $Y(t)$ *por* $Y(t) = f(X(t))$ *para alguna función Borel medible* $f(\cdot)$. *Además* Y *es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que* X.

En general, los tiempos de renovación, Z_k *de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de* $X(t)$.

Nota 27.525 *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 27.526 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 27.527 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.803 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.804 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 27.805 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 27.476 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Corolario 27.232 *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \to \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) \, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \to \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 27.806 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.810}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.807 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 27.528 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 27.529 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.477 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 27.332 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.808 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.333 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 27.478 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \text{máx}\{n : T_n \leq t\} = \text{mín}\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.334 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Nota 27.530 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 27.479 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.811}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.812}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 27.233 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.813}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 27.809 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.480 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.814}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.815}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 27.234 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.816}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.335 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.531 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.481 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.817}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.818}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.235 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.819}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.810 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.482 *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.820}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.821}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.236 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.822}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.336 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.532 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.483 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.823}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.824}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.237 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.825}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.811 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.484 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} &(27.826)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} &(27.827)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.238 *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (27.828)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 27.337 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.533 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 27.485 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} &(27.829)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} &(27.830)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.239 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (27.831)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.812 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.486 *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (27.832)\\ lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (27.833)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.240 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{27.834}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.338 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 27.534 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.487 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (27.835)\\ lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (27.836)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.241 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.837}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.813 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.488 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.838}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.839}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.242 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.840}$$

Definición 27.814 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s), \; t \geq 0, \tag{27.841}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.339 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.489 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.815 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.340 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 27.816 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t}dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.341 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.535 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.490 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n|T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.243 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1], \; t \geq 0,$$

Definición 27.817 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.842}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.818 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 27.536 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

27.1.137. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[35]

Definición 27.819 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{27.843}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 27.820 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 27.537 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 27.342 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 27.23 (Proceso Poisson) *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 27.538 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 27.491 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{27.844}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.845}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 27.244 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.846}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 27.821 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27.492 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{27.847}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{27.848}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 27.245 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{27.849}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.822 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.343 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 27.823 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.344 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.539 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.493 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.246 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \, t \geq 0,$$

Definición 27.824 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \, t \geq 0, \tag{27.850}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.345 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.494 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 27.825 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 27.346 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 27.826 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27.347 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 27.540 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 27.495 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n|T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27.247 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t)+1], \; t \geq 0,$$

Definición 27.827 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{27.851}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 27.348 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 27.496 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 27.541 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.497 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 27.349 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.828 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.350 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 27.498 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 27.542 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 27.499 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty}U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 27.351 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 27.829 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T + t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 27.352 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 27.500 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 27.830 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.543 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Nota 27.544 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 27.545 *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ*.*

Definición 27.831 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 27.546 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 27.501 (Procesos Regenerativos) *Suponga que el proceso*

Definición 27.832 (Renewal Process Trinity) *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t*.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t*, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t*.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$*, la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t*.*

Nota 27.547 *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n*, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$*. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{27.852}$$

Ejemplo 27.24 (Tiempos de recurrencia Poisson) *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*, entonces de la expresión (34.8.10) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$*.*

Nota 27.548 *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 27.833 *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$*,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 27.549 *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$*,* $t \geq 0$*.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ *en* $\mathbb{R}_+$*, con puntos* $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$*.*

Proposición 27.353 *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$*, entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$*,* $t \geq 0$

Teorema 27.502 *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N *es estacionario.*

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 27.550 *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 27.248 *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 27.551 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 27.552 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.834 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 27.835 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.553 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 27.836 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 27.554 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 27.555 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 27.837 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 27.556 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 27.838 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 27.557 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 27.839 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t + x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 27.840 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 27.841 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 27.503 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

CAPÍTULO 28

Procesos de Renovacion

28.1. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\ t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 28.1 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 28.1 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 28.1 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{28.1}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{28.2}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 28.1 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{28.3}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 28.1 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 28.2 *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (28.4)\\ lim_{t\to\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (28.5)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 28.2 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty}t^{-1}Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{28.6}$$

Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq \quad t &< T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 28.2 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 28.2 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 28.3 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (28.7)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (28.8) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 28.3 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (28.9)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 28.2 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 28.4 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (28.10)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (28.11) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 28.4 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (28.12)$$

28.1.1. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq &\ t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 28.3 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$.

Nota 28.3 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la* n*-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 28.5 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{28.13}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{28.14}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 28.5 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{28.15}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 28.3 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 28.6 *Supóngase que* $n^{-1} T_n \to \mu$ *c.s. cuando* $n \to \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{28.16}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{28.17}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 28.6 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{28.18}$$

28.1.2. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n *están relacionados con los conteos de* $N(t)$ *por*

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, *y*

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n*-ésima convolución de* F. *Entonces*

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 28.4 *Para cada* $t \geq 0$, *la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, *para* $m \geq 1$.

Nota 28.4 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n, *para* $n \geq 2$, *a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G, *entonces el tiempo* T_n *de la* n*-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 28.7 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{28.19}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{28.20}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 28.7 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$, *entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{28.21}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 28.4 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 28.8 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$, *donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} \quad (28.22)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (28.23)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 28.8 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, *para* $n \geq 1$, *son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (28.24)$$

28.1.3. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n *están relacionados con los conteos de* $N(t)$ *por*

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, *y*

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. *Entonces*

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 28.5 *Para cada* $t \geq 0$, *la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, *para* $m \geq 1$.

Nota 28.5 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n, *para* $n \geq 2$, *a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G, *entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 28.9 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \quad (28.25)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (28.26)\end{aligned}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N\,/t)$ *la cumple.*

Corolario 28.9 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{28.27}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 28.5 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 28.10 *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \qquad (28.28)\\ lim_{t\to\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \qquad (28.29)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 28.10 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty}t^{-1}Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{28.30}$$

28.1.4. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq &\ t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 28.6 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 28.6 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 28.11 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} &(28.31)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} &(28.32)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 28.11 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{28.33}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 28.6 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 28.12 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} &(28.34)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} &(28.35)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 28.12 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{28.36}$$

28.1.5. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\
T_{N(t)} \leq \quad & t \quad < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 28.7 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$.

Nota 28.7 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 28.13 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{28.37}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{28.38}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 28.13 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \to \infty. \tag{28.39}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 28.7 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 28.14 *Supóngase que* $n^{-1} T_n \to \mu$ *c.s. cuando* $n \to \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \ c.s. \tag{28.40}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \ c.s. \tag{28.41}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 28.14 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \ c.s. \ cuando \ t \to \infty. \tag{28.42}$$

28.1.6. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 28.8 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 28.8 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 28.15 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{28.43}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{28.44}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 28.15 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{28.45}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 28.8 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 28.16 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (28.46)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (28.47)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 28.16 *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (28.48)$$

28.1.7. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq &\; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 28.9 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 28.9 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 28.17 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (28.49)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (28.50)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 28.17 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{28.51}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 28.9 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 28.18 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (28.52)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (28.53) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 28.18 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{28.54}$$

28.1.8. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq \quad t &< T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \text{máx}\{n : T_n \leq t\} = \text{mín}\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 28.10 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 28.10 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 28.19 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{28.55}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{28.56}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 28.19 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{28.57}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 28.10 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 28.20 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{28.58}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{28.59}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 28.20 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{28.60}$$

28.1.9. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\
P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)
\end{aligned}
$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$
\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)
$$

Proposición 28.11 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Nota 28.11 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la* n*-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 28.21 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (28.61) \\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (28.62)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 28.21 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$
t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{28.63}
$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 28.11 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$
M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|
$$

Teorema 28.22 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (28.64) \\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (28.65)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 28.22 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{28.66}
$$

28.1.10. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 28.12 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 28.12 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 28.23 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{28.67}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{28.68}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 28.23 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{28.69}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 28.12 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 28.24 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (28.70)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (28.71)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 28.24 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{28.72}$$

28.1.11. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 28.13 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 28.13 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 28.25 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (28.73)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (28.74)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 28.25 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{28.75}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 28.13 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 28.26 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (28.76)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (28.77)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 28.26 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{28.78}$$

28.1.12. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 28.14 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 28.14 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 28.27 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} \qquad (28.79)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \qquad (28.80)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 28.27 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (28.81)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 28.14 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 28.28 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \qquad (28.82)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \qquad (28.83)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 28.28 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (28.84)$$

28.1.13. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 28.15 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$.

Nota 28.15 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la* n*-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 28.29 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{28.85}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{28.86}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 28.29 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{28.87}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 28.15 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 28.30 *Supóngase que* $n^{-1} T_n \to \mu$ *c.s. cuando* $n \to \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{28.88}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{28.89}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 28.30 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{28.90}$$

28.1.14. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 28.16 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 28.16 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 28.31 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{28.91}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{28.92}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 28.31 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \ c.s. \text{ cuando } t \to \infty. \tag{28.93}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 28.16 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 28.32 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (28.94)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (28.95)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 28.32 *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (28.96)$$

28.1.15. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq \quad t &< T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 28.17 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 28.17 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 28.33 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (28.97)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (28.98)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 28.33 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{28.99}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 28.17 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 28.34 *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} &(28.100)\\ lim_{t\to\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} &(28.101)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 28.34 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty}t^{-1}Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{28.102}$$

28.1.16. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq \quad t &< T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 28.18 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 28.18 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 28.35 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{28.103}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{28.104}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 28.35 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{28.105}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 28.18 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 28.36 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{28.106}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{28.107}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 28.36 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{28.108}$$

28.1.17. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\
P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)
\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 28.19 *Para cada* $t \geq 0$, *la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, *para* $m \geq 1$.

Nota 28.19 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n, *para* $n \geq 2$, *a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G, *entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 28.37 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \quad (28.109) \\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (28.110)
\end{aligned}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 28.37 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$, *entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (28.111)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 28.19 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 28.38 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$, *donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \quad (28.112) \\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (28.113)
\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 28.38 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, *para* $n \geq 1$, *son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (28.114)$$

28.1.18. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 28.20 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 28.20 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 28.39 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{28.115}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{28.116}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 28.39 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{28.117}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 28.20 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 28.40 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (28.118) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (28.119) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 28.40 *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (28.120)$$

CAPÍTULO 29

Revision Procesos Regenerativos

29.1. Procesos Regenerativos: Thorisson

29.1.1. Tiempos de Regeneración para Redes de Sistemas de Visitas Cíclicas

Teorema 29.1 *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$.*

Demostración 29.1 *Para cada cola Q_j, $j = 1, \ldots, 4$, se tienen los siguientes procesos $L_j(t)$ el número de usuarios presentes en la cola al tiempo t, $A_j(t)$ el residual del tiempo de arribo del siguiente usuario. $B_j(t)$ el residual del tiempo de servicio del usuario que está siendo atendido. $C_j(t)$ el residual del tiempo de traslado del servidor entre una cola y otra, en caso de que se encuentre dando servicio se considera $C_j(t) = 0$, para $j = 1, \ldots, 4$. Con base en lo anterior se tienen los procesos*

$$L(t) = (L_j(t))_{j=1}^4, A(t) = (A_j(t))_{j=1}^4, B(t) = (B_j(t))_{j=1}^4 \text{ y } C(t) = (C_j(t))_{j=1}^4. \tag{29.1}$$

Por lo tanto se tiene el proceso estocástico

$$\mathbb{Z} = (L(t), A(t), B(t), C(t)) \tag{29.2}$$

Para los procesos residuales de los tiempos de traslado, servicio y de arribos, su espacio de estados es un subconjunto de $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, es decir, $E \subset [0, \infty)$ y por tanto $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}[0, \infty)$, luego el espacio $(E, \mathcal{E})$ es un espacio polaco. Para cada proceso de residuales se tienen los siguientes espacios producto: Para $A(t) = (A_j(t))_{j=1}^4$ se tiene el espacio producto $(E_2, \mathcal{E}_2) = \otimes_{j=1}^4 (E_j, \mathcal{E}_j)$, para $B(t) = (B_j(t))_{j=1}^4$ se tiene el espacio producto $(E_3, \mathcal{E}_3) = \otimes_{j=1}^4 (E_j, \mathcal{E}_j)$, para $C(t) = (C_j(t))_{j=1}^4$ se tiene el espacio producto $(E_4, \mathcal{E}_4) = \otimes_{j=1}^4 (E_j, \mathcal{E}_j)$.

En lo que respecta al proceso $L(t) = (L_j(t))_{j=1}^4$ el proceso de estados $E_j \subset \mathbb{N}$ y $\mathcal{E}_j \subset \sigma(E)$, por lo tanto el espacio producto $(E_1, \mathcal{E}_1) = \otimes_{j=1}^4 (E_j, \mathcal{E}_j)$ que además también resulta ser polaco. Entonces con los espacios productos $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i=1}^4$, se define el espacio producto $(E, \mathcal{E}) = \otimes_{i=1}^4 (E_i, \mathcal{E}_i)$ que nuevamente resulta ser un espacio polaco. De acuerdo con Thorisson existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ en el que está definido el proceso estocástico definido en (29.2) que toma valores en $(E, \mathcal{E})$.

Con la finalidad de analizar las propiedades del proceso $\mathbb{Z}$ consideremos el conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$, entonces tenemos el elemento aleatorio $\mathbb{Z} = (Z)_{s \in \mathbb{I}}$ que está definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y con valores en $(E, \mathcal{E})$. El proceso Z así definido es un PEOSCT conforme a la definición dada en (29.8). Ahora consideremos al espacio de trayectorias de Z conforme a la definición (29.9); por construcción el espacio de trayectorias $H := D_E[0, \infty)$ que por la nota (29.9) resulta ser que el Proceso es Canonicamente Conjuntamente Medible (CCM) y por la nota (29.11) además es Internamente Shift Invariante (ISI), es decir, resulta ser un proceso estocástico one-side a tiempo continuo shift medible, y por lo tanto satisface la primera parte de las hipótesis del Teorema (29.7).

Conforme a la construcción dada en la sección 1, se tiene que los dos tiempos $S_0 = 0$ y $S_1 = T^*$ satisfacen la segunda parte de las hipótesis del Teorema (29.7) y por tanto se puede asegurar que

existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *en el cuál existe una sucesión de tiempos aleatorios en los cuales el proceso se regenera, es decir, se garantiza que existe una sucesión de tiempos de regeneración* $T_0, T_1, \ldots$ *en los cuales el proceso* $L(T_k) = (0, 0, 0, 0)$*.*
Además por el Corolario (29.1) se garantiza que existe una versión estacionaria del proceso (Z, S)*.*

29.1.2. Introduction to Stochastic Processes

Definición 29.1 *Un elemento aleatorio con valores en un espacio medible* $(E, \mathcal{E})$*, es un mapeo definido en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *a* $(E, \mathcal{E})$*, es decir, para* $A \in \mathcal{E}$*, se tiene que* $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$*, donde* $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$*.*

Nota 29.1 *También se dice que* Y *está soportado por el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y que* Y *es un mapeo medible de* Ω *en* E*, es decir, es* $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ ***medible****.*

Definición 29.2 *Para cada* $i \in \mathbb{I}$*, sea* P_i *una medida de probabilidad en un espacio medible* $(E_i, \mathcal{E}_i)$*. Se define el espacio producto* $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$*, donde* $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ *es el producto cartesiano de los* E_i*'s, y* $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ *es la* ***σ-álgebra producto****, es decir, es la* σ*-álgebra más pequeña en* $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ *que hace al i-ésimo mapeo proyección en* E_i *medible para toda* $i \in \mathbb{I}$*, es la* σ*-álgebra inducida por los mapeos proyección, es decir*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma\left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 29.3 *Un espacio de probabilidad* $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ *es una* ***extensión de otro espacio de probabilidad*** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *si* $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ *soporta un elemento aleatorio* $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ *que tienen a* $\mathbb{P}$ *como distribución.*

Teorema 29.2 *Sea* $\mathbb{I}$ *un conjunto de índices arbitrario. Para cada* $i \in \mathbb{I}$ *sea* P_i *una medida de probabilidad en un espacio medible* $(E_i, \mathcal{E}_i)$*. Entonces existe una única medida de probabilidad* $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ *en* $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i)$ *tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \dots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$*, toda* $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{I}$ *y todo* $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \dots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ *es llamada la* ***medida producto*** *y* $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$*, es llamado* ***espacio de probabilidad producto****.*

Definición 29.4 *Un espacio medible* $(E, \mathcal{E})$ *es* ***Polaco*** *si existe una métrica en* E *tal que* E *es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en* E*, y separable,* E *tienen un subconjunto denso numerable, y tal que* $\mathcal{E}$ *es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 29.5 *Dos espacios medibles* $(E, \mathcal{E})$ *y* $(G, \mathcal{G})$ *son Borel equivalentes (isomorfos) si existe una biyección* $f : E \to G$ *tal que* f *es* $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ *medible y su inversa* f^{-1} *es* $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ *medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 29.6 *Un espacio medible* $(E, \mathcal{E})$ *es un* ***espacio estándar*** *si es Borel equivalente a* $(G, \mathcal{G})$*, donde* G *es un subconjunto de Borel de* $[0, 1]$ *y* $\mathcal{G}$ *son los subconjuntos de Borel de* G*.*

Nota 29.2 *Cualquier espacio polaco es un espacio estándar.*

Definición 29.7 *Un proceso estocástico con conjunto de índices* $\mathbb{I}$ *y espacio de estados* $(E, \mathcal{E})$ *es una familia* $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ *donde* $\mathbb{Z}_s$ *son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y todos toman valores en* $(E, \mathcal{E})$*.*

Definición 29.8 *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (****PEOSCT****) es un proceso estocástico con conjunto de índices* $\mathbb{I} = [0, \infty)$*.*

El espacio $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ *denota el espacio producto* $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}}(E, \mathcal{E})$*. Vamos a considerar* $\mathbb{Z}$ *como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en* $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ *definido por* $Z(w) = (Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ *y* $w \in \Omega$*.*

Nota 29.3 *La distribución de un proceso estocástico* Z *es la distribución de* Z *como un elemento aleatorio en* $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$*. La distribución de* Z *esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 29.4 *En particular cuando* Z *toma valores reales, es decir,* $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}(Z_{t_1} \leq x_1, \dots, Z_{t_n} \leq x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{29.3}$$

Nota 29.5 *Para espacios polacos* $(E,\mathcal{E})$ *el* ***Teorema de Consistencia de Kolmogorov*** *asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 29.9 *Las trayectorias de* Z *son las realizaciones* $Z(w)$ *para* $w \in \Omega$ *del mapeo aleatorio* Z.

Nota 29.6 *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto* H *de* $E^{\mathbb{I}}$. *En este caso es natural considerar a* Z *como un elemento aleatorio que no está en* $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ *sino en* $(H,\mathcal{H})$, *donde* $\mathcal{H}$ *es la* σ*-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a* $z \in H$ *en* $z_t \in E$ *para* $t \in \mathbb{I}$. *A* $\mathcal{H}$ *se le conoce como la traza de* H *en* $E^{\mathbb{I}}$, *es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H \quad := \quad \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{29.4}$$

$$Z_t : (\Omega.\mathcal{F}) \quad \rightarrow \quad (H,\mathcal{H}) \tag{29.5}$$

Nota 29.7 Z *tiene* ***trayectorias con valores en*** H *y cada* Z_t *es un mapeo medible de* $(\Omega,\mathcal{F})$ *a* $(H,\mathcal{H})$. *Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular* H, *al espacio* $(H,\mathcal{H})$ *se le llama* ***el espacio de trayectorias de*** Z.

Nota 29.8 *La distribución del proceso estocástico* Z *con espacio de trayectorias* $(H,\mathcal{H})$ *es la distribución de* Z *como un elemento aleatorio en* $(H,\mathcal{H})$. *La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 29.10 *Sea* Z *un PEOSCT (ver definición 29.8) con espacio de estados* $(E,\mathcal{E})$ *y sea* T *un tiempo aleatorio en* $[0,\infty)$. *Por* Z_T *se entiende el mapeo con valores en* E *definido en* Ω *por:*

$$\begin{aligned} Z_T(w) \quad &:= \quad Z_{T(w)}(w), w \in \Omega. \\ Z_t : (\Omega,\mathcal{F}) \quad &\rightarrow \quad (E,\mathcal{E}). \end{aligned}$$

Definición 29.11 *Un PEOSCT* Z *es conjuntamente medible* ***(CM)***, *es decir un* ***PEOSCTCM***, *si el mapeo que toma* $(w,t) \in \Omega \times [0,\infty)$ *a* $Z_t(w) \in E$ *es* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ *medible.*

$$\begin{aligned} (\Omega,[0,\infty)) \quad &\rightarrow \quad (E,\mathcal{E}) \\ (w,t) \quad &\rightarrow \quad Z_t(w). \end{aligned}$$

Nota 29.9 *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que* Z_T *es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma* w *en* $(w,T(w))$ *es* $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ *medible, mientras que el segundo toma* $(w,T(w))$ *en* $Z_{T(w)}(w)$ *es* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ *medible.*

Definición 29.12 *Un PEOSCT con espacio de estados* $(H,\mathcal{H})$ *es canónicamente conjuntamente medible* ***(CCM)*** *si el mapeo* $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ *en* $Z_t \in E$ *es* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ *medible.*

$$\begin{aligned} (H \times [0,\infty), \mathcal{H} \times \mathcal{B}[0,\infty)) \quad &\rightarrow \quad (E,\mathcal{E}) \\ (z,t) \quad &\rightarrow \quad Z_t \end{aligned}$$

Nota 29.10 *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PEOSCTCCM* Z *es un mapeo de* $\Omega \times [0,\infty)$ *a* E, *es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma* (w,t) *en* $(Z(w),t)$ *es* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ *medible, y el segundo que toma* $(Z(w),t)$ *en* $Z_t(w)$ *es* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ *medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

$$\begin{aligned} (\Omega \times [0,\infty), \mathcal{F} \times \mathcal{B}[0,\infty)) \quad &\rightarrow \quad (H \times [0,\infty), \mathcal{H} \times \mathcal{B}[0,\infty)) \rightarrow (E,\mathcal{E}) \\ (w,t) \quad &\rightarrow \quad (Z(w),t]) \rightarrow Z_t(w) \end{aligned}$$

Definición 29.13 *Un conjunto de trayectorias* H *de un PEOSCT* Z, *es internamente shift-invariante* ***(ISI)*** *si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s\in[0,\infty)} : z \in H\right\} = H,\ t \in [0,\infty).$$

Definición 29.14 *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift* θ_t, $t \in [0,\infty)$, *de* H *a* H *por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s\in[0,\infty)},\ z \in H.$$

Definición 29.15 *Se dice que un proceso Z es shift-medible (**SM**) si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ medible.*

$$\begin{array}{rcl} (H \times [0,\infty), \mathcal{H} \times \mathcal{B}[0,\infty)) & \rightarrow & (H,\mathcal{H}) \\ (z,t) & \rightarrow & \theta_t(z) \end{array}$$

Nota 29.11 *Un proceso estocástico (PEOSCT) con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es PEOSCTCCM.*

Nota 29.12
- *Por la nota (29.11) dado el espacio polaco $(E,\mathcal{E})$ si se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0,\infty)$, que es ISI, entonces cumple con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuya cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 29.13 *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 29.3 *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

29.1.3. One Sided Process

Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \rightarrow \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L,\mathcal{L})$, $S : (\Omega,\mathcal{F}) \rightarrow (L,\mathcal{L})$, donde

$$L = \left\{ (s_k)_0^\infty \in [0,\infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \rightarrow \infty \right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.
Así el par (Z,S) es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty))$.

$$\begin{array}{rcl} (Z,S) : (\Omega,\mathcal{F}) & \rightarrow & (H \times L, \mathcal{H} \times \mathcal{L}) \\ \mathcal{H} \times \mathcal{L}^* : (H \times L, \mathcal{H} \times \mathcal{L}) & \rightarrow & ([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty)). \end{array}$$

29.1.4. Regeneration: Shift-Measurability

Definición 29.16 *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z, (s_k)_0^\infty\right) = \theta_t\left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^\infty\right)$$

donde $n_{t-} = inf\{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 29.14 *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

29.1.5. Cycle-Stationarity

Definición 29.17 *Los tiempos aleatorios S_n dividen Z en*

a) un retraso $D = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$,

b) una sucesión de ciclos $C_n = \left(Z_{S_{n-1}+s}\right)_{s\in[0,X_n)}$, $n \geq 1$,

c) las longitudes de los ciclos $X_n = S_n - S_{n-1}$, $n \neq 1$.

Nota 29.15 *a) El retraso D y los ciclos C_n son procesos estocásticos que se desvanecen en los tiempos aleatorios S_0 y X_n respectivamente.*

b) Las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots$ y el retraso de la longitud (delay-length) S_0 son obtenidos por el mismo mapeo medible de sus respectivos ciclos $C_1, C_2, \ldots$ y el retraso D.

c) El par (Z, S) es un mapeo medible del retraso y de los ciclos y viceversa.

Definición 29.18 *(Z, S) es zero-delayed si $S_0 \equiv 0$. Se define el par zero-delayed por*

$$\left(Z^0, S^0\right) := \theta_{S_0}(Z, S)$$

Entonces $S_0^0 \equiv 0$ y $S_0^0 \equiv X_1^0$, mientras que para $n \geq 1$ se tiene que $X_n^0 \equiv X_n$ y $C_n^0 \equiv C_n$.

Definición 29.19 *Se le llama al par (Z, S) **ciclo-stacionario** si los ciclos forman una sucesión estacionaria, es decir, con $=^D$ denota iguales en distribución:*

$$(C_{n+1}, C_{n+2}, \ldots) =^D (C_1, C_2, \ldots), \geq 0$$

Ciclo-estacionareidad es equivalente a

$$\theta_{S_n}(Z, S) =^D \left(Z^0, S^0\right), \geq 0,$$

donde $(C_{n+1}, C_{n+2}, \ldots)$ y $\theta_{S_n}(Z, S)$ son mapeos medibles de cada uno y que no dependen de n.

Definición 29.20 *Un par (Z^*, S^*) es **estacionario** si $\theta(Z^*, S^*) =^D (Z^*, S^*)$, para $t \geq 0$.*

Teorema 29.4 *Supongase que (Z, S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0, 1)$ e independiente de $\left(Z^0, S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces (Z^*, S^*) es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

29.1.6. Classical Regeneration

Definición 29.21 *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice **regenerativo clásico** con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0, S_n), S_0, \ldots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z, S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 29.16 *Si el par (Z, S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un **proceso de renovación**. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

29.1.7. Stationary Version

Teorema 29.5 *Supóngase que el par (Z, S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 33.40 es una versión estacionaria de (Z, S).*

29.1.8. Spread Out

Definición 29.22 *Una variable aleatoria X_1 es **spread out** si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx > 0$ con $X_2, X_3, \ldots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}\left(X_1 + \cdots + X_n \in B\right) \geq \int_B f(x)\,dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

29.1.9. Wide Sense Regeneration

Definición 29.23 *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 29.17
- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 29.18 *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 29.6 *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema (33.40) es una versión estacionaria de (Z,S).*

29.1.10. Existence of Regeneration Times

Teorema 29.7 *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSCTSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{29.6}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{29.7}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{29.8}$$

Corolario 29.1 *Bajo las condiciones del Teorema anterior (29.7), el par (Z,S) es regenerativo clásico. Si además se tiene que $\mathbb{E}[X_1] < \infty$ por el Teorema (29.5) existe un par (Z^*, S^*) que es una vesión estacionaria de (Z,S).*

29.2. Procesos Regenerativos

Nota 29.19 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 29.20 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 29.24 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X.

Definición 29.25 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$
\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,
\end{aligned}
$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$
\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},
$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 29.21 *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_{∞}

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ.

Definición 29.26 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$
\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})
$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 29.22 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 29.23 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 29.27 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 29.24 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

En Sigman, Thorison y Wolff [40] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 29.1 *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k (X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- *Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.*
- *Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.*
- *Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:*

  Teorema 29.8 *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*

  b) $L = 0$*, para cualquier proceso de servicio S;*

  c) $L = 1$ *y* $G = D$*;*

  d) $L = \infty$ *y* $G = M$*.*

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$*;*

  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$*;*

  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$*;*

  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- *Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.*
- *King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.*
- *Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.*

- *El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)*

  Teorema 29.9 *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.

  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$

  d) $G = M$.

- *El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)*

  Teorema 29.10 *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Nota 29.25 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 29.26 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 29.28 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 29.29 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 29.27 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 29.30 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 29.28 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 29.29 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 29.31 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X.

Nota 29.30 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 29.32 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 29.31 *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_∞

Nota 29.32 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 29.33 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 29.33 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 29.34 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 29.34 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 29.35 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 29.35 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 29.36 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 29.36 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 29.37 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 29.37 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty}\leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 29.38 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

29.3. Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [81]

Definición 29.38 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 29.39 *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [40].*

Nota 29.40 *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (**i.i.d.**)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son **i.i.d.** e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 29.39 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty}\leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 29.41 *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 29.42 *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 29.43 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 29.44 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Definición 29.40 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 29.45 *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [40].*

Nota 29.46 *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 29.41 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 29.47 *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 29.48 *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 29.49 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 29.50 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Definición 29.42 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 29.51 *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [40].*

Nota 29.52 *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 29.43 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 29.53 *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 29.54 *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 29.55 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 29.56 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

29.4. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 29.44 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 29.45 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 29.46 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 29.11 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 29.2 *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) \, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (* puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0, t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*

Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 29.47 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 29.48 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 29.49 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 29.12 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (* puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0, t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*

Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 29.50 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 29.51 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 29.52 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 29.13 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces
Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t. Entonces, determinando el primer momento es posible ver que

Definición 29.53 *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 29.54 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.*

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si $I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$ se tiene que $F_i(z) = I_i[P_i(z)]$ para $i = 1, 2$.
Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (34.422), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 29.55 *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 29.56 *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 29.57 *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

[1]

[1] In Stidham and Heyman [41] shows that is sufficient for the regenerative process to be stationary that the mean regenerative cycle time is finite: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$,

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (* puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0, t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*

Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 29.58 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 29.59 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 29.60 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 29.14 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$*.*

Corolario 29.3 *Sea* $\{V(t), t \geq 0\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E} < \infty$*,* F *es no-aritmética, y para todo* $x \geq 0$*,* $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $[0, \tau]$*, entonces* $V(t)$ *converge en distribución cuando* $t \to \infty$ *y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) \, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V(t)$ *cuando* $t \to \infty$*.*

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (* puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0, t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*

Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 29.61 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 29.62 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 29.63 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 29.15 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel* A*,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0, t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 29.64 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 29.65 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 29.66 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 29.16 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}(0)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\,ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t} V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Para $\{X(t): t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_{+}$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_{n}=T_{n}-T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ*.*
Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_{1}, X_{2}, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel* A*,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_{1}+X_{2}+\cdots+X_{R(t)}=s,\{V(\tau), \tau<s\}\right\}=\mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_{1}>t-s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t)=\max\left\{X_{1}+X_{2}+\cdots+X_{j} \leq t\right\}=$*número de renovaciones (* puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0, t]$*. El intervalo* $\left[0, X_{1}\right)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $\left[X_{1}, X_{1}+X_{2}\right)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X=X_{1}$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 29.67 *Se define el proceso estacionario,* $\left\{V^{*}(t), t \geq 0\right\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\}=\frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_{0}^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X>x\}(1-F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 29.68 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda>0$ *entera.*

Definición 29.69 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 29.17 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X]<\infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^{*}(0)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}(0)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\,ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t} V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Corolario 29.4 *Sea* $\{V(t), t \geq 0\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E}<\infty$*,* F *es no-aritmética, y para todo* $x \geq 0$*,* $P\{V(t) \leq x, C>x\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $[0, \tau]$*, entonces* $V(t)$ *converge en distribución cuando* $t \rightarrow \infty$ *y*

$$\mathbb{E} V=\frac{\mathbb{E} \int_{0}^{X} V(s)\,ds}{\mathbb{E} X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V(t)$ *cuando* $t \rightarrow \infty$*.*

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

29.5. Teorema Principal de Renovación

Nota 29.57 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 29.18 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 29.2 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 29.70 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 29.3 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 29.19 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 29.58 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 29.20 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 29.4 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 29.71 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 29.5 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 29.21 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 29.59 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 29.22 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 29.6 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 29.72 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 29.7 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 29.23 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

29.6. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 29.8 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Nota 29.60 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución G, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 29.24 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{29.9}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{29.10}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 29.5 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{29.11}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 29.73 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 29.25 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{29.12}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{29.13}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 29.6 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{29.14}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 29.9 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 29.61 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 29.26 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \qquad (29.15)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \qquad (29.16)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 29.7 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (29.17)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 29.74 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 29.27 *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \qquad (29.18)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \qquad (29.19)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 29.8 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{29.20}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 29.10 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 29.62 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 29.28 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{29.21}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{29.22}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 29.9 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{29.23}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 29.75 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 29.29 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} \qquad (29.24)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} \qquad (29.25)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 29.10 *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (29.26)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 29.11 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 29.63 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 29.30 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \qquad (29.27)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \qquad (29.28)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 29.11 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (29.29)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\left\{Z\left(t\right):t\geq 0\right\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N\left(t\right)$

Definición 29.76 *Para el proceso $\left\{Z\left(t\right):t\geq 0\right\}$ se define la fluctuación máxima de $Z\left(t\right)$ en el intervalo $\left(T_{n-1},T_{n}\right]$:*

$$M_{n}=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_{n}}|Z\left(t\right)-Z\left(T_{n-1}\right)|$$

Teorema 29.31 *Supóngase que $n^{-1}T_{n}\rightarrow\mu$ c.s. cuando $n\rightarrow\infty$, donde $\mu\leq\infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_{n}\right) &= a,\text{ c.s.} && (29.30)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu,\text{ c.s.} && (29.31)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_{n}=0$ c.s.

Corolario 29.12 *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_{n}\right)-Z\left(T_{n-1}\right),M_{n}\right)$, para $n\geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right)\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_{1}\right)-Z\left(T_{0}\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_{1}\right]},\text{ c.s. cuando } t\rightarrow\infty. \tag{29.32}$$

Los tiempos T_{n} están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right)\geq n\right\} &= \left\{T_{n}\leq t\right\}\\ T_{N(t)}\leq & \;t\; < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N\left(T_{n}\right)=n$, y

$$N\left(t\right)=\max\left\{n:T_{n}\leq t\right\}=\min\left\{n:T_{n+1}>t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_{n}\leq t\right\}=F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right)\geq n\right\} &= \left\{T_{n}\leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right)\leq n\right\} &= 1-F^{(n+1)\star}\left(t\right)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{N\left(t\right)\geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 29.12 *Para cada $t\geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^{m}\right]<\infty$, para $m\geq 1$.*

Nota 29.64 *Si el primer tiempo de renovación ξ_{1} no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_{n}, para $n\geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_{n} de la n-ésima renovación tiene distribución $G\star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 29.32 *Para una constante $\mu\leq\infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_{n} &= \mu,\text{ c.s.} && (29.33)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu,\text{ c.s.} && (29.34)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 29.13 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{29.35}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 29.77 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 29.33 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (29.36)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (29.37) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 29.14 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{29.38}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 29.13 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 29.65 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 29.34 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (29.39)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (29.40)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 29.15 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$
t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{29.41}
$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 29.78 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$
M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|
$$

Teorema 29.35 *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (29.42)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (29.43)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 29.16 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{29.44}
$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\
T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N(T_n) = n$, y

$$
N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}
$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$
P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)
$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\
P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)
\end{aligned}
$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$
\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)
$$

Proposición 29.14 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 29.66 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 29.36 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \qquad (29.45)\\ lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \qquad (29.46)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 29.17 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \qquad (29.47)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 29.79 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 29.37 *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \qquad (29.48)\\ lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \qquad (29.49)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 29.18 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}\left[Z(T_1) - Z(T_0)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \qquad (29.50)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ P\{N(t)\leq n\} &= 1-F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)$$

Proposición 29.15 *Para cada* $t\geq 0$, *la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m]<\infty$, *para* $m\geq 1$.

Nota 29.67 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n, *para* $n\geq 2$, *a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G, *entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G\star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 29.38 *Para una constante* $\mu\leq\infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n = \mu,\ c.s. \tag{29.51}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N(t) = 1/\mu,\ c.s. \tag{29.52}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 29.19 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu\leq\infty$, *entonces*

$$t^{-1}N(t)\rightarrow 1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \tag{29.53}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t):t\geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 29.80 *Para el proceso* $\{Z(t):t\geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1},T_n]$:

$$M_n=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_n}|Z(t)-Z(T_{n-1})|$$

Teorema 29.39 *Supóngase que* $n^{-1}T_n\rightarrow\mu$ *c.s. cuando* $n\rightarrow\infty$, *donde* $\mu\leq\infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) = a,\ c.s. \tag{29.54}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) = a/\mu,\ c.s. \tag{29.55}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n=0$ *c.s.*

Corolario 29.20 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n)-Z(T_{n-1}),M_n)$, *para* $n\geq 1$, *son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t)\rightarrow\frac{\mathbb{E}[Z(T_1)-Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]},\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \tag{29.56}$$

Los tiempos T_n *están relacionados con los conteos de* $N(t)$ *por*

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ T_{N(t)}\leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n)=n$, *y*

$$N(t) = \text{máx}\{n : T_n \leq t\} = \text{mín}\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 29.16 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Nota 29.68 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 29.40 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{29.57}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{29.58}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 29.21 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{29.59}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 29.81 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 29.41 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \to \mu$ *c.s. cuando* $n \to \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{29.60}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{29.61}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 29.22 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{29.62}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 29.17 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 29.69 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 29.42 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{29.63}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{29.64}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 29.23 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{29.65}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 29.82 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 29.43 *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{29.66}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{29.67}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 29.24 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{29.68}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 29.18 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 29.70 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 29.44 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{29.69}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{29.70}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 29.25 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{29.71}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 29.83 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 29.45 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a,\ c.s. & (29.72)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu,\ c.s. & (29.73)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 29.26 *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]},\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \quad (29.74)$$

29.7. Función de Renovación

Definición 29.84 *Sea $h\left(t\right)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h\left(t\right)$ y la distribución F es*

$$H\left(t\right) = h\left(t\right) + \int_{\left[0,t\right]}H\left(t-s\right)dF\left(s\right),\ t \geq 0, \quad (29.75)$$

donde $H\left(t\right)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H\left(t\right)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 29.19 *La función $U \star h\left(t\right)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 29.46 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U\left(t\right) \rightarrow 1/\mu,\ cuando\ t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 29.85 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N\left(t\right)$, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}\left(t\right),\ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = \mathbb{1}\left(t \geq 0\right)$.

Proposición 29.20 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U\left(t\right)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty}f^{n\star}\left(t\right)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 29.86 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+}e^{-\alpha t}dF\left(t\right),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 29.21 *La Transformada de Laplace $\hat{U}\left(\alpha\right)$ y $\hat{F}\left(\alpha\right)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}\left(\alpha\right) = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$.*

Nota 29.71 *Un proceso de renovación $N\left(t\right)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U\left(t\right)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 29.47 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 29.27 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t)+1], \; t \geq 0,$$

Definición 29.87 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{29.76}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 29.22 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 29.48 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 29.88 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 29.23 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 29.89 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 29.24 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 29.72 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 29.49 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n|T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 29.28 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 29.90 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t - s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{29.77}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 29.25 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 29.50 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 29.91 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 29.26 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 29.92 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 29.27 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 29.73 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 29.51 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 29.29 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t)+1]\,,\; t \geq 0,$$

29.8. Procesos de Renovación

Definición 29.93 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)\,, \tag{29.78}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 29.94 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 29.74 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Ejemplo 29.1 (Proceso Poisson) *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 29.75 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Nota 29.76 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 29.52 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 29.28 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\text{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 29.95 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\text{ para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 29.29 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\text{ donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 29.53 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Nota 29.77 *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)|\leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 29.54 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 29.30 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\text{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 29.96 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\text{ para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 29.31 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\text{ donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 29.55 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Definición 29.97 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 29.78 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 29.79 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 29.80 *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ*.*

Definición 29.98 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 29.81 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 29.56 (Procesos Regenerativos) *Suponga que el proceso*

Definición 29.99 (Renewal Process Trinity) *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t*.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t*, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t*.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$*, la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t*.*

Nota 29.82 *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n*, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$*. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{29.79}$$

Ejemplo 29.2 (Tiempos de recurrencia Poisson) *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*, entonces de la expresión (34.8.10) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$*.*

Nota 29.83 *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 29.100 *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$*,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 29.84 *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$*,* $t \geq 0$*.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ *en* $\mathbb{R}_+$*, con puntos* $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$*.*

Proposición 29.32 *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$*, entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$*,* $t \geq 0$

Teorema 29.57 *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N *es estacionario.*

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$*,*

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$*, para* $t, x \geq 0$*.*

Nota 29.85 *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 29.30 *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Definición 29.101 *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{29.80}$$

para $t \geq 0$*.*

Si se consideran los puntos T_n *como elementos de* $\mathbb{R}_+$*, y* $N(t)$ *es el número de puntos en* $\mathbb{R}$*. El proceso denotado por* $\{N(t) : t \geq 0\}$*, denotado por* $N(t)$*, es un proceso puntual en* $\mathbb{R}_+$*. Los* T_n *son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual* $N(t)$ *es simple si su número de ocurrencias son distintas:* $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ *casi seguramente.*

Definición 29.102 *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, para* $n \geq 1$*, son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F*, donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$*. Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 29.86 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F*, con* $F(0) = 0$*, para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F*. Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$*, donde* $T_n \to \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Definición 29.103 *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{29.81}$$

para $t \geq 0$*.*

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 29.104 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 29.87 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Definición 29.105 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{29.82}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 29.106 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 29.88 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Definición 29.107 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{29.83}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 29.108 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 29.89 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Definición 29.109 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{29.84}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 29.110 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 29.90 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

29.9. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[35]

Definición 29.111 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{29.85}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 29.112 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 29.91 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \ t < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 29.33 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 29.3 (Proceso Poisson) *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 29.92 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 29.58 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned}lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \ c.s. &(29.86)\\ lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \ c.s. &(29.87)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 29.31 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \to \infty. \qquad (29.88)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 29.113 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 29.59 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} \quad (29.89)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (29.90)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 29.32 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (29.91)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 29.114 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = \mathbb{1}\left(t \geq 0\right)$.

Proposición 29.34 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 29.115 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF\left(t\right), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 29.35 *La Transformada de Laplace $\hat{U}\left(\alpha\right)$ y $\hat{F}\left(\alpha\right)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}\left(\alpha\right) = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$.*

Nota 29.93 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U\left(t\right)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 29.60 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta\left(t\right) = \mathbb{E}\left[N\left(\right)\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f\left(T_n\right)\right] = \int_{(0,t]} f\left(s\right) d\eta\left(s\right), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f\left(s\right)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f\left(s\right) d\eta\left(s\right), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 29.33 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}\left[N\left(t\right) + 1\right], \; t \geq 0,$$

Definición 29.116 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s)\,,\; t \geq 0, \tag{29.92}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 29.36 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 29.61 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 29.117 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)\,,\; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 29.37 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\; t \geq 0.$$

Definición 29.118 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t)\,,\; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 29.38 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 29.94 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 29.62 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\,d\eta(s)\,,\; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\,d\eta(s)\,,\; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 29.34 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t)+1]\,,\; t \geq 0,$$

Definición 29.119 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s), \; t \geq 0, \tag{29.93}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 29.39 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 29.63 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 29.95 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 29.64 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 29.40 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 29.120 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)\,|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 29.41 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 29.65 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 29.96 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 29.66 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 29.42 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 29.121 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 29.43 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 29.67 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Definición 29.122 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 29.97 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 29.98 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 29.99 *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 29.123 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 29.100 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 29.68 (Procesos Regenerativos) *Suponga que el proceso*

Definición 29.124 (Renewal Process Trinity) *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- *$A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*

- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t, *residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t.
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t.

Nota 29.101 *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n, *y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$. *Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{29.94}$$

Ejemplo 29.4 (Tiempos de recurrencia Poisson) *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ, *entonces de la expresión (34.8.10) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 29.102 *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 29.125 *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 29.103 *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ *en* $\mathbb{R}_+$, *con puntos* $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 29.44 *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 29.69 *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación* N *es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante* $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 29.104 *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 29.35 *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Definición 29.126 *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{29.95}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n *como elementos de* $\mathbb{R}_+$, *y* $N(t)$ *es el número de puntos en* $\mathbb{R}$. *El proceso denotado por* $\{N(t) : t \geq 0\}$, *denotado por* $N(t)$, *es un proceso puntual en* $\mathbb{R}_+$. *Los* T_n *son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual* $N(t)$ *es simple si su número de ocurrencias son distintas:* $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ *casi seguramente.*

Definición 29.127 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 29.105 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \ t \ < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 29.45 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 29.5 (Proceso Poisson) *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 29.106 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 29.70 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n \to \infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{29.96}$$

$$lim_{t \to \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{29.97}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 29.36 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \to \infty. \tag{29.98}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 29.128 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 29.71 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \to \mu$ *c.s. cuando* $n \to \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (29.99) \\ lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (29.100) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\to\infty} n^{-1}M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 29.37 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \quad (29.101)$$

Supóngase que $N(t)$ *es un proceso de renovación con distribución* F *con media finita* μ*.*

Definición 29.129 *La función de renovación asociada con la distribución* F*, del proceso* $N(t)$*, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$*.*

Proposición 29.46 *Supóngase que la distribución de inter-renovación* F *tiene densidad* f*. Entonces* $U(t)$ *también tiene densidad, para* $t > 0$*, y es* $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$*. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 29.130 *La Transformada de Laplace-Stieljes de* F *está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 29.47 *La Transformada de Laplace* $\hat{U}(\alpha)$ *y* $\hat{F}(\alpha)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$*.*

Nota 29.107 *Un proceso de renovación* $N(t)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$*, para* $t \geq 0$*.*

Teorema 29.72 *Sea* $N(t)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ *es finita para cada* t*. Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$*,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N(t)$ *tal que* $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$*, independiente de* n*. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 29.38 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right],\ t \geq 0,$$

Definición 29.131 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s),\ t \geq 0, \tag{29.102}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 29.48 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 29.73 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 29.132 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 29.49 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t>0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 29.133 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_{+}} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 29.50 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 29.108 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 29.74 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\,d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\,d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 29.39 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right], \; t \geq 0,$$

Definición 29.134 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s), \; t \geq 0, \tag{29.103}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 29.51 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 29.75 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 29.109 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 29.76 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 29.52 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 29.135 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 29.53 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 29.77 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 29.110 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 29.78 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds.$$

Proposición 29.54 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 29.136 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 29.55 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 29.79 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Definición 29.137 *Para el proceso $\{(N(t),X(t)):t\geq0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1},T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n=(\xi_n,\{X(T_{n-1}+t):0\leq t<\xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 29.111 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t)=f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f:\tilde{S}\rightarrow S$.*

Nota 29.112 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 29.113 *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t):t\geq0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t):t\geq0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n=T_n-T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 29.138 *Para el proceso $\{(N(t),X(t)):t\geq0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1},T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n=(\xi_n,\{X(T_{n-1}+t):0\leq t<\xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 29.114 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 29.80 (Procesos Regenerativos) *Suponga que el proceso*

Definición 29.139 (Renewal Process Trinity) *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 29.115 *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{29.104}$$

Ejemplo 29.6 (Tiempos de recurrencia Poisson) *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (34.8.10) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 29.116 *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 29.140 *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 29.117 *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 29.56 *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 29.81 *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación N es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 29.118 *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 29.40 *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

29.10. Resultados para Procesos de Salida

En Sigman, Thorison y Wolff [40] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 29.57 *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1}X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k (X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- *Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.*
- *Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.*
- *Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:*

  Teorema 29.82 *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso **I** es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) Los tiempos de servicio son identicamente cero;

  b) $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;

  c) $L = 1$ y $G = D$;

  d) $L = \infty$ y $G = M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;

  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;

  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;

  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- *Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.*
- *King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.*
- *Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.*
- *El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)*

  Teorema 29.83 *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.

  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$

  d) $G = M$.

- *El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)*

Teorema 29.84 *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [13] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- *Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.*
- *Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.*
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- *Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:*

  Teorema 29.85 *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right) 2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2 (1-\delta)^{-1}.
\end{aligned}$$

  Teorema 29.86 *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 29.87 *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

CAPÍTULO 30

Teoría de Colas

30.1. Cadenas de Markov

30.1.1. Estacionareidad

Sea $v = (v_i)_{i \in E}$ medida no negativa en E, podemos definir una nueva medida $v\mathbb{P}$ que asigna masa $\sum_{i \in E} v_i p_{ij}$ a cada estado j.

Definición 30.1 *La medida v es estacionaria si $v_i < \infty$ para toda i y además $v\mathbb{P} = v$.*

En el caso de que v sea distribución, independientemente de que sea estacionaria o no, se cumple con

$$\mathbb{P}_v\left[X_1 = j\right] = \sum_{i \in E} \mathbb{P}_v\left[X_0 = i\right] p_{ij} = \sum_{i \in E} v_i p_{ij} = (vP)_j$$

Teorema 30.1 *Supongamos que v es una distribución estacionaria. Entonces*

i) La cadena es estrictamente estacionaria con respecto a $\mathbb{P}_v$, es decir, $\mathbb{P}_v$-distribución de $\{X_n, X_{n+1}, \ldots\}$ no depende de n;

ii) Existe un aversión estrictamente estacionaria $\{X_n\}_{n \in Z}$ de la cadena con doble tiempo infinito y $\mathbb{P}(X_n = i) = v_i$ para toda $n \in Z$.

Teorema 30.2 *Sea i estado fijo, recurrente. Entonces una medida estacionaria v puede definirse haciendo que v_j sea el número esperado de visitas a j entre dos visitas consecutivas i,*

$$v_j = \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \mathbb{1}(X_n = i) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i\left[X_n = j, \tau(i) > n\right] \tag{30.1}$$

Teorema 30.3 *Si la cadena es irreducible y recurrente, entonces una medida estacionaria v existe, satisface $0 < v_j < \infty$ para toda j y es única salvo factores multiplicativos, es decir, si v, v^* son estacionarias, entonces $c = cv^*$ para alguna $c \in (0, \infty)$.*

Corolario 30.1 *Si la cadena es irreducible y positiva recurrente, existe una única distribución estacionaria π dada por*

$$\pi_j = \frac{1}{\mathbb{E}_i \tau_i} \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \mathbb{1}(X_n = j) = \frac{1}{\mathbb{E}_j \tau(j)}. \tag{30.2}$$

Corolario 30.2 *Cualquier cadena de Markov irreducible con un espacio de estados finito es positiva recurrente.*

30.1.2. Teoría Ergódica

Lema 30.1 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y se F subconjunto finito del espacio de estados. Entonces la cadena es positiva recurrente si $\mathbb{E}_i\tau(F) < \infty$ para todo $i \in F$.*

Proposición 30.1 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y transiente o cero recurrente, entonces $p_{ij}^n \to 0$ conforme $n \to \infty$ para cualquier $i, j \in E$, E espacio de estados.*

Utilizando el teorema (2.2) y el corolario refCor.3.5, se demuestra el siguiente resultado importante.

Teorema 30.4 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y aperiódica positiva recurrente, y sea $\pi = \{\pi_j\}_{j\in E}$ la distribución estacionaria. Entonces $p_{ij}^n \to \pi_j$ para todo i, j.*

Definición 30.2 *Una cadena irreducible aperiodica, positiva recurrente con medida estacionaria v, es llamada* ergódica.

Proposición 30.2 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y recurrente con medida estacionaria v, entocnes para todo $i, j, k, l \in E$*

$$\frac{\sum_{n=0}^{m} p_{ij}^n}{\sum_{n=0}^{m} p_{lk}^n} \to \frac{v_j}{v_k},\ m \to \infty \tag{30.3}$$

Lema 30.2 *La matriz $\widetilde{P}$ con elementos $\widetilde{p}_{ij} = \frac{v_{ji}p_{ji}}{v_i}$ es una matriz de transición. Además, el i-ésimo elementos $\widetilde{p}_{ij}^m$ de la matriz potencia $\widetilde{P}^m$ está dada por $\widetilde{p}_{ij}^m = \frac{v_{ji}p_{ji}^m}{v_i}$.*

Lema 30.3 *Defínase $N_i^m = \sum_{n=0}^{m} \mathbb{1}(X_n = i)$ como el número de visitas a i antes del tiempo m. Entonces si la cadena es reducible y recurrente, $lim_{m\to\infty} \frac{\mathbb{E}_j N_i^m}{\mathbb{E}_k N_i^m} = 1$ para todo $j, k \in E$.*

30.1.3. Funciones Armónicas, Recurrencia y Transitoriedad

Definición 30.3 *Una función Armónica es el eigenvector derecho h de P corrrespondiente al eigenvalor 1.*

$$Ph = h \Leftrightarrow h(i) = \sum_{j\in E} p_{ij} h(j) = \mathbb{E}_i h(X_1) = \mathbb{E}\left[h(X_{n+1}) | X_n = i\right].$$

es decir, $\{h(X_n)\}$ es martingala.

Proposición 30.3 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y sea i estado fijo arbitrario. Entonces la cadena es transitoria sí y sólo si existe una función no cero, acotada $h : E - \{i\} \to \mathbb{R}$ que satisface*

$$h(j) = \sum_{k\neq i} p_{jk} h(k) \ \text{ para } j \neq i. \tag{30.4}$$

Proposición 30.4 *Supongamos que la cadena es irreducible y sea E_0 un subconjunto finito del espacio de estados, entonces*

i)

ii)

Proposición 30.5 *Suponga que la cadena es irreducible y sea E_0 un subconjunto finito de E tal que se cumple la ecuación 5.2 para alguna función h acotada que satisface $h(i) < h(j)$ para algún estado $i \notin E_0$ y todo $j \in E_0$. Entonces la cadena es transitoria.*

30.2. Procesos de Markov de Saltos

30.2.1. Estructura Básica de los Procesos Markovianos de Saltos

- *Sea E espacio discreto de estados, finito o numerable, y sea $\{X_t\}$ un proceso de Markov con espacio de estados E. Una medida μ en E definida por sus probabilidades puntuales μ_i, escribimos $p_{ij}^t = P^t(i, \{j\}) = P_i(X_t = j)$.*

- *El monto del tiempo gastado en cada estado es positivo, de modo tal que las trayectorias muestrales son constantes por partes. Para un proceso de saltos denotamos por los tiempos de saltos a* $S_0 = 0 < S_1 < S_2 \cdots$, *los tiempos entre saltos consecutivos* $T_n = S_{n+1} - S_n$ *y la secuencia de estados visitados por* $Y_0, Y_1, \ldots$, *así las trayectorias muestrales son constantes entre* S_n *consecutivos, continua por la derecha, es decir,* $X_{S_n} = Y_n$.
- *La descripción de un modelo práctico está dado usualmente en términos de las intensidades* $\lambda(i)$ *y las probabilidades de salto* q_{ij} *más que en términos de la matriz de transición* P^t.
- *Supóngase de ahora en adelante que* $q_{ii} = 0$ *cuando* $\lambda(i) > 0$

30.2.2. Matriz Intensidad

Definición 30.4 *La matriz intensidad* $\Lambda = (\lambda(i,j))_{i,j\in E}$ *del proceso de saltos* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *está dada por*

$$\begin{aligned}\lambda(i,j) &= \lambda(i)\, q_{i,j},\ j \neq i\\ \lambda(i,i) &= -\lambda(i)\end{aligned}$$

Proposición 30.6 *Una matriz* $E \times E$, Λ *es la matriz de intensidad de un proceso markoviano de saltos* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *si y sólo si*

$$\lambda(i,i) \leq 0,\ \lambda(i,j),\ i \neq j,\ \sum_{j\in E} \lambda(i,j) = 0.$$

Además, Λ *está en correspondencia uno a uno con la distribución del proceso minimal dado por el teorema 3.1.*

Para el caso particular de la Cola $M/M/1$, *la matríz de itensidad está dada por*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\beta & \beta & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \delta & -\beta-\delta & \beta & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \delta & -\beta-\delta & \beta & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

30.2.3. Medidas Estacionarias

Definición 30.5 *Una medida* $v \neq 0$ *es estacionaria si* $0 \leq v_j < \infty$, $vP^t = v$ *para toda* t.

Teorema 30.5 *Supongamos que* $\{X_t\}$ *es irreducible recurrente en* E. *Entonces existe una y sólo una, salvo múltiplos, medida estacionaria* v. *Esta* v *tiene la propiedad de que* $0 < v_j < \infty$ *para todo* j *y puede encontrarse en cualquiera de las siguientes formas*

i) Para algún estado i, *fijo pero arbitrario,* v_j *es el tiempo esperado utilizado en* j *entre dos llegadas consecutivas al estado* i;

$$v_j = \mathbb{E}_i \int_0^{w(i)} \mathbb{1}(X_t = j)\, dt \qquad (30.5)$$

con $w(i) = \inf\{t > 0 : X_t = i, X_{t^-} = \lim_{s\uparrow t} X_s \neq i\}$.

ii) $v_j = \frac{\mu_j}{\lambda(j)}$, *donde* μ *es estacionaria para* $\{Y_n\}$.

iii) como solución de $v\Lambda = 0$.

30.2.4. Criterios de Ergodicidad

Definición 30.6 *Un proceso irreducible recurrente con medida estacionaria de masa finita es llamado ergódico.*

Teorema 30.6 *Un proceso de Markov de saltos irreducible no explosivo es ergódico si y sólo si se puede encontrar una solución, de probabilidad,* π, *con* $|\pi| = 1$ *y* $0 \leq \pi_j \leq 1$, *a* $\pi\Lambda = 0$. *En este caso* π *es la distribución estacionaria.*

Corolario 30.3 *Una condición suficiente para la ergodicidad de un proceso irreducible es la existencia de una probabilidad π que resuelva el sistema $\pi\Lambda = 0$ y que además tenga la propiedad de que $\sum \pi_j \lambda(j) < \infty$.*

Proposición 30.7 *Si el proceso es ergódico, entonces existe una versión estrictamente estacionaria $\{X_t\}_{-\infty<t<\infty}$ con doble tiempo infinito.*

Teorema 30.7 *Si $\{X_t\}$ es ergódico y π es la distribución estacionaria, entonces para todo i, j, $p_{ij}^t \to \pi_j$ cuando $t \to \infty$.*

Corolario 30.4 *Si $\{X_t\}$ es irreducible recurente pero no ergódica, es decir $|v| = \infty$, entonces $p_{ij}^t \to 0$ para todo $i, j \in E$.*

Corolario 30.5 *Para cualquier proceso Markoviano de Saltos minimal, irreducible o no, los límites $li_{t\to\infty} p_{ij}^t$ existe.*

30.3. Notación Kendall-Lee

A partir de este momento se harán las siguientes consideraciones: Si t_n es el tiempo aleatorio en el que llega al sistema el n-ésimo cliente, para $n = 1, 2, \ldots$, $t_0 = 0$ y $t_0 < t_1 < \cdots$ se definen los tiempos entre arribos $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ para $n = 1, 2, \ldots$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Los tiempos entre arribos tienen un valor medio $E(\tau)$ finito y positivo $\frac{1}{\beta}$, es decir, β se puede ver como la tasa o intensidad promedio de arribos al sistema por unidad de tiempo. Además se supondrá que los servidores son identicos y si s denota la variable aleatoria que describe el tiempo de servicio, entonces $E(s) = \frac{1}{\delta}$, δ es la tasa promedio de servicio por servidor.
La notación de Kendall-Lee es una forma abreviada de describir un sisema de espera con las siguientes componentes:

i) **Fuente***: Población de clientes potenciales del sistema, esta puede ser finita o infinita.*

ii) **Proceso de Arribos***: Proceso determinado por la función de distribución $A(t) = P\{\tau \leq t\}$ de los tiempos entre arribos.*

Además tenemos las siguientes igualdades

$$N(t) = N_q(t) + N_s(s) \tag{30.6}$$

donde

- *$N(t)$ es el número de clientes en el sistema al tiempo t.*
- *$N_q(t)$ es el número de clientes en la cola al tiempo t*
- *$N_s(t)$ es el número de clientes recibiendo servicio en el tiempo t.*

Bajo la hipótesis de estacionareidad, es decir, las características de funcionamiento del sistema se han estabilizado en valores independientes del tiempo, entonces

$$N = N_q + N_s. \tag{30.7}$$

Los valores medios de las cantidades anteriores se escriben como $L = E(N)$, $L_q = E(N_q)$ y $L_s = E(N_s)$, entonces de la ecuación 30.97 se obtiene

$$L = L_q + L_s \tag{30.8}$$

Si q es el tiempo que pasa un cliente en la cola antes de recibir servicio, y W es el tiempo total que un cliente pasa en el sistema, entonces

$$w = q + s$$

por lo tanto

$$W = W_q + W_s,$$

donde $W = E(w)$, $W_q = E(q)$ y $W_s = E(s) = \frac{1}{\delta}$.
La intensidad de tráfico se define como

$$\rho = \frac{E(s)}{E(\tau)} = \frac{\beta}{\delta}. \tag{30.9}$$

La utilización por servidor es

$$u = \frac{\rho}{c} = \frac{\beta}{c\delta}. \tag{30.10}$$

donde c es el número de servidores. Esta notación es una forma abreviada de describir un sistema de espera con componentes dados a continuación, la notación es

$$A/S/c/K/F/d \tag{30.11}$$

Cada una de las letras describe:

- A *es la distribución de los tiempos entre arribos.*
- S *es la distribución del tiempo de servicio.*
- c *es el número de servidores.*
- K *es la capacidad del sistema.*
- F *es el número de individuos en la fuente.*
- d *es la disciplina del servicio*

Usualmente se acostumbra suponer que $K = \infty$, $F = \infty$ *y* $d = FIFO$, *es decir, First In First Out. Las distribuciones usuales para A y B son:*

- GI *para la distribución general de los tiempos entre arribos.*
- G *distribución general del tiempo de servicio.*
- M *Distribución exponencial para A o S.*
- E_K *Distribución Erlang-K, para A o S.*
- D *tiempos entre arribos o de servicio constantes, es decir, deterministicos.*

30.4. Procesos de Nacimiento y Muerte

30.4.1. Procesos de Nacimiento y Muerte Generales

Por un proceso de nacimiento y muerte se entiende un proceso de saltos de markov $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *con espacio de estados a lo más numerable, con la propiedad de que sólo puede ir al estado* $n+1$ *o al estado* $n-1$, *es decir, su matriz de intensidad es de la forma*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\beta_0 & \beta_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \delta_1 & -\beta_1 - \delta_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \delta_2 & -\beta_2 - \delta_2 & \beta_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

donde β_n *son las intensidades de nacimiento y* δ_n *las intensidades de muerte, o también se puede ver como a* X_t *el número de usuarios en una cola al tiempo* t, *un salto hacia arriba corresponde a la llegada de un nuevo usuario y un salto hacia abajo como al abandono de un usuario después de haber recibido su servicio.*
La cadena de saltos $\{Y_n\}$ *tiene matriz de transición dada por*

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

donde $p_n = \frac{\beta_n}{\beta_n+\delta_n}$ *y* $q_n = 1 - p_n = \frac{\delta_n}{\beta_n+\delta_n}$, *donde además se asumne por el momento que* p_n *no puede tomar el valor 0 ó 1 para cualquier valor de* n.

Proposición 30.8 *La recurrencia de* $\{X_t\}$, *o equivalentemente de* $\{Y_n\}$ *es equivalente a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\beta_1 \cdots \beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} = \infty \tag{30.12}$$

Lema 30.4 *Independientemente de la recurrencia o transitorieadad, existe una y sólo una, salvo múltiplos, solución a $v\Lambda = 0$, dada por*

$$v_n = \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} v_0 \tag{30.13}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Corolario 30.6 *En el caso recurrente, la medida estacionaria μ para $\{Y_n\}$ está dada por*

$$\mu_n = \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n} \mu_0 \tag{30.14}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Se define a $S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n}$

Corolario 30.7 *$\{X_t\}$ es ergódica si y sólo si la ecuación (30.133) se cumple y además $S < \infty$, en cuyo caso la distribución ergódica, π, está dada por*

$$\pi_0 = \frac{1}{S}, \; \pi_n = \frac{1}{S} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \tag{30.15}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

30.4.2. Cola M/M/1

Este modelo corresponde a un proceso de nacimiento y muerte con $\beta_n = \beta$ y $\delta_n = \delta$ independiente del valor de n. La intensidad de tráfico $\rho = \frac{\beta}{\delta}$, implica que el criterio de recurrencia (ecuación 30.133) quede de la forma:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} = \infty.$$

Equivalentemente el proceso es recurrente si y sólo si

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n < \infty \Leftrightarrow \frac{\beta}{\delta} < 1$$

Entonces $S = \frac{\delta}{\delta - \beta}$, luego por la ecuación 30.136 se tiene que

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{\delta - \beta}{\delta} = 1 - \frac{\beta}{\delta} \\ \pi_n &= \pi_0 \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n = \left(1 - \frac{\beta}{\delta}\right) \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n = (1 - \rho)\, \rho^n \end{aligned}$$

Lo cual nos lleva a la siguiente

Proposición 30.9 *La cola $M/M/1$ con intendisad de tráfico ρ, es recurrente si y sólo si $\rho \leq 1$.*

Entonces por el corolario 30.30

Proposición 30.10 *La cola $M/M/1$ con intensidad de tráfico ρ es ergódica si y sólo si $\rho < 1$. En cuyo caso, la distribución de equilibrio π de la longitud de la cola es geométrica, $\pi_n = (1 - \rho)\, \rho^n$, para $n = 1, 2, \ldots$.*

De la proposición anterior se desprenden varios hechos importantes.

a) $\mathbb{P}[X_t = 0] = \pi_0 = 1 - \rho$, *es decir, la probabilidad de que el sistema se encuentre ocupado.*

b) *De las propiedades de la distribución Geométrica se desprende que*

1) $\mathbb{E}[X_t] = \frac{\rho}{1-\rho}$,
2) $Var[X_t] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$.

Si L es el número esperado de clientes en el sistema, incluyendo los que están siendo atendidos, entonces

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Si además W es el tiempo total del cliente en la cola: $W = W_q + W_s$ $\rho = \frac{\mathbb{E}[s]}{\mathbb{E}[\tau]} = \beta W_s$, puesto que $W_s = \mathbb{E}[s]$ y $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\delta}$. Por la fórmula de Little $L = \lambda W$

$$\begin{aligned} W &= \frac{L}{\beta} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\beta} = \frac{\rho}{\delta}\frac{1}{1-\rho} = \frac{W_s}{1-\rho} \\ &= \frac{1}{\delta(1-\rho)} = \frac{1}{\delta-\beta} \end{aligned}$$

luego entonces

$$\begin{aligned} W_q &= W - W_s = \frac{1}{\delta-\beta} - \frac{1}{\delta} = \frac{\beta}{\delta(\delta-\beta)} \\ &= \frac{\rho}{1-\rho}\frac{1}{\delta} = \mathbb{E}[s]\frac{\rho}{1-\rho} \end{aligned}$$

Entonces

$$L_q = \beta W_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Finalmente

Proposición 30.11 a*) $W(t) = 1 - e^{-\frac{t}{W}}$.*
b*) $W_q(t) = 1 - \rho \exp^{-\frac{t}{W}}$.*
donde $W = \mathbb{E}(w)$.

30.4.3. Cola $M/M/\infty$

Este tipo de modelos se utilizan para estimar el número de líneas en uso en una gran red comunicación o para estimar valores en los sistemas $M/M/c$ o $M/M/c/c$, en el se puede pensar que siempre hay un servidor disponible para cada cliente que llega.

Se puede considerar como un proceso de nacimiento y muerte con parámetros $\beta_n = \beta$ y $\mu_n = n\mu$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces por la ecuación 30.136 se tiene que

$$\pi_0 = e^{\rho}$$
$$\pi_n = e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}$$

Entonces, el número promedio de servidores ocupados es equivalente a considerar el número de clientes en el sistema, es decir,

$$L = \mathbb{E}[N] = \rho$$
$$Var[N] = \rho$$

Además se tiene que $W_q = 0$ y $L_q = 0$.

El tiempo promedio en el sistema es el tiempo promedio de servicio, es decir, $W = \mathbb{E}[s] = \frac{1}{\delta}$. Resumiendo, tenemos la sisuguiente proposición:

Proposición 30.12 *La cola $M/M/\infty$ es ergódica para todos los valores de η. La distribución de equilibrio π es Poisson con media η, $\pi_n = \frac{e^{-n}\eta^n}{n!}$.*

30.4.4. Cola M/M/m

Este sistema considera m servidores idénticos, con tiempos entre arribos y de servicio exponenciales con medias $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\beta}$ y $\mathbb{E}[s] = \frac{1}{\delta}$. definimos ahora la utilización por servidor como $u = \frac{\rho}{m}$ que también se puede interpretar como la fracción de tiempo promedio que cada servidor está ocupado.

La cola $M/M/m$ se puede considerar como un proceso de nacimiento y muerte con parámetros: $\beta_n = \beta$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ y $\delta_n = \begin{cases} n\delta & n = 0, 1, \ldots, m-1 \\ c\delta & n = m, \ldots \end{cases}$

entonces la condición de recurrencia se va a cumplir sí y sólo si $\sum_{n\geq 1} \frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} < \infty$, equivalentemente se debe de cumplir que

$$
\begin{aligned}
S &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\beta^n}{n!\delta^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^m}{m!} u^n
\end{aligned}
$$

converja, lo cual ocurre si $u < 1$, en este caso

$$S = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^m}{m!}(1-u)$$

luego, para este caso se tiene que

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{1}{S} \\
\pi_n &= \begin{cases} \pi_0 \frac{\rho^n}{n!} & n = 0, 1, \ldots, m-1 \\ \pi_0 \frac{\rho^n}{m! m^{n-m}} & n = m, \ldots \end{cases}
\end{aligned}
$$

Al igual que se hizo antes, determinaremos los valores de L_q, W_q, W y L:

$$
\begin{aligned}
L_q &= \mathbb{E}[N_q] = \sum_{n=0}^{\infty} (n-m)\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_{n+m} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_0 \frac{\rho^{n+m}}{m! m^{n+m}} = \pi_0 \frac{\rho^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} n u^n = \pi_0 \frac{u\rho^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{du} u^n \\
&= \pi_0 \frac{u\rho^m}{m!} \frac{d}{du} \sum_{n=0}^{\infty} u^n = \pi_0 \frac{u\rho^m}{m!} \frac{d}{du}\left(\frac{1}{1-u}\right) = \pi_0 \frac{u\rho^m}{m!} \frac{1}{(1-u)^2}
\end{aligned}
$$

es decir

$$L_q = \frac{u\pi_0\rho^m}{m!(1-u)^2} \tag{30.16}$$

luego

$$W_q = \frac{L_q}{\beta} \tag{30.17}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\delta} \tag{30.18}$$

Si definimos $C(m,\rho) = \frac{\pi_0\rho^m}{m!(1-u)} = \frac{\pi_m}{1-u}$, que es la probabilidad de que un cliente que llegue al sistema tenga que esperar en la cola. Entonces podemos reescribir las ecuaciones recién enunciadas:

$$
\begin{aligned}
L_q &= \frac{C(m,\rho)\,u}{1-u} \\
W_q &= \frac{C(m,\rho)\,\mathbb{E}[s]}{m(1-u)}
\end{aligned}
$$

Proposición 30.13 *La cola $M/M/m$ con intensidad de tráfico ρ es ergódica si y sólo si $\rho < 1$. En este caso la distribución ergódica π está dada por*

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{1}{S}\frac{\eta^n}{n!} & 0 \leq n \leq m \\ \frac{1}{S}\frac{\eta^m}{m!}\rho^{n-m} & m \leq n < \infty \end{cases}$$

Proposición 30.14 *Para $t \geq 0$*

a) $W_q(t) = 1 - C(m,\rho)\, e^{-c\delta t(1-u)}$

b)

$$W(t) = \begin{cases} 1 + e^{-\delta t}\frac{\rho - m + W_q(0)}{m-1-\rho} + e^{-m\delta t(1-u)}\frac{C(m,\rho)}{m-1-\rho} & \rho \neq m-1 \\ 1 - (1 + C(m,\rho)\,\delta t)\, e^{-\delta t} & \rho = m-1 \end{cases}$$

30.4.5. Cola M/G/1

Consideremos un sistema de espera con un servidor, en el que los tiempos entre arribos son exponenciales, y los tiempos de servicio tienen una distribución general G. Sea $N(t)_{t\geq 0}$ el número de clientes en el sistema al tiempo t, y sean $t_1 < t_2 < \ldots$ los tiempos sucesivos en los que los clientes completan su servicio y salen del sistema.

La sucesión $\{X_n\}$ definida por $X_n = N(t_n)$ es una cadena de Markov, en específico es la Cadena encajada del proceso de llegadas de usuarios. Sea U_n el número de clientes que llegan al sistema durante el tiempo de servicio del n-ésimo cliente, entonces se tiene que

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + U_{n+1} & si\ X_n \geq 1, \\ U_{n+1} & si\ X_n = 0 \end{cases}$$

Dado que los procesos de arribos de los usuarios es Poisson con parámetro λ, la probabilidad condicional de que lleguen j clientes al sistema dado que el tiempo de servicio es $s = t$, resulta:

$$\mathbb{P}\{U = j | s = t\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!},\ j = 0, 1, \ldots$$

por el teorema de la probabilidad total se tiene que

$$a_j = \mathbb{P}\{U = j\} = \int_0^\infty \mathbb{P}\{U = j | s = t\}\, dG(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!} dG(t) \tag{30.19}$$

donde G es la distribución de los tiempos de servicio. Las probabilidades de transición de la cadena están dadas por

$$p_{0j} = \mathbb{P}\{U_{n+1} = j\} = a_j,\ para\ j = 0, 1, \ldots \tag{30.20}$$

y para $i \geq 1$

$$p_{ij} = \begin{cases} \mathbb{P}\{U_{n+1} = j - i + 1\} = a_{j-i+1} & ,\ para\ j \geq i-1 \\ 0 & j < i-1 \end{cases} \tag{30.21}$$

Entonces la matriz de transición es:

$$P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

Sea $\rho = \sum_{n=0} n a_n$, entonces se tiene el siguiente teorema:

Teorema 30.8 *La cadena encajada $\{X_n\}$ es*

a) *Recurrente positiva si $\rho < 1$,*

b) *Transitoria si $\rho > 1$,*

c) *Recurrente nula si $\rho = 1$.*

Recordemos que si la cadena de Markov $\{X_n\}$ tiene una distribución estacionaria entonces existe una distribución de probabilidad $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots,)$, con $\pi_i \geq 0$ y $\sum_{i\geq 1} \pi_i = 1$ tal que satisface la ecuación $\pi = \pi P$, equivalentemente

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_k p_{ij}, \text{ para } j = 0, 1, 2, \ldots \tag{30.22}$$

que se puede ver como

$$\pi_j = \pi_0 a_j + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1}, \text{ para } j = 0, 1, \ldots \tag{30.23}$$

si definimos

$$\pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j$$

y

$$A(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

con $|z_j| \leq 1$. Si la ecuación 30.114 la multiplicamos por z^j y sumando sobre j, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0 a_j z^j + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1} z^j \\
&= \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j + \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i a_{i-1} \\
&= \pi_0 A(z) + A(z) \left(\frac{\pi(z) - \pi_0}{z} \right)
\end{aligned}$$

es decir,

$$\pi(z) = \pi_0 A(z) + A(z) \left(\frac{\pi(z) - \pi_0}{z} \right) \Leftrightarrow \pi(z) = \frac{\pi_0 A(z)(z-1)}{z - A(z)} \tag{30.24}$$

Si $z \to 1$, entonces $A(z) \to A(1) = 1$, y además $A'(z) \to A'(1) = \rho$. Si aplicamos la Regla de L'Hospital se tiene que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = lim_{z\to 1^-} \pi(z) = \pi_0 lim_{z\to 1^-} \frac{z-1}{z - A(z)} = \frac{\pi_0}{1-\rho}$$

Retomando,

$$a_j = \mathbb{P}\{U = j\} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(t), \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

entonces

$$\begin{aligned}
\rho &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(t) \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(t) = \int_0^{\infty} \lambda t dG(t) = \lambda \mathbb{E}[s]
\end{aligned}$$

Además, se tiene que $\rho = \beta \mathbb{E}[s] = \frac{\beta}{\delta}$ y la distribución estacionaria está dada por

$$\pi_j = \pi_0 a_j + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1}, \text{ para } j = 0, 1, \ldots \tag{30.25}$$

$$\pi_0 = 1 - \rho \tag{30.26}$$

Por otra parte se tiene que

$$L = \pi'(1) = \rho + \frac{A''(1)}{2(1-\rho)} \tag{30.27}$$

pero $A^{''}(1) = \sum_{n=1} n(n-1) a_n = \mathbb{E}\left[U^2\right] - \mathbb{E}[U]$, $\mathbb{E}[U] = \rho$ *y* $\mathbb{E}\left[U^2\right] = \lambda^2 \mathbb{E}\left[s^2\right] + \rho$. *Por lo tanto* $L = \rho + \frac{\beta^2 \mathbb{E}\left[s^2\right]}{2(1-\rho)}$.
De las fórmulas de Little, se tiene que $W = E(w) = \frac{L}{\beta}$, *también el tiempo de espera en la cola*

$$W_q = \mathbb{E}(q) = \mathbb{E}(w) - \mathbb{E}(s) = \frac{L}{\beta} - \frac{1}{\delta}, \tag{30.28}$$

además el número promedio de clientes en la cola es

$$L_q = \mathbb{E}(N_q) = \beta W_q = L - \rho \tag{30.29}$$

30.5. Redes de Colas

30.6. Estacionareidad

Sea $v = (v_i)_{i \in E}$ *medida no negativa en* E, *podemos definir una nueva medida* $v\mathbb{P}$ *que asigna masa* $\sum_{i \in E} v_i p_{ij}$ *a cada estado* j.

Definición 30.7 *La medida* v *es estacionaria si* $v_i < \infty$ *para toda* i *y además* $v\mathbb{P} = v$.

En el caso de que v *sea distribución, independientemente de que sea estacionaria o no, se cumple con*

$$\mathbb{P}_v[X_1 = j] = \sum_{i \in E} \mathbb{P}_v[X_0 = i] p_{ij} = \sum_{i \in E} v_i p_{ij} = (vP)_j$$

Teorema 30.9 *Supongamos que* v *es una distribución estacionaria. Entonces*

i) La cadena es estrictamente estacionaria con respecto a $\mathbb{P}_v$, *es decir,* $\mathbb{P}_v$*-distribución de* $\{X_n, X_{n+1}, \ldots\}$ *no depende de* n;

ii) Existe una versión estrictamente estacionaria $\{X_n\}_{n \in Z}$ *de la cadena con doble tiempo infinito y* $\mathbb{P}(X_n = i) = v_i$ *para toda* $n \in Z$.

Teorema 30.10 *Sea* i *estado fijo, recurrente. Entonces una medida estacionaria* v *puede definirse haciendo que* v_j *sea el número esperado de visitas a* j *entre dos visitas consecutivas* i,

$$v_j = \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \mathbb{1}(X_n = i) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i[X_n = j, \tau(i) > n] \tag{30.30}$$

Teorema 30.11 *Si la cadena es irreducible y recurrente, entonces una medida estacionaria* v *existe, satisface* $0 < v_j < \infty$ *para toda* j *y es única salvo factores multiplicativos, es decir, si* v, v^* *son estacionarias, entonces* $c = cv^*$ *para alguna* $c \in (0, \infty)$.

Corolario 30.8 *Si la cadena es irreducible y positiva recurrente, existe una única distribución estacionaria* π *dada por*

$$\pi_j = \frac{1}{\mathbb{E}_i \tau_i} \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \mathbb{1}(X_n = j) = \frac{1}{\mathbb{E}_j \tau(j)}. \tag{30.31}$$

Corolario 30.9 *Cualquier cadena de Markov irreducible con un espacio de estados finito es positiva recurrente.*

Lema 30.5 *Sea* $\{X_n\}$ *cadena irreducible y se* F *subconjunto finito del espacio de estados. Entonces la cadena es positiva recurrente si* $\mathbb{E}_i \tau(F) < \infty$ *para todo* $i \in F$.

Proposición 30.15 *Sea* $\{X_n\}$ *cadena irreducible y transiente o cero recurrente, entonces* $p_{ij}^n \to 0$ *conforme* $n \to \infty$ *para cualquier* $i, j \in E$, E *espacio de estados.*

Utilizando el teorema (2.2) y el corolario refCor.3.5, se demuestra el siguiente resultado importante.

Teorema 30.12 *Sea* $\{X_n\}$ *cadena irreducible y aperiódica positiva recurrente, y sea* $\pi = \{\pi_j\}_{j \in E}$

30.7. Procesos de Markov de Saltos

Sea E espacio discreto de estados, finito o numerable, y sea $\{X_t\}$ un proceso de Markov con espacio de estados E. Una medida μ en E definida por sus probabilidades puntuales μ_i, escribimos $p_{ij}^t = P^t(i, \{j\}) = P_i(X_t = j)$.

El monto del tiempo gastado en cada estado es positivo, de modo tal que las trayectorias muestrales son constantes por partes. Para un proceso de saltos denotamos por los tiempos de saltos a $S_0 = 0 < S_1 < S_2 \cdots$, los tiempos entre saltos consecutivos $T_n = S_{n+1} - S_n$ y la secuencia de estados visitados por $Y_0, Y_1, \ldots$, así las trayectorias muestrales son constantes entre S_n consecutivos, continua por la derecha, es decir, $X_{S_n} = Y_n$.

Teorema 30.13 *Cualquier Proceso de Markov de Saltos satisface la Propiedad Fuerte de Markov*

Definición 30.8 *Una medida $v \neq 0$ es estacionaria si $0 \leq v_j < \infty$, $vP^t = v$ para toda t.*

Teorema 30.14 *Supongamos que $\{X_t\}$ es irreducible recurrente en E. Entonces existe una y sólo una, salvo múltiplos, medida estacionaria v. Esta v tiene la propiedad de que $0 < v_j < \infty$ para todo j y puede encontrarse en cualquiera de las siguientes formas*

i) *Para algún estado i, fijo pero arbitrario, v_j es el tiempo esperado utilizado en j entre dos llegadas consecutivas al estado i;*
$$v_j = \mathbb{E}_i \int_0^{w(i)} \mathbb{1}(X_t = j)\, dt \tag{30.32}$$
con $w(i) = \inf\{t > 0 : X_t = i, X_{t^-} = \lim_{s \uparrow t} X_s \neq i\}$.

ii) *$v_j = \frac{\mu_j}{\lambda(j)}$, donde μ es estacionaria para $\{Y_n\}$.*

iii) *como solución de $v\Lambda = 0$.*

Definición 30.9 *Un proceso irreducible recurrente con medida estacionaria de masa finita es llamado ergódico.*

Teorema 30.15 *Un proceso de Markov de saltos irreducible no explosivo es ergódico si y sólo si se puede encontrar una solución, de probabilidad, π, con $|\pi| = 1$ y $0 \leq \pi_j \leq 1$, a $\pi\Lambda = 0$. En este caso π es la distribución estacionaria.*

Corolario 30.10 *Una condición suficiente para la ergodicidad de un proceso irreducible es la existencia de una probabilidad π que resuelva el sistema $\pi\Lambda = 0$ y que además tenga la propiedad de que $\sum \pi_j \lambda(j)$.*

30.8. Notación Kendall-Lee

A partir de este momento se harán las siguientes consideraciones: Si t_n es el tiempo aleatorio en el que llega al sistema el n-ésimo cliente, para $n = 1, 2, \ldots$, $t_0 = 0$ y $t_0 < t_1 < \cdots$ se definen los tiempos entre arribos $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ para $n = 1, 2, \ldots$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Los tiempos entre arribos tienen un valor medio $E(\tau)$ finito y positivo $\frac{1}{\beta}$, es decir, β se puede ver como la tasa o intensidad promedio de arribos al sistema por unidad de tiempo. Además se supondrá que los servidores son identicos y si s denota la variable aleatoria que describe el tiempo de servicio, entonces $E(s) = \frac{1}{\delta}$, δ es la tasa promedio de servicio por servidor.
La notación de Kendall-Lee es una forma abreviada de describir un sisema de espera con las siguientes componentes:

i) **Fuente***: Población de clientes potenciales del sistema, esta puede ser finita o infinita.*

ii) **Proceso de Arribos***: Proceso determinado por la función de distribución $A(t) = P\{\tau \leq t\}$ de los tiempos entre arribos.*

Además tenemos las siguientes igualdades
$$N(t) = N_q(t) + N_s(s) \tag{30.33}$$
donde

- *$N(t)$ es el número de clientes en el sistema al tiempo t.*

- *$N_q(t)$ es el número de clientes en la cola al tiempo t*
- *$N_s(t)$ es el número de clientes recibiendo servicio en el tiempo t.*

Bajo la hipótesis de estacionareidad, es decir, las características de funcionamiento del sistema se han estabilizado en valores independientes del tiempo, entonces

$$N = N_q + N_s. \tag{30.34}$$

Los valores medios de las cantidades anteriores se escriben como $L = E(N)$, $L_q = E(N_q)$ y $L_s = E(N_s)$, entonces de la ecuación 30.97 se obtiene

$$L = L_q + L_s \tag{30.35}$$

Si q es el tiempo que pasa un cliente en la cola antes de recibir servicio, y W es el tiempo total que un cliente pasa en el sistema, entonces

$$w = q + s$$

por lo tanto

$$W = W_q + W_s,$$

donde $W = E(w)$, $W_q = E(q)$ y $W_s = E(s) = \frac{1}{\delta}$.
La intensidad de tráfico se define como

$$\rho = \frac{E(s)}{E(\tau)} = \frac{\beta}{\delta}. \tag{30.36}$$

La utilización por servidor es

$$u = \frac{\rho}{c} = \frac{\beta}{c\delta}. \tag{30.37}$$

donde c es el número de servidores.

30.9. Procesos de Nacimiento y Muerte (Teoría)

Proposición 30.16 *La recurrencia de $\{X_t\}$, o equivalentemente de $\{Y_n\}$ es equivalente a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\beta_1 \cdots \beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} = \infty \tag{30.38}$$

Lema 30.6 *Independientemente de la recurrencia o transitorieadad, existe una y sólo una, salvo múltiplos, solución a $v\Lambda = 0$, dada por*

$$v_n = \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} v_0 \tag{30.39}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Corolario 30.11 *En el caso recurrente, la medida estacionaria μ para $\{Y_n\}$ está dada por*

$$\mu_n = \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n} \mu_0 \tag{30.40}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Se define a $S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n}$

Corolario 30.12 *$\{X_t\}$ es ergódica si y sólo si la ecuación (30.133) se cumple y además $S < \infty$, en cuyo caso la distribución ergódica, π, está dada por*

$$\pi_0 = \frac{1}{S},\ \pi_n = \frac{1}{S} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \tag{30.41}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

30.10. Procesos de Nacimiento y Muerte como Modelos de Colas

30.10.1. Cola $M/M/1$

Este modelo corresponde a un proceso de nacimiento y muerte con $\beta_n = \beta$ y $\delta_n = \delta$ independiente del valor de n. La intensidad de tráfico $\rho = \frac{\beta}{\delta}$, implica que el criterio de recurrencia (ecuación 30.133) quede de la forma:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} = \infty.$$

Equivalentemente el proceso es recurrente si y sólo si

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n < \infty \Leftrightarrow \frac{\beta}{\delta} < 1$$

Entonces $S = \frac{\delta}{\delta-\beta}$, luego por la ecuación 30.136 se tiene que

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{\delta - \beta}{\delta} = 1 - \frac{\beta}{\delta}\\
\pi_n &= \pi_0 \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n = \left(1 - \frac{\beta}{\delta}\right)\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n = (1-\rho)\,\rho^n
\end{aligned}$$

Lo cual nos lleva a la siguiente

Proposición 30.17 *La cola $M/M/1$ con intendisad de tráfico ρ, es recurrente si y sólo si $\rho \leq 1$.*

Entonces por el corolario 30.30

Proposición 30.18 *La cola $M/M/1$ con intensidad de tráfico ρ es ergódica si y sólo si $\rho < 1$. En cuyo caso, la distribución de equilibrio π de la longitud de la cola es geométrica, $\pi_n = (1-\rho)\,\rho^n$, para $n = 1, 2, \ldots$.*

De la proposición anterior se desprenden varios hechos importantes.

a) $\mathbb{P}[X_t = 0] = \pi_0 = 1 - \rho$, *es decir, la probabilidad de que el sistema se encuentre ocupado.*

b) *De las propiedades de la distribución Geométrica se desprende que*

   1) $\mathbb{E}[X_t] = \frac{\rho}{1-\rho}$,
   2) $Var[X_t] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$.

Si L es el número esperado de clientes en el sistema, incluyendo los que están siendo atendidos, entonces

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Si además W es el tiempo total del cliente en la cola: $W = W_q + W_s$ $\rho = \frac{\mathbb{E}[s]}{\mathbb{E}[\tau]} = \beta W_s$, puesto que $W_s = \mathbb{E}[s]$ y $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\delta}$. Por la fórmula de Little $L = \lambda W$

$$\begin{aligned}
W &= \frac{L}{\beta} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\beta} = \frac{\rho}{\delta}\frac{1}{1-\rho} = \frac{W_s}{1-\rho}\\
&= \frac{1}{\delta(1-\rho)} = \frac{1}{\delta - \beta}
\end{aligned}$$

luego entonces

$$\begin{aligned}
W_q &= W - W_s = \frac{1}{\delta-\beta} - \frac{1}{\delta} = \frac{\beta}{\delta(\delta-\beta)}\\
&= \frac{\rho}{1-\rho}\frac{1}{\delta} = \mathbb{E}[s]\frac{\rho}{1-\rho}
\end{aligned}$$

Entonces

$$L_q = \beta W_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Finalmente

Proposición 30.19 a) $W(t) = 1 - e^{-\frac{t}{W}}$.
b) $W_q(t) = 1 - \rho \exp^{-\frac{t}{W}}$.
donde $W = \mathbb{E}(w)$.

30.11. Notación Kendall-Lee, segunda parte

Esta notación es una forma abreviada de describir un sistema de espera con componentes dados a continuación, la notación es

$$A/S/c/K/F/d \tag{30.42}$$

Cada una de las letras describe:

- A *es la distribución de los tiempos entre arribos.*
- S *es la distribución del tiempo de servicio.*
- c *es el número de servidores.*
- K *es la capacidad del sistema.*
- F *es el número de individuos en la fuente.*
- d *es la disciplina del servicio*

Usualmente se acostumbra suponer que $K = \infty$, $F = \infty$ *y* $d = FIFO$, *es decir, First In First Out. Las distribuciones usuales para* A *y* B *son:*

- GI *para la distribución general de los tiempos entre arribos.*
- G *distribución general del tiempo de servicio.*
- M *Distribución exponencial para* A *o* S.
- E_K *Distribución Erlang-*K*, para* A *o* S.
- D *tiempos entre arribos o de servicio constantes, es decir, deterministicos.*

30.12. Procesos de Nacimiento y Muerte como Modelos de Colas(Continuación)

30.12.1. Cola $M/M/\infty$

Este modelo corresponde al caso en que $\beta_n = \beta$ *y* $\delta_n = n\delta$, *en este caso el parámetro de interés* $\eta = \frac{\beta}{\delta}$, *luego, la ecuación 30.133 queda de la forma:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\beta_1 \cdots \beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} n!\eta^{-n} = \infty$$

con $S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} = e$

Proposición 30.20 *La cola* $M/M/\infty$ *es ergódica para todos los valores de* η. *La distribución de equilibrio* π *es Poisson con media* η, $\pi_n = \frac{e^{-n}\eta^n}{n!}$.

30.12.2. Cola $M/M/m$

Para este caso $\beta_n = \beta$ *y* $\delta_n = m(n)\delta$, *donde* $m(n)$ *es el número de servidores ocupados en el estado* n, *es decir,* $m(n) = m$, *para* $n \geq m$ *y* $m(n) = m$ *para* $1 \leq n \leq m$. *La intensidad de tráfico es* $\rho = \frac{\beta}{m\delta}$ *y* $\frac{\beta_n}{\delta_n} = \rho$ *para* $n \geq m$. *Así, al igual que en el caso* $m = 1$, *la ecuación 30.133 y la recurrencia se cumplen si y sólo si* $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} = \infty$, *es decir, cuando* $\rho \leq 1$. *Similarmente, con* $\eta = \frac{\beta}{\delta}$ *se tiene que*

$$\begin{aligned} S &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} = \sum_{n\geq 0} \frac{\eta^n}{n!} + \frac{\eta^m}{m!} \sum_{n\geq 0} \rho^n \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\eta^n}{n!} + \frac{\eta^m}{m!} (1-\rho)^{-1} \end{aligned}$$

es finita si y sólo si $\rho < 1$, *por tanto se tiene la siguiente*

Proposición 30.21 *La cola $M/M/m$ con intensidad de tráfico ρ es ergódica si y sólo si $\rho < 1$. En este caso la distribución ergódica π está dada por*

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{1}{S}\frac{\eta^n}{n!} & 0 \leq n \leq m \\ \frac{1}{S}\frac{\eta^m}{m!}\rho^{n-m} & m \leq n < \infty \end{cases}$$

30.13. Cadenas de Markov

30.13.1. Estacionareidad

Sea $v = (v_i)_{i\in E}$ medida no negativa en E, podemos definir una nueva medida $v\mathbb{P}$ que asigna masa $\sum_{i\in E} v_i p_{ij}$ a cada estado j.

Definición 30.10 *La medida v es estacionaria si $v_i < \infty$ para toda i y además $v\mathbb{P} = v$.*

En el caso de que v sea distribución, independientemente de que sea estacionaria o no, se cumple con

$$\mathbb{P}_v [X_1 = j] = \sum_{i\in E} \mathbb{P}_v [X_0 = i] p_{ij} = \sum_{i\in E} v_i p_{ij} = (vP)_j$$

Teorema 30.16 *Supongamos que v es una distribución estacionaria. Entonces*

i) La cadena es estrictamente estacionaria con respecto a $\mathbb{P}_v$, es decir, $\mathbb{P}_v$-distribución de $\{X_n, X_{n+1}, \ldots\}$ no depende de n;

ii) Existe un aversión estrictamente estacionaria $\{X_n\}_{n\in Z}$ de la cadena con doble tiempo infinito y $\mathbb{P}(X_n = i) = v_i$ para toda $n \in Z$.

Teorema 30.17 *Sea i estado fijo, recurrente. Entonces una medida estacionaria v puede definirse haciendo que v_j sea el número esperado de visitas a j entre dos visitas consecutivas i,*

$$v_j = \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \mathbb{1}(X_n = i) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i [X_n = j, \tau(i) > n] \tag{30.43}$$

Teorema 30.18 *Si la cadena es irreducible y recurrente, entonces una medida estacionaria v existe, satisface $0 < v_j < \infty$ para toda j y es única salvo factores multiplicativos, es decir, si v, v^* son estacionarias, entonces $c = cv^*$ para alguna $c \in (0, \infty)$.*

Corolario 30.13 *Si la cadena es irreducible y positiva recurrente, existe una única distribución estacionaria π dada por*

$$\pi_j = \frac{1}{\mathbb{E}_i \tau_i} \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \mathbb{1}(X_n = j) = \frac{1}{\mathbb{E}_j \tau(j)}. \tag{30.44}$$

Corolario 30.14 *Cualquier cadena de Markov irreducible con un espacio de estados finito es positiva recurrente.*

30.13.2. Teoría Ergódica

Lema 30.7 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y se F subconjunto finito del espacio de estados. Entonces la cadena es positiva recurrente si $\mathbb{E}_i \tau(F) < \infty$ para todo $i \in F$.*

Proposición 30.22 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y transiente o cero recurrente, entonces $p_{ij}^n \to 0$ conforme $n \to \infty$ para cualquier $i, j \in E$, E espacio de estados.*

Utilizando el teorema (2.2) y el corolario refCor.3.5, se demuestra el siguiente resultado importante.

Teorema 30.19 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y aperiódica positiva recurrente, y sea $\pi = \{\pi_j\}_{j\in E}$ la distribución estacionaria. Entonces $p_{ij}^n \to \pi_j$ para todo i, j.*

Definición 30.11 *Una cadena irreducible aperiodica, positiva recurrente con medida estacionaria v, es llamada* ergódica.

Proposición 30.23 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y recurrente con medida estacionaria v, entocnes para todo $i, j, k, l \in E$*

$$\frac{\sum_{n=0}^{m} p_{ij}^{n}}{\sum_{n=0}^{m} p_{lk}^{n}} \rightarrow \frac{v_j}{v_k},\ m \rightarrow \infty \tag{30.45}$$

Lema 30.8 *La matriz $\widetilde{P}$ con elementos $\widetilde{p}_{ij} = \frac{v_{ji}p_{ji}}{v_i}$ es una matriz de transición. Además, el i-ésimo elementos $\widetilde{p}_{ij}^{m}$ de la matriz potencia $\widetilde{P}^{m}$ está dada por $\widetilde{p}_{ij}^{m} = \frac{v_{ji}p_{ji}^{m}}{v_i}$.*

Lema 30.9 *Defínase $N_i^m = \sum_{n=0}^{m} \mathbb{1}(X_n = i)$ como el número de visitas a i antes del tiempo m. Entonces si la cadena es reducible y recurrente, $lim_{m\rightarrow\infty} \frac{\mathbb{E}_j N_i^m}{\mathbb{E}_k N_i^m} = 1$ para todo $j, k \in E$.*

30.13.3. Funciones Armónicas, Recurrencia y Transitoriedad

Definición 30.12 *Una función Armónica es el eigenvector derecho h de P corrrespondiente al eigenvalor 1.*

$$Ph = h \Leftrightarrow h(i) = \sum_{j\in E} p_{ij} h(j) = \mathbb{E}_i h(X_1) = \mathbb{E}\left[h(X_{n+1})|X_n = i\right].$$

es decir, $\{h(X_n)\}$ es martingala.

Proposición 30.24 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y sea i estado fijo arbitrario. Entonces la cadena es transitoria sí y sólo si existe una función no cero, acotada $h : E - \{i\} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface*

$$h(j) = \sum_{k\neq i} p_{jk} h(k) \ \textit{para}\ j \neq i. \tag{30.46}$$

30.14. Procesos de Markov de Saltos

Sea E espacio discreto de estados, finito o numerable, y sea $\{X_t\}$ un proceso de Markov con espacio de estados E. Una medida μ en E definida por sus probabilidades puntuales μ_i, escribimos $p_{ij}^{t} = P^{t}(i, \{j\}) = P_i(X_t = j)$.

El monto del tiempo gastado en cada estado es positivo, de modo tal que las trayectorias muestrales son constantes por partes. Para un proceso de saltos denotamos por los tiempos de saltos a $S_0 = 0 < S_1 < S_2 \cdots$, los tiempos entre saltos consecutivos $T_n = S_{n+1} - S_n$ y la secuencia de estados visitados por $Y_0, Y_1, \ldots$, así las trayectorias muestrales son constantes entre S_n consecutivos, continua por la derecha, es decir, $X_{S_n} = Y_n$.

Teorema 30.20 *Cualquier Proceso de Markov de Saltos satisface la Propiedad Fuerte de Markov*

Definición 30.13 *Una medida $v \neq 0$ es estacionaria si $0 \leq v_j < \infty$, $vP^t = v$ para toda t.*

Teorema 30.21 *Supongamos que $\{X_t\}$ es irreducible recurrente en E. Entonces existe una y sólo una, salvo múltiplos, medida estacionaria v. Esta v tiene la propiedad de que $0 < v_j < \infty$ para todo j y puede encontrarse en cualquiera de las siguientes formas*

i) Para algún estado i, fijo pero arbitrario, v_j es el tiempo esperado utilizado en j entre dos llegadas consecutivas al estado i;

$$v_j = \mathbb{E}_i \int_0^{w(i)} \mathbb{1}(X_t = j)\, dt \tag{30.47}$$

con $w(i) = \inf\{t > 0 : X_t = i, X_{t^-} = \lim_{s\uparrow t} X_s \neq i\}$.

ii) $v_j = \frac{\mu_j}{\lambda(j)}$, donde μ es estacionaria para $\{Y_n\}$.

iii) como solución de $v\Lambda = 0$.

Definición 30.14 *Un proceso irreducible recurrente con medida estacionaria de masa finita es llamado ergódico.*

Teorema 30.22 *Un proceso de Markov de saltos irreducible no explosivo es ergódico si y sólo si se puede encontrar una solución, de probabilidad, π, con $|\pi| = 1$ y $0 \leq \pi_j \leq 1$, a $\pi\Lambda = 0$. En este caso π es la distribución estacionaria.*

Corolario 30.15 *Una condición suficiente para la ergodicidad de un proceso irreducible es la existencia de una probabilidad π que resuelva el sistema $\pi\Lambda = 0$ y que además tenga la propiedad de que $\sum \pi_j \lambda(j)$.*

30.15. Notación Kendall-Lee

30.15.1. Primera parte

A partir de este momento se harán las siguientes consideraciones: Si t_n es el tiempo aleatorio en el que llega al sistema el n-ésimo cliente, para $n = 1, 2, \ldots$, $t_0 = 0$ y $t_0 < t_1 < \cdots$ se definen los tiempos entre arribos $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ para $n = 1, 2, \ldots$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Los tiempos entre arribos tienen un valor medio $E(\tau)$ finito y positivo $\frac{1}{\beta}$, es decir, β se puede ver como la tasa o intensidad promedio de arribos al sistema por unidad de tiempo. Además se supondrá que los servidores son identicos y si s denota la variable aleatoria que describe el tiempo de servicio, entonces $E(s) = \frac{1}{\delta}$, δ es la tasa promedio de servicio por servidor.

La notación de Kendall-Lee es una forma abreviada de describir un sisema de espera con las siguientes componentes:

i) **Fuente**: *Población de clientes potenciales del sistema, esta puede ser finita o infinita.*

ii) **Proceso de Arribos**: *Proceso determinado por la función de distribución $A(t) = P\{\tau \leq t\}$ de los tiempos entre arribos.*

Además tenemos las siguientes igualdades

$$N(t) = N_q(t) + N_s(s) \tag{30.48}$$

donde

- $N(t)$ *es el número de clientes en el sistema al tiempo* t.
- $N_q(t)$ *es el número de clientes en la cola al tiempo* t
- $N_s(t)$ *es el número de clientes recibiendo servicio en el tiempo* t.

Bajo la hipótesis de estacionareidad, es decir, las características de funcionamiento del sistema se han estabilizado en valores independientes del tiempo, entonces

$$N = N_q + N_s. \tag{30.49}$$

Los valores medios de las cantidades anteriores se escriben como $L = E(N)$, $L_q = E(N_q)$ y $L_s = E(N_s)$, entonces de la ecuación 30.97 se obtiene

$$L = L_q + L_s \tag{30.50}$$

Si q es el tiempo que pasa un cliente en la cola antes de recibir servicio, y W es el tiempo total que un cliente pasa en el sistema, entonces

$$w = q + s$$

por lo tanto

$$W = W_q + W_s,$$

donde $W = E(w)$, $W_q = E(q)$ y $W_s = E(s) = \frac{1}{\delta}$.

La intensidad de tráfico se define como

$$\rho = \frac{E(s)}{E(\tau)} = \frac{\beta}{\delta}. \tag{30.51}$$

La utilización por servidor es

$$u = \frac{\rho}{c} = \frac{\beta}{c\delta}. \tag{30.52}$$

donde c es el número de servidores.

30.15.2. Segunda parte

Esta notación es una forma abreviada de describir un sistema de espera con componentes dados a continuación, la notación es

$$A/S/c/K/F/d \tag{30.53}$$

Cada una de las letras describe:

- A *es la distribución de los tiempos entre arribos.*

- *S es la distribución del tiempo de servicio.*
- *c es el número de servidores.*
- *K es la capacidad del sistema.*
- *F es el número de individuos en la fuente.*
- *d es la disciplina del servicio*

Usualmente se acostumbra suponer que $K = \infty$, $F = \infty$ y $d = FIFO$, es decir, First In First Out. Las distribuciones usuales para A y B son:

- *GI para la distribución general de los tiempos entre arribos.*
- *G distribución general del tiempo de servicio.*
- *M Distribución exponencial para A o S.*
- *E_K Distribución Erlang-K, para A o S.*
- *D tiempos entre arribos o de servicio constantes, es decir, deterministicos.*

30.16. Procesos de Nacimiento y Muerte

Proposición 30.25 *La recurrencia de $\{X_t\}$, o equivalentemente de $\{Y_n\}$ es equivalente a*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_1\cdots\delta_n}{\beta_1\cdots\beta_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_1\cdots q_n}{p_1\cdots p_n}=\infty \tag{30.54}$$

Lema 30.10 *Independientemente de la recurrencia o transitorieadad, existe una y sólo una, salvo múltiplos, solución a $v\Lambda = 0$, dada por*

$$v_n=\frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n}v_0 \tag{30.55}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Corolario 30.16 *En el caso recurrente, la medida estacionaria μ para $\{Y_n\}$ está dada por*

$$\mu_n=\frac{p_1\cdots p_{n-1}}{q_1\cdots q_n}\mu_0 \tag{30.56}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Se define a $S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_0\beta_1\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}$

Corolario 30.17 *$\{X_t\}$ es ergódica si y sólo si la ecuación (30.133) se cumple y además $S < \infty$, en cuyo caso la distribución ergódica, π, está dada por*

$$\pi_0=\frac{1}{S},\ \pi_n=\frac{1}{S}\frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} \tag{30.57}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

30.16.1. Cola $M/M/1$

Este modelo corresponde a un proceso de nacimiento y muerte con $\beta_n = \beta$ y $\delta_n = \delta$ independiente del valor de n. La intensidad de tráfico $\rho = \frac{\beta}{\delta}$, implica que el criterio de recurrencia (ecuación 30.133) quede de la forma:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{-n}=\infty.$$

Equivalentemente el proceso es recurrente si y sólo si

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n<\infty\Leftrightarrow\frac{\beta}{\delta}<1$$

Entonces $S = \frac{\delta}{\delta - \beta}$*, luego por la ecuación 30.136 se tiene que*

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{\delta-\beta}{\delta} = 1 - \frac{\beta}{\delta}\\ \pi_n &= \pi_0 \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n = \left(1 - \frac{\beta}{\delta}\right)\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n = (1-\rho)\,\rho^n\end{aligned}$$

Lo cual nos lleva a la siguiente

Proposición 30.26 *La cola* $M/M/1$ *con intendisad de tráfico* ρ*, es recurrente si y sólo si* $\rho \leq 1$.

Entonces por el corolario 30.30

Proposición 30.27 *La cola* $M/M/1$ *con intensidad de tráfico* ρ *es ergódica si y sólo si* $\rho < 1$. *En cuyo caso, la distribución de equilibrio* π *de la longitud de la cola es geométrica,* $\pi_n = (1-\rho)\,\rho^n$*, para* $n = 1, 2, \ldots$.

De la proposición anterior se desprenden varios hechos importantes.

a) $\mathbb{P}[X_t = 0] = \pi_0 = 1 - \rho$*, es decir, la probabilidad de que el sistema se encuentre ocupado.*

b) *De las propiedades de la distribución Geométrica se desprende que*

1) $\mathbb{E}[X_t] = \frac{\rho}{1-\rho}$,
2) $Var[X_t] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$.

Si L *es el número esperado de clientes en el sistema, incluyendo los que están siendo atendidos, entonces*

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Si además W *es el tiempo total del cliente en la cola:* $W = W_q + W_s$ $\rho = \frac{\mathbb{E}[s]}{\mathbb{E}[\tau]} = \beta W_s$*, puesto que* $W_s = \mathbb{E}[s]$ *y* $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\delta}$*. Por la fórmula de Little* $L = \lambda W$

$$\begin{aligned}W &= \frac{L}{\beta} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\beta} = \frac{\rho}{\delta}\frac{1}{1-\rho} = \frac{W_s}{1-\rho}\\ &= \frac{1}{\delta(1-\rho)} = \frac{1}{\delta-\beta}\end{aligned}$$

luego entonces

$$\begin{aligned}W_q &= W - W_s = \frac{1}{\delta-\beta} - \frac{1}{\delta} = \frac{\beta}{\delta(\delta-\beta)}\\ &= \frac{\rho}{1-\rho}\frac{1}{\delta} = \mathbb{E}[s]\,\frac{\rho}{1-\rho}\end{aligned}$$

Entonces

$$L_q = \beta W_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Finalmente

Proposición 30.28 a) $W(t) = 1 - e^{-\frac{t}{W}}$.
b) $W_q(t) = 1 - \rho \exp^{-\frac{t}{W}}$.
donde $W = \mathbb{E}(w)$.

30.16.2. Cola $M/M/\infty$

Este tipo de modelos se utilizan para estimar el número de líneas en uso en una gran red comunicación o para estimar valores en los sistemas $M/M/c$ *o* $M/M/c/c$*, en el se puede pensar que siempre hay un servidor disponible para cada cliente que llega.*

Se puede considerar como un proceso de nacimiento y muerte con parámetros $\beta_n = \beta$ y $\mu_n = n\mu$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces por la ecuación 30.136 se tiene que

$$\pi_0 = e^{\rho}$$
$$\pi_n = e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}$$

Entonces, el número promedio de servidores ocupados es equivalente a considerar el número de clientes en el sistema, es decir,

$$L = \mathbb{E}[N] = \rho$$
$$Var[N] = \rho$$

Además se tiene que $W_q = 0$ y $L_q = 0$.

El tiempo promedio en el sistema es el tiempo promedio de servicio, es decir, $W = \mathbb{E}[s] = \frac{1}{\delta}$. Resumiendo, tenemos la sisuguiente proposición:

Proposición 30.29 *La cola $M/M/\infty$ es ergódica para todos los valores de η. La distribución de equilibrio π es Poisson con media η, $\pi_n = \frac{e^{-n}\eta^n}{n!}$.*

30.16.3. Cola $M/M/m$

Este sistema considera m servidores idénticos, con tiempos entre arribos y de servicio exponenciales con medias $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\beta}$ y $\mathbb{E}[s] = \frac{1}{\delta}$. definimos ahora la utilización por servidor como $u = \frac{\rho}{m}$ que también se puede interpretar como la fracción de tiempo promedio que cada servidor está ocupado.

La cola $M/M/m$ se puede considerar como un proceso de nacimiento y muerte con parámetros: $\beta_n = \beta$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ y $\delta_n = \begin{cases} n\delta & n = 0, 1, \ldots, m-1 \\ c\delta & n = m, \ldots \end{cases}$

entonces la condición de recurrencia se va a cumplir sí y sólo si $\sum_{n\geq 1}\frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} < \infty$, equivalentemente se debe de cumplir que

$$\begin{aligned} S &= 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} = \sum_{n=0}^{m-1}\frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1}\frac{\beta^n}{n!\delta^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^m}{m!}u^n \end{aligned}$$

converja, lo cual ocurre si $u < 1$, en este caso

$$S = \sum_{n=0}^{m-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^m}{m!}(1-u)$$

luego, para este caso se tiene que

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1}{S} \\ \pi_n &= \begin{cases} \pi_0\frac{\rho^n}{n!} & n = 0, 1, \ldots, m-1 \\ \pi_0\frac{\rho^n}{m!m^{n-m}} & n = m, \ldots \end{cases} \end{aligned}$$

Al igual que se hizo antes, determinaremos los valores de L_q, W_q, W y L:

$$\begin{aligned} L_q &= \mathbb{E}[N_q] = \sum_{n=0}^{\infty}(n-m)\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty}n\pi_{n+m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}n\pi_0\frac{\rho^{n+m}}{m!m^{n+m}} = \pi_0\frac{\rho^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}nu^n = \pi_0\frac{u\rho^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{du}u^n \\ &= \pi_0\frac{u\rho^m}{m!}\frac{d}{du}\sum_{n=0}^{\infty}u^n = \pi_0\frac{u\rho^m}{m!}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{1-u}\right) = \pi_0\frac{u\rho^m}{m!}\frac{1}{(1-u)^2} \end{aligned}$$

es decir

$$L_q = \frac{u\pi_0\rho^m}{m!\,(1-u)^2} \tag{30.58}$$

luego

$$W_q = \frac{L_q}{\beta} \tag{30.59}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\delta} \tag{30.60}$$

Si definimos $C(m,\rho) = \frac{\pi_0\rho^m}{m!(1-u)} = \frac{\pi_m}{1-u}$, *que es la probabilidad de que un cliente que llegue al sistema tenga que esperar en la cola. Entonces podemos reescribir las ecuaciones recién enunciadas:*

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{C(m,\rho)\,u}{1-u} \\ W_q &= \frac{C(m,\rho)\,\mathbb{E}[s]}{m(1-u)} \end{aligned}$$

Proposición 30.30 *La cola $M/M/m$ con intensidad de tráfico ρ es ergódica si y sólo si $\rho < 1$. En este caso la distribución ergódica π está dada por*

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{1}{S}\frac{\eta^n}{n!} & 0 \leq n \leq m \\ \frac{1}{S}\frac{\eta^m}{m!}\rho^{n-m} & m \leq n < \infty \end{cases}$$

Proposición 30.31 *Para $t \geq 0$*

a) $W_q(t) = 1 - C(m,\rho)\,e^{-c\delta t(1-u)}$

b)

$$W(t) = \begin{cases} 1 + e^{-\delta t}\frac{\rho-m+W_q(0)}{m-1-\rho} + e^{-m\delta t(1-u)}\frac{C(m,\rho)}{m-1-\rho} & \rho \neq m-1 \\ 1 - (1 + C(m,\rho)\,\delta t)\,e^{-\delta t} & \rho = m-1 \end{cases}$$

30.17. Ejemplo de Cadena de Markov para dos Estados

Supongamos que se tiene la siguiente cadena:

$$\begin{pmatrix} 1-q & q \\ p & 1-p \end{pmatrix} \tag{30.61}$$

Si $P[X_0 = 0] = \pi_0(0) = a$ *y* $P[X_0 = 1] = \pi_0(1) = b = 1 - \pi_0(0)$, *con* $a + b = 1$, *entonces después de un procedimiento más o menos corto se tiene que:*

$$\begin{aligned} P[X_n = 0] &= \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n\left(a - \frac{p}{p+q}\right) \\ P[X_n = 1] &= \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n\left(b - \frac{q}{p+q}\right) \end{aligned}$$

donde, como $0 < p, q < 1$, *se tiene que* $|1-p-q| < 1$, *entonces* $(1-p-q)^n \to 0$ *cuando* $n \to \infty$. *Por lo tanto*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty}P[X_n = 0] &= \frac{p}{p+q} \\ lim_{n\to\infty}P[X_n = 1] &= \frac{q}{p+q} \end{aligned}$$

Si hacemos $v = \left(\frac{p}{p+q}, \frac{q}{p+q}\right)$, *entonces*

$$\left(\frac{p}{p+q}, \frac{q}{p+q}\right)\begin{pmatrix} 1-q & q \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

30.18. Cadenas de Markov

30.18.1. Estacionareidad

Sea $v = (v_i)_{i \in E}$ medida no negativa en E, podemos definir una nueva medida $v\mathbb{P}$ que asigna masa $\sum_{i \in E} v_i p_{ij}$ a cada estado j.

Definición 30.15 *La medida v es estacionaria si $v_i < \infty$ para toda i y además $v\mathbb{P} = v$.*

En el caso de que v sea distribución, independientemente de que sea estacionaria o no, se cumple con

$$\mathbb{P}_v[X_1 = j] = \sum_{i \in E} \mathbb{P}_v[X_0 = i] p_{ij} = \sum_{i \in E} v_i p_{ij} = (vP)_j$$

Teorema 30.23 *Supongamos que v es una distribución estacionaria. Entonces*

i) La cadena es estrictamente estacionaria con respecto a $\mathbb{P}_v$, es decir, $\mathbb{P}_v$-distribución de $\{X_n, X_{n+1}, \ldots\}$ no depende de n;

ii) Existe un aversión estrictamente estacionaria $\{X_n\}_{n \in Z}$ de la cadena con doble tiempo infinito y $\mathbb{P}(X_n = i) = v_i$ para toda $n \in Z$.

Teorema 30.24 *Sea i estado fijo, recurrente. Entonces una medida estacionaria v puede definirse haciendo que v_j sea el número esperado de visitas a j entre dos visitas consecutivas i,*

$$v_j = \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \mathbb{1}(X_n = i) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i[X_n = j, \tau(i) > n] \tag{30.62}$$

Teorema 30.25 *Si la cadena es irreducible y recurrente, entonces una medida estacionaria v existe, satisface $0 < v_j < \infty$ para toda j y es única salvo factores multiplicativos, es decir, si v, v^* son estacionarias, entonces $c = cv^*$ para alguna $c \in (0, \infty)$.*

Corolario 30.18 *Si la cadena es irreducible y positiva recurrente, existe una única distribución estacionaria π dada por*

$$\pi_j = \frac{1}{\mathbb{E}_i \tau_i} \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \mathbb{1}(X_n = j) = \frac{1}{\mathbb{E}_j \tau(j)}. \tag{30.63}$$

Corolario 30.19 *Cualquier cadena de Markov irreducible con un espacio de estados finito es positiva recurrente.*

30.18.2. Teoría Ergódica

Lema 30.11 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y se F subconjunto finito del espacio de estados. Entonces la cadena es positiva recurrente si $\mathbb{E}_i \tau(F) < \infty$ para todo $i \in F$.*

Proposición 30.32 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y transiente o cero recurrente, entonces $p_{ij}^n \to 0$ conforme $n \to \infty$ para cualquier $i, j \in E$, E espacio de estados.*

Utilizando el teorema (2.2) y el corolario refCor.3.5, se demuestra el siguiente resultado importante.

Teorema 30.26 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y aperiódica positiva recurrente, y sea $\pi = \{\pi_j\}_{j \in E}$ la distribución estacionaria. Entonces $p_{ij}^n \to \pi_j$ para todo i, j.*

Definición 30.16 *Una cadena irreducible aperiodica, positiva recurrente con medida estacionaria v, es llamada* ergódica.

Proposición 30.33 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y recurrente con medida estacionaria v, entocnes para todo $i, j, k, l \in E$*

$$\frac{\sum_{n=0}^{m} p_{ij}^n}{\sum_{n=0}^{m} p_{lk}^n} \to \frac{v_j}{v_k}, \; m \to \infty \tag{30.64}$$

Lema 30.12 *La matriz $\widetilde{P}$ con elementos $\widetilde{p}_{ij} = \frac{v_{ji} p_{ji}}{v_i}$ es una matriz de transición. Además, el i-ésimo elementos $\widetilde{p}_{ij}^m$ de la matriz potencia $\widetilde{P}^m$ está dada por $\widetilde{p}_{ij}^m = \frac{v_{ji} p_{ji}^m}{v_i}$.*

Lema 30.13 *Defínase $N_i^m = \sum_{n=0}^{m} \mathbb{1}(X_n = i)$ como el número de visitas a i antes del tiempo m. Entonces si la cadena es reducible y recurrente, $lim_{m \to \infty} \frac{\mathbb{E}_j N_i^m}{\mathbb{E}_k N_i^m} = 1$ para todo $j, k \in E$.*

30.18.3. Funciones Armónicas, Recurrencia y Transitoriedad

Definición 30.17 *Una función Armónica es el eigenvector derecho h de P corrrespondiente al eigenvalor 1.*

$$Ph = h \Leftrightarrow h\left(i\right) = \sum_{j \in E} p_{ij} h\left(j\right) = \mathbb{E}_i h\left(X_1\right) = \mathbb{E}\left[h\left(X_{n+1}\right)|X_n = i\right].$$

es decir, $\left\{h\left(X_n\right)\right\}$ es martingala.

Proposición 30.34 *Sea $\left\{X_n\right\}$ cadena irreducible y sea i estado fijo arbitrario. Entonces la cadena es transitoria sí y sólo si existe una función no cero, acotada $h : E - \{i\} \to \mathbb{R}$ que satisface*

$$h\left(j\right) = \sum_{k \neq i} p_{jk} h\left(k\right) \text{ para } j \neq i. \tag{30.65}$$

Proposición 30.35 *Supongamos que la cadena es irreducible y sea E_0 un subconjunto finito del espacio de estados, entonces*

i)

ii)

Proposición 30.36 *Suponga que la cadena es irreducible y sea E_0 un subconjunto finito de E tal que se cumple la ecuación 5.2 para alguna función h acotada que satisface $h\left(i\right) < h\left(j\right)$ para algún estado $i \notin E_0$ y todo $j \in E_0$. Entonces la cadena es transitoria.*

30.19. Procesos de Markov de Saltos

30.19.1. Estructura Básica de los Procesos Markovianos de Saltos

- *Sea E espacio discreto de estados, finito o numerable, y sea $\left\{X_t\right\}$ un proceso de Markov con espacio de estados E. Una medida μ en E definida por sus probabilidades puntuales μ_i, escribimos $p_{ij}^t = P^t\left(i, \{j\}\right) = P_i\left(X_t = j\right)$.*
- *El monto del tiempo gastado en cada estado es positivo, de modo tal que las trayectorias muestrales son constantes por partes. Para un proceso de saltos denotamos por los tiempos de saltos a $S_0 = 0 < S_1 < S_2 \cdots$, los tiempos entre saltos consecutivos $T_n = S_{n+1} - S_n$ y la secuencia de estados visitados por $Y_0, Y_1, \ldots$, así las trayectorias muestrales son constantes entre S_n consecutivos, continua por la derecha, es decir, $X_{S_n} = Y_n$.*
- *La descripción de un modelo práctico está dado usualmente en términos de las intensidades $\lambda\left(i\right)$ y las probabilidades de salto q_{ij} más que en términos de la matriz de transición P^t.*
- *Supóngase de ahora en adelante que $q_{ii} = 0$ cuando $\lambda\left(i\right) > 0$*

30.19.2. Matriz Intensidad

Definición 30.18 *La matriz intensidad $\Lambda = \left(\lambda\left(i,j\right)\right)_{i,j \in E}$ del proceso de saltos $\left\{X_t\right\}_{t \geq 0}$ está dada por*

$$\begin{aligned} \lambda\left(i,j\right) &= \lambda\left(i\right) q_{i,j},\ j \neq i \\ \lambda\left(i,i\right) &= -\lambda\left(i\right) \end{aligned}$$

Proposición 30.37 *Una matriz $E \times E$, Λ es la matriz de intensidad de un proceso markoviano de saltos $\left\{X_t\right\}_{t \geq 0}$ si y sólo si*

$$\lambda\left(i,i\right) \leq 0,\ \lambda\left(i,j\right),\ i \neq j,\ \sum_{j \in E} \lambda\left(i,j\right) = 0.$$

Además, Λ está en correspondencia uno a uno con la distribución del proceso minimal dado por el teorema 3.1.

Para el caso particular de la Cola $M/M/1$, la matríz de itensidad está dada por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\beta & \beta & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \delta & -\beta-\delta & \beta & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \delta & -\beta-\delta & \beta & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

30.19.3. Medidas Estacionarias

Definición 30.19 *Una medida $v \neq 0$ es estacionaria si $0 \leq v_j < \infty$, $vP^t = v$ para toda t.*

Teorema 30.27 *Supongamos que $\{X_t\}$ es irreducible recurrente en E. Entonces existe una y sólo una, salvo múltiplos, medida estacionaria v. Esta v tiene la propiedad de que $0 < v_j < \infty$ para todo j y puede encontrarse en cualquiera de las siguientes formas*

i) Para algún estado i, fijo pero arbitrario, v_j es el tiempo esperado utilizado en j entre dos llegadas consecutivas al estado i;

$$v_j = \mathbb{E}_i \int_0^{w(i)} \mathbb{1}\left(X_t = j\right) dt \tag{30.66}$$

con $w(i) = \inf\{t > 0 : X_t = i, X_{t^-} = \lim_{s\uparrow t} X_s \neq i\}$.

ii) $v_j = \frac{\mu_j}{\lambda(j)}$, donde μ es estacionaria para $\{Y_n\}$.

iii) como solución de $v\Lambda = 0$.

30.19.4. Criterios de Ergodicidad

Definición 30.20 *Un proceso irreducible recurrente con medida estacionaria de masa finita es llamado ergódico.*

Teorema 30.28 *Un proceso de Markov de saltos irreducible no explosivo es ergódico si y sólo si se puede encontrar una solución, de probabilidad, π, con $|\pi| = 1$ y $0 \leq \pi_j \leq 1$, a $\pi\Lambda = 0$. En este caso π es la distribución estacionaria.*

Corolario 30.20 *Una condición suficiente para la ergodicidad de un proceso irreducible es la existencia de una probabilidad π que resuelva el sistema $\pi\Lambda = 0$ y que además tenga la propiedad de que $\sum \pi_j \lambda(j) < \infty$.*

Proposición 30.38 *Si el proceso es ergódico, entonces existe una versión estrictamente estacionaria $\{X_t\}_{-\infty<t<\infty}$ con doble tiempo infinito.*

Teorema 30.29 *Si $\{X_t\}$ es ergódico y π es la distribución estacionaria, entonces para todo i, j, $p_{ij}^t \to \pi_j$ cuando $t \to \infty$.*

Corolario 30.21 *Si $\{X_t\}$ es irreducible recurente pero no ergódica, es decir $|v| = \infty$, entonces $p_{ij}^t \to 0$ para todo $i, j \in E$.*

Corolario 30.22 *Para cualquier proceso Markoviano de Saltos minimal, irreducible o no, los límites $li_{t\to\infty} p_{ij}^t$ existe.*

30.20. Notación Kendall-Lee

30.20.1. Primera parte

A partir de este momento se harán las siguientes consideraciones: Si t_n es el tiempo aleatorio en el que llega al sistema el n-ésimo cliente, para $n = 1, 2, \ldots$, $t_0 = 0$ y $t_0 < t_1 < \cdots$ se definen los tiempos entre arribos $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ para $n = 1, 2, \ldots$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Los tiempos entre arribos tienen un valor medio $E(\tau)$ finito y positivo $\frac{1}{\beta}$, es decir, β se puede ver como la tasa o intensidad promedio de arribos al sistema por unidad de tiempo. Además se supondrá que los servidores son identicos y si s denota la variable aleatoria que describe el tiempo de servicio, entonces $E(s) = \frac{1}{\delta}$, δ es la tasa promedio de servicio por servidor.

La notación de Kendall-Lee es una forma abreviada de describir un sisema de espera con las siguientes componentes:

i) **Fuente**: *Población de clientes potenciales del sistema, esta puede ser finita o infinita.*

ii) **Proceso de Arribos**: *Proceso determinado por la función de distribución* $A(t) = P\{\tau \leq t\}$ *de los tiempos entre arribos.*

Además tenemos las siguientes igualdades

$$N(t) = N_q(t) + N_s(s) \tag{30.67}$$

donde

- $N(t)$ *es el número de clientes en el sistema al tiempo* t.
- $N_q(t)$ *es el número de clientes en la cola al tiempo* t
- $N_s(t)$ *es el número de clientes recibiendo servicio en el tiempo* t.

Bajo la hipótesis de estacionareidad, es decir, las características de funcionamiento del sistema se han estabilizado en valores independientes del tiempo, entonces

$$N = N_q + N_s. \tag{30.68}$$

Los valores medios de las cantidades anteriores se escriben como $L = E(N)$, $L_q = E(N_q)$ *y* $L_s = E(N_s)$, *entonces de la ecuación 30.97 se obtiene*

$$L = L_q + L_s \tag{30.69}$$

Si q *es el tiempo que pasa un cliente en la cola antes de recibir servicio, y* W *es el tiempo total que un cliente pasa en el sistema, entonces*

$$w = q + s$$

por lo tanto

$$W = W_q + W_s,$$

donde $W = E(w)$, $W_q = E(q)$ *y* $W_s = E(s) = \frac{1}{\delta}$.
La intensidad de tráfico se define como

$$\rho = \frac{E(s)}{E(\tau)} = \frac{\beta}{\delta}. \tag{30.70}$$

La utilización por servidor es

$$u = \frac{\rho}{c} = \frac{\beta}{c\delta}. \tag{30.71}$$

donde c *es el número de servidores.*

30.20.2. Más sobre la notación *Kendall-Lee*

Esta notación es una forma abreviada de describir un sistema de espera con componentes dados a continuación, la notación es

$$A/S/c/K/F/d \tag{30.72}$$

Cada una de las letras describe:

- A *es la distribución de los tiempos entre arribos.*
- S *es la distribución del tiempo de servicio.*
- c *es el número de servidores.*
- K *es la capacidad del sistema.*
- F *es el número de individuos en la fuente.*
- d *es la disciplina del servicio*

Usualmente se acostumbra suponer que $K = \infty$, $F = \infty$ *y* $d = FIFO$, *es decir, First In First Out.*
Las distribuciones usuales para A *y* B *son:*

- GI *para la distribución general de los tiempos entre arribos.*
- G *distribución general del tiempo de servicio.*
- M *Distribución exponencial para* A *o* S.
- E_K *Distribución Erlang-*K, *para* A *o* S.
- D *tiempos entre arribos o de servicio constantes, es decir, deterministicos.*

30.21. Procesos de Nacimiento y Muerte

30.21.1. Procesos de Nacimiento y Muerte Generales

Por un proceso de nacimiento y muerte se entiende un proceso de saltos de markov $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *con espacio de estados a lo más numerable, con la propiedad de que sólo puede ir al estado* $n+1$ *o al estado* $n-1$*, es decir, su matriz de intensidad es de la forma*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\beta_0 & \beta_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \delta_1 & -\beta_1-\delta_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \delta_2 & -\beta_2-\delta_2 & \beta_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

donde β_n *son las intensidades de nacimiento y* δ_n *las intensidades de muerte, o también se puede ver como a* X_t *el número de usuarios en una cola al tiempo* t*, un salto hacia arriba corresponde a la llegada de un nuevo usuario y un salto hacia abajo como al abandono de un usuario después de haber recibido su servicio.*
La cadena de saltos $\{Y_n\}$ *tiene matriz de transición dada por*

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

donde $p_n = \frac{\beta_n}{\beta_n+\delta_n}$ *y* $q_n = 1-p_n = \frac{\delta_n}{\beta_n+\delta_n}$*, donde además se asumne por el momento que* p_n *no puede tomar el valor* 0 *ó* 1 *para cualquier valor de* n*.*

Proposición 30.39 *La recurrencia de* $\{X_t\}$*, o equivalentemente de* $\{Y_n\}$ *es equivalente a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\beta_1 \cdots \beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} = \infty \tag{30.73}$$

Lema 30.14 *Independientemente de la recurrencia o transitorieadad, existe una y sólo una, salvo múltiplos, solución a* $v\Lambda = 0$*, dada por*

$$v_n = \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} v_0 \tag{30.74}$$

para $n = 1, 2, \ldots$*.*

Corolario 30.23 *En el caso recurrente, la medida estacionaria* μ *para* $\{Y_n\}$ *está dada por*

$$\mu_n = \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n} \mu_0 \tag{30.75}$$

para $n = 1, 2, \ldots$*.*

Se define a $S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n}$

Corolario 30.24 $\{X_t\}$ *es ergódica si y sólo si la ecuación (30.133) se cumple y además* $S < \infty$*, en cuyo caso la distribución ergódica,* π*, está dada por*

$$\pi_0 = \frac{1}{S},\ \pi_n = \frac{1}{S} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \tag{30.76}$$

para $n = 1, 2, \ldots$*.*

30.21.2. Cola M/M/1

Este modelo corresponde a un proceso de nacimiento y muerte con $\beta_n = \beta$ *y* $\delta_n = \delta$ *independiente del valor de* n*. La intensidad de tráfico* $\rho = \frac{\beta}{\delta}$*, implica que el criterio de recurrencia (ecuación 30.133) quede de la forma:*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} = \infty.$$

Equivalentemente el proceso es recurrente si y sólo si

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n<\infty\Leftrightarrow\frac{\beta}{\delta}<1$$

Entonces $S=\frac{\delta}{\delta-\beta}$, *luego por la ecuación 30.136 se tiene que*

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{\delta-\beta}{\delta}=1-\frac{\beta}{\delta}\\ \pi_n &= \pi_0\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n=\left(1-\frac{\beta}{\delta}\right)\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n=(1-\rho)\,\rho^n\end{aligned}$$

Lo cual nos lleva a la siguiente

Proposición 30.40 *La cola $M/M/1$ con intendisad de tráfico ρ, es recurrente si y sólo si $\rho\leq 1$.*

Entonces por el corolario 30.30

Proposición 30.41 *La cola $M/M/1$ con intensidad de tráfico ρ es ergódica si y sólo si $\rho<1$. En cuyo caso, la distribución de equilibrio π de la longitud de la cola es geométrica, $\pi_n=(1-\rho)\,\rho^n$, para $n=1,2,\ldots$.*

De la proposición anterior se desprenden varios hechos importantes.

a) $\mathbb{P}[X_t=0]=\pi_0=1-\rho$, *es decir, la probabilidad de que el sistema se encuentre ocupado.*

b) *De las propiedades de la distribución Geométrica se desprende que*

1) $\mathbb{E}[X_t]=\frac{\rho}{1-\rho}$,

2) $Var[X_t]=\frac{\rho}{(1-\rho)^2}$.

Si L es el número esperado de clientes en el sistema, incluyendo los que están siendo atendidos, entonces

$$L=\frac{\rho}{1-\rho}$$

Si además W es el tiempo total del cliente en la cola: $W=W_q+W_s$ $\rho=\frac{\mathbb{E}[s]}{\mathbb{E}[\tau]}=\beta W_s$, puesto que $W_s=\mathbb{E}[s]$ y $\mathbb{E}[\tau]=\frac{1}{\delta}$. Por la fórmula de Little $L=\lambda W$

$$\begin{aligned}W &= \frac{L}{\beta}=\frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\beta}=\frac{\rho}{\delta}\frac{1}{1-\rho}=\frac{W_s}{1-\rho}\\ &= \frac{1}{\delta(1-\rho)}=\frac{1}{\delta-\beta}\end{aligned}$$

luego entonces

$$\begin{aligned}W_q &= W-W_s=\frac{1}{\delta-\beta}-\frac{1}{\delta}=\frac{\beta}{\delta(\delta-\beta)}\\ &= \frac{\rho}{1-\rho}\frac{1}{\delta}=\mathbb{E}[s]\,\frac{\rho}{1-\rho}\end{aligned}$$

Entonces

$$L_q=\beta W_q=\frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Finalmente

Proposición 30.42 a) $W(t)=1-e^{-\frac{t}{W}}$.

b) $W_q(t)=1-\rho\exp^{-\frac{t}{W}}$.
donde $W=\mathbb{E}(w)$.

30.21.3. Cola $M/M/\infty$

Este tipo de modelos se utilizan para estimar el número de líneas en uso en una gran red comunicación o para estimar valores en los sistemas $M/M/c$ o $M/M/c/c$, en el se puede pensar que siempre hay un servidor disponible para cada cliente que llega.

Se puede considerar como un proceso de nacimiento y muerte con parámetros $\beta_n = \beta$ y $\mu_n = n\mu$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces por la ecuación 30.136 se tiene que

$$\pi_0 = e^{\rho}$$
$$\pi_n = e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}$$

Entonces, el número promedio de servidores ocupados es equivalente a considerar el número de clientes en el sistema, es decir,

$$L = \mathbb{E}[N] = \rho$$
$$Var[N] = \rho$$

Además se tiene que $W_q = 0$ y $L_q = 0$.

El tiempo promedio en el sistema es el tiempo promedio de servicio, es decir, $W = \mathbb{E}[s] = \frac{1}{\delta}$. Resumiendo, tenemos la sisuguiente proposición:

Proposición 30.43 *La cola $M/M/\infty$ es ergódica para todos los valores de η. La distribución de equilibrio π es Poisson con media η, $\pi_n = \frac{e^{-n}\eta^n}{n!}$.*

30.21.4. Cola M/M/m

Este sistema considera m servidores idénticos, con tiempos entre arribos y de servicio exponenciales con medias $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\beta}$ y $\mathbb{E}[s] = \frac{1}{\delta}$. definimos ahora la utilización por servidor como $u = \frac{\rho}{m}$ que también se puede interpretar como la fracción de tiempo promedio que cada servidor está ocupado.

La cola $M/M/m$ se puede considerar como un proceso de nacimiento y muerte con parámetros: $\beta_n = \beta$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ y $\delta_n = \begin{cases} n\delta & n = 0, 1, \ldots, m-1 \\ c\delta & n = m, \ldots \end{cases}$

entonces la condición de recurrencia se va a cumplir sí y sólo si $\sum_{n\geq 1}\frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} < \infty$, equivalentemente se debe de cumplir que

$$\begin{aligned} S &= 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} = \sum_{n=0}^{m-1}\frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_0\cdots\beta_{n-1}}{\delta_1\cdots\delta_n} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1}\frac{\beta^n}{n!\delta^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^m}{m!}u^n \end{aligned}$$

converja, lo cual ocurre si $u < 1$, en este caso

$$S = \sum_{n=0}^{m-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^m}{m!}(1-u)$$

luego, para este caso se tiene que

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1}{S} \\ \pi_n &= \begin{cases} \pi_0\frac{\rho^n}{n!} & n = 0, 1, \ldots, m-1 \\ \pi_0\frac{\rho^n}{m!m^{n-m}} & n = m, \ldots \end{cases} \end{aligned}$$

Al igual que se hizo antes, determinaremos los valores de L_q, W_q, W y L:

$$\begin{aligned}
L_q &= \mathbb{E}\left[N_q\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(n-m)\,\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_{n+m}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_0 \frac{\rho^{n+m}}{m!m^{n+m}} = \pi_0\frac{\rho^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty} nu^n = \pi_0\frac{u\rho^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{du}u^n\\
&= \pi_0\frac{u\rho^m}{m!}\frac{d}{du}\sum_{n=0}^{\infty}u^n = \pi_0\frac{u\rho^m}{m!}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{1-u}\right) = \pi_0\frac{u\rho^m}{m!}\frac{1}{(1-u)^2}
\end{aligned}$$

es decir

$$L_q = \frac{u\pi_0\rho^m}{m!\,(1-u)^2} \tag{30.77}$$

luego

$$W_q = \frac{L_q}{\beta} \tag{30.78}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\delta} \tag{30.79}$$

Si definimos $C(m,\rho) = \frac{\pi_0\rho^m}{m!(1-u)} = \frac{\pi_m}{1-u}$, que es la probabilidad de que un cliente que llegue al sistema tenga que esperar en la cola. Entonces podemos reescribir las ecuaciones recién enunciadas:

$$\begin{aligned}
L_q &= \frac{C(m,\rho)\,u}{1-u}\\
W_q &= \frac{C(m,\rho)\,\mathbb{E}\left[s\right]}{m\,(1-u)}
\end{aligned}$$

Proposición 30.44 *La cola $M/M/m$ con intensidad de tráfico ρ es ergódica si y sólo si $\rho < 1$. En este caso la distribución ergódica π está dada por*

$$\pi_n = \left\{\begin{array}{cc} \frac{1}{S}\frac{\eta^n}{n!} & 0 \leq n \leq m\\ \frac{1}{S}\frac{\eta^m}{m!}\rho^{n-m} & m \leq n < \infty \end{array}\right.$$

Proposición 30.45 *Para $t \geq 0$*

a) $W_q(t) = 1 - C(m,\rho)\,e^{-c\delta t(1-u)}$

b)

$$W(t) = \left\{\begin{array}{cc} 1 + e^{-\delta t}\frac{\rho-m+W_q(0)}{m-1-\rho} + e^{-m\delta t(1-u)}\frac{C(m,\rho)}{m-1-\rho} & \rho \neq m-1\\ 1-\left(1+C(m,\rho)\,\delta t\right)e^{-\delta t} & \rho = m-1 \end{array}\right.$$

30.21.5. Cola M/G/1

Consideremos un sistema de espera con un servidor, en el que los tiempos entre arribos son exponenciales, y los tiempos de servicio tienen una distribución general G. Sea $N(t)_{t\geq 0}$ el número de clientes en el sistema al tiempo t, y sean $t_1 < t_2 < \ldots$ los tiempos sucesivos en los que los clientes completan su servicio y salen del sistema.

La sucesión $\{X_n\}$ definida por $X_n = N(t)$ es una cadena de Markov, en específico es la Cadena encajada del proceso de llegadas de usuarios. Sea U_n el número de clientes que llegan al sistema durante el tiempo de servicio del n-ésimo cliente, entonces se tiene que

$$X_{n+1} = \left\{\begin{array}{cc} X_n - 1 + U_{n+1} & si\ X_n \geq 1,\\ U_{n+1} & si\ X_n = 0 \end{array}\right.$$

Dado que los procesos de arribos de los usuarios es Poisson con parámetro λ, la probabilidad condicional de que lleguen j clientes al sistema dado que el tiempo de servicio es $s = t$, resulta:

$$\mathbb{P}\left\{U = j|s = t\right\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!},\ j = 0,1,\ldots$$

por el teorema de la probabilidad total se tiene que

$$a_j = \mathbb{P}\{U = j\} = \int_0^\infty \mathbb{P}\{U = j|s = t\}\, dG(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} dG(t) \tag{30.80}$$

donde G es la distribución de los tiempos de servicio. Las probabilidades de transición de la cadena están dadas por

$$p_{0j} = \mathbb{P}\{U_{n+1} = j\} = a_j, \text{ para } j = 0, 1, \ldots \tag{30.81}$$

y para $i \geq 1$

$$p_{ij} = \begin{cases} \mathbb{P}\{U_{n+1} = j - i + 1\} = a_{j-i+1} & , \text{ para } j \geq i - 1 \\ 0 & j < i - 1 \end{cases} \tag{30.82}$$

Sea $\rho = \sum_{n=0} n a_n$, *entonces se tiene el siguiente teorema:*

Teorema 30.30 *La cadena encajada* $\{X_n\}$ *es*

a) Recurrente positiva si $\rho < 1$,

b) Transitoria si $\rho > 1$,

c) Recurrente nula si $\rho = 1$.

Además, se tiene que $\rho = \beta \mathbb{E}[s] = \frac{\beta}{\delta}$ *y la distribución estacionaria está dada por*

$$\pi_j = \pi_0 a_j + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1}, \text{ para } j = 0, 1, \ldots \tag{30.83}$$

$$\pi_0 = 1 - \rho \tag{30.84}$$

Además se tiene que

$$L = \pi^{'}(1) = \rho + \frac{A^{''}(1)}{2(1-\rho)} \tag{30.85}$$

pero $A^{''}(1) = \sum_{n=1} n(n-1) a_n = \mathbb{E}[U^2] - \mathbb{E}[U]$, $\mathbb{E}[U] = \rho$ *y* $\mathbb{E}[U^2] = \lambda^2 \mathbb{E}[s^2] + \rho$. *Por lo tanto* $L = \rho + \frac{\beta^2 \mathbb{E}[s^2]}{2(1-\rho)}$.

De las fórmulas de Little, se tiene que $W = E(w) = \frac{L}{\beta}$, *también el tiempo de espera en la cola*

$$W_q = \mathbb{E}(q) = \mathbb{E}(w) - \mathbb{E}(s) = \frac{L}{\beta} - \frac{1}{\delta}, \tag{30.86}$$

además el número promedio de clientes en la cola es

$$L_q = \mathbb{E}(N_q) = \beta W_q = L - \rho \tag{30.87}$$

30.21.6. Cola M/M/m/m

Consideremos un sistema con m servidores idénticos, pero ahora cada uno es de capacidad finita m. Si todos los servidores se encuentran ocupados, el siguiente usuario en llegar se pierde pues no se le deja esperar a que reciba servicio. Este tipo de sistemas pueden verse como un proceso de nacimiento y muerte con

$$\beta_n = \begin{cases} \beta & n = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \\ 0 & n \geq m \end{cases}$$

$$\delta_n = \begin{cases} n\delta & n = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \\ 0 & n \geq m \end{cases}$$

El proceso tiene epacio de estados finitos, $S = \{0, 1, \ldots, m\}$, *entonces de las ecuaciones que determinan la distribución estacionaria se tiene que*

$$\pi_n = \begin{cases} \pi_0 \frac{\rho^n}{n!} & n = 0, 1, 2, \ldots, m \\ 0 & n \geq m \end{cases} \tag{30.88}$$

y ademas

$$\pi_0 = \left(\sum_{n=0}^{m} \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1} \tag{30.89}$$

A la ecuación 30.88 se le llama distribución truncada.

Si definimos $\pi_m = B(m, \rho) = \pi_0 \frac{\rho^m}{m!}$, π_m *representa la probabilidad de que todos los servidores se encuentren ocupados, y también se le conoce como* fórmula de pérdida de Erlang.

Necesariamente en este caso el tiempo de espera en la cola W_q *y el número promedio de clientes en la cola* L_q *deben de ser cero puesto que no se permite esperar para recibir servicio, más aún el tiempode espera en el sistema y el tiempo de serivcio tienen la misma distribución, es decir,*

$$W(t) = \mathbb{P}\{w \leq t\} = 1 - e^{-\mu t}$$

, en particular

$$W = \mathbb{E}[w] = \mathbb{E}[s] = \frac{1}{\delta}$$

Por otra parte, el número esperado de clientes en el sistema es

$$\begin{aligned} L &= \mathbb{E}[N] = \sum_{n=0}^{m} n\pi_n = \pi_0 \rho \sum_{n=0}^{m} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \pi_0 \rho \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\rho^n}{n!} \end{aligned}$$

entonces, se tiene que

$$L = \rho(1 - B(m, \rho)) = \mathbb{E}[s](1 - B(m, \rho)). \tag{30.90}$$

Además

$$\delta_q = \delta(1 - B(m, \rho)) \tag{30.91}$$

representa la tasa promedio efectiva de arribos al sistema.

30.22. Cadenas de Markov

30.22.1. Estacionareidad

Sea $v = (v_i)_{i \in E}$ *medida no negativa en* E*, podemos definir una nueva medida* $v\mathbb{P}$ *que asigna masa* $\sum_{i \in E} v_i p_{ij}$ *a cada estado* j*.*

Definición 30.21 *La medida* v *es estacionaria si* $v_i < \infty$ *para toda* i *y además* $v\mathbb{P} = v$*.*

En el caso de que v *sea distribución, independientemente de que sea estacionaria o no, se cumple con*

$$\mathbb{P}_v[X_1 = j] = \sum_{i \in E} \mathbb{P}_v[X_0 = i] p_{ij} = \sum_{i \in E} v_i p_{ij} = (vP)_j$$

Teorema 30.31 *Supongamos que* v *es una distribución estacionaria. Entonces*

i) La cadena es estrictamente estacionaria con respecto a $\mathbb{P}_v$*, es decir,* $\mathbb{P}_v$*-distribución de* $\{X_n, X_{n+1}, \ldots\}$ *no depende de* n*;*

ii) Existe un aversión estrictamente estacionaria $\{X_n\}_{n \in Z}$ *de la cadena con doble tiempo infinito y* $\mathbb{P}(X_n = i) = v_i$ *para toda* $n \in Z$*.*

Teorema 30.32 *Sea* i *estado fijo, recurrente. Entonces una medida estacionaria* v *puede definirse haciendo que* v_j *sea el número esperado de visitas a* j *entre dos visitas consecutivas* i*,*

$$v_j = \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \mathbb{1}(X_n = i) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i[X_n = j, \tau(i) > n] \tag{30.92}$$

Teorema 30.33 *Si la cadena es irreducible y recurrente, entonces una medida estacionaria* v *existe, satisface* $0 < v_j < \infty$ *para toda* j *y es única salvo factores multiplicativos, es decir, si* v, v^* *son estacionarias, entonces* $c = cv^*$ *para alguna* $c \in (0, \infty)$*.*

Corolario 30.25 *Si la cadena es irreducible y positiva recurrente, existe una única distribución estacionaria π dada por*

$$\pi_j = \frac{1}{\mathbb{E}_i \tau_i} \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\tau(i)-1} \mathbb{1}\left(X_n = j\right) = \frac{1}{\mathbb{E}_j \tau\left(j\right)}. \tag{30.93}$$

Corolario 30.26 *Cualquier cadena de Markov irreducible con un espacio de estados finito es positiva recurrente.*

30.22.2. Teoría Ergódica

Lema 30.15 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y se F subconjunto finito del espacio de estados. Entonces la cadena es positiva recurrente si $\mathbb{E}_i \tau\left(F\right) < \infty$ para todo $i \in F$.*

Proposición 30.46 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y transiente o cero recurrente, entonces $p_{ij}^{n} \to 0$ conforme $n \to \infty$ para cualquier $i, j \in E$, E espacio de estados.*

Utilizando el teorema (2.2) y el corolario refCor.3.5, se demuestra el siguiente resultado importante.

Teorema 30.34 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y aperiódica positiva recurrente, y sea $\pi = \{\pi_j\}_{j \in E}$ la distribución estacionaria. Entonces $p_{ij}^{n} \to \pi_j$ para todo i, j.*

Definición 30.22 *Una cadena irreducible aperiodica, positiva recurrente con medida estacionaria v, es llamada* ergódica.

Proposición 30.47 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y recurrente con medida estacionaria v, entocnes para todo $i, j, k, l \in E$*

$$\frac{\sum_{n=0}^{m} p_{ij}^{n}}{\sum_{n=0}^{m} p_{lk}^{n}} \to \frac{v_j}{v_k},\ m \to \infty \tag{30.94}$$

Lema 30.16 *La matriz $\widetilde{P}$ con elementos $\widetilde{p}_{ij} = \frac{v_{ji} p_{ji}}{v_i}$ es una matriz de transición. Además, el i-ésimo elementos $\widetilde{p}_{ij}^{m}$ de la matriz potencia $\widetilde{P}^{m}$ está dada por $\widetilde{p}_{ij}^{m} = \frac{v_{ji} p_{ji}^{m}}{v_i}$.*

Lema 30.17 *Defínase $N_i^m = \sum_{n=0}^{m} \mathbb{1}\left(X_n = i\right)$ como el número de visitas a i antes del tiempo m. Entonces si la cadena es reducible y recurrente, $lim_{m \to \infty} \frac{\mathbb{E}_j N_i^m}{\mathbb{E}_k N_i^m} = 1$ para todo $j, k \in E$.*

30.22.3. Funciones Armónicas, Recurrencia y Transitoriedad

Definición 30.23 *Una función Armónica es el eigenvector derecho h de P corrrespondiente al eigenvalor 1.*

$$Ph = h \Leftrightarrow h\left(i\right) = \sum_{j \in E} p_{ij} h\left(j\right) = \mathbb{E}_i h\left(X_1\right) = \mathbb{E}\left[h\left(X_{n+1}\right) | X_n = i\right].$$

es decir, $\{h\left(X_n\right)\}$ es martingala.

Proposición 30.48 *Sea $\{X_n\}$ cadena irreducible y sea i estado fijo arbitrario. Entonces la cadena es transitoria sí y sólo si existe una función no cero, acotada $h : E - \{i\} \to \mathbb{R}$ que satisface*

$$h\left(j\right) = \sum_{k \neq i} p_{jk} h\left(k\right) \ \ para\ j \neq i. \tag{30.95}$$

Proposición 30.49 *Supongamos que la cadena es irreducible y sea E_0 un subconjunto finito del espacio de estados, entonces*

i)

ii)

Proposición 30.50 *Suponga que la cadena es irreducible y sea E_0 un subconjunto finito de E tal que se cumple la ecuación 5.2 para alguna función h acotada que satisface $h\left(i\right) < h\left(j\right)$ para algún estado $i \notin E_0$ y todo $j \in E_0$. Entonces la cadena es transitoria.*

30.23. Procesos de Markov de Saltos

30.23.1. Estructura Básica de los Procesos Markovianos de Saltos

- *Sea E espacio discreto de estados, finito o numerable, y sea $\{X_t\}$ un proceso de Markov con espacio de estados E. Una medida μ en E definida por sus probabilidades puntuales μ_i, escribimos $p_{ij}^t = P^t(i,\{j\}) = P_i(X_t = j)$.*
- *El monto del tiempo gastado en cada estado es positivo, de modo tal que las trayectorias muestrales son constantes por partes. Para un proceso de saltos denotamos por los tiempos de saltos a $S_0 = 0 < S_1 < S_2 \cdots$, los tiempos entre saltos consecutivos $T_n = S_{n+1} - S_n$ y la secuencia de estados visitados por $Y_0, Y_1, \ldots$, así las trayectorias muestrales son constantes entre S_n consecutivos, continua por la derecha, es decir, $X_{S_n} = Y_n$.*
- *La descripción de un modelo práctico está dado usualmente en términos de las intensidades $\lambda(i)$ y las probabilidades de salto q_{ij} más que en términos de la matriz de transición P^t.*
- *Supóngase de ahora en adelante que $q_{ii} = 0$ cuando $\lambda(i) > 0$*

30.23.2. Matriz Intensidad

Definición 30.24 *La matriz intensidad $\Lambda = (\lambda(i,j))_{i,j\in E}$ del proceso de saltos $\{X_t\}_{t\geq 0}$ está dada por*

$$\begin{aligned}\lambda(i,j) &= \lambda(i)\, q_{i,j},\ j \neq i\\ \lambda(i,i) &= -\lambda(i)\end{aligned}$$

Proposición 30.51 *Una matriz $E \times E$, Λ es la matriz de intensidad de un proceso markoviano de saltos $\{X_t\}_{t\geq 0}$ si y sólo si*

$$\lambda(i,i) \leq 0,\ \lambda(i,j),\ i \neq j,\ \sum_{j\in E} \lambda(i,j) = 0.$$

Además, Λ está en correspondencia uno a uno con la distribución del proceso minimal dado por el teorema 3.1.

Para el caso particular de la Cola $M/M/1$, la matríz de itensidad está dada por

$$\Lambda = \left[\begin{array}{cccccc} -\beta & \beta & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \delta & -\beta-\delta & \beta & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & \delta & -\beta-\delta & \beta & 0 & \cdots\\ \vdots & & & & & \ddots \end{array}\right]$$

30.23.3. Medidas Estacionarias

Definición 30.25 *Una medida $v \neq 0$ es estacionaria si $0 \leq v_j < \infty$, $vP^t = v$ para toda t.*

Teorema 30.35 *Supongamos que $\{X_t\}$ es irreducible recurrente en E. Entonces existe una y sólo una, salvo múltiplos, medida estacionaria v. Esta v tiene la propiedad de que $0 < v_j < \infty$ para todo j y puede encontrarse en cualquiera de las siguientes formas*

i) *Para algún estado i, fijo pero arbitrario, v_j es el tiempo esperado utilizado en j entre dos llegadas consecutivas al estado i;*

$$v_j = \mathbb{E}_i \int_0^{w(i)} \mathbb{1}(X_t = j)\, dt \tag{30.96}$$

con $w(i) = \inf\{t > 0 : X_t = i, X_{t^-} = \lim_{s\uparrow t} X_s \neq i\}$.

ii) $v_j = \frac{\mu_j}{\lambda(j)}$, *donde μ es estacionaria para $\{Y_n\}$.*

iii) *como solución de $v\Lambda = 0$.*

30.23.4. Criterios de Ergodicidad

Definición 30.26 *Un proceso irreducible recurrente con medida estacionaria de masa finita es llamado ergódico.*

Teorema 30.36 *Un proceso de Markov de saltos irreducible no explosivo es ergódico si y sólo si se puede encontrar una solución, de probabilidad, π, con $|\pi| = 1$ y $0 \leq \pi_j \leq 1$, a $\pi\Lambda = 0$. En este caso π es la distribución estacionaria.*

Corolario 30.27 *Una condición suficiente para la ergodicidad de un proceso irreducible es la existencia de una probabilidad π que resuelva el sistema $\pi\Lambda = 0$ y que además tenga la propiedad de que $\sum \pi_j \lambda(j) < \infty$.*

Proposición 30.52 *Si el proceso es ergódico, entonces existe una versión estrictamente estacionaria $\{X_t\}_{-\infty<t<\infty}$ con doble tiempo infinito.*

Teorema 30.37 *Si $\{X_t\}$ es ergódico y π es la distribución estacionaria, entonces para todo i, j, $p_{ij}^t \rightarrow \pi_j$ cuando $t \rightarrow \infty$.*

Corolario 30.28 *Si $\{X_t\}$ es irreducible recurrente pero no ergódica, es decir $|v| = \infty$, entonces $p_{ij}^t \rightarrow 0$ para todo $i, j \in E$.*

Corolario 30.29 *Para cualquier proceso Markoviano de Saltos minimal, irreducible o no, los límites $li_{t\rightarrow\infty} p_{ij}^t$ existe.*

30.24. Notación Kendall-Lee

A partir de este momento se harán las siguientes consideraciones: Si t_n es el tiempo aleatorio en el que llega al sistema el n-ésimo cliente, para $n = 1, 2, \ldots$, $t_0 = 0$ y $t_0 < t_1 < \cdots$ se definen los tiempos entre arribos $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ para $n = 1, 2, \ldots$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Los tiempos entre arribos tienen un valor medio $E(\tau)$ finito y positivo $\frac{1}{\beta}$, es decir, β se puede ver como la tasa o intensidad promedio de arribos al sistema por unidad de tiempo. Además se supondrá que los servidores son identicos y si s denota la variable aleatoria que describe el tiempo de servicio, entonces $E(s) = \frac{1}{\delta}$, δ es la tasa promedio de servicio por servidor.

La notación de Kendall-Lee es una forma abreviada de describir un sisema de espera con las siguientes componentes:

i) **Fuente**: *Población de clientes potenciales del sistema, esta puede ser finita o infinita.*

ii) **Proceso de Arribos**: *Proceso determinado por la función de distribución $A(t) = P\{\tau \leq t\}$ de los tiempos entre arribos.*

Además tenemos las siguientes igualdades

$$N(t) = N_q(t) + N_s(s) \tag{30.97}$$

donde

- *$N(t)$ es el número de clientes en el sistema al tiempo t.*
- *$N_q(t)$ es el número de clientes en la cola al tiempo t*
- *$N_s(t)$ es el número de clientes recibiendo servicio en el tiempo t.*

Bajo la hipótesis de estacionareidad, es decir, las características de funcionamiento del sistema se han estabilizado en valores independientes del tiempo, entonces

$$N = N_q + N_s. \tag{30.98}$$

Los valores medios de las cantidades anteriores se escriben como $L = E(N)$, $L_q = E(N_q)$ y $L_s = E(N_s)$, entonces de la ecuación 30.97 se obtiene

$$L = L_q + L_s \tag{30.99}$$

Si q es el tiempo que pasa un cliente en la cola antes de recibir servicio, y W es el tiempo total que un cliente pasa en el sistema, entonces

$$w = q + s$$

por lo tanto

$$W = W_q + W_s,$$

donde $W = E(w)$, $W_q = E(q)$ *y* $W_s = E(s) = \frac{1}{\delta}$.
La intensidad de tráfico se define como

$$\rho = \frac{E(s)}{E(\tau)} = \frac{\beta}{\delta}. \tag{30.100}$$

La utilización por servidor es

$$u = \frac{\rho}{c} = \frac{\beta}{c\delta}. \tag{30.101}$$

donde c *es el número de servidores.*
Esta notación es una forma abreviada de describir un sistema de espera con componentes dados a continuación, la notación es

$$A/S/c/K/F/d \tag{30.102}$$

Cada una de las letras describe:

- A *es la distribución de los tiempos entre arribos.*
- S *es la distribución del tiempo de servicio.*
- c *es el número de servidores.*
- K *es la capacidad del sistema.*
- F *es el número de individuos en la fuente.*
- d *es la disciplina del servicio*

Usualmente se acostumbra suponer que $K = \infty$, $F = \infty$ *y* $d = FIFO$, *es decir, First In First Out.*
Las distribuciones usuales para A *y* B *son:*

- GI *para la distribución general de los tiempos entre arribos.*
- G *distribución general del tiempo de servicio.*
- M *Distribución exponencial para* A *o* S.
- E_K *Distribución Erlang-K, para* A *o* S.
- D *tiempos entre arribos o de servicio constantes, es decir, deterministicos.*

30.25. Procesos de Nacimiento y Muerte

30.25.1. Procesos de Nacimiento y Muerte Generales

Por un proceso de nacimiento y muerte se entiende un proceso de saltos de markov $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *con espacio de estados a lo más numerable, con la propiedad de que sólo puede ir al estado* $n+1$ *o al estado* $n-1$, *es decir, su matriz de intensidad es de la forma*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\beta_0 & \beta_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \delta_1 & -\beta_1 - \delta_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \delta_2 & -\beta_2 - \delta_2 & \beta_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

donde β_n *son las intensidades de nacimiento y* δ_n *las intensidades de muerte, o también se puede ver como a* X_t *el número de usuarios en una cola al tiempo* t, *un salto hacia arriba corresponde a la llegada de un nuevo usuario y un salto hacia abajo como al abandono de un usuario después de haber recibido su servicio.*
La cadena de saltos $\{Y_n\}$ *tiene matriz de transición dada por*

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

donde $p_n = \frac{\beta_n}{\beta_n + \delta_n}$ *y* $q_n = 1 - p_n = \frac{\delta_n}{\beta_n + \delta_n}$, *donde además se asumne por el momento que* p_n *no puede tomar el valor* 0 *ó* 1 *para cualquier valor de* n.

Proposición 30.53 *La recurrencia de $\{X_t\}$, o equivalentemente de $\{Y_n\}$ es equivalente a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\beta_1 \cdots \beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} = \infty \tag{30.103}$$

Lema 30.18 *Independientemente de la recurrencia o transitorieadad, existe una y sólo una, salvo múltiplos, solución a $v\Lambda = 0$, dada por*

$$v_n = \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} v_0 \tag{30.104}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Corolario 30.30 *En el caso recurrente, la medida estacionaria μ para $\{Y_n\}$ está dada por*

$$\mu_n = \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n} \mu_0 \tag{30.105}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Se define a $S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n}$

Corolario 30.31 *$\{X_t\}$ es ergódica si y sólo si la ecuación (30.133) se cumple y además $S < \infty$, en cuyo caso la distribución ergódica, π, está dada por*

$$\pi_0 = \frac{1}{S},\ \pi_n = \frac{1}{S} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \tag{30.106}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

30.25.2. Cola M/M/1

Este modelo corresponde a un proceso de nacimiento y muerte con $\beta_n = \beta$ y $\delta_n = \delta$ independiente del valor de n. La intensidad de tráfico $\rho = \frac{\beta}{\delta}$, implica que el criterio de recurrencia (ecuación 30.133) quede de la forma:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} = \infty.$$

Equivalentemente el proceso es recurrente si y sólo si

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n < \infty \Leftrightarrow \frac{\beta}{\delta} < 1$$

Entonces $S = \frac{\delta}{\delta - \beta}$, luego por la ecuación 30.136 se tiene que

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{\delta - \beta}{\delta} = 1 - \frac{\beta}{\delta} \\ \pi_n &= \pi_0 \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n = \left(1 - \frac{\beta}{\delta}\right) \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n = (1 - \rho)\, \rho^n \end{aligned}$$

Lo cual nos lleva a la siguiente

Proposición 30.54 *La cola $M/M/1$ con intendisad de tráfico ρ, es recurrente si y sólo si $\rho \leq 1$.*

Entonces por el corolario 30.30

Proposición 30.55 *La cola $M/M/1$ con intensidad de tráfico ρ es ergódica si y sólo si $\rho < 1$. En cuyo caso, la distribución de equilibrio π de la longitud de la cola es geométrica, $\pi_n = (1 - \rho)\, \rho^n$, para $n = 1, 2, \ldots$.*

De la proposición anterior se desprenden varios hechos importantes.

a) *$\mathbb{P}[X_t = 0] = \pi_0 = 1 - \rho$, es decir, la probabilidad de que el sistema se encuentre ocupado.*

b) *De las propiedades de la distribución Geométrica se desprende que*

   1) *$\mathbb{E}[X_t] = \frac{\rho}{1-\rho}$,*

2) $Var\left[X_t\right] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$.

Si L es el número esperado de clientes en el sistema, incluyendo los que están siendo atendidos, entonces

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Si además W es el tiempo total del cliente en la cola: $W = W_q + W_s$ $\rho = \frac{\mathbb{E}[s]}{\mathbb{E}[\tau]} = \beta W_s$, puesto que $W_s = \mathbb{E}\left[s\right]$ y $\mathbb{E}\left[\tau\right] = \frac{1}{\delta}$. Por la fórmula de Little $L = \lambda W$

$$\begin{aligned} W &= \frac{L}{\beta} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\beta} = \frac{\rho}{\delta}\frac{1}{1-\rho} = \frac{W_s}{1-\rho} \\ &= \frac{1}{\delta\left(1-\rho\right)} = \frac{1}{\delta-\beta} \end{aligned}$$

luego entonces

$$\begin{aligned} W_q &= W - W_s = \frac{1}{\delta-\beta} - \frac{1}{\delta} = \frac{\beta}{\delta(\delta-\beta)} \\ &= \frac{\rho}{1-\rho}\frac{1}{\delta} = \mathbb{E}\left[s\right]\frac{\rho}{1-\rho} \end{aligned}$$

Entonces

$$L_q = \beta W_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Finalmente

Proposición 30.56 a*)* $W\left(t\right) = 1 - e^{-\frac{t}{W}}$.
b*)* $W_q\left(t\right) = 1 - \rho\exp^{-\frac{t}{W}}$.
donde $W = \mathbb{E}(w)$.

30.25.3. Cola $M/M/\infty$

Este tipo de modelos se utilizan para estimar el número de líneas en uso en una gran red comunicación o para estimar valores en los sistemas $M/M/c$ o $M/M/c/c$, en el se puede pensar que siempre hay un servidor disponible para cada cliente que llega.

Se puede considerar como un proceso de nacimiento y muerte con parámetros $\beta_n = \beta$ y $\mu_n = n\mu$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces por la ecuación 30.136 se tiene que

$$\begin{aligned} \pi_0 &= e^{\rho} \\ \pi_n &= e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!} \end{aligned}$$

Entonces, el número promedio de servidores ocupados es equivalente a considerar el número de clientes en el sistema, es decir,

$$\begin{aligned} L = \mathbb{E}\left[N\right] &= \rho \\ Var\left[N\right] &= \rho \end{aligned}$$

Además se tiene que $W_q = 0$ y $L_q = 0$.

El tiempo promedio en el sistema es el tiempo promedio de servicio, es decir, $W = \mathbb{E}\left[s\right] = \frac{1}{\delta}$. Resumiendo, tenemos la sisuguiente proposición:

Proposición 30.57 *La cola $M/M/\infty$ es ergódica para todos los valores de η. La distribución de equilibrio π es Poisson con media η, $\pi_n = \frac{e^{-n}\eta^n}{n!}$.*

30.25.4. Cola M/M/m

Este sistema considera m servidores idénticos, con tiempos entre arribos y de servicio exponenciales con medias $\mathbb{E}[\tau] = \frac{1}{\beta}$ *y* $\mathbb{E}[s] = \frac{1}{\delta}$*. definimos ahora la utilización por servidor como* $u = \frac{\rho}{m}$ *que también se puede interpretar como la fracción de tiempo promedio que cada servidor está ocupado.*

La cola M/M/m se puede considerar como un proceso de nacimiento y muerte con parámetros: $\beta_n = \beta$ *para* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *y* $\delta_n = \begin{cases} n\delta & n = 0, 1, \ldots, m-1 \\ c\delta & n = m, \ldots \end{cases}$

entonces la condición de recurrencia se va a cumplir sí y sólo si $\sum_{n\geq 1} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} < \infty$*, equivalentemente se debe de cumplir que*

$$
\begin{aligned}
S &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\beta^n}{n!\delta^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^m}{m!} u^n
\end{aligned}
$$

converja, lo cual ocurre si $u < 1$*, en este caso*

$$
S = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^m}{m!} (1-u)
$$

luego, para este caso se tiene que

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{1}{S} \\
\pi_n &= \begin{cases} \pi_0 \frac{\rho^n}{n!} & n = 0, 1, \ldots, m-1 \\ \pi_0 \frac{\rho^n}{m! m^{n-m}} & n = m, \ldots \end{cases}
\end{aligned}
$$

Al igual que se hizo antes, determinaremos los valores de L_q, W_q, W *y* L*:*

$$
\begin{aligned}
L_q &= \mathbb{E}[N_q] = \sum_{n=0}^{\infty} (n-m) \pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_{n+m} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_0 \frac{\rho^{n+m}}{m! m^{n+m}} = \pi_0 \frac{\rho^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} n u^n = \pi_0 \frac{u\rho^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{du} u^n \\
&= \pi_0 \frac{u\rho^m}{m!} \frac{d}{du} \sum_{n=0}^{\infty} u^n = \pi_0 \frac{u\rho^m}{m!} \frac{d}{du} \left(\frac{1}{1-u} \right) = \pi_0 \frac{u\rho^m}{m!} \frac{1}{(1-u)^2}
\end{aligned}
$$

es decir

$$
L_q = \frac{u \pi_0 \rho^m}{m! (1-u)^2} \tag{30.107}
$$

luego

$$
W_q = \frac{L_q}{\beta} \tag{30.108}
$$

$$
W = W_q + \frac{1}{\delta} \tag{30.109}
$$

Si definimos $C(m, \rho) = \frac{\pi_0 \rho^m}{m!(1-u)} = \frac{\pi_m}{1-u}$*, que es la probabilidad de que un cliente que llegue al sistema tenga que esperar en la cola. Entonces podemos reescribir las ecuaciones recién enunciadas:*

$$
\begin{aligned}
L_q &= \frac{C(m, \rho) u}{1-u} \\
W_q &= \frac{C(m, \rho) \mathbb{E}[s]}{m(1-u)}
\end{aligned}
$$

Proposición 30.58 *La cola $M/M/m$ con intensidad de tráfico ρ es ergódica si y sólo si $\rho < 1$. En este caso la distribución ergódica π está dada por*

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{1}{S}\frac{\eta^n}{n!} & 0 \leq n \leq m \\ \frac{1}{S}\frac{\eta^m}{m!}\rho^{n-m} & m \leq n < \infty \end{cases}$$

Proposición 30.59 *Para $t \geq 0$*

a) $W_q(t) = 1 - C(m,\rho)\, e^{-c\delta t(1-u)}$

b)

$$W(t) = \begin{cases} 1 + e^{-\delta t}\frac{\rho - m + W_q(0)}{m-1-\rho} + e^{-m\delta t(1-u)}\frac{C(m,\rho)}{m-1-\rho} & \rho \neq m-1 \\ 1 - (1 + C(m,\rho)\,\delta t)\, e^{-\delta t} & \rho = m-1 \end{cases}$$

30.25.5. Cola M/G/1

Consideremos un sistema de espera con un servidor, en el que los tiempos entre arribos son exponenciales, y los tiempos de servicio tienen una distribución general G. Sea $N(t)_{t\geq 0}$ el número de clientes en el sistema al tiempo t, y sean $t_1 < t_2 < \dots$ los tiempos sucesivos en los que los clientes completan su servicio y salen del sistema.

La sucesión $\{X_n\}$ definida por $X_n = N(t_n)$ es una cadena de Markov, en específico es la Cadena encajada del proceso de llegadas de usuarios. Sea U_n el número de clientes que llegan al sistema durante el tiempo de servicio del n-ésimo cliente, entonces se tiene que

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + U_{n+1} & \text{si } X_n \geq 1, \\ U_{n+1} & \text{si } X_n = 0 \end{cases}$$

Dado que los procesos de arribos de los usuarios es Poisson con parámetro λ, la probabilidad condicional de que lleguen j clientes al sistema dado que el tiempo de servicio es $s = t$, resulta:

$$\mathbb{P}\{U = j | s = t\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!},\ j = 0, 1, \dots$$

por el teorema de la probabilidad total se tiene que

$$a_j = \mathbb{P}\{U = j\} = \int_0^\infty \mathbb{P}\{U = j | s = t\}\, dG(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!} dG(t) \tag{30.110}$$

donde G es la distribución de los tiempos de servicio. Las probabilidades de transición de la cadena están dadas por

$$p_{0j} = \mathbb{P}\{U_{n+1} = j\} = a_j,\ \text{para } j = 0, 1, \dots \tag{30.111}$$

y para $i \geq 1$

$$p_{ij} = \begin{cases} \mathbb{P}\{U_{n+1} = j - i + 1\} = a_{j-i+1} & ,\ \text{para } j \geq i-1 \\ 0 & j < i-1 \end{cases} \tag{30.112}$$

Entonces la matriz de transición es:

$$P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

Sea $\rho = \sum_{n=0} n a_n$, entonces se tiene el siguiente teorema:

Teorema 30.38 *La cadena encajada $\{X_n\}$ es*

a) Recurrente positiva si $\rho < 1$,

b) Transitoria si $\rho > 1$,

c) Recurrente nula si $\rho = 1$.

Recordemos que si la cadena de Markov $\{X_n\}$ tiene una distribución estacionaria entonces existe una distribución de probabilidad $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots,)$, con $\pi_i \geq 0$ y $\sum_{i\geq 1} \pi_i = 1$ tal que satisface la ecuación $\pi = \pi P$, equivalentemente

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_k p_{ij}, \text{ para } j = 0, 1, 2, \ldots \tag{30.113}$$

que se puede ver como

$$\pi_j = \pi_0 a_j + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1}, \text{ para } j = 0, 1, \ldots \tag{30.114}$$

si definimos

$$\pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j$$

y

$$A(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

con $|z_j| \leq 1$.

Si la ecuación 30.114 la multiplicamos por z^j y sumando sobre j, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0 a_j z^j + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1} z^j \\
&= \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j + \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i a_{i-1} \\
&= \pi_0 A(z) + A(z) \left(\frac{\pi(z) - \pi_0}{z} \right)
\end{aligned}$$

es decir,

$$\pi(z) = \pi_0 A(z) + A(z) \left(\frac{\pi(z) - \pi_0}{z} \right) \Leftrightarrow \pi(z) = \frac{\pi_0 A(z)(z-1)}{z - A(z)} \tag{30.115}$$

Si $z \to 1$, entonces $A(z) \to A(1) = 1$, y además $A^{'}(z) \to A^{'}(1) = \rho$. Si aplicamos la Regla de L'Hospital se tiene que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = lim_{z\to 1^-} \pi(z) = \pi_0 lim_{z\to 1^-} \frac{z-1}{z - A(z)} = \frac{\pi_0}{1-\rho}$$

Retomando,

$$a_j = \mathbb{P}\{U = j\} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(t), \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

entonces

$$\begin{aligned}
\rho &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(t) \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(t) = \int_0^{\infty} \lambda t dG(t) = \lambda \mathbb{E}[s]
\end{aligned}$$

Además, se tiene que $\rho = \beta \mathbb{E}[s] = \frac{\beta}{\delta}$ y la distribución estacionaria está dada por

$$\pi_j = \pi_0 a_j + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1}, \text{ para } j = 0, 1, \ldots \tag{30.116}$$

$$\pi_0 = 1 - \rho \tag{30.117}$$

Por otra parte se tiene que

$$L = \pi^{'}(1) = \rho + \frac{A^{''}(1)}{2(1-\rho)} \tag{30.118}$$

pero $A^{''}(1) = \sum_{n=1} n(n-1)a_n = \mathbb{E}\left[U^2\right] - \mathbb{E}[U]$, $\mathbb{E}[U] = \rho$ *y* $\mathbb{E}\left[U^2\right] = \lambda^2\mathbb{E}\left[s^2\right] + \rho$. *Por lo tanto* $L = \rho + \frac{\beta^2\mathbb{E}\left[s^2\right]}{2(1-\rho)}$.

De las fórmulas de Little, se tiene que $W = E(w) = \frac{L}{\beta}$, *también el tiempo de espera en la cola*

$$W_q = \mathbb{E}(q) = \mathbb{E}(w) - \mathbb{E}(s) = \frac{L}{\beta} - \frac{1}{\delta}, \tag{30.119}$$

además el número promedio de clientes en la cola es

$$L_q = \mathbb{E}(N_q) = \beta W_q = L - \rho \tag{30.120}$$

30.26. Redes de Colas

30.26.1. Sistemas Abiertos

Considerese un sistema con dos servidores, en los cuales los usuarios llegan de acuerdo a un proceso poisson con intensidad λ_1 *al primer servidor, después de ser atendido se pasa a la siguiente cola en el segundo servidor. Cada servidor atiende a un usuario a la vez con tiempo exponencial con razón* μ_i, *para* $i = 1, 2$. *A este tipo de sistemas se les conoce como siemas secuenciales.*

Defínase el par (n, m) *como el número de usuarios en el servidor 1 y 2 respectivamente. Las ecuaciones de balance son*

$$\lambda P_{0,0} = \mu_2 P_{0,1} \tag{30.121}$$
$$(\lambda + \mu_1) P_{n,0} = \mu_2 P_{n,1} + \lambda P_{n-1,0} \tag{30.122}$$
$$(\lambda + \mu_2) P_{0,m} = \mu_2 P_{0,m+1} + \mu_1 P_{1,m-1} \tag{30.123}$$
$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2) P_{n,m} = \mu_2 P_{n,m+1} + \mu_1 P_{n+1,m-1} + \lambda P_{n-1,m} \tag{30.124}$$

Cada servidor puede ser visto como un modelo de tipo $M/M/1$, *de igual manera el proceso de salida de una cola* $M/M/1$ *con razón* λ, *nos permite asumir que el servidor 2 también es una cola* $M/M/1$. *Además la probabilidad de que haya* n *usuarios en el servidor 1 es*

$$\begin{aligned}
P\{n \text{ en el servidor } 1\} &= \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right) = \rho_1^n (1-\rho_1) \\
P\{m \text{ en el servidor } 2\} &= \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right) = \rho_2^m (1-\rho_2)
\end{aligned}$$

Si el número de usuarios en los servidores 1 y 2 son variables aleatorias independientes, se sigue que:

$$P_{n,m} = \rho_1^n (1-\rho_1) \rho_2^m (1-\rho_2) \tag{30.125}$$

Verifiquemos que $P_{n,m}$ *satisface las ecuaciones de balance (30.121) Antes de eso, enunciemos unas igualdades que nos serán de utilidad:*

$$\mu_i \rho_i = \lambda \text{ para } i = 1, 2.$$

$$\begin{aligned}
\lambda P_{0,0} &= \lambda (1-\rho_1)(1-\rho_2) \\
y\ \mu_2 P_{0,1} &= \mu_2 (1-\rho_1) \rho_2 (1-\rho_2) \\
\Rightarrow \lambda P_{0,0} &= \mu_2 P_{0,1} \\
(\lambda + \mu_2) P_{0,m} &= (\lambda + \mu_2)(1-\rho_1)\rho_2^m (1-\rho_2) \\
\mu_2 P_{0,m+1} &= \lambda (1-\rho_1) \rho_2^m (1-\rho_2) \\
&= \mu_2 (1-\rho_1) \rho_2^m (1-\rho_2) \\
\mu_1 P_{1,m-1} &= \frac{\lambda}{\rho_2} (1-\rho_1) \rho_2^m (1-\rho_2) \\
\Rightarrow (\lambda + \mu_2) P_{0,m} &= \mu_2 P_{0,m+1} + \mu_1 P_{1,m-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\lambda+\mu_1+\mu_2)\,P_{n,m} &= (\lambda+\mu_1+\mu_2)\,\rho^n\,(1-\rho_1)\,\rho_2^m\,(1-\rho_2)\\
\mu_2 P_{n,m+1} &= \mu_2\rho_2\rho_1^n\,(1-\rho_1)\,\rho_2^m\,(1-\rho_2)\\
\mu_1 P_{n-1,m-1} &= \mu_1\frac{\rho_1}{\rho_2}\rho_1^n\,(1-\rho_1)\,\rho_2^m\,(1-\rho_2)\\
\lambda P_{n-1,m} &= \frac{\lambda}{\rho_1}\rho_1^n\,(1-\rho_1)\,\rho_2^m\,(1-\rho_2)\\
\Rightarrow (\lambda+\mu_1+\mu_2)\,P_{n,m} &= \mu_2 P_{n,m+1}+\mu_1 P_{n-1,m-1}+\lambda P_{n-1,m}
\end{aligned}
$$

entonces efectivamente la ecuación (30.125) satisface las ecuaciones de balance (30.121). El número promedio de usuarios en el sistema, está dado por

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_{n,m}(n+m)\,P_{n,m} = \sum_{n,m} nP_{n,m} + \sum_{n,m} mP_{n,m}\\
&= \sum_n\sum_m nP_{n,m} + \sum_m\sum_n mP_{n,m} = \sum_n n\sum_m P_{n,m} + \sum_m m\sum_n P_{n,m}\\
&= \sum_n n\sum_m \rho_1^n\,(1-\rho_1)\,\rho_2^m\,(1-\rho_2) + \sum_m m\sum_n \rho_1^n\,(1-\rho_1)\,\rho_2^m\,(1-\rho_2)\\
&= \sum_n n\rho_1^n\,(1-\rho_1)\sum_m \rho_2^m\,(1-\rho_2) + \sum_m m\rho_2^m\,(1-\rho_2)\sum_n \rho_1^n\,(1-\rho_1)\\
&= \sum_n n\rho_1^n\,(1-\rho_1) + \sum_m m\rho_2^m\,(1-\rho_2)\\
&= \frac{\lambda}{\mu_1-\lambda} + \frac{\lambda}{\mu_2-\lambda}
\end{aligned}
$$

30.27. Ejemplo de Cadena de Markov para dos Estados

Supongamos que se tiene la siguiente cadena:

$$
\begin{pmatrix} 1-q & q \\ p & 1-p \end{pmatrix} \tag{30.126}
$$

Si $P[X_0=0]=\pi_0(0)=a$ *y* $P[X_0=1]=\pi_0(1)=b=1-\pi_0(0)$, *con* $a+b=1$, *entonces después de un procedimiento más o menos corto se tiene que:*

$$
\begin{aligned}
P[X_n=0] &= \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n\left(a-\frac{p}{p+q}\right)\\
P[X_n=1] &= \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n\left(b-\frac{q}{p+q}\right)
\end{aligned}
$$

donde, como $0<p,q<1$, *se tiene que* $|1-p-q|<1$, *entonces* $(1-p-q)^n\to 0$ *cuando* $n\to\infty$. *Por lo tanto*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\to\infty}P[X_n=0] &= \frac{p}{p+q}\\
lim_{n\to\infty}P[X_n=1] &= \frac{q}{p+q}
\end{aligned}
$$

Si hacemos $v=\left(\frac{p}{p+q},\frac{q}{p+q}\right)$, *entonces*

$$
\left(\frac{p}{p+q},\frac{q}{p+q}\right)\begin{pmatrix} 1-q & q \\ p & 1-p \end{pmatrix}
$$

30.28. Cadenas de Markov: Estacionareidad

Teorema 30.39 *seserseraeraer*

30.29. Teoría Ergódica

Teorema 30.40 *Supongamos que $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es irreducible recurrente en E. Entonces existe una y sólo una, salvo múltiplos, medida estacionaria ν. Esta ν tiene la propiedad de que $0 \leq \nu_j < \infty$ para toda j y puede encontrarse en las siguentes formas:*

i) Para algún estado fijo pero arbitrario, i, ν_j es el tiempo esperado utilizado en j entre dos llegas consecutivas al estado i;

$$\nu_j = \mathbb{E}_i \int_0^{\omega(i)} \mathbb{1}\left(X_t = j\right) dt, \tag{30.127}$$

con $\omega\left(i\right) = inf\left\{t > 0 : X_t = i, X_{t^-} = \lim_{s\uparrow t} X_s \neq i\right\}$

ii) $\nu_j = \frac{\mu_j}{\lambda(j)}$, donde μ es estacionaria para $\{Y_n\}$;

iii) como solución de $\nu\Lambda = 0$.

30.30. Queueing Theory at Markovian Level

30.30.1. General Death Birth Processes

Consideremos un estado que comienza en el estado x_0 al tiempo 0, supongamos que el sistema permanece en x_0 hasta algún tiempo positivo τ_1, tiempo en el que el sistema salta a un nuevo estado $x_1 \neq x_0$. Puede ocurrir que el sistema permanezca en x_0 de manera indefinida, en este caso hacemos $\tau_1 = \infty$. Si τ_1 es finito, el sistema permanecerá en x_1 hasta τ_2, y así sucesivamente. Sea

$$X\left(t\right) = \left\{\begin{array}{ll} x_0 & 0 \leq t < \tau_1 \\ x_1 & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ x_2 & \tau_2 \leq t < \tau_3 \\ \vdots & \end{array}\right. \tag{30.128}$$

A este proceso se le llama proceso de salto. *Si*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\tau_n = \left\{\begin{array}{lc} < \infty & X_t \text{ explota} \\ = \infty & X_t \text{ no explota} \end{array}\right. \tag{30.129}$$

Un proceso puro de saltos es un proceso de saltos que satisface la propiedad de Markov.

Proposición 30.60 *Un proceso de saltos es Markoviano si y sólo si todos los estados no absorbentes x son tales que*

$$P_x\left(\tau_1 > t + s | \tau_1 > s\right) = P_x\left(\tau_1 > t\right)$$

para $s, t \geq 0$, equivalentemente

$$\frac{1 - F_x\left(t + s\right)}{1 - F_x\left(s\right)} = 1 - F_x\left(t\right). \tag{30.130}$$

Nota 30.1 *Una distribución F_x satisface la ecuación (30.130) si y sólo si es una función de distribución exponencial para todos los estados no absorbentes x.*

Por un proceso de nacimiento y muerte se entiende un proceso de Markov de Saltos, $\{X_t\}_{t\geq 0}$ en $E = \mathbb{N}$ tal que del estado n sólo se puede mover a $n-1$ o $n+1$, es decir, la matriz intensidad es de la forma:

$$\Lambda = \left(\begin{array}{ccccc} -\beta_0 & \beta_0 & 0 & 0 & \ldots \\ \delta_1 & -\beta_1 - \delta_1 & \beta_1 & 0 & \ldots \\ 0 & \delta_2 & -\beta_2 - \delta_2 & \beta_2 & \ldots \\ \vdots & & & \ddots & \end{array}\right) \tag{30.131}$$

donde β_n son las probabilidades de nacimiento y δ_n las probabilidades de muerte.

La matriz de transición es

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & \dots \\ \vdots & & & \ddots & \end{pmatrix} \quad (30.132)$$

con $p_n = \frac{\beta_n}{\beta_n+\delta_n}$ *y* $q_n = \frac{\delta_n}{\beta_n+\delta_n}$

Proposición 30.61 *La recurrencia de un Proceso Markoviano de Saltos* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *con espacio de estados numerable, o equivalentemente de la cadena encajada* $\{Y_n\}$ *es equivalente a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\beta_1 \cdots \beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_n}{p_1 \cdots p_n} = \infty \quad (30.133)$$

Lema 30.1 *Independientemente de la recurrencia o transitoriedad de la cadena, hay una y sólo una, salvo múltiplos, solución* ν *a* $\nu\Lambda = 0$*, dada por*

$$\nu_n = \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n} \nu_0 \quad (30.134)$$

Corolario 30.32 *En el caso recurrente, la medida estacionaria* μ *para* $\{Y_n\}$ *está dada por*

$$\mu_n = \frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n} \mu_0 \quad (30.135)$$

para $n = 1, 2, \dots$

Definición 30.27 *Una medida* ν *es estacionaria si* $0 \leq \nu_j < \infty$ *y para toda* t *se cumple que* $\nu P^t = nu$*.*

Definición 30.28 *Un proceso irreducible recurrente con medida estacionaria con masa finita es llamado ergódico.*

Teorema 30.41 *Un Proceso de Saltos de Markov irreducible no explosivo es ergódico si y sólo si uno puede encontrar una solución* π *de probabilidad,* $|\pi| = 1$*,* $0 \leq \pi_j \leq 1$ *para* $\nu\Lambda = 0$*. En este caso* π *es la distribución estacionaria.*

Corolario 30.33 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *es ergódica si y sólo si (30.133) se cumple y* $S < \infty$*, en cuyo caso la distribución estacionaria* π *está dada por*

$$\pi_0 = \frac{1}{S},\ \pi_n = \frac{1}{S} \frac{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}}{\delta_1 \cdots \delta_n},\ n = 1, 2, \dots \quad (30.136)$$

30.31. Birth-Death Processes as Queueing Models

30.31.1. Cola M/M/1

Proposición 30.62 *La cola M/M/1 con intensidad de tráfico* ρ *es recurrente si y sólo si* $\rho \leq 1$

Proposición 30.63 *La cola M/M/1 con intensidad de tráfica* ρ *es ergodica si y sólo si* $\rho < 1$*. En este caso, la distribución de equilibrio* π *de la longitud de la cola es geométrica,* $\pi_n = (1-\rho)\,\rho^n$*, para* $n = 0, 1, 2, \dots$*.*

30.31.2. Cola con Infinidad de Servidores

Este caso corresponde a $\beta_n = \beta$ *y* $\delta_n = n\delta$*. El parámetro de interés es* $\eta = \frac{\beta}{\delta}$*, de donde se obtiene:*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{\beta_1 \cdots \beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} n!\eta^n = \infty,$$

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} = e^n.$$

Proposición 30.64 *La cola* $M/M/\infty$ *es ergodica para todos los valores de* η*. La distribución de equilibrio* π *es Poisson con media* η*,* $\pi_n = \frac{e^{-n}\eta}{n!}$

30.31.3. Cola M/M/m

En este caso $\beta_n = \beta$ *y* $\delta_n = m(n)\,\delta$, *donde* $m(n) = n$, $1 \leq n \leq m$. *La intensidad de tráfico es* $\rho = \frac{\beta}{m\delta}$, *se tiene entonces que* $\beta_n/\delta_n = \rho$ *para* $n \geq m$. *Así, para el caso* $m = 1$,

CAPÍTULO 31

Modelos de Flujo

31.1. Procesos Regenerativos

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0. \tag{31.1}$$

(S2.)

$$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N}, \tag{31.2}$$

para cualquier valor de x.

- *La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right] \geq 0$.*
- *Se define*
$$\delta^{*} := \sum_{j,j+1}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right]. \tag{31.3}$$
- *Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.*
- *Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.*
- *Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ y además se define*
- *la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$*
- *también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.*
- *De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).*

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $\left(X(t)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^{0}(t), C(t)\right) \tag{31.4}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \left(\{1,2,\ldots,K\} \times \{1,2,\ldots,S\}\right)^{M} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}^{K}, \tag{31.5}$$

- *$Q(t) = \left(Q_k(t), 1 \leq k \leq K\right)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.*
- *$A(t) = \left(A_k(t), 1 \leq k \leq K\right)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.*
- *$H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.*
- *$B(t)$ es el tiempo de servicio residual.*

- $B^{0}(t)$ *es el tiempo residual del cambio de cola.*
- $C(t)$ *indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en* $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ *y* $B_m^0(t)$ *se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([10])*

- *Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma* $\{\xi_k(n)\}_{n\geq1}$, *con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.*
- *Los tiempos de servicio* $\{\eta_k(n)\}_{n\geq1}$ *tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.*
- *Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como* $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ *y además se define*
- *la tasa de servicio para la k-ésima cola como* $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- *también se define* $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, *donde es necesario que* $\rho < 1$ *para cuestiones de estabilidad.*
- *De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).*

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x *es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y* $N_s(x) = N(x)$ *es el número de usuarios que son atendidos con la política* s, *única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:*

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0$
2) $\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}$*para cualquier valor de* x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- *Al término de la visita a la cola* j, *el servidor se cambia a la cola* $j^{'}$ *con probabilidad* $r_{j,j^{'}}^{m} = r_{j,j^{'}}$
- *La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud* $\delta_{j,j^{'}}(n)$, *independientes e idénticamente distribuidas, con* $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right] \geq 0$.
- *Sea* $\{p_j\}$ *la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición* $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.
- *Finalmente, se define*
$$\delta^{*} := \sum_{j,j^{'}} p_j r_{j,j^{'}} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(i)\right]. \tag{31.6}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq1}$, *y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas* $\{\eta_k(n)\}_{n\geq1}$, *donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como* $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ *y la tasa de servicio como* $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, *finalmente se define la carga de la cola como* $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, *donde se pide que* $\rho < 1$, *para garantizar la estabilidad del sistema.*

Se denotará por $Q_k(t)$ *el número de usuarios en la cola* k, $A_k(t)$ *los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor* m, *se denota por* $B_m(t)$ *los residuales de los tiempos de servicio al tiempo* t*;* $B_m^0(t)$ *son los residuales de los tiempos de traslado de la cola* k *a la próxima por atender, al tiempo* t, *finalmente sea* $C_m(t)$ *el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola* k *al tiempo* t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^{T} = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{31.7}$$

para $k = 1,\ldots,K$ *y* $m = 1,2,\ldots,M$. X *evoluciona en el espacio de estados:* $X = \mathbb{Z}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times (\{1,2,\ldots,K\} \times \{1,2,\ldots,S\})^{M} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ *son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) *Para algún entero* $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l\left(1\right)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ *es la clase de posibles arribos.*

A3) *Para* $k = 1, 2, \ldots, K$ *existe una función positiva* $q_k\left(x\right)$ *definida en* $\mathbb{R}_+$*, y un entero* j_k*, tal que*

$$P\left(\xi_k\left(1\right) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0 \quad (31.8)$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k\left(i\right) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k\left(x\right) dx, \; 0 \leq a < b. \quad (31.9)$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto A2) para $p = 1$*, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.*

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [11] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') *Para el Proceso de Markov* X*, cada subconjunto compacto de* X *es un conjunto pequeño, ver definición 32.110.*

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ *es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:*

31.1.1. Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [14], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (32.4), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([14], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [11]

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [36]) en el espacio de estados medible $\left(X, \mathcal{B}_X\right)$*. El Proceso* $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ *tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en* $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ *y está adaptado a* $\left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}$*; la colección* $\left\{P_x, x \in \mathbb{X}\right\}$ *son medidas de probabilidad en* $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ *tales que para todo* $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right) | \mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right)$$

en $\left\{\tau < \infty\right\}$*,* P_x*-c.s. Donde* τ *es un* $\mathcal{F}_t$*-tiempo de paro*

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\}$$

y f *es una función de valores reales acotada y medible con la* σ*-algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.*

Sea $P^t\left(x, D\right)$*,* $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*,* $t \geq 0$ *probabilidad de transición de* X *definida como*

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right)$$

Definición 31.1 *Una medida no cero* π *en* $\left(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}}\right)$ *es* **invariante** *para* X *si* π *es* σ*-finita y*

$$\pi\left(D\right) = \int_{\mathbf{X}} P^t\left(x, D\right) \pi\left(dx\right)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*, con* $t \geq 0$*.*

Definición 31.2 *El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 31.1 *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [19]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama Proceso Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\, \pi(dx)$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente.

Definición 31.3 *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [10]:

Lema 31.1 (Lema 3.1, Dai[10]) *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x [\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{31.10}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris Recurrente Positivo.

Lema 31.2 (Lema 3.1, Dai [10]) *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{|x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 31.1 (Teorema 3.1, Dai[10]) *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{31.11}$$

entonces la ecuación (32.2.358) se cumple para $B = \{|x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.

Nota 31.2 *En Meyn and Tweedie [**?**] muestran que si $P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

31.1.2. Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in X$, sea $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{31.12}$$

*para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.*

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{31.13}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{31.14}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{31.15}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ *y* $m = 1, 2, \ldots, M$,

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}^0_{m,k}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{31.16}$$

De acuerdo a Dai [10], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$*, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (32.2.348)-(32.2.351), se le llama* Modelo de Flujo.

Definición 31.4 (Definición 4.1, , Dai [10]) *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en (32.2.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (32.2.348)-(32.2.351) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 32.2.348-32.2.351 se le llama Modelo de flujo *y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *se le denotará por* $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ *sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:*

Teorema 31.2 (Teorema 4.2, Dai[10]) *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x| t) \tag{31.17}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ *es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo* $|q| \rightarrow \infty$ *mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado* $\overline{Q}^x$ *es solución del siguiente modelo de flujo.*

Definición 31.5 (Definición 3.3, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [8].

Lema 31.1 (Lema 3.1, Dai y Meyn [11]) *Si el modelo de flujo definido por 32.2.348-32.2.351 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 31.3 (Teorema 2.1, Down [15]) *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p*, y para cada condición inicial* $x \in X$

$$limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p \right] ds \leq \kappa_p, \tag{31.18}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right]=\mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right]\leq\kappa_r, \tag{31.19}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)\right]=0. \tag{31.20}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right)ds=\mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{31.21}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 31.4 (Teorema 2.3, Down [15]) *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^K\rho_k+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{31.22}$$

i) Si $\rho<1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 32.95.

ii) Si $\rho<1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 33.57

Teorema 31.5 *Sea $(X_n,\mathcal{F}_n,n=0,1,\ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0,χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m,n=0,1,\ldots,\ m<n$, que por notación se escribirá como $p\left(m,n,x,B\right)\rightarrow p_{mn}\left(x,B\right)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T:\Omega\rightarrow\{0,1,\ldots,\}$. Supóngase que $T\geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B\in\chi_0$, entonces*

$$P\left\{X\left(T\right)\in B,T<\infty|\mathcal{F}\left(S\right)\right\}=p\left(S,T,X\left(s\right),B\right) \tag{31.23}$$

en $\{T<\infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d:K\rightarrow\mathbb{N}$ función. Para $v\in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E=\cup_{v\in K}M_v=\left\{(v,\zeta):v\in K,\zeta\in M_v\right\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E}=\left\{\cup_{v\in K}A_v:A_v\in\mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E,\mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t=(v_t,\zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v,v\in K)$.

ii) Una función medible $\lambda:E\rightarrow\mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q:\mathcal{E}\times(E\cup\Gamma^*)\rightarrow[0,1]$ donde

$$\Gamma^*=\cup_{v\in K}\partial^*M_v. \tag{31.24}$$

y

$$\partial^*M_v=\left\{z\in\partial M_v:\phi_{\mathbf{v}}\left(\mathbf{t},\zeta\right)=\mathbf{z}\text{ para alguna }(t,\zeta)\in\mathbb{R}_+\times M_v\right\}. \tag{31.25}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ *se supone tal que para cada* $\mathbf{z} \in M_v$ *existe una única curva integral* $\phi_v(t,\zeta)$ *que satisface la ecuación*

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{31.26}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$*, para cualquier función suave* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *y* $\mathcal{H}$ *denota el operador diferencial de primer orden, con* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ *y* $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$*. Además se supone que* $\mathcal{H}_v$ *es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo* $t > 0$*.*
Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ *se denota*

$$t^* \mathbf{x} = inf \{t > 0 : \phi_v(t,\zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ*, se supondrá que para cada* $(v,\zeta) \in E$ *existe un* $\epsilon > 0$ *tal que la función* $s \to \lambda(v, \phi_v(s,\zeta)) \in E$ *es integrable para* $s \in [0, \epsilon)$*. La medida de transición* $Q(A; \mathbf{x})$ *es una función medible de* $\mathbf{x}$ *para cada* $A \in \mathcal{E}$*, definida para* $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ *y es una medida de probabilidad en* $(E, \mathcal{E})$ *para cada* $\mathbf{x} \in E$*.*
El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ *comenzando en* $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ *se puede construir de la siguiente manera, defínase la función* F *por*

$$F(t) = \left\{ \begin{array}{ll} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{array} \right. \tag{31.27}$$

Sea T_1 *una variable aleatoria tal que* $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$*, ahora sea la variable aleatoria* (N, Z) *con distribuición* $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$*. La trayectoria de* $(\mathbf{x}_t)$ *para* $t \leq T_1$ *es*[1]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \left\{ \begin{array}{ll} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{array} \right.$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ *se selecciona el siguiente tiempo de intersalto* $T_2 - T_1$ *lugar del post-salto* $\mathbf{x}_{T_2}$ *de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes* $\mathbf{x}_t$ *con tiempos de salto* $T_1, T_2, \ldots$*. Bajo las condiciones enunciadas para* $\lambda, T_1 > 0$ *y* $T_1 - T_2 > 0$ *para cada* i*, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.*

Supuestos 31.1 (Supuesto 3.1, Davis [14]) *Sea* $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ *el número de saltos en* $[0, t]$*. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{31.28}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.
Sea E *es un espacio métrico separable y la métrica* d *es compatible con la topología.*

Definición 31.6 *Un espacio topológico* E *es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 31.7 E *es un espacio de Radón si cada medida finita en* $(E, \mathcal{B}(E))$ *es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 31.8 *Una medida finita,* λ *en la* σ*-álgebra de Borel de un espacio metrizable* E *se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup \{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{31.29}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 31.6 *Sea* E *espacio separable metrizable. Entonces* E *es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en* $(E, \mathcal{B}(E))$ *es cerrada.*

Sea E *espacio de estados, tal que* E *es un espacio de Radón,* $\mathcal{B}(E)$ σ*-álgebra de Borel en* E*, que se denotará por* $\mathcal{E}$*.*
Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *espacio de probabilidad,* $I \subset \mathbb{R}$ *conjunto de índices. Sea* $\mathcal{F}_{\leq t}$ *la* σ*-álgebra natural definida como* $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$*. Se considerará una* σ*-álgebra más general,* $(\mathcal{G}_t)$ *tal que* (X_t) *sea* $\mathcal{E}$*-adaptado.*

[1] Revisar página 362, y 364 de Davis [14].

Definición 31.9 *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ indexada por pares $s,t\in I$, con $s\leq t$ es una función de transición en $(E,\mathcal{E})$, si para todo $r\leq s<t$ en I y todo $x\in E$, $B\in\mathcal{E}$*[2]

$$P_{r,t}(x,B)=\int_E P_{r,s}(x,dy)\,P_{s,t}(y,B)\,. \tag{31.30}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E,\mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[3] *(32.2.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si*

$$\mathbb{P}\left\{f(X_t)\,|\mathcal{G}_s\right\}=P_{s,t}f(X_t)\ \ s\leq t\in I,\ \ f\in b\mathcal{E}. \tag{31.32}$$

Definición 31.10 *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x)=P_t(P_sf)(x)\,,\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 31.3 *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t}=P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (32.2.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f(X_{t+s})\,|\mathcal{G}_t\right\}=P_sf(X_t)\ \ t,s\geq 0,\ \ f\in b\mathcal{E}. \tag{31.33}$$

La ecuación anterior es la Propiedad Simple de Markov *de X relativa a (P_t).*
En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (32.2.311) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 31.11 *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t\rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 31.12 (HD1) *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ tal que $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0=x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 31.13 *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E,\mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) *$(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) *$(\theta_t)_{t\geq 0}$ es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t,s\geq 0$,*

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s}\ y\ X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{31.34}$$

iii) *Para cualquier $x\in E$,$\mathbf{P}^x\{X_0=x\}=1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (32.2.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.*

Definición 31.14 (HD2) *Para cualquier $\alpha>0$ y cualquier $f\in S^\alpha$, el proceso $t\rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 31.15 *Un sistema $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

[2] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[3]

$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\}=\mathbb{P}\{H|X_t\}\ \ H\in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{31.31}$$

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 32.100, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 32.101, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 31.3 (Lema 4.2, Dai[10]) *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'}t, \text{ u.o.c.,} \tag{31.35}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k\left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{31.36}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k\left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{31.37}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 31.4 (Lema 4.3, Dai[10]) *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) *Conforme* $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) *Para cada* $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ *es el número total de servicios completados de la clase* l, *si la clase* l *está dando* t *unidades de tiempo de servicio. Sea* $T_l^x(x)$ *el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor* $s(l)$ *gasta en los usuarios de la clase* l *al tiempo* t. *Entonces* $S_l^x(T_l^x(t))$ *es el número total de servicios completados para la clase* l *al tiempo* t. *Una fracción de estos usuarios,* $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, *se convierte en usuarios de la clase* k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{31.38}$$

para $k = 1, \ldots, K$. *Para* $i = 1, \ldots, d$, *sea*

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j\in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{31.39}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = \left(S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t))\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi^l\left(S_l^x(T_l^x(t))\right) - S^x(T^x(t)), \tag{31.40}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{31.41}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{31.42}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{31.43}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{31.44}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{31.45}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 32.94:

Teorema 31.7 (Teorema 4.1, Dai [10]) *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{31.46}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{31.47}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I - P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{31.48}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{31.49}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{31.50}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente}, \tag{31.51}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{31.52}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{31.53}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 31.1 *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^0\right)$ *un flujo límite de 32.2.197 y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_k^x\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_k^x\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_k^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_k\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^0\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^0\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k\left(t\right)+\overline{T}_k^0\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_k\left(t\right)=\overline{Q}_k\left(0\right)+\alpha_kt-\mu_k\overline{T}_k\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k\left(t\right)=\beta_k$$

para $\overline{Q}_k\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_k^0\overline{T}_k^0\left(t\right)=\mu_j^0\overline{T}_j^0\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_k\dot{\overline{T}}_k\left(t\right)=l_k\mu_k^0\dot{\overline{T}}_k^0\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_k\left(t\right)>0$.

Lema 31.5 (Lema 3.1 [8]) *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 31.8 (Teorema 5.1 [8]) *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$, *para toda* $t\geq t_0$.

Lema 31.6 (Lema 5.2 [20]) *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_1\right]}\right)^r \tag{31.54}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 31.9 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [20]) *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_1\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r\rightarrow\frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$..

Proposición 31.2 (Proposición 5.1 [11]) *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0. \tag{31.55}$$

Proposición 31.3 (Proposición 5.3 [11]) *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{31.56}$$

Proposición 31.4 (Proposición 5.4 [11]) *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{31.57}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 31.10 (Teorema 5.5 [11]) *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{31.58}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \tag{31.59}$$

Teorema 31.11 (Teorema 6.2 [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \to 0$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t \to \infty} \mathbb{E}_x \left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi \left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 31.12 (Teorema 6.3 [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t \to \infty} t^{(p-1)\left|P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot)\right|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t \to \infty} t^{(p-1)} \left|\mathbb{E}_x [Q_t] - \mathbb{E}_\pi [Q_0]\right| = 0.$$

Proposición 31.5 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{31.60}$$

Lema 31.2 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [11]) *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t \to \infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{31.61}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 31.13 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{31.62}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 31.14 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{31.63}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 31.15 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{31.64}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0.$$

Teorema 31.16 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{31.65}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 31.17 (Teorema 2.2, Down [15]) *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{31.66}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\} \geq q. \tag{31.67}$$

Definición 31.16 *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X,\mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 31.17 *Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 31.18 *Sea X el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 31.19 *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\left\{x \in X : f(x) > \alpha\right\}$$

pertenece a $\mathcal{F}$. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha,\infty)) = \left\{x \in X : f(x) > \alpha\right\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 31.20 *Sean* $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ *espacios medibles y* $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ *el conjunto de todas las sucesiones* $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ *tales que* $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. *Si* $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, *definimos* $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. *Al conjunto* B_n *se le llama* cilindro *con base* B^n, *el cilindro es llamado medible si* $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.

Definición 31.21 *[TSP, Ash [?]] Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de* σ*-álgebras* $\mathcal{F}_t$, *para* $t \geq 0$, *si para* $s < t$ *implica que* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, *y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}_t$*-medible para cada* t. *Si no se especifica* $\mathcal{F}_t$ *entonces se toma* $\mathcal{F}_t$ *como* $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, *la más pequeña* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω *que hace que cada* $X(s)$, *con* $s \leq t$ *sea Borel medible.*

Definición 31.22 *[TSP, Ash [?]] Sea* $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ *familia creciente de sub* σ*-álgebras. es decir,* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *para* $s \leq t$. *Un tiempo de paro para* $\mathcal{F}(t)$ *es una función* $T : \Omega \to [0, \infty]$ *tal que* $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ *para cada* $t \geq 0$. *Un tiempo de paro para el proceso estocástico* $X(t), t \geq 0$ *es un tiempo de paro para las* σ*-álgebras* $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.

Definición 31.23 *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, con* (S, χ) *espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a* $\{\mathcal{F}(t)\}$, *es decir, si para cualquier* $s, t \in I$, I *conjunto de índices,* $s < t$, *se tiene que* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}(t)$*-medible,*

Definición 31.24 *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a* $\mathcal{F}(t)$ *o que* $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ *es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto* $B \in \chi$, *y* $s, t \in I$, $s < t$ *se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{31.68}$$

Nota 31.4 *Si se dice que* $\{X(t)\}$ *es un Proceso de Markov sin mencionar* $\mathcal{F}(t)$, *se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (32.2.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{31.69}$$

31.1.3. Procesos de Estados de Markov

Teorema 31.18 *Sea* $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots,\}$ *Proceso de Markov con espacio de estados* (S_0, χ_0) *generado por una distribuición inicial* P_o *y probabilidad de transición* p_{mn}, *para* $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, *que por notación se escribirá como* $p(m, n, x, B) \to p_{mn}(x, B)$. *Sea* S *tiempo de paro relativo a la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_n$. *Sea* T *función medible,* $T : \Omega \to \{0, 1, \ldots,\}$. *Supóngase que* $T \geq S$, *entonces* T *es tiempo de paro. Si* $B \in \chi_0$, *entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{31.70}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K *conjunto numerable y sea* $d : K \to \mathbb{N}$ *función. Para* $v \in K$, M_v *es un conjunto abierto de* $\mathbb{R}^{d(v)}$. *Entonces*

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ *la clase de conjuntos medibles en* E*:*

$$\mathcal{E} = \left\{ \bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v \right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ *son los conjuntos de Borel de* M_v. *Entonces* $(E, \mathcal{E})$ *es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por* $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. *La distribución de* $(\mathbf{x}_t)$ *está determinada por por los siguientes objetos:*

i) *Los campos vectoriales* $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) *Una función medible* $\lambda : E \to \mathbb{R}_+$.

iii) *Una medida de transición* $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \to [0, 1]$ *donde*

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{31.71}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{31.72}$$

∂M_v *denota la frontera de* M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ *se supone tal que para cada* $\mathbf{z} \in M_v$ *existe una única curva integral* $\phi_v(t, \zeta)$ *que satisface la ecuación*

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{31.73}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$*, para cualquier función suave* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *y* $\mathcal{H}$ *denota el operador diferencial de primer orden, con* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ *y* $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$*. Además se supone que* $\mathcal{H}_v$ *es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo* $t > 0$*.*
Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ *se denota*

$$t^*\mathbf{x} = inf\left\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\right\}$$

En lo que respecta a la función λ*, se supondrá que para cada* $(v, \zeta) \in E$ *existe un* $\epsilon > 0$ *tal que la función* $s \to \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ *es integrable para* $s \in [0, \epsilon)$*. La medida de transición* $Q(A; \mathbf{x})$ *es una función medible de* $\mathbf{x}$ *para cada* $A \in \mathcal{E}$*, definida para* $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ *y es una medida de probabilidad en* $(E, \mathcal{E})$ *para cada* $\mathbf{x} \in E$*.*
El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ *comenzando en* $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ *se puede construir de la siguiente manera, defínase la función* F *por*

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{31.74}$$

Sea T_1 *una variable aleatoria tal que* $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$*, ahora sea la variable aleatoria* (N, Z) *con distribuición* $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$*. La trayectoria de* $(\mathbf{x}_t)$ *para* $t \leq T_1$ *es*

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ *se selecciona el siguiente tiempo de intersalto* $T_2 - T_1$ *lugar del post-salto* $\mathbf{x}_{T_2}$ *de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes* $\mathbf{x}_t$ *con tiempos de salto* $T_1, T_2, \ldots$*. Bajo las condiciones enunciadas para* $\lambda, T_1 > 0$ *y* $T_1 - T_2 > 0$ *para cada* i*, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.*

Supuestos 31.2 (Supuesto 3.1, Davis [14]) *Sea* $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ *el número de saltos en* $[0, t]$*. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{31.75}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[4] *se cumple para cualquier tiempo de paro.*

31.1.4. Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E *es un espacio métrico separable y la métrica* d *es compatible con la topología.*

Definición 31.25 *Una medida finita,* λ *en la* σ*-álgebra de Borel de un espacio metrizable* E *se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{31.76}$$

Definición 31.26 *E es un espacio de Radón si cada medida finita en* $(E, \mathcal{B}(E))$ *es regular interior o cerrada,* tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 31.19 *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en* $(E, \mathcal{B}(E))$ *es cerrada.*

[4] Revisar página 362, y 364 de Davis [14].

31.1.5. Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[5], $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 31.27 *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{6}. \tag{31.77}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[7] (32.2.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{31.79}$$

Definición 31.28 *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}^{8}.$$

Nota 31.5 *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (32.2.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{31.80}$$

La ecuación anterior es la Propiedad Simple de Markov *de X relativa a (P_t).*

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (32.2.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

31.1.6. Primer Condición de Regularidad

Definición 31.29 *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \to X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 31.30 (HD1) *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 31.31 *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;

[5]qué se quiere decir con el término: más general?

[6]Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[7]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{31.78}$$

[8]Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{31.81}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$, *y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (32.2.311) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 31.32 (HD2) *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^{\alpha}$*, el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 31.33 *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 32.100, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 32.101, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

31.1.7. Construcción del Modelo de Flujo

Lema 31.7 (Lema 4.2, Dai[10]) *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$*, conforme* $n \rightarrow \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$*, casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \rightarrow P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{31.82}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{31.83}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{31.84}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 31.8 (Lema 4.3, Dai[10]) *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$*, conforme* $n \rightarrow \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x(t)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_k^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{31.85}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{31.86}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))',$$
$$I^x(t) = (I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t))'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \tag{31.87}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{31.88}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \tag{31.89}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{31.90}$$

$$\int_0^{\infty} (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{31.91}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{31.92}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 32.94:

Teorema 31.20 (Teorema 4.1, Dai [10]) *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{31.93}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{31.94}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{31.95}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{31.96}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{31.97}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{31.98}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{31.99}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{31.100}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 31.6 *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de 32.2.197 y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Teorema 31.21 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [20]) *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \to \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \to \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \to \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 31.7 (Proposición 5.3 [11]) *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{31.101}$$

Proposición 31.8 (Proposición 5.4 [11]) *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{31.102}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

31.1.8. Estabilidad

Definición 31.34 (Definición 3.2, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 32.2.216-32.2.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{31.103}$$

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 31.35 (Definición 3.1, Dai y Meyn [11]) *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ y $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$*

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk} \mu_l \overline{T}_l(t) \tag{31.104}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{31.105}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{31.106}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{31.107}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{31.108}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{31.109}$$

Lema 31.9 (Lema 3.1 [8]) *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 31.22 (Teorema 5.1 [8]) *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Proposición 31.9 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0 \tag{31.110}$$

Lema 31.3 (Lema 5.2, Dai y Meyn [11]) *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max\,(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t \to \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \tag{31.111}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 31.23 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{31.112}$$

para $t > 0$ *y* $x \in X$*. En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 31.24 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x \in X. \tag{31.113}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 31.25 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con* $f(x) = f_1(x)$ *se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{31.114}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0.$$

Teorema 31.26 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea* ν *cualquier distribución de probabilidad en* $(X, \mathcal{B}_X)$*, y* π *la distribución estacionaria de* X*.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{31.115}$$

$\mathbb{P}$*-c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *con* $\pi(|f|) < \infty$*, la ecuación anterior se cumple.*

Teorema 31.27 (Teorema 2.2, Down [15]) *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_0, c_0 \geq 0$*,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{31.116}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$*, con* $|Q(0)| = 1$*. Entonces para cualquier* $0 < q \leq 1$*, existe* $B < 0$ *tal que para cualquier* $|x| \geq B$*,*

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\} \geq q. \tag{31.117}$$

Definición 31.36 *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{F}$ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* X*, la pareja* $(X, \mathcal{F})$ *es llamado espacio medible. Un subconjunto* A *de* X *es llamado medible, o medible con respecto a* $\mathcal{F}$*, si* $A \in \mathcal{F}$*.*

Definición 31.37 *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *espacio de medida. Se dice que la medida* μ *es* σ*-finita si se puede escribir* $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ *con* $X_n \in \mathcal{F}$ *y* $\mu(X_n) < \infty$*.*

Definición 31.38 *Sea* X *el conjunto de los úmeros reales* $\mathbb{R}$*. El álgebra de Borel es la* σ*-álgebra* B *generada por los intervalos abiertos* $(a,b) \in \mathbb{R}$*. Cualquier conjunto en* B *es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 31.39 *Una función $f : X \to \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 31.40 *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 31.41 *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 31.42 *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 31.43 *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 31.44 *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{31.118}$$

Nota 31.6 *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (32.2.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{31.119}$$

Teorema 31.28 *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \to p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \to \{0, 1, \ldots,\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{31.120}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \to \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \to \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ *donde*

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{31.121}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}} (\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{31.122}$$

∂M_v *denota la frontera de* M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ *se supone tal que para cada* $\mathbf{z} \in M_v$ *existe una única curva integral* $\phi_v (t, \zeta)$ *que satisface la ecuación*

$$\frac{d}{dt} f (\zeta_t) = \mathcal{H} f (\zeta_t), \tag{31.123}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$*, para cualquier función suave* $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ *y* $\mathcal{H}$ *denota el operador diferencial de primer orden, con* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ *y* $\zeta_t = \phi (t, \mathbf{z})$*. Además se supone que* $\mathcal{H}_v$ *es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo* $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ *se denota*

$$t^* \mathbf{x} = inf \{t > 0 : \phi_v (t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ*, se supondrá que para cada* $(v, \zeta) \in E$ *existe un* $\epsilon > 0$ *tal que la función* $s \rightarrow \lambda (v, \phi_v (s, \zeta)) \in E$ *es integrable para* $s \in [0, \epsilon)$*. La medida de transición* $Q (A; \mathbf{x})$ *es una función medible de* $\mathbf{x}$ *para cada* $A \in \mathcal{E}$*, definida para* $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ *y es una medida de probabilidad en* $(E, \mathcal{E})$ *para cada* $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ *comenzando en* $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ *se puede construir de la siguiente manera, defínase la función* F *por*

$$F (t) = \left\{ \begin{array}{ll} exp \left(- \int_0^t \lambda (n, \phi_n (s, \mathbf{z})) ds \right), & t < t^* (\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^* (\mathbf{x}) \end{array} \right. \tag{31.124}$$

Sea T_1 *una variable aleatoria tal que* $\mathbb{P} [T_1 > t] = F (t)$*, ahora sea la variable aleatoria* (N, Z) *con distribuición* $Q (\cdot; \phi_n (T_1, \mathbf{z}))$*. La trayectoria de* $(\mathbf{x}_t)$ *para* $t \leq T_1$ *es*[9]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \left\{ \begin{array}{ll} (n, \phi_n (t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{array} \right.$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ *se selecciona el siguiente tiempo de intersalto* $T_2 - T_1$ *lugar del post-salto* $\mathbf{x}_{T_2}$ *de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes* $\mathbf{x}_t$ *con tiempos de salto* $T_1, T_2, \ldots$*. Bajo las condiciones enunciadas para* $\lambda, T_1 > 0$ *y* $T_1 - T_2 > 0$ *para cada* i*, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.*

Supuestos 31.3 (Supuesto 3.1, Davis [14]) *Sea* $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ *el número de saltos en* $[0, t]$*. Entonces*

$$\mathbb{E} [N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{31.125}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E *es un espacio métrico separable y la métrica* d *es compatible con la topología.*

Definición 31.45 *Un espacio topológico* E *es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 31.46 *Un espacio topológico* E *es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 31.47 E *es un espacio de Radón si cada medida finita en* $(E, \mathcal{B} (E))$ *es regular interior o cerrada,* tight.

[9] Revisar página 362, y 364 de Davis [14].

Definición 31.48 *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{31.126}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 31.29 *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

31.1.9. Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.
Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 31.49 *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{10}. \tag{31.127}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[11] (32.2.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{31.129}$$

Definición 31.50 *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 31.7 *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (32.2.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{31.130}$$

La ecuación anterior es la Propiedad Simple de Markov *de X relativa a (P_t).*
En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (32.2.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

31.1.10. Primer Condición de Regularidad

Definición 31.51 *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 31.52 (HD1) *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

[10] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[11]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{31.128}$$

Definición 31.53 *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{31.131}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (32.2.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 31.54 (HD2) *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \to f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 31.55 *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 32.100, de (P_t).*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 32.101, relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 31.10 (Lema 4.2, Dai[10]) *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{31.132}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{31.133}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{31.134}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 31.11 (Lema 4.3, Dai[10]) *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ *es el número total de servicios completados de la clase* l*, si la clase* l *está dando* t *unidades de tiempo de servicio. Sea* $T_l^x(x)$ *el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor* $s(l)$ *gasta en los usuarios de la clase* l *al tiempo* t*. Entonces* $S_l^x(T_l^x(t))$ *es el número total de servicios completados para la clase* l *al tiempo* t*. Una fracción de estos usuarios,* $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$*, se convierte en usuarios de la clase* k*.*

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{31.135}$$

para $k = 1, \ldots, K$*. Para* $i = 1, \ldots, d$*, sea*

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ *es el monto acumulado del tiempo que el servidor* i *ha estado desocupado al tiempo* t*. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor* i *está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación* i*. Entonces, se tiene que*

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{31.136}$$

para $i = 1, \ldots, d$*.*

Hacer

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))',$$
$$I^x(t) = (I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t))'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \tag{31.137}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{31.138}$$

$$T^x(0) = 0, \ \text{y } \overline{T}^x(t) \ \text{ es no decreciente}, \tag{31.139}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \ \text{ es no decreciente} \tag{31.140}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{31.141}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{31.142}$$

donde e *es un vector de unos de dimensión* d*,* C *es la matriz definida por*

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 32.94:

Teorema 31.30 (Teorema 4.1, Dai [10]) *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} \left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{31.143}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} \left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{31.144}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)' M^{-1} \left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{31.145}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{31.146}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{31.147}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{31.148}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{31.149}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{31.150}$$

Definición 31.56 (Definición 4.1, , Dai [10]) *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en 33.1.122 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (33.1.123)-(33.1.128) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 31.31 (Teorema 4.2, Dai[10]) *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \tag{31.151}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 32.2.216-32.2.182 se le llama Modelo de flujo *y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 31.57 (Definición 3.3, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [8].

Lema 31.4 (Lema 3.1, Dai y Meyn [11]) *Si el modelo de flujo definido por 32.2.216-32.2.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 31.10 *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^0\right)$ *un flujo límite de 32.2.197 y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_k^x\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_k^x\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_k^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_k\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^0\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^0\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^K\left[\overline{T}_k\left(t\right)+\overline{T}_k^0\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_k\left(t\right)=\overline{Q}_k\left(0\right)+\alpha_kt-\mu_k\overline{T}_k\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k\left(t\right)=\beta_k$$

para $\overline{Q}_k\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_k^0\overline{T}_k^0\left(t\right)=\mu_j^0\overline{T}_j^0\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_k\dot{\overline{T}}_k\left(t\right)=l_k\mu_k^0\dot{\overline{T}}_k^0\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_k\left(t\right)>0$.

Lema 31.12 (Lema 3.1 [8]) *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 31.32 (Teorema 5.2 [8]) *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 31.33 (Teorema 5.1 [8]) *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α,μ,T,U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$, *para toda* $t\geq t_0$.

Lema 31.13 (Lema 5.2 [20]) *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_1\right]}\right)^r \tag{31.152}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 31.34 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [20]) *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_1\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r\rightarrow\frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$..

Proposición 31.11 (Proposicin 5.1 [11]) *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0. \tag{31.153}$$

Proposición 31.12 (Proposición 5.3 [11]) *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{31.154}$$

Proposición 31.13 (Proposición 5.4 [11]) *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x \left[V(x)\right] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[f(X(s))\, ds\right] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{31.155}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 31.35 (Teorema 5.5 [11]) *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{31.156}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \tag{31.157}$$

Teorema 31.36 (Teorema 6.2[11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \to 0$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x \left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi \left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 31.37 (Teorema 6.3[11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]| = 0}.$$

Proposición 31.14 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{31.158}$$

Lema 31.5 (Lema 5.2, Dai y Meyn [11]) *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{31.159}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 31.38 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{31.160}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 31.39 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{31.161}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q\left(0\right)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 31.40 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_f = 0. \tag{31.162}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right]| = 0.$$

Teorema 31.41 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_X\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{31.163}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 31.42 (Teorema 2.2, Down [15]) *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{31.164}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\} \geq q. \tag{31.165}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- *Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\left\{\xi_k\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,*
- *Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,*
- *Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)\right]$,*
- *la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$,*
- *también se define $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.*

31.1.11. Procesos Fuerte de Markov

En Dai [10] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que
Para establecer que $X = \left\{X\left(t\right), t\geq0\right\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [21].

Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [14]

.

31.1.12. Procesos Harris Recurrentes Positivos

Sea el proceso de Markov $X = \{X(t), t \geq 0\}$ *que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [11] y Meyn y Down [28] hacen ver que este se puede sustituir por*

A3') Para el Proceso de Markov X*, cada subconjunto compacto de* X *es un conjunto pequeño.*

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

31.1.13. Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t *es*

$$X(t) = (Q(t), U(t), V(t)), \tag{31.166}$$

donde $Q(t)$ *es el número de usuarios formados en cada estación.* $U(t)$ *es el tiempo restante antes de que la siguiente clase* k *de usuarios lleguen desde fuera del sistema,* $V(t)$ *es el tiempo restante de servicio para la clase* k *de usuarios que están siendo atendidos. Tanto* $U(t)$ *como* $V(t)$ *se puede asumir que son continuas por la derecha.*
Sea $x = (Q(0), U(0), V(0)) = (q, a, b)$*, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para* $l \in \mathcal{E}$*, donde* $\mathcal{E}$ *es el conjunto de clases de arribos externos, y* $k = 1, \dots, K$ *se define*

$$\begin{aligned} E_l^x(t) &= max\{r : U_l(0) + \xi_l(1) + \cdots + \xi_l(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0, \\ S_k^x(t) &= max\{r : V_k(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0. \end{aligned}$$

Para cada k *y cada* n *se define*

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ *se define como el vector de ruta para el* n*-ésimo usuario de la clase* k *que termina en la estación* $s(k)$*, la* s*-éima componente de* $\phi^k(n)$ *es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase* l *y cero en otro caso, por lo tanto* $\phi^k(n)$ *es un vector* Bernoulli *de dimensión* K *con parámetro* $P_k^{'}$*, donde* P_k *denota el* k*-ésimo renglón de* $P = (P_{kl})$*.*
Se asume que cada para cada k *la sucesión* $\phi^k(n) = \left\{\phi^k(n), n \geq 1\right\}$ *es independiente e idénticamente distribuida y que las* $\phi^1(n), \dots, \phi^K(n)$ *son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.*

Lema 31.14 (Lema 4.2, Dai[10]) *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$*, casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{31.167}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{31.168}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{31.169}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$*.*

Lema 31.15 (Lema 4.3, Dai[10]) *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$*, conforme* $n \rightarrow \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^{+}, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ *es el número total de servicios completados de la clase* l*, si la clase* l *está dando* t *unidades de tiempo de servicio. Sea* $T_l^x(x)$ *el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor* $s(l)$ *gasta en los usuarios de la clase* l *al tiempo* t*. Entonces* $S_l^x(T_l^x(t))$ *es el número total de servicios completados para la clase* l *al tiempo* t*. Una fracción de estos usuarios,* $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$*, se convierte en usuarios de la clase* k*.*

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{31.170}$$

para $k = 1, \ldots, K$*. Para* $i = 1, \ldots, d$*, sea*

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j\in C_i}T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ *es el monto acumulado del tiempo que el servidor* i *ha estado desocupado al tiempo* t*. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor* i *está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación* i*. Entonces, se tiene que*

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x(t)\right)dI_i^x(t) = 0, \tag{31.171}$$

para $i = 1, \ldots, d$*.*

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = \left(S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t))\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K}\Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \tag{31.172}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{31.173}$$

$$T^x(0) = 0, \ y\ \overline{T}^x(t) \ \textit{es no decreciente}, \tag{31.174}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \ \textit{es no decreciente} \tag{31.175}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{31.176}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \textit{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{31.177}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \textit{en otro caso}. \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 32.94:

Teorema 31.43 (Teorema 4.1, Dai [10]) *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{31.178}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \ \textit{u.o.c.} \tag{31.179}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I - P)' M^{-1} \left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{31.180}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{31.181}$$

$$\overline{T}(t) \ \textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{31.182}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \ \textit{es no decreciente}, \tag{31.183}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{31.184}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{31.185}$$

Definición 31.58 (Definición 4.1, , Dai [10]) *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en 33.1.122 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (33.1.123)-(33.1.128) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 31.44 (Teorema 4.2, Dai[10]) *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \tag{31.186}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 31.59 (Definición 3.1, Dai y Meyn [11]) *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$ y $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$*

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}\left(t\right) \tag{31.187}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{31.188}$$

$$\overline{T}_{k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente}, \tag{31.189}$$

$$\overline{I}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{k\in C_{i}}\overline{T}_{k}\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{31.190}$$

$$\overline{I}_{i}\left(\cdot\right) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0 \tag{31.191}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{31.192}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 32.2.216-32.2.182 se le llama Modelo de flujo *y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.*

Si se hace $\left|x\right|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 31.60 (Definición 3.2, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $\left(\overline{A}\left(0\right),\overline{B}\left(0\right)\right)\in\mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 32.2.216-32.2.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=\overline{Q}\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{A}\left(0\right)\right)^{+}-\left(I-P^{'}\right)M\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{B}\left(0\right)\right)^{+} \tag{31.193}$$

Definición 31.61 (Definición 3.3, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_{0} tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$, con $t\geq t_{0}$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [8].

Lema 31.6 (Lema 3.1, Dai y Meyn [11]) *Si el modelo de flujo definido por 32.2.216-32.2.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_{0}>0$ tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$ para cualquier $t\geq t_{0}$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq1$.*

31.1.14. Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad

31.1.15. Teorema 2.1

El resultado principal de Down [15] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 31.45 (Teorema 2.1, Down [15]) *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_{p}, y para cada condición inicial $x\in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\sup\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}, \tag{31.194}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right]\leq\kappa_{r}, \tag{31.195}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]=0. \tag{31.196}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-}c.s. \tag{31.197}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$.

Proposición 31.15 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{31.198}$$

Lema 31.7 (Lema 5.2, Dai y Meyn [11]) *Sea* $\{\zeta\left(k\right):k\in F\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $(0,\infty)$, *y sea* $E\left(t\right)=max\left(n\geq1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. *Si* $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{31.199}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 31.46 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{31.200}$$

para $t>0$ *y* $x\in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 31.47 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{31.201}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 31.48 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con* $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ *se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{31.202}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 31.49 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea* ν *cualquier distribución de probabilidad en* $(X,\mathcal{B}_X)$, *y* π *la distribución estacionaria de* X.

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{31.203}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ *con* $\pi\left(|f|\right)<\infty$, *la ecuación anterior se cumple.*

31.1.16. Teorema 2.2

Teorema 31.50 (Teorema 2.2, Down [15]) *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{31.204}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{31.205}$$

31.1.17. Teorema 2.3

Teorema 31.51 (Teorema 2.3, Down [15]) *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{31.206}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 32.37.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 33.57

31.1.18. Definiciones Básicas

Definición 31.62 *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 31.63 *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 31.64 *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 31.65 *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 31.66 *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 31.67 *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 31.68 *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 31.69 *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 31.70 *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{31.207}$$

Nota 31.8 *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t)=\mathcal{F}_0(t)=\mathcal{F}(X(r), r\leq t),$$

entonces la ecuación (32.2.299) se puede escribir como

$$P\{X(t)\in B|X(r), r\leq s\}=P\{X(t)\in B|X(s)\} \tag{31.208}$$

Teorema 31.52 *Sea $(X_n,\mathcal{F}_n, n=0,1,\ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0,χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m,n=0,1,\ldots, m<n$, que por notación se escribirá como $p(m,n,x,B)\rightarrow p_{mn}(x,B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T:\Omega\rightarrow\{0,1,\ldots,\}$. Supóngase que $T\geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B\in\chi_0$, entonces*

$$P\{X(T)\in B, T<\infty|\mathcal{F}(S)\}=p(S,T,X(s),B) \tag{31.209}$$

en $\{T<\infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 31.16 *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^0\right)$ un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0),\frac{1}{|x|}A_k^x(0),\frac{1}{|x|}B_k^x(0),\frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_k(0),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0)=\overline{T}^0(0)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^K\left[\overline{T}_k(t)+\overline{T}_k^0(t)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_k(t)=\overline{Q}_k(0)+\alpha_k t-\mu_k\overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t)=\beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_k^0\overline{T}_k^0(t)=\mu_j^0\overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_k\dot{\overline{T}}_k(t)=l_k\mu_k^0\dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t)>0$.

Lema 31.16 (Lema 3.1 [8]) *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 31.53 (Teorema 5.2 [8]) *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 31.54 (Teorema 5.1 [8]) *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α,μ,T,U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t)=0$, para toda $t\geq t_0$.*

Lema 31.17 (Lema 5.2 [20]) *Sea $\{\xi(k):k\in\mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t)=max\{n\geq1:\xi(1)+\cdots+\xi(n-1)\leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{31.210}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 31.55 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [20]) *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r} \rightarrow \frac{1}{\mu^{r}}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 31.17 (Proposicin 5.1 [11]) *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{31.211}$$

Proposición 31.18 (Proposición 5.3 [11]) *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_{x}\left[\int_{0}^{\tau_{C}(\delta)}\left(1 + |X\left(t\right)|^{p}\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{31.212}$$

Proposición 31.19 (Proposición 5.4 [11]) *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_{+}$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_{x}\left[\int_{0}^{\tau_{C}(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_{x}\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{31.213}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 31.56 (Teorema 5.5 [11]) *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds \leq k_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{31.214}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds \leq k_{p} \tag{31.215}$$

Teorema 31.57 (Teorema 6.2[11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^{t}\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_{p}}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q_{t}|^{p}\right] = \mathbb{E}_{\pi}\left[|Q_{0}|^{p}\right] < \infty$$

Teorema 31.58 (Teorema 6.3[11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f\left(x\right) = f_{1}\left(x\right)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^{t}(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_{f}=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_{x}[Q_{t}]-\mathbb{E}_{\pi}[Q_{0}]|=0}.$$

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right] = \overline{N} > 0. \tag{31.216}$$

(S2.)

$$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right] \leq \overline{N}, \tag{31.217}$$

para cualquier valor de x.

- *La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right] \geq 0$.*
- *Se define*

$$\delta^{*} := \sum_{j,j+1}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]. \tag{31.218}$$

- *Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.*
- *Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.*
- *Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ y además se define*
- *la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$*
- *también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.*
- *De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).*

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $\left(X(t)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X\left(t\right) = \left(Q\left(t\right), A\left(t\right), H\left(t\right), B\left(t\right), B^{0}\left(t\right), C\left(t\right)\right) \tag{31.219}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \left(\left\{1,2,\ldots,K\right\} \times \left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}^{K}, \tag{31.220}$$

- *$Q(t) = \left(Q_k(t), 1 \leq k \leq K\right)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.*
- *$A(t) = \left(A_k(t), 1 \leq k \leq K\right)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.*
- *$H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.*
- *$B(t)$ es el tiempo de servicio residual.*
- *$B^{0}(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.*
- *$C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.*

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^{0}(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([10])

- *Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.*
- *Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.*
- *Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ y además se define*
- *la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$*
- *también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.*
- *De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).*

31.1.19. Preliminares

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0$

2) $\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}$*para cualquier valor de x.*

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- *Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m} = r_{j,j^{'}}$*
- *La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right] \geq 0$.*
- *Sea $\{p_j\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.*
- *Finalmente, se define*

$$\delta^{*} := \sum_{j,j^{'}} p_j r_{j,j^{'}} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(i)\right]. \tag{31.221}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m, se denota por $B_m(t)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t; $B_m^0(t)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t, finalmente sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^{T} = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{31.222}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^{M} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ *son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_{+}$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{31.223}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx, \ 0 \leq a < b. \tag{31.224}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto A2) para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [11] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición 32.110.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

31.1.20. Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [14], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (32.4), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([14], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [11]

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [36]) en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right) | \mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la σ-algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right)$$

Definición 31.71 *Una medida no cero π en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ es* **invariante** *para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right) = \int_{\mathbf{X}} P^t\left(x, D\right) \pi\left(dx\right)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 31.72 *El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*

$$P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 31.9 *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [19]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama Proceso Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi\left(\cdot\right) = \int_{\mathbf{X}} P_x\left(\cdot\right) \pi\left(dx\right)$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente.

Definición 31.73 *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [10]:

Lema 31.18 (Lema 3.1, Dai[10]) *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{31.225}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris Recurrente Positivo.

Lema 31.19 (Lema 3.1, Dai [10]) *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{|x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 31.59 (Teorema 3.1, Dai[10]) *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{31.226}$$

entonces la ecuación (32.2.358) se cumple para $B = \{|x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.

Nota 31.10 *En Meyn and Tweedie [**?**] muestran que si $P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos A1)-A3), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

31.1.21. Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in X$, sea $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{31.227}$$

*para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.*

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{31.228}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{31.229}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{31.230}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$,

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{31.231}$$

De acuerdo a Dai [10], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (32.2.348)-(32.2.351), se le llama Modelo de Flujo.

Definición 31.74 (Definición 4.1, , Dai [10]) *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en (32.2.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (32.2.348)-(32.2.351) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 32.2.348-32.2.351 se le llama Modelo de flujo *y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *se le denotará por* $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ *sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:*

Teorema 31.60 (Teorema 4.2, Dai[10]) *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \tag{31.232}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ *es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo* $|q| \to \infty$ *mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado* $\overline{Q}^x$ *es solución del siguiente modelo de flujo.*

Definición 31.75 (Definición 3.3, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [8].

Lema 31.8 (Lema 3.1, Dai y Meyn [11]) *Si el modelo de flujo definido por 32.2.348-32.2.351 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 31.61 (Teorema 2.1, Down [15]) *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p*, y para cada condición inicial* $x \in X$

$$limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{31.233}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{31.234}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$*. Donde* π *es la probabilidad invariante para* $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}*:*

$$lim_{t\to\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right] = 0. \tag{31.235}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{31.236}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 31.62 (Teorema 2.3, Down [15]) *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{31.237}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 32.95.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 33.57

Teorema 31.63 *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots, m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{31.238}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{31.239}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{31.240}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{31.241}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.
Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda\left(n, \phi_n(s, \mathbf{z})\right) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{31.242}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[12]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 31.4 (Supuesto 3.1, Davis [14]) *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{31.243}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 31.76 *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 31.77 *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 31.78 *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{31.244}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 31.64 *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 31.79 *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*[13]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B). \tag{31.245}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[14] *(32.2.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si*

$$\mathbb{P}\left\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{31.247}$$

[12] Revisar página 362, y 364 de Davis [14].

[13] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[14]

$$\mathbb{P}\left\{H | \mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H | X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{31.246}$$

Definición 31.80 *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x)=P_t(P_sf)(x),\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 31.11 *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t}=P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (32.2.310) con función de transición homogénea (P_t) *tiene la propiedad característica*

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\}=P_sf(X_t)\ t,s\geq 0,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{31.248}$$

La ecuación anterior es la Propiedad Simple de Markov *de* X *relativa a* (P_t).
En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ *cumple con la propiedad de Markov (32.2.311) relativa a* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *con semigrupo de transición* (P_t).

Definición 31.81 *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t\rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 31.82 (HD1) *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E, *existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}^*$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$, *y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *tal que* $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considérese la colección de variables aleatorias X_t *definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas* $\mathbf{P}^x$ *tales que* $\mathbf{P}^x\{X_0=x\}$, *y bajo cualquier* $\mathbf{P}^x$, X_t *es de Markov con semigrupo* (P_t). $\mathbf{P}^x$ *puede considerarse como la distribución condicional de* $\mathbf{P}$ *dado* $X_0=x$.

Definición 31.83 *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E,\mathcal{E})$. *La colección* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$;

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X, *es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t,s\geq 0$,

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s}\ y\ X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{31.249}$$

iii) Para cualquier $x\in E$,$\mathbf{P}^x\{X_0=x\}=1$, *y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (32.2.311) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.

Definición 31.84 (HD2) *Para cualquier* $\alpha>0$ *y cualquier* $f\in S^\alpha$, *el proceso* $t\rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 31.85 *Un sistema* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 32.100, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 32.101, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 31.20 (Lema 4.2, Dai[10]) *Sea* $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ *con* $|x_n|\rightarrow\infty$, *conforme* $n\rightarrow\infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0)=\overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n\rightarrow\infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t])\rightarrow P_k^{'}t,\ u.o.c., \tag{31.250}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow\alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{31.251}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow\mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{31.252}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$.

Lema 31.21 (Lema 4.3, Dai[10]) *Sea* $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ *con* $|x_n|\rightarrow\infty$, *conforme* $n\rightarrow\infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}_k.$$

a) Conforme $n\rightarrow\infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^+.$$

b) Para cada $t\geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ *es el número total de servicios completados de la clase* l, *si la clase* l *está dando* t *unidades de tiempo de servicio. Sea* $T_l^x\left(x\right)$ *el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor* $s\left(l\right)$ *gasta en los usuarios de la clase* l *al tiempo* t. *Entonces* $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ *es el número total de servicios completados para la clase* l *al tiempo* t. *Una fracción de estos usuarios,* $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, *se convierte en usuarios de la clase* k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right)=_k^x\left(0\right)+E_k^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{31.253}$$

para $k=1,\ldots,K$. *Para* $i=1,\ldots,d$, *sea*

$$I_i^x\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ *es el monto acumulado del tiempo que el servidor* i *ha estado desocupado al tiempo* t. *Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor* i *está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación* i. *Entonces, se tiene que*

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{31.254}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right)=\left(T_1^x\left(t\right),\ldots,T_K^x\left(t\right)\right)',$$
$$I^x\left(t\right)=\left(I_1^x\left(t\right),\ldots,I_K^x\left(t\right)\right)'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = \left(S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t))\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x(T_l^x(t))\right) - S^x(T^x(t)), \tag{31.255}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{31.256}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{31.257}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{31.258}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{31.259}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{31.260}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 32.94:

Teorema 31.65 (Teorema 4.1, Dai [10]) *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{31.261}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{31.262}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I - P)' M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{31.263}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{31.264}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{31.265}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente}, \tag{31.266}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{31.267}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{31.268}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 31.20 *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de 32.2.197 y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) *Los vectores de tiempo ocupado* $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) *Para todo* $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K} \left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t) \right] = t$$

iii) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) *Para todo* k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 31.22 (Lema 3.1 [8]) *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 31.66 (Teorema 5.1 [8]) *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$, *para toda* $t \geq t_0$.

Lema 31.23 (Lema 5.2 [20]) *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max \{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{31.269}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) *Para cualquier* $t > 0$, $sup_{t\geq\delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) *Las variables aleatorias* $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 31.67 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [20]) *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 31.21 (Proposición 5.1 [11]) *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{31.270}$$

Proposición 31.22 (Proposición 5.3 [11]) *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p) \, dt\right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{31.271}$$

Proposición 31.23 (Proposición 5.4 [11]) *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{31.272}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 31.68 (Teorema 5.5 [11]) *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{31.273}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \tag{31.274}$$

Teorema 31.69 (Teorema 6.2 [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\| P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \|_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x[|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 31.70 (Teorema 6.3 [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]\right| = 0.$$

Proposición 31.24 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{31.275}$$

Lema 31.9 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [11]) *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{31.276}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 31.71 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{31.277}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 31.72 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{31.278}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[\left|Q\left(t\right)\right|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[\left|Q\left(0\right)\right|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 31.73 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{31.279}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]\right|=0.$$

Teorema 31.74 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_{X}\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{31.280}$$

$\mathbb{P}$*-c.s.*

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(\left|f\right|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 31.75 (Teorema 2.2, Down [15]) *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$\left|Q\left(T\right)\right|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ T\geq0, \tag{31.281}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $\left|Q\left(0\right)\right|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $\left|x\right|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{31.282}$$

Definición 31.86 *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $\left(X,\mathcal{F}\right)$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A\in\mathcal{F}$.*

Definición 31.87 *Sea $\left(X,\mathcal{F},\mu\right)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X=\bigcup_{n\geq1}X_{n}$ con $X_{n}\in\mathcal{F}$ y $\mu\left(X_{n}\right)<\infty$.*

Definición 31.88 *Sea X el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $\left(a,b\right)\in\mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 31.89 *Una función $f:X\rightarrow\mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\left\{x\in X:f\left(x\right)>\alpha\right\}$$

pertenece a $\mathcal{F}$. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}\left(\left(\alpha,\infty\right)\right)=\left\{x\in X:f\left(x\right)>\alpha\right\}\in\mathcal{F}.$$

Definición 31.90 *Sean $\left(\Omega_{i},\mathcal{F}_{i}\right)$, $i=1,2,\ldots,$ espacios medibles y $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_{i}$ el conjunto de todas las sucesiones $\left(\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\right)$ tales que $\omega_{i}\in\Omega_{i}$, $i=1,2,\ldots,$. Si $B^{n}\subset\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_{i}$, definimos $B_{n}=\left\{\omega\in\Omega:\left(\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\omega_{n}\right)\in B^{n}\right\}$. Al conjunto B_{n} se le llama* cilindro *con base B^{n}, el cilindro es llamado medible si $B^{n}\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_{i}$.*

Definición 31.91 *[TSP, Ash [?]] Sea $X\left(t\right),t\geq0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_{t}$, para $t\geq0$, si para $s<t$ implica que $\mathcal{F}_{s}\subset\mathcal{F}_{t}$, y $X\left(t\right)$ es $\mathcal{F}_{t}$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_{t}$ entonces se toma $\mathcal{F}_{t}$ como $\mathcal{F}\left(X\left(s\right),s\leq t\right)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X\left(s\right)$, con $s\leq t$ sea Borel medible.*

Definición 31.92 *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 31.93 *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 31.94 *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{31.283}$$

Nota 31.12 *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (32.2.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{31.284}$$

31.1.22. Procesos de Estados de Markov

Teorema 31.76 *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots, m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{31.285}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{\bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{31.286}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{31.287}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{31.288}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf\left\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \to \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{31.289}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 31.5 (Supuesto 3.1, Davis [14]) *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{31.290}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[15] se cumple para cualquier tiempo de paro.

31.1.23. Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 31.95 *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{31.291}$$

Definición 31.96 *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 31.77 *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

31.1.24. Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[16], $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

[15] Revisar página 362, y 364 de Davis [14].

[16] qué se quiere decir con el término: más general?

Definición 31.97 *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ indexada por pares $s,t\in I$, con $s\leq t$ es una función de transición en $(E,\mathcal{E})$, si para todo $r\leq s<t$ en I y todo $x\in E$, $B\in\mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x,B)=\int_E P_{r,s}(x,dy)\,P_{s,t}(y,B)\,^{17}. \tag{31.292}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E,\mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[18] *(32.2.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si*

$$\mathbb{P}\{f(X_t)\,|\mathcal{G}_s\}=P_{s,t}f(X_t)\;\; s\leq t\in I,\;\; f\in b\mathcal{E}. \tag{31.294}$$

Definición 31.98 *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x)=P_t(P_sf)(x)\,,\;\; t,s\geq 0,\;\; x\in E\;\; f\in b\mathcal{E}^{19}.$$

Nota 31.13 *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t}=P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (32.2.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})\,|\mathcal{G}_t\}=P_sf(X_t)\;\; t,s\geq 0,\;\; f\in b\mathcal{E}. \tag{31.295}$$

La ecuación anterior es la Propiedad Simple de Markov *de X relativa a (P_t).*
En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (32.2.311) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

31.1.25. Primer Condición de Regularidad

Definición 31.99 *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t\rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 31.100 (HD1) *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ tal que $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0=x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 31.101 *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E,\mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) *$(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) *$(\theta_t)_{t\geq 0}$ es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t,s\geq 0$,*

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s}\;\; y\; X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{31.296}$$

iii) *Para cualquier $x\in E,\mathbf{P}^x\{X_0=x\}=1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (32.2.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.*

Definición 31.102 (HD2) *Para cualquier $\alpha>0$ y cualquier $f\in S^\alpha$, el proceso $t\rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

[17]Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[18]
$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\}=\mathbb{P}\{H|X_t\}\;\; H\in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{31.293}$$

[19]Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

Definición 31.103 *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 32.100, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 32.101, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

31.1.26. Construcción del Modelo de Flujo

Lema 31.24 (Lema 4.2, Dai[10]) *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'} t, \text{ u.o.c.,} \tag{31.297}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{31.298}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{31.299}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de t y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 31.25 (Lema 4.3, Dai[10]) *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x(t)$ *el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea* $T_l^x(x)$ *el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor* $s(l)$ *gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces* $S_l^x(T_l^x(t))$ *es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios,* $\Phi_k^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, *se convierte en usuarios de la clase k.*

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x \left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x \left(T_k^x(t)\right) \tag{31.300}$$

para $k = 1, \ldots, K$. *Para* $i = 1, \ldots, d$, *sea*

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ *es el monto acumulado del tiempo que el servidor* i *ha estado desocupado al tiempo* t. *Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor* i *está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación* i. *Entonces, se tiene que*

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{31.301}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x \left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{31.302}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{31.303}$$

$$T^x(0) = 0, \ \text{y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{31.304}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{31.305}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{31.306}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{31.307}$$

donde e *es un vector de unos de dimensión* d, C *es la matriz definida por*

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 32.94:

Teorema 31.78 (Teorema 4.1, Dai [10]) *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales* ω *y cualquier sucesión de estados iniciales* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, *con* $|x_n| \to \infty$, *existe una subsucesión* $\{x_{n_j}\}$ *con* $|x_{n_j}| \to \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{31.308}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \ \text{u.o.c.} \tag{31.309}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I - P)' M^{-1} \left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{31.310}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{31.311}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{31.312}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{31.313}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{31.314}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{31.315}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 31.25 *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ *un flujo límite de 32.2.197 y suponga que cuando* $x \rightarrow \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K} \left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Teorema 31.79 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [20]) *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$*. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$*, cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$*..*

Proposición 31.26 (Proposición 5.3 [11]) *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{31.316}$$

Proposición 31.27 (Proposición 5.4 [11]) *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$*, y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) dt\right]$$

para $x \in X$*. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s)) ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{31.317}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

31.1.27. Estabilidad

Definición 31.104 (Definición 3.2, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 32.2.216-32.2.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^{+} - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^{+} \tag{31.318}$$

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 31.105 (Definición 3.1, Dai y Meyn [11]) *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk} \mu_l \overline{T}_l(t) \tag{31.319}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{31.320}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{31.321}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{31.322}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \, dI_i^x(t) = 0 \tag{31.323}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{31.324}$$

Lema 31.26 (Lema 3.1 [8]) *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 31.80 (Teorema 5.1 [8]) *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$*, para toda* $t \geq t_0$.

Proposición 31.28 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0 \tag{31.325}$$

Lema 31.10 (Lema 5.2, Dai y Meyn [11]) *Sea* $\{\zeta(k) : k \in F\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $(0, \infty)$*, y sea* $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. *Si* $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$*, entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^{r} \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^{r}. \tag{31.326}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^{r} \right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^{r} : t \geq 1 \right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 31.81 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p \right] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{31.327}$$

para $t > 0$ *y* $x \in X$*. En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p \right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 31.82 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{31.328}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 31.83 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{31.329}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 31.84 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_{X}\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{31.330}$$

$\mathbb{P}$*-c.s.*

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 31.85 (Teorema 2.2, Down [15]) *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$|Q\left(T\right)|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ T\geq0, \tag{31.331}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{31.332}$$

Definición 31.106 *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $\left(X,\mathcal{F}\right)$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A\in\mathcal{F}$.*

Definición 31.107 *Sea $\left(X,\mathcal{F},\mu\right)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X=\bigcup_{n\geq1}X_{n}$ con $X_{n}\in\mathcal{F}$ y $\mu\left(X_{n}\right)<\infty$.*

Definición 31.108 *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $\left(a,b\right)\in\mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 31.109 *Una función $f:X\rightarrow\mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\left\{x\in X:f\left(x\right)>\alpha\right\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}\left(\left(\alpha,\infty\right)\right)=\left\{x\in X:f\left(x\right)>\alpha\right\}\in\mathcal{F}.$$

Definición 31.110 *Sean $\left(\Omega_{i},\mathcal{F}_{i}\right)$, $i=1,2,\ldots,$ espacios medibles y $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_{i}$ el conjunto de todas las sucesiones $\left(\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\right)$ tales que $\omega_{i}\in\Omega_{i}$, $i=1,2,\ldots,$. Si $B^{n}\subset\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_{i}$, definimos $B_{n}=\left\{\omega\in\Omega:\left(\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\omega_{n}\right)\in B^{n}\right\}$. Al conjunto B_{n} se le llama* cilindro *con base B^{n}, el cilindro es llamado medible si $B^{n}\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_{i}$.*

Definición 31.111 *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X\left(t\right),t\geq0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_{t}$, para $t\geq0$, si para $s<t$ implica que $\mathcal{F}_{s}\subset\mathcal{F}_{t}$, y $X\left(t\right)$ es $\mathcal{F}_{t}$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_{t}$ entonces se toma $\mathcal{F}_{t}$ como $\mathcal{F}\left(X\left(s\right),s\leq t\right)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X\left(s\right)$, con $s\leq t$ sea Borel medible.*

Definición 31.112 *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 31.113 *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 31.114 *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{31.333}$$

Nota 31.14 *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (32.2.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{31.334}$$

Teorema 31.86 *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots,\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{31.335}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{31.336}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{31.337}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{31.338}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.
Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v,\zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v,\phi_v(s,\zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0,\epsilon)$. La medida de transición $Q(A;\mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E,\mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n,\mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n,\phi_n(s,\mathbf{z}))\,ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{31.339}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N,Z) con distribuición $Q(\cdot;\phi_n(T_1,\mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[20]

$$\mathbf{x}_t = (v_t,\zeta_t) = \begin{cases} (n,\phi_n(t,\mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N,\mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 31.6 (Supuesto 3.1, Davis [14]) *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0,t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{31.340}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 31.115 *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 31.116 *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 31.117 *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 31.118 *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{31.341}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 31.87 *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

31.1.28. Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X,\mathcal{G},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 31.119 *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ indexada por pares $s,t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E,\mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x,B) = \int_E P_{r,s}(x,dy)\,P_{s,t}(y,B)\,^{21}. \tag{31.342}$$

[20] Revisar página 362, y 364 de Davis [14].
[21] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E,\mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[22] *(32.2.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si*

$$\mathbb{P}\{f(X_t)|\mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{31.344}$$

Definición 31.120 *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_sf)(x), \;\; t,s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 31.15 *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (32.2.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_sf(X_t) \;\; t,s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{31.345}$$

La ecuación anterior es la Propiedad Simple de Markov *de X relativa a (P_t).*
En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (32.2.311) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

31.1.29. Primer Condición de Regularidad

Definición 31.121 *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t\rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 31.122 (HD1) *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ tal que $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0=x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 31.123 *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E,\mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) *$(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) *$(\theta_t)_{t\geq 0}$ es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t,s\geq 0$,*

$$\theta_t\circ\theta_s = \theta_{t+s} \;\; y \;\; X_t\circ\theta_t = X_{t+s}; \tag{31.346}$$

iii) *Para cualquier $x\in E$,$\mathbf{P}^x\{X_0=x\}=1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (32.2.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.*

Definición 31.124 (HD2) *Para cualquier $\alpha>0$ y cualquier $f\in S^\alpha$, el proceso $t\rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 31.125 *Un sistema $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) *$\mathbf{X}$ es una realización continua por la derecha, 32.100, de (P_t).*

ii) *$\mathbf{X}$ satisface la condicion HD2, 32.101, relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) *$\mathcal{G}_t$ es aumentado y continuo por la derecha.*

[22]
$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H|X_t\} \;\; H\in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{31.343}$$

Lema 31.27 (Lema 4.2, Dai[10]) *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{31.347}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{31.348}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{31.349}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 31.28 (Lema 4.3, Dai[10]) *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{31.350}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{31.351}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = \left(S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t))\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x(T_l^x(t))\right) - S^x(T^x(t)), \tag{31.352}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{31.353}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{31.354}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{31.355}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{31.356}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{31.357}$$

donde e *es un vector de unos de dimensión* d, C *es la matriz definida por*

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 32.94:

Teorema 31.88 (Teorema 4.1, Dai [10]) *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales* ω *y cualquier sucesión de estados iniciales* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, *con* $|x_n| \to \infty$, *existe una subsucesión* $\{x_{n_j}\}$ *con* $|x_{n_j}| \to \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{31.358}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{31.359}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I-P)' M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{31.360}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{31.361}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{31.362}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente}, \tag{31.363}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{31.364}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{31.365}$$

Definición 31.126 (Definición 4.1, , Dai [10]) *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en 33.1.122 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (33.1.123)-(33.1.128) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$*.*

Teorema 31.89 (Teorema 4.2, Dai[10]) *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{31.366}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ *es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo* $|q| \rightarrow \infty$ *mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado* $\overline{Q}^{x}$ *es solución del siguiente modelo de flujo.*

Al conjunto de ecuaciones dadas en 32.2.216-32.2.182 se le llama Modelo de flujo *y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *se le denotará por* $\mathcal{Q}$*.*

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ *sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:*

Definición 31.127 (Definición 3.3, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$*.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [8].

Lema 31.11 (Lema 3.1, Dai y Meyn [11]) *Si el modelo de flujo definido por 32.2.216-32.2.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$*.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 31.29 *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de 32.2.197 y suponga que cuando* $x \rightarrow \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right) = \overline{T}^{0}\left(0\right) = 0$*.*

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right) + \overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right) = \overline{Q}_{k}\left(0\right) + \alpha_{k}t - \mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right) = \beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right) = 0$*.*

v) Para todo k, j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right) = \mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right) = l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right) > 0$*.*

Lema 31.29 (Lema 3.1 [8]) *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 31.90 (Teorema 5.2 [8]) *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 31.91 (Teorema 5.1 [8]) *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 31.30 (Lema 5.2 [20]) *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{31.367}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 31.92 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [20]) *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 31.30 (Proposicin 5.1 [11]) *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{31.368}$$

Proposición 31.31 (Proposición 5.3 [11]) *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{31.369}$$

Proposición 31.32 (Proposición 5.4 [11]) *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{31.370}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 31.93 (Teorema 5.5 [11]) *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{31.371}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p \tag{31.372}$$

Teorema 31.94 (Teorema 6.2[11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t\rightarrow\infty$ y $x\in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right]<\infty$$

Teorema 31.95 (Teorema 6.3[11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x)=f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x\in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 31.33 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right]=0 \tag{31.373}$$

Lema 31.12 (Lema 5.2, Dai y Meyn [11]) *Sea $\{\zeta(k):k\in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t)=max\left(n\geq 1:\zeta(1)+\cdots+\zeta(n-1)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{31.374}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r:t\geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 31.96 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{31.375}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 31.97 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{31.376}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 31.98 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x)=f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_f=0. \tag{31.377}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 31.99 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right) ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{31.378}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 31.100 (Teorema 2.2, Down [15]) *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{31.379}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{31.380}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- *Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\left\{\xi_k\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,*
- *Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,*
- *Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)\right]$,*
- *la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$,*
- *también se define $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.*

31.1.30. Procesos de Estados Markoviano para el Sistema

31.1.31. Procesos Fuerte de Markov

En Dai [10] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que
Para establecer que $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [21].

Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [14]

.

31.1.32. Procesos Harris Recurrentes Positivos

Sea el proceso de Markov $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [11] y Meyn y Down [28] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

31.1.33. Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X(t) = (Q(t), U(t), V(t)), \tag{31.381}$$

donde $Q(t)$ *es el número de usuarios formados en cada estación.* $U(t)$ *es el tiempo restante antes de que la siguiente clase* k *de usuarios lleguen desde fuera del sistema,* $V(t)$ *es el tiempo restante de servicio para la clase* k *de usuarios que están siendo atendidos. Tanto* $U(t)$ *como* $V(t)$ *se puede asumir que son continuas por la derecha.*
Sea $x = (Q(0), U(0), V(0)) = (q, a, b)$*, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para* $l \in \mathcal{E}$*, donde* $\mathcal{E}$ *es el conjunto de clases de arribos externos, y* $k = 1, \dots, K$ *se define*

$$\begin{aligned} E_l^x(t) &= max\{r : U_l(0) + \xi_l(1) + \cdots + \xi_l(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0, \\ S_k^x(t) &= max\{r : V_k(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0. \end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ *se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase* k *que termina en la estación* $s(k)$*, la s-éima componente de* $\phi^k(n)$ *es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase* l *y cero en otro caso, por lo tanto* $\phi^k(n)$ *es un vector* Bernoulli *de dimensión* K *con parámetro* $P_k^{'}$*, donde* P_k *denota el k-ésimo renglón de* $P = (P_{kl})$.
Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \left\{\phi^k(n), n \geq 1\right\}$ *es independiente e idénticamente distribuida y que las* $\phi^1(n), \dots, \phi^K(n)$ *son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.*

Lema 31.31 (Lema 4.2, Dai[10]) *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$*, casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{31.382}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{31.383}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{31.384}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 31.32 (Lema 4.3, Dai[10]) *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^+,\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^+.$$

b) Para cada $t\geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t)=_k^x(0)+E_k^x(t)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right)-S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{31.385}$$

para $k=1,\dots,K$. Para $i=1,\dots,d$, sea

$$I_i^x(t)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x(t)\right)dI_i^x(t)=0, \tag{31.386}$$

para $i=1,\dots,d$.

Hacer

$$T^x(t)=\left(T_1^x(t),\dots,T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t)=\left(I_1^x(t),\dots,I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right),\dots,S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t)=Q^x(0)+E^x(t)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right)-S^x\left(T^x(t)\right), \tag{31.387}$$

$$Q^x(t)\geq 0, \tag{31.388}$$

$$T^x(0)=0,\ y\ \overline{T}^x(t)\ \ es\ no\ decreciente, \tag{31.389}$$

$$I^x(t)=et-CT^x(t)\ \ es\ no\ decreciente \tag{31.390}$$

$$\int_0^{\infty} \left(CQ^x\left(t\right)\right) dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{31.391}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x\left(\cdot\right), \overline{T}^x\left(\cdot\right)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{31.392}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & S\left(k\right) = i, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{array} \right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 32.94:

Teorema 31.101 (Teorema 4.1, Dai [10]) *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right), U^{x_{n_j}}\left(0\right), V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}\left(0\right), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{31.393}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right) \; u.o.c. \tag{31.394}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right) = Q\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - \left(I - P\right)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{31.395}$$

$$\overline{Q}\left(t\right) \geq 0, \tag{31.396}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{31.397}$$

$$\overline{I}\left(t\right) = et - C\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente,} \tag{31.398}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}\left(t\right)\right) d\overline{I}\left(t\right) = 0, \tag{31.399}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{31.400}$$

Definición 31.128 (Definición 4.1, , Dai [10]) *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ en 33.1.122 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (33.1.123)-(33.1.128) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.*

Teorema 31.102 (Teorema 4.2, Dai[10]) *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x\left(t\right) = \frac{1}{|x|} Q^x\left(|x|t\right) \tag{31.401}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 31.129 (Definición 3.1, Dai y Meyn [11]) *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}\left(t\right) \tag{31.402}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{31.403}$$

$$\overline{T}_{k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente,} \tag{31.404}$$

$$\overline{I}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{k\in C_{i}}\overline{T}_{k}\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{31.405}$$

$$\overline{I}_{i}\left(\cdot\right) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0 \tag{31.406}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{31.407}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 32.2.216-32.2.182 se le llama Modelo de flujo *y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *se le denotará por* $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ *sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:*

Definición 31.130 (Definición 3.2, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}\left(0\right),\overline{B}\left(0\right)\right)\in\mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 32.2.216-32.2.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=\overline{Q}\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{A}\left(0\right)\right)^{+}-\left(I-P^{'}\right)M\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{B}\left(0\right)\right)^{+} \tag{31.408}$$

Definición 31.131 (Definición 3.3, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$, *con* $t\geq t_{0}$, *para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [8].

Lema 31.13 (Lema 3.1, Dai y Meyn [11]) *Si el modelo de flujo definido por 32.2.216-32.2.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_{0}>0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$ *para cualquier* $t\geq t_{0}$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq 1$.

31.1.34. Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad

31.1.35. Teorema 2.1

El resultado principal de Down [15] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 31.103 (Teorema 2.1, Down [15]) *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_{p}, *y para cada condición inicial* $x\in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\sup\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}, \tag{31.409}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right]\leq\kappa_{r}, \tag{31.410}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$. *Donde* π *es la probabilidad invariante para* $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]=0. \tag{31.411}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-}c.s. \tag{31.412}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$.

Proposición 31.34 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{31.413}$$

Lema 31.14 (Lema 5.2, Dai y Meyn [11]) *Sea* $\{\zeta\left(k\right):k\in F\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $(0,\infty)$, *y sea* $E\left(t\right)=max\left(n\geq1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. *Si* $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{31.414}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 31.104 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{31.415}$$

para $t>0$ *y* $x\in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 31.105 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{31.416}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 31.106 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con* $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ *se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{31.417}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 31.107 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea* ν *cualquier distribución de probabilidad en* $(X,\mathcal{B}_X)$, *y* π *la distribución estacionaria de* X.

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{31.418}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ *con* $\pi\left(|f|\right)<\infty$, *la ecuación anterior se cumple.*

31.1.36. Teorema 2.2

Teorema 31.108 (Teorema 2.2, Down [15]) *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{31.419}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{31.420}$$

31.1.37. Teorema 2.3

Teorema 31.109 (Teorema 2.3, Down [15]) *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{31.421}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 32.37.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 33.57

31.1.38. Definiciones Básicas

Definición 31.132 *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X,\mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A\in\mathcal{F}$.*

Definición 31.133 *Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X=\bigcup_{n\geq1}X_n$ con $X_n\in\mathcal{F}$ y $\mu(X_n)<\infty$.*

Definición 31.134 *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b)\in\mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 31.135 *Una función $f:X\rightarrow\mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x\in X:f(x)>\alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha,\infty))=\{x\in X:f(x)>\alpha\}\in\mathcal{F}.$$

Definición 31.136 *Sean $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$, $i=1,2,\ldots,$ espacios medibles y $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1,\omega_2,\ldots,)$ tales que $\omega_i\in\Omega_i$, $i=1,2,\ldots,$. Si $B^n\subset\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$, definimos $B_n=\{\omega\in\Omega:(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_i$.*

Definición 31.137 *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t),t\geq0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t\geq0$, si para $s<t$ implica que $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s),s\leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s\leq t$ sea Borel medible.*

Definición 31.138 *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t),t\geq0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s)\subset\mathcal{F}(t)$ para $s\leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T:\Omega\rightarrow[0,\infty]$ tal que $\{T\leq t\}\in\mathcal{F}(t)$ para cada $t\geq0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t),t\geq0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t)=\mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 31.139 *Sea $X(t),t\geq0$ proceso estocástico, con (S,χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s,t\in I$, I conjunto de índices, $s<t$, se tiene que $\mathcal{F}(s)\subset\mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 31.140 *Sea $X(t),t\geq0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t),\mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B\in\chi$, y $s,t\in I$, $s<t$ se cumple que*

$$P\{X(t)\in B|\mathcal{F}(s)\}=P\{X(t)\in B|X(s)\}. \tag{31.422}$$

Nota 31.16 *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t)=\mathcal{F}_0(t)=\mathcal{F}(X(r),r\leq t),$$

entonces la ecuación (32.2.299) se puede escribir como

$$P\{X(t)\in B|X(r),r\leq s\}=P\{X(t)\in B|X(s)\} \tag{31.423}$$

Teorema 31.110 *Sea $(X_n,\mathcal{F}_n,n=0,1,\ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0,χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m,n=0,1,\ldots,$ $m<n$, que por notación se escribirá como $p(m,n,x,B)\rightarrow p_{mn}(x,B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T:\Omega\rightarrow\{0,1,\ldots,\}$. Supóngase que $T\geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B\in\chi_0$, entonces*

$$P\{X(T)\in B,T<\infty|\mathcal{F}(S)\}=p(S,T,X(s),B) \tag{31.424}$$

en $\{T<\infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 31.35 *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 31.33 (Lema 3.1 [8]) *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 31.111 (Teorema 5.2 [8]) *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 31.112 (Teorema 5.1 [8]) *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* (α,μ,T,U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$*, para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 31.34 (Lema 5.2 [20]) *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$*, y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$*, entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r} \tag{31.425}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 31.113 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [20]) *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$*. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r}\rightarrow\frac{1}{\mu^{r}}$*, cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$*..*

Proposición 31.36 (Proposicin 5.1 [11]) *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_{0}>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0. \tag{31.426}$$

Proposición 31.37 (Proposición 5.3 [11]) *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{31.427}$$

Proposición 31.38 (Proposición 5.4 [11]) *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{31.428}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 31.114 (Teorema 5.5 [11]) *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{31.429}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$Limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \tag{31.430}$$

Teorema 31.115 (Teorema 6.2[11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \to 0$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 31.116 (Teorema 6.3[11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

31.1.39. Proceso de Estados Markoviano para el Sistema

Sean $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ el tiempo residual de arribos a la cola k, para cada servidor m, sea $H_m(t)$ par ordenado que consiste en la cola que está siendo atendida y la política de servicio que se está utilizando. $B_m(t)$ los tiempos de servicio residuales, $B_m^0(t)$ el tiempo residual de traslado, $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H_m(t)$.

El proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{31.431}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1,\ldots,\xi_K,\eta_1,\ldots,\eta_K$ *son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) *Para algún entero* $p\geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l\left(1\right)^{p+1}\right]<\infty \text{ para } l\in\mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right]<\infty \text{ para } k=1,\ldots,K.$$

donde $\mathcal{A}$ *es la clase de posibles arribos.*

A3) *Para* $k=1,2,\ldots,K$ *existe una función positiva* $q_k\left(x\right)$ *definida en* $\mathbb{R}_+$*, y un entero* j_k*, tal que*

$$P\left(\xi_k\left(1\right)\geq x\right)>0,\text{ para todo } x>0 \tag{31.432}$$
$$P\left(\xi_k\left(1\right)+\ldots\xi_k\left(j_k\right)\in dx\right)\geq q_k\left(x\right)dx0 \text{ y} \tag{31.433}$$
$$\int_0^{\infty}q_k\left(x\right)dx>0 \tag{31.434}$$

31.1.40. Procesos Fuerte de Markov

En Dai [10] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X *es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que*

$$\left(\left(\Omega,\mathcal{F}\right),\mathcal{F}_t,X\left(t\right),\theta_t,P_x\right)$$

es un proceso de Borel Derecho, Sharpe [36], en el espacio de estados medible $\left(X,\mathcal{B}_X\right)$*.*
Se harán las siguientes consideraciones: E *es un espacio métrico separable.*

Definición 31.141 *Un espacio topológico* E *es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 31.142 *Un espacio topológico* E *es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 31.143 E *es un espacio de Radón si cada medida finita en* $\left(E,\mathcal{B}\left(E\right)\right)$ *es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 31.144 *Una medida finita,* λ *en la* σ*-álgebra de Borel de un espacio metrizable* E *se dice cerrada si*

$$\lambda\left(E\right)=sup\left\{\lambda\left(K\right):K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{31.435}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 31.117 *Sea* E *espacio separable metrizable. Entonces* E *es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en* $\left(E,\mathcal{B}\left(E\right)\right)$ *es cerrada.*

31.1.41. Propiedades de Markov

Sea E *espacio de estados, tal que* E *es un espacio de Radón,* $\mathcal{B}\left(E\right)$ σ*-álgebra de Borel en* E*, que se denotará por* $\mathcal{E}$*.*
Sea $\left(X,\mathcal{G},\mathbb{P}\right)$ *espacio de probabilidad,* $I\subset\mathbb{R}$ *conjunto de índices. Sea* $\mathcal{F}_{\leq t}$ *la* σ*-álgebra natural definida como* $\sigma\left\{f\left(X_r\right):r\in I,r\leq t,f\in\mathcal{E}\right\}$*. Se considerará una* σ*-álgebra más general,* $\left(\mathcal{G}_t\right)$ *tal que* $\left(X_t\right)$ *sea* $\mathcal{E}$*-adaptado.*

Definición 31.145 *Una familia* $\left(P_{s,t}\right)$ *de kernels de Markov en* $\left(E,\mathcal{E}\right)$ *indexada por pares* $s,t\in I$*, con* $s\leq t$ *es una función de transición en* $\left(E,\mathcal{E}\right)$*, si para todo* $r\leq s<t$ *en* I *y todo* $x\in E$*,* $B\in\mathcal{E}$

$$P_{r,t}\left(x,B\right)=\int_E P_{r,s}\left(x,dy\right)P_{s,t}\left(y,B\right)^{23}. \tag{31.436}$$

[23] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov [24] *(32.2.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si*

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{31.438}$$

Definición 31.146 *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t (P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 31.17 *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (32.2.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{31.439}$$

La ecuación anterior es la Propiedad Simple de Markov *de X relativa a (P_t).*
En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (32.2.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

31.1.42. Primer Condición de Regularidad

Definición 31.147 *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 31.148 (HD1) *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 31.149 *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) *$(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) *$(\theta_t)_{t \geq 0}$ es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \;\; y \;\; X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{31.440}$$

iii) *Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t \in I}$ tiene la propiedad de Markov (32.2.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.*

Definición 31.150 (HD2) *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 31.151 *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) *$\mathbf{X}$ es una realización continua por la derecha, 32.100, de (P_t).*

ii) *$\mathbf{X}$ satisface la condicion HD2, 32.101, relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) *$\mathcal{G}_t$ es aumentado y continuo por la derecha.*

[24]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{31.437}$$

Definición 31.152 *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X,\mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 31.153 *Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 31.154 *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 31.155 *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha,\infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 31.156 *Sean $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$, $i = 1,2,\ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1,\omega_2,\ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1,2,\ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 31.157 *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 31.158 *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0,\infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 31.159 *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S,χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s,t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 31.160 *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s,t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B|\mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B|X(s)\}. \tag{31.441}$$

Nota 31.18 *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (32.2.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B|X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B|X(s)\} \tag{31.442}$$

Teorema 31.118 *Sea $(X_n,\mathcal{F}_n, n = 0,1,\ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0,χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m,n = 0,1,\ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m,n,x,B) \rightarrow p_{mn}(x,B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0,1,\ldots,\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty|\mathcal{F}(S)\} = p(S,T,X(s),B) \tag{31.443}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v\in K} M_v = \{(v,\zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v\in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E,\mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t,\zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) *Los campos vectoriales* $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) *Una función medible* $\lambda : E \to \mathbb{R}_+$.

iii) *Una medida de transición* $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \to [0,1]$ *donde*

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{31.444}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{31.445}$$

∂M_v *denota la frontera de* M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ *se supone tal que para cada* $\mathbf{z} \in M_v$ *existe una única curva integral* $\phi_v(t, \zeta)$ *que satisface la ecuación*

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{31.446}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, *para cualquier función suave* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *y* $\mathcal{H}$ *denota el operador diferencial de primer orden, con* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ *y* $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. *Además se supone que* $\mathcal{H}_v$ *es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo* $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ *se denota*

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, *se supondrá que para cada* $(v, \zeta) \in E$ *existe un* $\epsilon > 0$ *tal que la función* $s \to \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ *es integrable para* $s \in [0, \epsilon)$. *La medida de transición* $Q(A; \mathbf{x})$ *es una función medible de* $\mathbf{x}$ *para cada* $A \in \mathcal{E}$, *definida para* $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ *y es una medida de probabilidad en* $(E, \mathcal{E})$ *para cada* $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ *comenzando en* $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ *se puede construir de la siguiente manera, defínase la función* F *por*

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{31.447}$$

Sea T_1 *una variable aleatoria tal que* $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, *ahora sea la variable aleatoria* (N, Z) *con distribuición* $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. *La trayectoria de* $(\mathbf{x}_t)$ *para* $t \leq T_1$ *es*[25]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ *se selecciona el siguiente tiempo de intersalto* $T_2 - T_1$ *lugar del post-salto* $\mathbf{x}_{T_2}$ *de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes* $\mathbf{x}_t$ *con tiempos de salto* $T_1, T_2, \ldots$. *Bajo las condiciones enunciadas para* $\lambda, T_1 > 0$ *y* $T_1 - T_2 > 0$ *para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.*

Supuestos 31.7 (Supuesto 3.1, Davis [14]) *Sea* $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ *el número de saltos en* $[0, t]$. *Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{31.448}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 31.161 *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 31.162 *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

[25] Revisar página 362, y 364 de Davis [14].

Definición 31.163 *E es un espacio de Radón si cada medida finita en* $(E, \mathcal{B}(E))$ *es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 31.164 *Una medida finita,* λ *en la* σ*-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{31.449}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 31.119 *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en* $(E, \mathcal{B}(E))$ *es cerrada.*

31.1.43. Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ*-álgebra de Borel en E, que se denotará por* $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *espacio de probabilidad,* $I \subset \mathbb{R}$ *conjunto de índices. Sea* $\mathcal{F}_{\leq t}$ *la* σ*-álgebra natural definida como* $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. *Se considerará una* σ*-álgebra más general,* $(\mathcal{G}_t)$ *tal que* (X_t) *sea* $\mathcal{E}$*-adaptado.*

Definición 31.165 *Una familia* $(P_{s,t})$ *de kernels de Markov en* $(E, \mathcal{E})$ *indexada por pares* $s, t \in I$, *con* $s \leq t$ *es una función de transición en* $(E, \mathcal{E})$, *si para todo* $r \leq s < t$ *en I y todo* $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{26}. \tag{31.450}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ *en* $(E, \mathcal{E})$ *es la función de transición para un proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *con valores en E y que satisface la propiedad de Markov*[27] *(32.2.309) relativa a* $(\mathcal{G}_t)$ *si*

$$\mathbb{P}\{f(X_t)|\mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{31.452}$$

Definición 31.166 *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E, \mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 31.19 *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (32.2.310) con función de transición homogénea (P_t) *tiene la propiedad característica*

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{31.453}$$

La ecuación anterior es la Propiedad Simple de Markov *de X relativa a* (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ *cumple con la propiedad de Markov (32.2.311) relativa a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *con semigrupo de transición* (P_t).

31.1.44. Primer Condición de Regularidad

Definición 31.167 *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \to X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 31.168 (HD1) *Un semigrupo de Markov* $/P_t)$ *en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en E, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, *y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso E-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

[26] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[27]

$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H|X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{31.451}$$

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 31.169 *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) *$(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) *$(\theta_t)_{t\geq 0}$ es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{31.454}$$

iii) *Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (32.2.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.*

Definición 31.170 (HD2) *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 31.171 *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) *$\mathbf{X}$ es una realización continua por la derecha, 32.100, de (P_t).*

ii) *$\mathbf{X}$ satisface la condicion HD2, 32.101, relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) *$\mathcal{G}_t$ es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 31.35 (Lema 4.2, Dai[10]) *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{31.455}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{31.456}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{31.457}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$.

Lema 31.36 (Lema 4.3, Dai[10]) *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) *Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{31.458}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j\in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{31.459}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{31.460}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{31.461}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{31.462}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{31.463}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{31.464}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{31.465}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 32.94:

Teorema 31.120 (Teorema 4.1, Dai [10]) *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{31.466}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{31.467}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{31.468}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{31.469}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{31.470}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{31.471}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{31.472}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{31.473}$$

Definición 31.172 (Definición 4.1, , Dai [10]) *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en 33.1.122 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (33.1.123)-(33.1.128) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 31.121 (Teorema 4.2, Dai[10]) *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{31.474}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 32.2.216-32.2.182 se le llama Modelo de flujo *y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 31.173 (Definición 3.3, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [8].

Lema 31.15 (Lema 3.1, Dai y Meyn [11]) *Si el modelo de flujo definido por 32.2.216-32.2.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 31.39 *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de 32.2.197 y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 31.37 (Lema 3.1 [8]) *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 31.122 (Teorema 5.2 [8]) *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 31.123 (Teorema 5.1 [8]) *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* (α,μ,T,U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$, *para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 31.38 (Lema 5.2 [20]) *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r} \tag{31.475}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 31.124 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [20]) *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r}\rightarrow\frac{1}{\mu^{r}}$, *cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$..

Proposición 31.40 (Proposicin 5.1 [11]) *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_{0}>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0. \tag{31.476}$$

Proposición 31.41 (Proposición 5.3 [11]) *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{31.477}$$

Proposición 31.42 (Proposición 5.4 [11]) *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{31.478}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 31.125 (Teorema 5.5 [11]) *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{31.479}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \tag{31.480}$$

Teorema 31.126 (Teorema 6.2[11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x \left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi \left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 31.127 (Teorema 6.3[11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot)\right|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]| = 0}.$$

Proposición 31.43 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{31.481}$$

Lema 31.16 (Lema 5.2, Dai y Meyn [11]) *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{31.482}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 31.128 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{31.483}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 31.129 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{31.484}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 31.130 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x)=f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_f=0. \tag{31.485}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 31.131 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds=\pi(f):=\int f(x)\,\pi(dx) \tag{31.486}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 31.132 (Teorema 2.2, Down [15]) *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0,c_0\geq0$,*

$$|Q(T)|\geq\epsilon_0T-c_0,\ T\geq0, \tag{31.487}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{31.488}$$

31.1.45. Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\to\infty}\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]=\overline{N}>0$;

2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]\leq\overline{N}$ *para cualquier valor de* ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- *Al término de la visita a la cola* j, *el servidor cambia a la cola* $j^{'}$ *con probabilidad* $r^{m}_{j,j^{'}}$
- *La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola* j *a* j', *va acompañada con el tiempo de cambio de longitud* $\delta^{m}_{j,j^{'}}\left(n\right)$, *con* $\delta^{m}_{j,j^{'}}\left(n\right)$, $n\geq1$, *variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que* $\mathbb{E}\left[\delta^{m}_{j,j^{'}}\left(1\right)\right]\geq0$.
- *Sea* $\left\{p^{m}_{j}\right\}$ *la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición* $\left(r^{m}_{j,j^{'}}\right)$, *se supone que ésta existe.*
- *Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como*

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p^{m}_{j}r^{m}_{j,j^{'}}\mathbb{E}\left[\delta^{m}_{j,j^{'}}\left(i\right)\right]. \tag{31.489}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ *son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas* $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$; *además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por* $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ *y la tasa de servicio como* $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, *finalmente se define la carga de la cola como* $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, *donde se pide que* $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}<1$, *para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [19].*

Si denotamos por

- $Q_{k}\left(t\right)$ *el número de usuarios presentes en la cola* k *al tiempo* t;
- $A_{k}\left(t\right)$ *los residuales de los tiempos entre arribos a la cola* k; *para cada servidor* m;
- $B_{m}\left(t\right)$ *denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo* t;
- $B_{m}^{0}\left(t\right)$ *los residuales de los tiempos de traslado de la cola* k *a la próxima por atender al tiempo* t,
- *sea* $C_{m}\left(t\right)$ *el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola* k *al tiempo* t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X\left(t\right)^{T}=\left(Q_{k}\left(t\right),A_{k}\left(t\right),B_{m}\left(t\right),B_{m}^{0}\left(t\right),C_{m}\left(t\right)\right), \tag{31.490}$$

para $k=1,\ldots,K$ *y* $m=1,2,\ldots,M$, *donde* T *indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso* X *evoluciona en el espacio de estados:* $\mathbb{X}=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) *Los procesos* $\xi_{1},\ldots,\xi_{K},\eta_{1},\ldots,\eta_{K}$ *son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) *Para algún entero* $p\geq1$

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}\left[\xi_{l}\left(1\right)^{p+1}\right]&<&\infty \text{ para } l=1,\ldots,K \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)^{p+1}\right]&<&\infty \text{ para } k=1,\ldots,K.\end{array}$$

donde $\mathcal{A}$ *es la clase de posibles arribos.*

A3) *Para cada* $k=1,2,\ldots,K$ *existe una función positiva* $q_{k}\left(\cdot\right)$ *definida en* $\mathbb{R}_{+}$, *y un entero* j_{k}, *tal que*

$$P\left(\xi_{k}\left(1\right)\geq x\right) > 0, \text{ para todo } x>0, \tag{31.491}$$

$$P\left\{a\leq\sum_{i=1}^{j_{k}}\xi_{k}\left(i\right)\leq b\right\} \geq \int_{a}^{b}q_{k}\left(x\right)dx,\ 0\leq a<b. \tag{31.492}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [11] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición 32.110.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [10, 11].

31.1.46. Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [14], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [14], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [11], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [36]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x, x \in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1,$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right)|\mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right),$$

en $\left\{\tau < \infty\right\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.
Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [10, 21].

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right).$$

Definición 31.174 *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right) = \int_{\mathbb{X}} P^t\left(x, D\right)\pi\left(dx\right),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 31.175 *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$, tal que si $\nu\left(D\right) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\left\{t \geq 0 : X_t \in D\right\}$.

Nota 31.20 *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [19]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi\left(\cdot\right) = \int_{\mathbf{X}} P_x\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [11].

Definición 31.176 *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [10]:

Lema 31.39 (Lema 3.1, Dai [10]) *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{31.493}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 31.40 (Lema 3.1, Dai [10]) *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 31.133 (Teorema 3.1, Dai [10]) *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{31.494}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (32.2.358) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos A1)-A3), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

31.1.47. Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- *$Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,*
- *$T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.*
- *$T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.*

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{31.495}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [15]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama Modelo de Flujo *y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [15, 10, 11].*

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{31.496}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{31.497}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{31.498}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{31.499}$$

Definición 31.177 (Definición 4.1, Dai [10]) *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (32.2.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (32.2.348)-(32.2.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 31.178 *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Si se hace $|x| \to \infty$ *sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:*

Teorema 31.134 (Teorema 4.2, Dai [10]) *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t). \tag{31.500}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ *es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo* $|q| \to \infty$ *mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado* $\overline{Q}^x$ *es solución del siguiente modelo de flujo.*

Definición 31.179 (Definición 3.3, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

Lema 31.17 (Lema 3.1, Dai y Meyn [11]) *Si el modelo de flujo definido por (32.2.348)-(32.2.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 31.135 (Teorema 2.1, Down [15]) *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p*, y para cada condición inicial* $x \in X$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{31.501}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{31.502}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$*. Donde* π *es la probabilidad invariante para* X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}*:*

$$lim_{t\to\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{31.503}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right], \; \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{31.504}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.*

Teorema 31.136 (Teorema 2.3, Down [15]) *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{31.505}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 32.95.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 33.57

Dado el proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ definido en (32.2.289) que describe la dinámica del sistema de visitas cíclicas, si $U(t)$ es el residual de los tiempos de llegada al tiempo t entre dos usuarios consecutivos y $V(t)$ es el residual de los tiempos de servicio al tiempo t para el usuario que estás siendo atendido por el servidor. Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados que puede tomar el proceso X.

Lema 31.41 (Lema 4.3, Dai[10]) *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k,$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea e es un vector de unos, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema (32.94):

Teorema 31.137 (Teorema 4.1, Dai [10]) *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{31.506}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \ u.o.c. \tag{31.507}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I - P)' M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{31.508}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{31.509}$$

$$\overline{T}(t) \ \text{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{31.510}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \ \text{es no decreciente,} \tag{31.511}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}\left(t\right)\right) d\overline{I}\left(t\right) = 0, \tag{31.512}$$

$$\textit{Condiciones en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right) \textit{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{31.513}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 31.44 (Proposición 4.2, Dai [10]) *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ *un flujo límite de 32.2.347 y suponga que cuando* $x \rightarrow \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x\left(0\right), \frac{1}{|x|}A_k^x\left(0\right), \frac{1}{|x|}B_k^x\left(0\right), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}\left(0\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k\left(0\right), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. *El flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^0\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right) = \overline{T}^0\left(0\right) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K \left[\overline{T}_k\left(t\right) + \overline{T}_k^0\left(t\right)\right] = t.$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k\left(t\right) = \overline{Q}_k\left(0\right) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k\left(t\right).$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k\left(t\right) = \rho_k$$

para $\overline{Q}_k\left(t\right) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0\left(t\right) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0\left(t\right).$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k\left(t\right) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0\left(t\right),$$

para $\overline{Q}_k\left(t\right) > 0$.

Lema 31.42 (Lema 3.1, Chen [8]) *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Lema 31.43 (Lema 5.2, Gut [20]) *Sea* $\{\xi\left(k\right) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0, \infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right) = max\left\{n \geq 1 : \xi\left(1\right) + \cdots + \xi\left(n-1\right) \leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E\left[\xi_1\right]}\right)^r, \tag{31.514}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t \geq \delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$.

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 31.138 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo, Gut [20]) *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}\left(X_1\right) \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$.

Proposición 31.45 (Proposición 5.1, Dai y Sean [11]) *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{31.515}$$

Proposición 31.46 (Proposición 5.3, Dai y Sean [11]) *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right). \tag{31.516}$$

Proposición 31.47 (Proposición 5.4, Dai y Sean [11]) *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right],$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{31.517}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 31.139 (Teorema 5.5, Dai y Sean [11]) *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\}, \tag{31.518}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p. \tag{31.519}$$

Teorema 31.140 (Teorema 6.2 Dai y Sean [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0,$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x \left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi \left[|Q_0|^p\right] < \infty,$$

donde

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_f = sup_{|g \leq f|} | \int \pi(dy)\, g(y) - \int P^t(x,dy)\, g(y) |,$$

para $x \in \mathbb{X}$.

Teorema 31.141 (Teorema 6.3, Dai y Sean [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)} \left|P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot)\right|_f = 0,$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)} \left|\mathbb{E}_x [Q_t] - \mathbb{E}_\pi [Q_0]\right| = 0.$$

Proposición 31.48 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{31.520}$$

Teorema 31.142 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\}, \tag{31.521}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 31.143 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right) ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right)\pi\left(dx\right), \tag{31.522}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 31.144 (Teorema 2.2, Down [15]) *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\; T \geq 0, \tag{31.523}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{31.524}$$

Demostración 31.1 (Teorema 32.95) *La demostración de este teorema se da a continuación:*

i) Utilizando la proposición 33.26 se tiene que la proposición 33.27 es cierta para $f\left(x\right) = 1 + |x|^p$.

i) es consecuencia directa del Teorema 33.53.

iii) ver la demostración dada en Dai y Sean [11] páginas 1901-1902.

iv) ver Dai y Sean [11] páginas 1902-1903 ó [27].

Modelo de Flujo y Estabilidad

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k\left(n\right) := \sum_{i=1}^{n}\phi^k\left(i\right). \tag{31.1.525}$$

suponiendo que el estado inicial de la red es $x = (q, a, b) \in X$, entonces para cada k

$$E_k^x\left(t\right) := \max\left\{n \geq 0 : A_k^x\left(0\right) + \psi_k\left(1\right) + \cdots + \psi_k\left(n-1\right) \leq t\right\} \tag{31.1.526}$$

$$S_k^x\left(t\right) := \max\left\{n \geq 0 : B_k^x\left(0\right) + \eta_k\left(1\right) + \cdots + \eta_k\left(n-1\right) \leq t\right\} \tag{31.1.527}$$

Sea $T_k^x\left(t\right)$ el tiempo acumulado que el servidor $s\left(k\right)$ ha utilizado en los usuarios de la clase k en el intervalo $[0,t]$. Entonces se tienen las siguientes ecuaciones:

$$Q_k^x\left(t\right) = Q_k^x\left(0\right) + E_k^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{k}\Phi_k^l S_l^x\left(T_l^x\right) - S_k^x\left(T_k^x\right) \tag{31.1.528}$$

$$Q^x\left(t\right) = \left(Q_1^x\left(t\right), \ldots, Q_K^x\left(t\right)\right)' \geq 0, \tag{31.1.529}$$

$$T^x\left(t\right) = \left(T_1^x\left(t\right), \ldots, T_K^x\left(t\right)\right)' \geq 0, \text{ es no decreciente} \tag{31.1.530}$$

$$I_i^x\left(t\right) = t - \sum_{k\in C_i} T_k^x\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{31.1.531}$$

$$\int_0^\infty \sum_{k\in C_i} Q_k^x\left(t\right) dI_i^x\left(t\right) = 0 \tag{31.1.532}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x\left(\cdot\right), T^x\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{31.1.533}$$

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^x\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^x\left(|x|t\right) \tag{31.1.534}$$

Cualquier límite $\overline{Q}\left(t\right)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola. Si se hace $|q| \rightarrow \infty$ y se mantienen las componentes restantes fijas, de la condición inicial x, cualquier punto límite del proceso normalizado $\overline{Q}^x$ es una solución del siguiente modelo de flujo, ver [10].

Definición 31.180 *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(Q^x\left(\cdot\right), T^x\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right) = \left(\overline{Q}_1\left(t\right), \ldots, \overline{Q}_K\left(t\right)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}\left(t\right) = \left(\overline{T}_1\left(t\right), \ldots, \overline{T}_K\left(t\right)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_k\left(t\right) = \overline{Q}_k\left(0\right) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k\left(t\right) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk}\mu_l \overline{T}_l\left(t\right) \tag{31.1.535}$$

$$\overline{Q}_k\left(t\right) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{31.1.536}$$

$$\overline{T}_k\left(0\right) = 0, \text{ y } \overline{T}_k\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente}, \tag{31.1.537}$$

$$\overline{I}_i\left(t\right) = t - \sum_{k\in C_i} \overline{T}_k\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{31.1.538}$$

$$\overline{I}_i\left(\cdot\right) \text{ se incrementa al tiempot cuando } \sum_{k\in C_i} Q_k^x\left(t\right) dI_i^x\left(t\right) = 0 \tag{31.1.539}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x\left(\cdot\right), T^x\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{31.1.540}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 32.2.216-32.2.182 se le llama Modelo de flujo *y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *se le denotará por* $\mathcal{Q}$.

Si se hace $\left|x\right| \rightarrow \infty$ *sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:*

Definición 31.181 *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}\left(0\right), \overline{B}\left(0\right)\right) \in \mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 32.2.216-32.2.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}\left(t\right) = \overline{Q}\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{A}\left(0\right)\right)^{+} - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{B}\left(0\right)\right)^{+} \tag{31.1.541}$$

Definición 31.182 *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en [8].

Lema 31.18 *Si el modelo de flujo definido por 32.2.216-32.2.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|overlinex| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$.

Resultados principales

Supuestos necesarios sobre la red

Supuestos 31.8 *A1)* $\psi_1, \ldots, \psi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ *son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\psi_l\left(1\right)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ *es un singleton, y para cada* $k \in \mathcal{A}$, *existe una función positiva* $q_k\left(x\right)$ *definida en* $\mathbb{R}_+$, *y un entero* j_k, *tal que*

$$P\left(\psi_k\left(1\right) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{31.1.542}$$

$$P\left(\psi_k\left(1\right) + \ldots \psi_k\left(j_k\right) \in dx\right) \geq q_k\left(x\right) dx0 \text{ y} \tag{31.1.543}$$

$$\int_0^{\infty} q_k\left(x\right) dx > 0 \tag{31.1.544}$$

*El argumento dado en [**?**] en el lema 32.8 se puede aplicar para deducir que todos los subconjuntos compactos de* X *son pequeños.Entonces la condición* A3) *se puede generalizar a*

A3') Para el proceso de Markov X, *cada subconjunto compacto de* X *es pequeño.*

Teorema 31.145 *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] ds \leq \kappa_p \tag{31.1.545}$$

donde p es el entero dado por A2). Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r \tag{31.1.546}$$

para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

iii) EL primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0. \tag{31.1.547}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \tag{31.1.548}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

Demostración 31.2 *La demostración de este resultado se da aplicando los teoremas 32.45, 33.53, 33.54 y 32.48*

Definiciones Generales

Definimos un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada. Bajo cualquier preemptive buffer priority *disciplina de servicio, el estado $\mathbb{X}(t)$ a cualquier tiempo t puede definirse como*

$$\mathbb{X}(t) = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t) : k = 1, 2, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right) \tag{31.1.549}$$

donde $Q_k(t)$ es la longitud de la cola para los usuarios de la clase k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k(t)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio. Los tiempos de arribo residuales, que son iguales al tiempo que queda hasta que el próximo usuario de la clase k llega, se denotan por $A_k(t)$. Tanto $B_k(t)$ como $A_k(t)$ se suponen continuos por la derecha.

Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x = (q, a, b)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = (q, a, b) \in \mathbb{X}$ definimos la norma *de x como $\|x| = |q| + |a| + |b|$. En [10] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que*

$$\left((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}(t), \theta_t, P_x\right)$$

es un proceso de Borel Derecho en el espacio de estadio medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, est definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y est adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; $\{P_x, x \in X\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in X$

$$P_x\{\mathbb{X}(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t)|\mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{\mathbb{X}(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la sigma algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(\mathbb{X}(t) \in D)$$

Definición 31.183 *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_X P^t(x, D)\,\pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 31.184 *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

- *Si X es Harris recurrente, entonces una única medida invariante π existe ([19]).*
- *Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama* Harris recurrente positiva.
- *Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria y hacemos*

$$P_\pi(\cdot)\,[= \int_X P_x(\cdot)\,\pi(dx)$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, as, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π

Definición 31.185 *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.[28]

Definiciones y Descripción del Modelo

El modelo está compuesto por c colas de capacidad infinita, etiquetadas de 1 a c las cuales son atendidas por s servidores. Los servidores atienden de acuerdo a una cadena de Markov independiente $\left(X_n^i\right)_n$ con $1 \leq i \leq s$ y $n \in \{1, 2, \ldots, c\}$ con la misma matriz de transición $r_{k,l}$ y única medida invariante (p_k). Cada servidor permanece atendiendo en la cola un periodo llamado de visita y determinada por la política de servicio asignada a la cola.

Los usuarios llegan a la cola k con una tasa λ_k y son atendidos a una razón μ_k. Las sucesiones de tiempos de interarribo $(\tau_k(n))_n$, la de tiempos de servicio $\left(\sigma_k^i(n)\right)_n$ y la de tiempos de cambio $\left(\sigma_{k,l}^{0,i}(n)\right)_n$ requeridas en la cola k para el servidor i son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas con distribución general independiente de i, con media $\sigma_k = \frac{1}{\mu_k}$, respectivamente $\sigma_{k,l}^0 = \frac{1}{\mu_{k,l}^0}$, e independiente de las cadenas de Markov $\left(X_n^i\right)_n$. Además se supone que los tiempos de interarribo se asume son acotados, para cada $\rho_k = \lambda_k\sigma_k < s$ para asegurar la estabilidad de la cola k cuando opera como una cola $M/GM/1$.

Políticas de Servicio

Una política de servicio determina el número de usuarios que serán atendidos sin interrupción en periodo de servicio por los servidores que atienden a la cola. Para un solo servidor esta se define a través de una función f donde $f(x, a)$ es el número de usuarios que son atendidos sin interrupción cuando el servidor llega a la cola y encuentra x usuarios esperando dado el tiempo transcurrido de interarribo a. Sea $v(x, a)$ la duración del periodo de servicio para una sola condición inicial (x, a).

Las políticas de servicio consideradas satisfacen las siguientes propiedades:

[28] En [?] muestran que si $P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ solamente para uno conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris recurrente

i) Hay conservación del trabajo, es decir

$$v(x,a) = \sum_{l=1}^{f(x,a)} \sigma(l)$$

con $f(0,a) = v(0,a) = 0$, *donde* $(\sigma(l))_l$ *es una sucesión independiente e idénticamente distribuida de los tiempos de servicio solicitados.*

ii) La selección de usuarios para se atendidos es independiente de sus correspondientes tiempos de servicio y del pasado hasta el inicio del periodo de servicio. Así las distribución (f, v) *no depende del orden en el cuál son atendidos los usuarios.*

iii) La política de servicio es monótona en el sentido de que para cada $a \geq 0$ *los números* $f(x,a)$ *son monótonos en distribución en* x *y su límite en distribución cuando* $x \to \infty$ *es una variable aleatoria* F^{*0} *que no depende de* a.

iv) El número de usuarios atendidos por cada servidor es acotado por $f^{min}(x)$ *de la longitud de la cola* x *que además converge monótonamente en distribución a* F^* *cuando* $x \to \infty$

Proceso de Estados

El sistema de colas se describe por medio del proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *como se define a continuación. El estado del sistema al tiempo* $t \geq 0$ *está dado por*

$$X(t) = (Q(t), P(t), A(t), R(t), C(t))$$

donde

- $Q(t) = (Q_k(t))_{k=1}^{c}$, *número de usuarios en la cola* k *al tiempo* t.
- $P(t) = \left(P^i(t)\right)_{i=1}^{s}$, *es la posición del servidor* i.
- $A(t) = (A_k(t))_{k=1}^{c}$, *es el residual del tiempo de arribo en la cola* k *al tiempo* t.
- $R(t) = \left(R_k^i(t), R_{k,l}^{0,i}(t)\right)_{k,l,i=1}^{c,c,s}$, *el primero es el residual del tiempo de servicio del usuario atendido por servidor* i *en la cola* k *al tiempo* t, *la segunda componente es el residual del tiempo de cambio del servidor* i *de la cola* k *a la cola* l *al tiempo* t.
- $C(t) = \left(C_k^i(t)\right)_{k,i=1}^{c,s}$, *es la componente correspondiente a la cola* k *y al servidor* i *que está determinada por la política de servicio en la cola* k *y que hace al proceso* $X(t)$ *un proceso de Markov.*

Todos los procesos definidos arriba se suponen continuos por la derecha.
El proceso X *tiene la propiedad fuerte de Markov y su espacio de estados es el espacio producto*

$$\mathcal{X} = \mathbb{N}^c \times E^s \times \mathbb{R}_+^c \times \mathbb{R}_+^{cs} \times \mathbb{R}_+^{c^2 s} \times \mathcal{C}$$

donde $E = \{1, 2, \ldots, c\}^2 \cup \{1, 2, \ldots, c\}$ *y* $\mathcal{C}$ *depende de las políticas de servicio.*

Introducción

Si x *es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y* $N_s(x) = N(x)$ *es el número de usuarios que son atendidos con la política* s, *única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:*

a)

$$lim_{x\to\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0 \tag{31.1.550}$$

b)

$$\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N} \tag{31.1.551}$$

para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m*-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:*

- *Al término de la visita a la cola* j, *el servidor se cambia a la cola* $j^{'}$ *con probabilidad* $r_{j,j'}^{m} = r_{j,j'}$
- *La* n*-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud* $\delta_{j,j'}(n)$, *independientes e idénticamente distribuidas, con* $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.

- *Sea* $\{p_j\}$ *la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición* $\left(r_{j,j'}\right)$.
- *Finalmente, se define*

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right]. \tag{31.1.552}$$

Colas Cíclicas

El token passing ring *es una estación de un solo servidor con* K *clases de usuarios. Cada clase tiene su propio regulador en la estación. Los usuarios llegan al regulador con razón* α_k *y son atendidos con taza* μ_k.

La red se puede modelar como un Proceso de Markov con espacio de estados continuo, continuo en el tiempo:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t), B_k^0(t), C(t) : k = 1, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right) \tag{31.1.553}$$

donde $Q_k(t), B_k(t)$ *y* $A_k(t)$ *se define como en 32.2.210,* $B_k^0(t)$ *es el tiempo residual de cambio de la clase* k *a la clase* $k+1\,(modK)$*;* $C(t)$ *indica el número de servicios que han sido comenzados y/o completados durante la sesión activa del buffer.*

Los parámetros cruciales son la carga nominal de la cola k*:* $\beta_k = \alpha_k/\mu_k$ *y la carga total es* $\rho_0 = \sum \beta_k$*, la media total del tiempo de cambio en un ciclo del token está definido por*

$$u^0 = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}\left[\eta_k^0(1)\right] = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\mu_k^0} \tag{31.1.554}$$

El proceso de la longitud de la cola $Q_k^x(t)$ *y el proceso de acumulación del tiempo de servicio* $T_k^x(t)$ *para el buffer* k *y para el estado inicial* x *se definen como antes. Sea* $T_k^{x,0}(t)$ *el tiempo acumulado al tiempo* t *que el token tarda en cambiar del buffer* k *al* $k+1 \mod K$*. Suponga que la función* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *es un punto límite de*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^{x,0}(|x|t)\right) \tag{31.1.555}$$

cuando $|x| \to \infty$*. Entonces* $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t), \overline{T}^0(t)\right)$ *es un flujo límite retrasado del token ring.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado

Proposición 31.49 *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ *un flujo límite de 32.2.197 y suponga que cuando* $x \to \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Resultados Previos

Lema 31.19 *El proceso estocástico Φ es un proceso de markov fuerte, temporalmente homogéneo, con trayectorias muestrales continuas por la derecha, cuyo espacio de estados Y es igual a $X \times \mathbb{R}$*

Proposición 31.50 *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{31.1.556}$$

Lema 31.20 *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{31.1.557}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 31.146 *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{31.1.558}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 31.147 *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$||P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)||_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{31.1.559}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 31.148 *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}||P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)||_f=0. \tag{31.1.560}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 31.149 *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds=\pi(f):=\int f(x)\,\pi(dx) \tag{31.1.561}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema de Estabilidad: Descripción

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

a)
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0 \tag{31.1.562}$$

b)
$$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N} \tag{31.1.563}$$

para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- *Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m} = r_{j,j^{'}}$*
- *La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right] \geq 0$.*
- *Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.*
- *Finalmente, se define*
$$\delta^{*} := \sum_{j,j^{'}} p_j r_{j,j^{'}}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right]. \tag{31.1.564}$$

31.1.48. Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(\omega)\right] = \overline{N} > 0$;
2) $\mathbb{E}\left[N(\omega)\right] \leq \overline{N}$ *para cualquier valor de ω.*

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- *Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$*
- *La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(1)\right] \geq 0$.*
- *Sea $\left\{p_j^m\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.*
- *Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como*
$$\delta^{*} := \sum_{j,j^{'}} p_j^m r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(i)\right]. \tag{31.1.565}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$; además ambos *procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por* $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ *y la tasa de servicio como* $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$*, finalmente se define la carga de la cola como* $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$*, donde se pide que* $\rho = \sum_{k=1}^{K}\rho_k < 1$*, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [19].*

Si denotamos por

- $Q_k(t)$ *el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;*
- $A_k(t)$ *los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;*
- $B_m(t)$ *denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;*
- $B_m^0(t)$ *los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,*
- *sea* $C_m(t)$ *el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.*

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right), \tag{31.1.566}$$

para $k = 1,\ldots,K$ *y* $m = 1,2,\ldots,M$*, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados:* $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1,2,\ldots,K\} \times \{1,2,\ldots,S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1,\ldots,\xi_K,\eta_1,\ldots,\eta_K$ *son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1,\ldots,K \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1,\ldots,K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ *es la clase de posibles arribos.*

A3) Para cada $k = 1,2,\ldots,K$ *existe una función positiva* $q_k(\cdot)$ *definida en* $\mathbb{R}_+$*, y un entero* j_k*, tal que*

$$P\left(\xi_k(1) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{31.1.567}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k}\xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{31.1.568}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [11] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición 32.110.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ *es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [10, 11].*

31.1.49. Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [14], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [14], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [11], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [36]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. *El Proceso* $X = \{X(t), t \geq 0\}$ *tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en* $(\Omega, \mathcal{F})$ *y está adaptado a* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$*; la colección* $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ *son medidas de probabilidad en* $(\Omega, \mathcal{F})$ *tales que para todo* $x \in \mathbb{X}$

$$P_x \{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x*-c.s., con* θ_t *definido como el operador shift.*
Donde τ *es un* $\mathcal{F}_t$*-tiempo de paro*

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f *es una función de valores reales acotada y medible, ver [10, 21].*

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ *la probabilidad de transición de* X *queda definida como:*

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 31.186 *Una medida no cero* π *en* $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ *es invariante para* X *si* π *es* σ*-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D) \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, *con* $t \geq 0$.

Definición 31.187 *El proceso de Markov* X *es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad* ν *en* $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, *tal que si* $\nu(D) > 0$ *y* $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf \{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 31.21 *i) Si* X *es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante* π *(Getoor [19]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X *se le llama Harris recurrente positivo.*

iii) Cuando X *es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso* π *denota la distribución estacionaria y hacemos*

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot) \pi(dx),$$

y se utiliza E_π *para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [11].*

Definición 31.188 *Un conjunto* $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ *es llamado pequeño si existe un* $t > 0$, *una medida de probabilidad* ν *en* $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, *y un* $\delta > 0$ *tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [10]:

Lema 31.44 (Lema 3.1, Dai [10]) *Sea* B *conjunto pequeño cerrado, supongamos que* $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ *y que para algún* $\delta > 0$ *se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x [\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{31.1.569}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf \{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. *Entonces,* X *es un proceso Harris recurrente positivo.*

Lema 31.45 (Lema 3.1, Dai [10]) *Bajo el supuesto (A3), el conjunto* $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ *es un conjunto pequeño cerrado para cualquier* $k > 0$.

Teorema 31.150 (Teorema 3.1, Dai [10]) *Si existe un* $\delta > 0$ *tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{31.1.570}$$

donde X^x *se utiliza para denotar que el proceso* X *comienza a partir de* x, *entonces la ecuación (32.2.358) se cumple para* $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ *con algún* $k > 0$. *En particular,* X *es Harris recurrente positivo.*

Entonces, tenemos que el proceso X *es un proceso de Markov que cumple con los supuestos* $A1$)*-*$A3$), *lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.*

31.1.50. Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ *la longitud de la cola al tiempo t,*
- $T_{m,k}^x(t)$ *el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.*
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ *el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.*

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ *para* $m = 1, 2, \ldots, M$ *es un punto límite de*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{31.1.571}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, *cuando* $x \to \infty$, *ver [15]. Entonces* $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ *es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama* Modelo de Flujo *y se le denotará por* $\mathcal{Q}$, *ver [15, 10, 11].*

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{31.1.572}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{31.1.573}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{31.1.574}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ *y* $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{31.1.575}$$

Definición 31.189 (Definición 4.1, Dai [10]) *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (32.2.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (32.2.348)-(32.2.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 31.190 *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 31.151 (Teorema 4.2, Dai [10]) *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{31.1.576}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 31.191 (Definición 3.3, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 31.21 (Lema 3.1, Dai y Meyn [11]) *Si el modelo de flujo definido por (32.2.348)-(32.2.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 31.152 (Teorema 2.1, Down [15]) *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, *y para cada condición inicial* $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{31.1.577}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{31.1.578}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$. *Donde* π *es la probabilidad invariante para* X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{31.1.579}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{31.1.580}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los sistemas de visitas cíclicas, *es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.*

Teorema 31.153 (Teorema 2.3, Down [15]) *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{31.1.581}$$

i) Si $\rho < 1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 32.95.*

ii) Si $\rho > 1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 33.57*

31.1.51. Modelo de Flujo

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Sea x *el número de usuarios en la cola esperando por servicio y* $N(x)$ *es el número de usuarios que son atendidos con una política dada y fija mientras el servidor permanece dando servicio, entonces se asume que:*

(S1.)

$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0. \tag{31.1.582}$$

(S2.)

$$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N}, \tag{31.1.583}$$

para cualquier valor de x.

El tiempo que tarda un servidor en volver a dar servicio después de abandonar la cola inmediata anterior y llegar a la próxima se llama tiempo de traslado o de cambio de cola, al momento de la n-ésima visita del servidor a la cola j se genera una sucesión de variables aleatorias $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con la propiedad de que $\mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)] \geq 0$.

Se define

$$\delta^* := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)]. \tag{31.1.584}$$

Los tiempos entre arribos a la cola k, son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos. Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Para el caso más sencillo podemos definir un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada, el estado $\mathbb{X}(t)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}(t) = (Q_k(t), A_l(t), B_k(t) : k = 1, 2, \ldots, K, l \in \mathcal{A}), \tag{31.1.585}$$

donde $Q_k(t)$ es la longitud de la cola k para los usuarios esperando servicio, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k(t)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio.

*Los tiempos entre arribos residuales, que son el tiempo que queda hasta que el próximo usuario llega a la cola para recibir servicio, se denotan por $A_k(t)$. Tanto $B_k(t)$ como $A_k(t)$ se suponen continuos por la derecha [**?**].*

Sea $\mathcal{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x = (q, a, b)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = (q, a, b) \in \mathbb{X}$ definimos la norma *de x como $\|x\| = |q| + |a| + |b|$. En [10] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que*

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho *en el espacio de estados medible $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$.*

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(\mathbb{X}(t) \in D).$$

Definición 31.192 *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_X P^t(x, D)\, \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 31.193 *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

Definición 31.194 *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

Nota 31.22 *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π ([19]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso a la medida se le llama ***Harris recurrente positiva****.*

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria; se define

$$P_{\pi}(\cdot) = \int_X P_x(\cdot)\,\pi(dx).$$

Se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, así, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_{π}.

iv) En [?] se muestra que si $P_x\{\tau_D < \infty\} = 1$ incluso para solamente un conjunto pequeño, entonces el proceso de Harris es recurrente.

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \big(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\big) \tag{31.1.586}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{31.1.587}$$

- *$Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.*
- *$A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.*
- *$H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.*
- *$B(t)$ es el tiempo de servicio residual.*
- *$B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.*
- *$C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.*

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([10]).
Dada una condición inicial $x \in \mathcal{X}$, $Q_k^x(t)$ es la longitud de la cola k al tiempo t y $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en atender a los usuarios de la cola k. De igual manera se define $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en cambiar de cola para volver a atender a los usuarios.
Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \tag{31.1.588}$$

$$\overline{T}_m^x(t) = \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \tag{31.1.589}$$

$$\overline{T}_m^{x,0}(t) = \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t). \tag{31.1.590}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola, al conjunto de todos los posibles flujos límite se le llamará ***modelo de flujo****, ([?]).*

Definición 31.195 *Un flujo límite para un sistema de visitas bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)$ y $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)$*

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{31.1.591}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{31.1.592}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{31.1.593}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ param} = 1, 2, \ldots, M \tag{31.1.594}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en (32.2.216)-(32.2.219) se le llama Modelo de flujo *y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *se le denotará por* $\mathcal{Q}$.

Definición 31.196 *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

31.1.52. Estabilidad de los Sistemas de Visitas Cíclicas

Es necesario realizar los siguientes supuestos, ver ([?]) y ([11]):

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ *son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ *es un singleton, y para cada* $k \in \mathcal{A}$*, existe una función positiva* $q_k(x)$ *definida en* $\mathbb{R}_+$*, y un entero* j_k*, tal que*

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{31.1.595}$$

$$P(\xi_k(1) + \ldots \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\,dx0 \text{ y} \tag{31.1.596}$$

$$\int_0^\infty q_k(x)\,dx > 0 \tag{31.1.597}$$

En [?] ser da un argumento para deducir que todos los subconjuntos compactos de X *son pequeños. Entonces la condición A3) se puede generalizar a*

A3') Para el proceso de Markov X*, cada subconjunto compacto de* X *es pequeño.*

Teorema 31.154 *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p*, y para cada condición inicial* $x \in X$

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] ds \leq \kappa_p \tag{31.1.598}$$

donde p es el entero dado por A2).

Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r \tag{31.1.599}$$

para $r = 1, \ldots, p$ *y* $k = 1, \ldots, K$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}*:*

$$\lim_{t \to \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0. \tag{31.1.600}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \tag{31.1.601}$$

$\mathbb{P}$*-c.s., para* $r = 1, \ldots, p$ *y* $k = 1, \ldots, K$.

Teorema 31.155 *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \text{ con } T \geq 0, \tag{31.1.602}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$*, con* $|Q(0)| = 1$*. Entonces para cualquier* $0 < q \leq 1$*, existe* $B < 0$ *tal que para cualquier* $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \to \infty\} \geq q. \tag{31.1.603}$$

31.1.53. Resultados principales

En el caso particular de un modelo con un solo servidor, $M = 1$, se tiene que si se define

Definición 31.197

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + \max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\overline{N}} \right) \delta^*. \tag{31.1.604}$$

entonces

Teorema 31.156 *i) Si $\rho < 1$, entonces la red es estable, es decir el teorema (32.49) se cumple.*

ii) De lo contrario, es decir, si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, el teorema (32.50).

31.1.54. Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega \to \infty} \mathbb{E}[N(\omega)] = \overline{N} > 0$;

2) $\mathbb{E}[N(\omega)] \leq \overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- *Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r^m_{j,j^{'}}$*
- *La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta^m_{j,j^{'}}(n)$, con $\delta^m_{j,j^{'}}(n)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta^m_{j,j^{'}}(1)\right] \geq 0$.*
- *Sea $\left\{p^m_j\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r^m_{j,j^{'}}\right)$, se supone que ésta existe.*
- *Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como*

$$\delta^* := \sum_{j,j^{'}} p^m_j r^m_{j,j^{'}} \mathbb{E}\left[\delta^m_{j,j^{'}}(i)\right]. \tag{31.1.605}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [19].

Si denotamos por

- *$Q_k(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;*
- *$A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;*
- *$B_m(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;*
- *$B^0_m(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,*
- *sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.*

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right), \tag{31.1.606}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{31.1.607}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx, \ 0 \leq a < b. \tag{31.1.608}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [11] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición 32.110.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [10, 11].

31.1.55. Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [14], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [14], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [11], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [36]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.
Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [10, 21].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 31.198 *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D)\, \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 31.199 *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 31.23 *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [19]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\, \pi(dx),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [11].

Definición 31.200 *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [10]:

Lema 31.46 (Lema 3.1, Dai [10]) *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{31.1.609}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 31.47 (Lema 3.1, Dai [10]) *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 31.157 (Teorema 3.1, Dai [10]) *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{31.1.610}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (32.2.358) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

31.1.56. Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- *$Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,*
- *$T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.*
- *$T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.*

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}_m\left(\cdot\right),\overline{T}_m^0\left(\cdot\right)\right)$ *para* $m=1,2,\ldots,M$ *es un punto límite de*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_m^x\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_m^{x,0}\left(|x|t\right)\right) \tag{31.1.611}$$

para $m=1,2,\ldots,M$*, cuando* $x\rightarrow\infty$*, ver [15]. Entonces* $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}_m\left(t\right),\overline{T}_m^0\left(t\right)\right)$ *es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama* Modelo de Flujo *y se le denotará por* $\mathcal{Q}$*, ver [15, 10, 11].*

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k\left(t\right)=\overline{Q}_k\left(0\right)+\lambda_k t-\sum_{m=1}^{M}\mu_k\overline{T}_{m,k}\left(t\right), \tag{31.1.612}$$

para $k=1,2,\ldots,K$*.*

$$\overline{Q}_k\left(t\right)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K. \tag{31.1.613}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right)=0,\ \ y\ \overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right)\ \text{ es no decreciente,} \tag{31.1.614}$$

para $k=1,2,\ldots,K$ *y* $m=1,2,\ldots,M$*.*

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^0\left(t\right)+\overline{T}_{m,k}\left(t\right)=t \text{ para } m=1,2,\ldots,M. \tag{31.1.615}$$

Definición 31.201 (Definición 4.1, Dai [10]) *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^0\left(\cdot\right)\right)$ *en (32.2.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (32.2.348)-(32.2.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 31.202 *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta>0$ *que depende de* μ,λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv 0$*.*

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ *sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:*

Teorema 31.158 (Teorema 4.2, Dai [10]) *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^x\left(|x|t\right). \tag{31.1.616}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x\left(t\right)$ *es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo* $|q|\rightarrow\infty$ *mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado* $\overline{Q}^x$ *es solución del siguiente modelo de flujo.*

Definición 31.203 (Definición 3.3, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$*, con* $t\geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$*.*

Lema 31.22 (Lema 3.1, Dai y Meyn [11]) *Si el modelo de flujo definido por (32.2.348)-(32.2.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0>0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$ *para cualquier* $t\geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq 1$*.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 31.159 (Teorema 2.1, Down [15]) *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces* *i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{31.1.617}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{31.1.618}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{31.1.619}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{31.1.620}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.*

Teorema 31.160 (Teorema 2.3, Down [15]) *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K}\rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{31.1.621}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 32.95.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 33.57

31.1.57. Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(\omega)\right] = \overline{N} > 0$;

2) $\mathbb{E}\left[N(\omega)\right] \leq \overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- *Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$*
- *La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(1)\right] \geq 0$.*

- *Sea* $\left\{p_j^m\right\}$ *la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición* $\left(r_{j,j'}^m\right)$, *se supone que ésta existe.*
- *Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como*

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j^m r_{j,j'}^m \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}^m (i)\right]. \tag{31.1.622}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq 1}$ *son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas* $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq 1}$; *además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por* $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ *y la tasa de servicio como* $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$, *finalmente se define la carga de la cola como* $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, *donde se pide que* $\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k < 1$, *para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [19].*

Si denotamos por

- $Q_k(t)$ *el número de usuarios presentes en la cola* k *al tiempo* t;
- $A_k(t)$ *los residuales de los tiempos entre arribos a la cola* k; *para cada servidor* m;
- $B_m(t)$ *denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo* t;
- $B_m^0(t)$ *los residuales de los tiempos de traslado de la cola* k *a la próxima por atender al tiempo* t,
- *sea* $C_m(t)$ *el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola* k *al tiempo* t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right), \tag{31.1.623}$$

para $k = 1, \ldots, K$ *y* $m = 1, 2, \ldots, M$, *donde* T *indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso* X *evoluciona en el espacio de estados:* $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) *Los procesos* $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ *son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) *Para algún entero* $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ *es la clase de posibles arribos.*

A3) *Para cada* $k = 1, 2, \ldots, K$ *existe una función positiva* $q_k(\cdot)$ *definida en* $\mathbb{R}_+$, *y un entero* j_k, *tal que*

$$P\left(\xi_k(1) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{31.1.624}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\, dx, \; 0 \leq a < b. \tag{31.1.625}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [11] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') *Para el Proceso de Markov* X, *cada subconjunto compacto del espacio de estados de* X *es un conjunto pequeño, ver definición 32.110.*

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ *es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [10, 11].*

31.1.58. Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [14], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [14], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [11], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [36]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.
Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [10, 21].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 31.204 *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D)\, \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 31.205 *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 31.24 *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [19]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\, \pi(dx),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [11].

Definición 31.206 *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [10]:

Lema 31.48 (Lema 3.1, Dai [10]) *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x\left[\tau_B(\delta)\right] < \infty, \tag{31.1.626}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 31.49 (Lema 3.1, Dai [10]) *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 31.161 (Teorema 3.1, Dai [10]) *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{31.1.627}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (32.2.358) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

31.1.59. Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- *$Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,*
- *$T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.*
- *$T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.*

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{31.1.628}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [15]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama Modelo de Flujo *y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [15, 10, 11].*

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{31.1.629}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{31.1.630}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{31.1.631}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{31.1.632}$$

Definición 31.207 (Definición 4.1, Dai [10]) *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ en (32.2.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (32.2.348)-(32.2.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 31.208 *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 31.162 (Teorema 4.2, Dai [10]) *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t). \tag{31.1.633}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 31.209 (Definición 3.3, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 31.23 (Lema 3.1, Dai y Meyn [11]) *Si el modelo de flujo definido por (32.2.348)-(32.2.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 31.163 (Teorema 2.1, Down [15]) *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{31.1.634}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{31.1.635}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\to\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{31.1.636}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{31.1.637}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.*

Teorema 31.164 (Teorema 2.3, Down [15]) *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{31.1.638}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 32.95.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 33.57

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \quad (31.1.639)$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx, \; 0 \leq a < b. \quad (31.1.640)$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [11] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición 32.110.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [10, 11].

31.1.60. Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [14], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [14], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [11], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [36]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.
Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [10, 21].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 31.210 *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D)\, \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 31.211 *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 31.25 *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [19]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\, \pi(dx),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [11].

Definición 31.212 *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [10]:

Lema 31.50 (Lema 3.1, Dai [10]) *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{31.1.641}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 31.51 (Lema 3.1, Dai [10]) *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 31.165 (Teorema 3.1, Dai [10]) *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{31.1.642}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (32.2.358) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

31.1.61. Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- *$Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,*
- *$T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.*
- *$T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.*

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ *para* $m = 1, 2, \ldots, M$ *es un punto límite de*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{31.1.643}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$*, cuando* $x \to \infty$*, ver [15]. Entonces* $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ *es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama* Modelo de Flujo *y se le denotará por* $\mathcal{Q}$*, ver [15, 10, 11].*

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{31.1.644}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{31.1.645}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{31.1.646}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ *y* $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{31.1.647}$$

Definición 31.213 (Definición 4.1, Dai [10]) *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (32.2.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (32.2.348)-(32.2.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 31.214 *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Si se hace $|x| \to \infty$ *sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:*

Teorema 31.166 (Teorema 4.2, Dai [10]) *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{31.1.648}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ *es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo* $|q| \to \infty$ *mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado* $\overline{Q}^x$ *es solución del siguiente modelo de flujo.*

Definición 31.215 (Definición 3.3, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

Lema 31.24 (Lema 3.1, Dai y Meyn [11]) *Si el modelo de flujo definido por (32.2.348)-(32.2.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 31.167 (Teorema 2.1, Down [15]) *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces* *i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p, \tag{31.1.649}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{31.1.650}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)\right]| = 0. \tag{31.1.651}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right)ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right], \; \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{31.1.652}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.*

Teorema 31.168 (Teorema 2.3, Down [15]) *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{31.1.653}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 32.95.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 33.57

31.1.62. Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N\left(\omega\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right] = \overline{N} > 0$;

2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right] \leq \overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- *Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^m$*
- *La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^m\left(n\right)$, con $\delta_{j,j^{'}}^m\left(n\right)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^m\left(1\right)\right] \geq 0$.*

- *Sea* $\left\{p_j^m\right\}$ *la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición* $\left(r_{j,j'}^m\right)$, *se supone que ésta existe.*
- *Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como*

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j^m r_{j,j'}^m \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}^m (i)\right]. \tag{31.1.654}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq 1}$ *son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas* $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq 1}$*; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por* $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ *y la tasa de servicio como* $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$, *finalmente se define la carga de la cola como* $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, *donde se pide que* $\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k < 1$, *para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [19].*

Si denotamos por

- $Q_k(t)$ *el número de usuarios presentes en la cola* k *al tiempo* t;
- $A_k(t)$ *los residuales de los tiempos entre arribos a la cola* k; *para cada servidor* m;
- $B_m(t)$ *denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo* t;
- $B_m^0(t)$ *los residuales de los tiempos de traslado de la cola* k *a la próxima por atender al tiempo* t,
- *sea* $C_m(t)$ *el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola* k *al tiempo* t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right), \tag{31.1.655}$$

para $k = 1, \ldots, K$ *y* $m = 1, 2, \ldots, M$, *donde* T *indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso* X *evoluciona en el espacio de estados:* $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

Supuestos Básicos

A1) *Los procesos* $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ *son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) *Para algún entero* $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ *es la clase de posibles arribos.*

A3) *Para cada* $k = 1, 2, \ldots, K$ *existe una función positiva* $q_k(\cdot)$ *definida en* $\mathbb{R}_+$, *y un entero* j_k, *tal que*

$$P\left(\xi_k(1) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{31.1.656}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{31.1.657}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [11] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') *Para el Proceso de Markov* X, *cada subconjunto compacto del espacio de estados de* X *es un conjunto pequeño, ver definición 32.110.*

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ *es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [10, 11].*

31.1.63. Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [14], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [14], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [11], dado por

$$\left(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_{t},X\left(t\right),\theta_{t},P_{x}\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [36]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X=\left\{X\left(t\right),t\geq0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_{t},t\geq0\right\}$; la colección $\left\{P_{x},x\in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x\in\mathbb{X}$

$$P_{x}\left\{X\left(0\right)=x\right\}=1,$$

y

$$E_{x}\left\{f\left(X\circ\theta_{t}\right)|\mathcal{F}_{t}\right\}=E_{X}\left(\tau\right)f\left(X\right),$$

en $\left\{\tau<\infty\right\}$, P_{x}-c.s., con θ_{t} definido como el operador shift.
Donde τ es un $\mathcal{F}_{t}$-tiempo de paro

$$\left(X\circ\theta_{\tau}\right)\left(w\right)=\left\{X\left(\tau\left(w\right)+t,w\right),t\geq0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [10, 21].

Sea $P^{t}\left(x,D\right)$, $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t\geq0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^{t}\left(x,D\right)=P_{x}\left(X\left(t\right)\in D\right).$$

Definición 31.216 *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right)=\int_{\mathbb{X}}P^{t}\left(x,D\right)\pi\left(dx\right),$$

para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t\geq0$.

Definición 31.217 *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$, tal que si $\nu\left(D\right)>0$ y $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_{x}\left\{\tau_{D}<\infty\right\}\equiv1,$$

cuando $\tau_{D}=inf\left\{t\geq0:X_{t}\in D\right\}$.

Nota 31.26 *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [19]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}\left(\cdot\right)=\int_{\mathbf{X}}P_{x}\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right),$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [11].

Definición 31.218 *Un conjunto $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t>0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta>0$ tal que*

$$P^{t}\left(x,A\right)\geq\delta\nu\left(A\right),$$

para $x\in D,A\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [10]:

Lema 31.52 (Lema 3.1, Dai [10]) *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x\left[\tau_B(\delta)\right] < \infty, \tag{31.1.658}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 31.53 (Lema 3.1, Dai [10]) *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 31.169 (Teorema 3.1, Dai [10]) *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{31.1.659}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (32.2.358) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

31.1.64. Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- *$Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,*
- *$T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.*
- *$T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.*

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{31.1.660}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$, ver [15]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama Modelo de Flujo *y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [15, 10, 11].*

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M}\mu_k\overline{T}_{m,k}(t), \tag{31.1.661}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{31.1.662}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{31.1.663}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{31.1.664}$$

Definición 31.219 (Definición 4.1, Dai [10]) *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ en (32.2.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (32.2.348)-(32.2.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 31.220 *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 31.170 (Teorema 4.2, Dai [10]) *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x| t). \tag{31.1.665}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 31.221 (Definición 3.3, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 31.25 (Lema 3.1, Dai y Meyn [11]) *Si el modelo de flujo definido por (32.2.348)-(32.2.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 31.171 (Teorema 2.1, Down [15]) *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p \right] ds \leq \kappa_p, \tag{31.1.666}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t \to \infty} \mathbb{E}_x \left[Q_k(t)^r \right] = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right] \leq \kappa_r, \tag{31.1.667}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t \to \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x \left[Q_k(t) \right] - \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0) \right]| = 0. \tag{31.1.668}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s) \, ds = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right], \ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{31.1.669}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los sistemas de visitas cíclicas, *es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.*

Teorema 31.172 (Teorema 2.3, Down [15]) *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{31.1.670}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 32.95.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 33.57

CAPÍTULO 32

Sistemas de Visita

32.1. Preliminares: Modelos de Flujo

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]=\overline{N}>0$;
2) $\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]\leq\overline{N}$ *para cualquier valor de* ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- *Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$*
- *La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(1)\right]\geq0$.*
- *Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.*
- *Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como*

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}^{m}r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(i)\right]. \tag{32.1.1}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}(n)\right\}_{n\geq1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}(n)\right\}_{n\geq1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}<1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [19].

Si denotamos por

- *$Q_{k}(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;*
- *$A_{k}(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;*

- $B_m(t)$ *denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo* t;
- $B_m^0(t)$ *los residuales de los tiempos de traslado de la cola* k *a la próxima por atender al tiempo* t,
- *sea* $C_m(t)$ *el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola* k *al tiempo* t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right), \tag{32.1.2}$$

para $k = 1, \ldots, K$ *y* $m = 1, 2, \ldots, M$, *donde* T *indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso* X *evoluciona en el espacio de estados:* $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

32.1.1. Supuestos Básicos

A1) *Los procesos* $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ *son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) *Para algún entero* $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ *es la clase de posibles arribos.*

A3) *Para cada* $k = 1, 2, \ldots, K$ *existe una función positiva* $q_k(\cdot)$ *definida en* $\mathbb{R}_+$, *y un entero* j_k, *tal que*

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{32.1.3}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx, \ 0 \leq a < b. \tag{32.1.4}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [11] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') *Para el Proceso de Markov* X, *cada subconjunto compacto del espacio de estados de* X *es un conjunto pequeño, ver definición 32.110.*

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ *es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [10, 11].*

32.1.2. Procesos Regenerativos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.
Si x *es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y* $N_s(x) = N(x)$ *es el número de usuarios que son atendidos con la política* s, *única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:*

(S1.)

$$lim_{x\to\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0. \tag{32.1.5}$$

(S2.)

$$\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}, \tag{32.1.6}$$

para cualquier valor de x.

- *La* n*-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud* $\delta_{j,j+1}(n)$, *independientes e idénticamente distribuidas, con* $\mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)] \geq 0$.

- *Se define*
$$\delta^{*} := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]. \tag{32.1.7}$$
- *Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma* $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$*, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.*
- *Los tiempos de servicio* $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ *tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.*
- *Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como* $\lambda_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ *y además se define*
- *la tasa de servicio para la k-ésima cola como* $\mu_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$
- *también se define* $\rho_{k} = \lambda_{k}/\mu_{k}$*, donde es necesario que* $\rho < 1$ *para cuestiones de estabilidad.*
- *De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).*

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $\left(X\left(t\right)\right)_{t\in\mathbb{R}}$*, donde el estado del sistema al tiempo* $t \geq 0$ *está dado por*

$$X\left(t\right) = \left(Q\left(t\right), A\left(t\right), H\left(t\right), B\left(t\right), B^{0}\left(t\right), C\left(t\right)\right) \tag{32.1.8}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \left(\left\{1, 2, \ldots, K\right\} \times \left\{1, 2, \ldots, S\right\}\right)^{M} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}^{K}, \tag{32.1.9}$$

- $Q\left(t\right) = \left(Q_{k}\left(t\right), 1 \leq k \leq K\right)$*, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.*
- $A\left(t\right) = \left(A_{k}\left(t\right), 1 \leq k \leq K\right)$*, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.*
- $H\left(t\right)$ *es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.*
- $B\left(t\right)$ *es el tiempo de servicio residual.*
- $B^{0}\left(t\right)$ *es el tiempo residual del cambio de cola.*
- $C\left(t\right)$ *indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en* $H\left(t\right)$*.*

$A_{k}\left(t\right), B_{m}\left(t\right)$ *y* $B_{m}^{0}\left(t\right)$ *se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([10])*

- *Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma* $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$*, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.*
- *Los tiempos de servicio* $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ *tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.*
- *Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como* $\lambda_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ *y además se define*
- *la tasa de servicio para la k-ésima cola como* $\mu_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$
- *también se define* $\rho_{k} = \lambda_{k}/\mu_{k}$*, donde es necesario que* $\rho < 1$ *para cuestiones de estabilidad.*
- *De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).*

32.1.3. Preliminares

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_{s}\left(x\right) = N\left(x\right)$ *es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:*

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right] = \overline{N} > 0$
2) $\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right] \leq \overline{N}$*para cualquier valor de x.*

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- *Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola* $j^{'}$ *con probabilidad* $r_{j,j^{'}}^{m} = r_{j,j^{'}}$

- *La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud* $\delta_{j,j'}(n)$, *independientes e idénticamente distribuidas, con* $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- *Sea* $\{p_j\}$ *la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición* $\left(r_{j,j'}\right)$.
- *Finalmente, se define*

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(i)\right]. \tag{32.1.10}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, *y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas* $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$, *donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como* $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ *y la tasa de servicio como* $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, *finalmente se define la carga de la cola como* $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, *donde se pide que* $\rho < 1$, *para garantizar la estabilidad del sistema.*

Se denotará por $Q_k(t)$ *el número de usuarios en la cola* k, $A_k(t)$ *los residuales de los tiempos entre arribos a la cola* k; *para cada servidor* m, *se denota por* $B_m(t)$ *los residuales de los tiempos de servicio al tiempo* t; $B_m^0(t)$ *son los residuales de los tiempos de traslado de la cola* k *a la próxima por atender, al tiempo* t, *finalmente sea* $C_m(t)$ *el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola* k *al tiempo* t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{32.1.11}$$

para $k = 1,\ldots,K$ *y* $m = 1,2,\ldots,M$. X *evoluciona en el espacio de estados:* $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1,2,\ldots,K\} \times \{1,2,\ldots,S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1,\ldots,\xi_K,\eta_1,\ldots,\eta_K$ *son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1,\ldots,K.$$

donde $\mathcal{A}$ *es la clase de posibles arribos.*

A3) Para $k = 1,2,\ldots,K$ *existe una función positiva* $q_k(x)$ *definida en* $\mathbb{R}_+$, *y un entero* j_k, *tal que*

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{32.1.12}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{32.1.13}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto A2) *para* $p = 1$, *es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.*

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [11] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, *cada subconjunto compacto de* X *es un conjunto pequeño, ver definición 32.110.*

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ *es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:*

32.1.4. Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [14], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (32.4), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([14], páginas 362-364).
Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [11]

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [36]) en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$. *El Proceso* $X = \{X(t), t \geq 0\}$ *tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en* $(\Omega, \mathcal{F})$ *y está adaptado a* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$*; la colección* $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ *son medidas de probabilidad en* $(\Omega, \mathcal{F})$ *tales que para todo* $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t)|\mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x*-c.s. Donde* τ *es un* $\mathcal{F}_t$*-tiempo de paro*

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f *es una función de valores reales acotada y medible con la* σ*-algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.*

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ *probabilidad de transición de* X *definida como*

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D)$$

Definición 32.1 *Una medida no cero* π *en* $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ *es* **invariante** *para* X *si* π *es* σ*-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbf{X}} P^t(x, D)\, \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, *con* $t \geq 0$.

Definición 32.2 *El proceso de Markov* X *es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad* ν *en* $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$, *tal que si* $\nu(D) > 0$ *y* $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 32.1 *i) Si* X *es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante* π *(Getoor [19]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama Proceso Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X *es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso* π *denota la distribución estacionaria y hacemos*

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\, \pi(dx)$$

y se utiliza E_π *para denotar el operador esperanza correspondiente.*

Definición 32.3 *Un conjunto* $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ *es llamado pequeño si existe un* $t > 0$, *una medida de probabilidad* ν *en* $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, *y un* $\delta > 0$ *tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [10]:

Lema 32.1 (Lema 3.1, Dai[10]) *Sea* B *conjunto pequeño cerrado, supongamos que* $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ *y que para algún* $\delta > 0$ *se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{32.1.14}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. *Entonces,* X *es un proceso Harris Recurrente Positivo.*

Lema 32.2 (Lema 3.1, Dai [10]) *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{|x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 32.1 (Teorema 3.1, Dai[10]) *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^{x}\left(|x|\delta\right)| = 0, \tag{32.1.15}$$

entonces la ecuación (32.2.358) se cumple para $B = \{|x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.

Nota 32.2 *En Meyn and Tweedie [**?**] muestran que si $P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1$ incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

32.2. Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in X$, sea $Q_{k}^{x}\left(t\right)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^{x}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_{m}^{x,0}\left(|x|t\right)\right) \tag{32.2.1}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}_{m}\left(t\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(t\right)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama ***Modelo de Flujo****.*

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right) = \overline{Q}_{k}\left(0\right) + \lambda_{k}t - \sum_{m=1}^{M}\mu_{k}\overline{T}_{m,k}\left(t\right) \tag{32.2.2}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{32.2.3}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente}, \tag{32.2.4}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$,

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^{0}\left(t\right) + \overline{T}_{m,k}\left(t\right) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{32.2.5}$$

De acuerdo a Dai [10], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (32.2.348)-(32.2.351), se le llama Modelo de Flujo.

Definición 32.4 (Definición 4.1, , Dai [10]) *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ en (32.2.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (32.2.348)-(32.2.351) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.*

Al conjunto de ecuaciones dadas en 32.2.348-32.2.351 se le llama Modelo de flujo *y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.*

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 32.2 (Teorema 4.2, Dai[10]) *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{32.2.6}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 32.5 (Definición 3.3, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [8].

Lema 32.1 (Lema 3.1, Dai y Meyn [11]) *Si el modelo de flujo definido por 32.2.348-32.2.351 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 32.3 (Teorema 2.1, Down [15]) *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p \right] ds \leq \kappa_p, \tag{32.2.7}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x \left[Q_k(t)^r \right] = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right] \leq \kappa_r, \tag{32.2.8}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x \left[Q_k(t) \right] - \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0) \right] = 0. \tag{32.2.9}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right], \ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{32.2.10}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 32.4 (Teorema 2.3, Down [15]) *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{32.2.11}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 32.95.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 33.57

Teorema 32.5 *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{32.2.12}$$

en $\{T < \infty\}$.

32.2.1. Teorá de Procesos Estocásticos y Medibilidad

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{32.2.13}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_\mathbf{v}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{32.2.14}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{32.2.15}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.
Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.
El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{32.2.16}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[1]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

[1]Revisar página 362, y 364 de Davis [14].

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 32.1 (Supuesto 3.1, Davis [14]) *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[N_t\right] < \infty \text{ para toda } t. \tag{32.2.17}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 32.6 *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 32.7 *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 32.8 *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{32.2.18}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 32.6 *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 32.9 *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*[2]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B). \tag{32.2.19}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[3] *(32.2.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si*

$$\mathbb{P}\left\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{32.2.21}$$

Definición 32.10 *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 32.3 *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (32.2.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\right\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{32.2.22}$$

La ecuación anterior es la Propiedad Simple de Markov *de X relativa a (P_t).*

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (32.2.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

---

[2] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[3]
$$\mathbb{P}\left\{H | \mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H | X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{32.2.20}$$

Definición 32.11 *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t\rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 32.12 (HD1) *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ tal que $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 32.13 *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E,\mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) *$(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) *$(\theta_t)_{t\geq 0}$ es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t,s\geq 0$,*

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s} \text{ y } X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{32.2.23}$$

iii) *Para cualquier $x\in E$,$\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}=1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (32.2.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.*

Definición 32.14 (HD2) *Para cualquier $\alpha>0$ y cualquier $f\in S^{\alpha}$, el proceso $t\rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 32.15 *Un sistema $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) *$\mathbf{X}$ es una realización continua por la derecha, 32.100, de (P_t).*

ii) *$\mathbf{X}$ satisface la condicion HD2, 32.101, relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) *$\mathcal{G}_t$ es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 32.3 (Lema 4.2, Dai[10]) *Sea $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ con $|x_n|\rightarrow\infty$, conforme $n\rightarrow\infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0)=\overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n\rightarrow\infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t])\rightarrow P_k^{'}t,\ u.o.c., \tag{32.2.24}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{32.2.25}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{32.2.26}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k=1/m_k=1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$.

Lema 32.4 (Lema 4.3, Dai[10]) *Sea $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ con $|x_n|\rightarrow\infty$, conforme $n\rightarrow\infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0)=\overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0)=\overline{V}_k.$$

a) *Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^+,\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^+.$$

b) *Para cada $t \geq 0$ fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right)=_k^x\left(0\right)+E_k^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right)\tag{32.2.27}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_i^x\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0,\tag{32.2.28}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right)=\left(T_1^x\left(t\right),\ldots,T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$
$$I^x\left(t\right)=\left(I_1^x\left(t\right),\ldots,I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right),\ldots,S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x\left(t\right)=Q^x\left(0\right)+E^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S^x\left(T^x\left(t\right)\right),\tag{32.2.29}$$

$$Q^x\left(t\right)\geq 0,\tag{32.2.30}$$

$$T^x\left(0\right)=0,\ y\ \overline{T}^x\left(t\right)\ \text{es no decreciente},\tag{32.2.31}$$

$$I^x\left(t\right)=et-CT^x\left(t\right)\ \text{es no decreciente}\tag{32.2.32}$$

$$\int_0^{\infty} (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{32.2.33}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \textit{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{32.2.34}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 32.94:

Teorema 32.7 (Teorema 4.1, Dai [10]) *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} \left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{32.2.35}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} \left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \ \textit{u.o.c.} \tag{32.2.36}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I - P)' M^{-1} \left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{32.2.37}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{32.2.38}$$

$$\overline{T}(t) \ \textit{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{32.2.39}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \ \textit{ es no decreciente,} \tag{32.2.40}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{32.2.41}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{32.2.42}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 32.1 *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de 32.2.197 y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K} \left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 32.5 (Lema 3.1 [8]) *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 32.8 (Teorema 5.1 [8]) *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$*, para toda* $t \geq t_0$.

Lema 32.6 (Lema 5.2 [20]) *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$*, y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$*, entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{32.2.43}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t \geq \delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 32.9 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [20]) *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$*. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$*, cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$*..*

Proposición 32.2 (Proposición 5.1 [11]) *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{32.2.44}$$

Proposición 32.3 (Proposición 5.3 [11]) *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p)\, dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{32.2.45}$$

Proposición 32.4 (Proposición 5.4 [11]) *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X*, sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$*, y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt\right]$$

para $x \in X$*. Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C*, entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{32.2.46}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 32.10 (Teorema 5.5 [11]) *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{32.2.47}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$*. En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \tag{32.2.48}$$

Teorema 32.11 (Teorema 6.2 [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \to 0$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 32.12 (Teorema 6.3 [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_x\left[Q_t\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_0\right]\right| = 0.$$

Proposición 32.5 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{32.2.49}$$

Lema 32.2 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [11]) *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{32.2.50}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 32.13 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{32.2.51}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 32.14 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p}, \; t \to \infty, x \in X. \tag{32.2.52}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 32.15 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\to\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{32.2.53}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\to\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 32.16 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{32.2.54}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 32.17 (Teorema 2.2, Down [15]) *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{32.2.55}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{32.2.56}$$

32.2.2. Construcción del Modelo de Flujo

Lema 32.7 (Lema 4.2, Dai[10]) *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k\left(\left[|x_n|t\right]\right) \rightarrow P_k^{'}t,\ u.o.c., \tag{32.2.57}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \alpha_k\left(t - \overline{U}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{32.2.58}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \mu_k\left(t - \overline{V}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{32.2.59}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$.

Lema 32.8 (Lema 4.3, Dai[10]) *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k\left(0\right) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k\left(0\right) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+,\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x(t)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_k^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{32.2.60}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{32.2.61}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$\begin{aligned} T^x(t) &= (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))', \\ I^x(t) &= (I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t))' \end{aligned}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \tag{32.2.62}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{32.2.63}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{32.2.64}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{32.2.65}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{32.2.66}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{32.2.67}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 32.94:

Teorema 32.18 (Teorema 4.1, Dai [10]) *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{32.2.68}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{32.2.69}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)' M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{32.2.70}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{32.2.71}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{32.2.72}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{32.2.73}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{32.2.74}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{32.2.75}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 32.6 *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de 32.2.197 y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$
$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$
$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$
$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$
para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j
$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$
$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$
para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Teorema 32.19 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [20]) *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \to \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \to \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \to \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 32.7 (Proposición 5.3 [11]) *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{32.2.76}$$

Proposición 32.8 (Proposición 5.4 [11]) *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{32.2.77}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Definición 32.16 *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 32.17 *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 32.18 *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 32.19 *Una función $f : X \to \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 32.20 *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 32.21 *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 32.22 *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 32.23 *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 32.24 *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{32.2.78}$$

Nota 32.4 *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (32.2.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{32.2.79}$$

Teorema 32.20 *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots, m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{32.2.80}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{32.2.81}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{32.2.82}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{32.2.83}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.
Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.
El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{32.2.84}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[4]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

[4]Revisar página 362, y 364 de Davis [14].

Supuestos 32.2 (Supuesto 3.1, Davis [14]) *Sea* $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ *el número de saltos en* $[0, t]$. *Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{32.2.85}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 32.25 *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 32.26 *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 32.27 *E es un espacio de Radón si cada medida finita en* $(E, \mathcal{B}(E))$ *es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 32.28 *Una medida finita,* λ *en la* σ*-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{32.2.86}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 32.21 *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en* $(E, \mathcal{B}(E))$ *es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ*-álgebra de Borel en E, que se denotará por* $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *espacio de probabilidad,* $I \subset \mathbb{R}$ *conjunto de índices. Sea* $\mathcal{F}_{\leq t}$ *la* σ*-álgebra natural definida como* $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. *Se considerará una* σ*-álgebra más general,* $(\mathcal{G}_t)$ *tal que* (X_t) *sea* $\mathcal{E}$*-adaptado.*

Definición 32.29 *Una familia* $(P_{s,t})$ *de kernels de Markov en* $(E, \mathcal{E})$ *indexada por pares* $s, t \in I$, *con* $s \leq t$ *es una función de transición en* $(E, \mathcal{E})$, *si para todo* $r \leq s < t$ *en I y todo* $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{5}. \tag{32.2.87}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ *en* $(E, \mathcal{E})$ *es la función de transición para un proceso* $(X_t)_{t \in I}$ *con valores en E y que satisface la propiedad de Markov*[6] *(32.2.309) relativa a* $(\mathcal{G}_t)$ *si*

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{32.2.89}$$

Definición 32.30 *Una familia* $(P_t)_{t \geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E, \mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 32.5 *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (32.2.310) con función de transición homogénea (P_t) *tiene la propiedad característica*

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{32.2.90}$$

La ecuación anterior es la Propiedad Simple de Markov *de X relativa a* (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ *cumple con la propiedad de Markov (32.2.311) relativa a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *con semigrupo de transición* (P_t).

[5] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[6]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{32.2.88}$$

Definición 32.31 *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 32.32 (HD1) *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 32.33 *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{32.2.91}$$

iii) Para cualquier $x \in E$,$\mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (32.2.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 32.34 (HD2) *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 32.35 *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 32.100, de (P_t).*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 32.101, relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 32.9 (Lema 4.2, Dai[10]) *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{32.2.92}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k\left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{32.2.93}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k\left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{32.2.94}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 32.10 (Lema 4.3, Dai[10]) *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t\geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right)=_k^x\left(0\right)+E_k^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{32.2.95}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_i^x\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{32.2.96}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right)=\left(T_1^x\left(t\right),\ldots,T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$
$$I^x\left(t\right)=\left(I_1^x\left(t\right),\ldots,I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right),\ldots,S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x\left(t\right)=Q^x\left(0\right)+E^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S^x\left(T^x\left(t\right)\right), \tag{32.2.97}$$

$$Q^x\left(t\right)\geq 0, \tag{32.2.98}$$

$$T^x\left(0\right)=0,\ y\ \overline{T}^x\left(t\right)\ \textit{es no decreciente}, \tag{32.2.99}$$

$$I^x\left(t\right)=et-CT^x\left(t\right)\ \textit{es no decreciente} \tag{32.2.100}$$

$$\int_0^{\infty} \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{32.2.101}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \textit{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{32.2.102}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 32.94:

Teorema 32.22 (Teorema 4.1, Dai [10]) *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{32.2.103}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \quad u.o.c. \tag{32.2.104}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I - P)' M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{32.2.105}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{32.2.106}$$

$$\overline{T}(t) \textit{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{32.2.107}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \textit{ es no decreciente,} \tag{32.2.108}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{32.2.109}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{32.2.110}$$

Definición 32.36 (Definición 4.1, , Dai [10]) *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en 33.1.122 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (33.1.123)-(33.1.128) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 32.23 (Teorema 4.2, Dai[10]) *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \tag{32.2.111}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 32.2.216-32.2.182 se le llama Modelo de flujo *y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 32.37 (Definición 3.3, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [8].

Lema 32.3 (Lema 3.1, Dai y Meyn [11]) *Si el modelo de flujo definido por 32.2.216-32.2.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 32.9 *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de 32.2.197 y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) *Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.*

ii) *Para todo $t \geq 0$*

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) *Para todo $1 \leq k \leq K$*

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) *Para todo $1 \leq k \leq K$*

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) *Para todo k, j*

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) *Para todo $1 \leq k \leq K$*

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 32.11 (Lema 3.1 [8]) *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 32.24 (Teorema 5.2 [8]) *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 32.25 (Teorema 5.1 [8]) *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 32.12 (Lema 5.2 [20]) *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{32.2.112}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) *Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$*

b) *Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.*

Teorema 32.26 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [20]) *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 32.10 (Proposicin 5.1 [11]) *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{32.2.113}$$

Proposición 32.11 (Proposición 5.3 [11]) *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1+|X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right) \tag{32.2.114}$$

Proposición 32.12 (Proposición 5.4 [11]) *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{32.2.115}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 32.27 (Teorema 5.5 [11]) *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{32.2.116}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{32.2.117}$$

Teorema 32.28 (Teorema 6.2[11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 32.29 (Teorema 6.3[11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 32.13 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{32.2.118}$$

Lema 32.4 (Lema 5.2, Dai y Meyn [11]) *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{32.2.119}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 32.30 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{32.2.120}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 32.31 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{32.2.121}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x[|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 32.32 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{32.2.122}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 32.33 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{32.2.123}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 32.34 (Teorema 2.2, Down [15]) *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{32.2.124}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{32.2.125}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- *Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,*

- *Los tiempos de servicio* $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ *tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,*
- *Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como* $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$,
- *la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como* $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$,
- *también se define* $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, *la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que* $\rho < 1$ *para cuestiones de estabilidad.*

En Dai [10] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X *es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que*

Para establecer que $X = \{X(t), t \geq 0\}$ *es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [21].*

Sea el proceso de Markov $X = \{X(t), t \geq 0\}$ *que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [11] y Meyn y Down [28] hacen ver que este se puede sustituir por*

A3') Para el Proceso de Markov X, *cada subconjunto compacto de* X *es un conjunto pequeño.*

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t *es*

$$X(t) = (Q(t), U(t), V(t)), \tag{32.2.126}$$

donde $Q(t)$ *es el número de usuarios formados en cada estación.* $U(t)$ *es el tiempo restante antes de que la siguiente clase* k *de usuarios lleguen desde fuera del sistema,* $V(t)$ *es el tiempo restante de servicio para la clase* k *de usuarios que están siendo atendidos. Tanto* $U(t)$ *como* $V(t)$ *se puede asumir que son continuas por la derecha.*

Sea $x = (Q(0), U(0), V(0)) = (q, a, b)$, *el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para* $l \in \mathcal{E}$, *donde* $\mathcal{E}$ *es el conjunto de clases de arribos externos, y* $k = 1, \ldots, K$ *se define*

$$\begin{aligned}
E_l^x(t) &= max\{r : U_l(0) + \xi_l(1) + \cdots + \xi_l(r-1) \leq t\} \quad t \geq 0,\\
S_k^x(t) &= max\{r : V_k(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(r-1) \leq t\} \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

Para cada k *y cada* n *se define*

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ *se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase* k *que termina en la estación* $s(k)$, *la s-éima componente de* $\phi^k(n)$ *es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase* l *y cero en otro caso, por lo tanto* $\phi^k(n)$ *es un vector* Bernoulli *de dimensión* K *con parámetro* $P_k^{'}$, *donde* P_k *denota el k-ésimo renglón de* $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k *la sucesión* $\phi^k(n) = \{\phi^k(n), n \geq 1\}$ *es independiente e idénticamente distribuida y que las* $\phi^1(n), \ldots, \phi^K(n)$ *son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.*

Lema 32.13 (Lema 4.2, Dai[10]) *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'}t, \ u.o.c., \tag{32.2.127}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+, \; u.o.c., \tag{32.2.128}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+, \; u.o.c., \tag{32.2.129}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$.

Lema 32.14 (Lema 4.3, Dai[10]) *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \; u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ *es el número total de servicios completados de la clase* l, *si la clase* l *está dando* t *unidades de tiempo de servicio. Sea* $T_l^x(x)$ *el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor* $s(l)$ *gasta en los usuarios de la clase* l *al tiempo* t. *Entonces* $S_l^x(T_l^x(t))$ *es el número total de servicios completados para la clase* l *al tiempo* t. *Una fracción de estos usuarios,* $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, *se convierte en usuarios de la clase* k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{32.2.130}$$

para $k = 1, \ldots, K$. *Para* $i = 1, \ldots, d$, *sea*

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j\in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ *es el monto acumulado del tiempo que el servidor* i *ha estado desocupado al tiempo* t. *Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor* i *está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación* i. *Entonces, se tiene que*

$$\int_0^\infty\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x(t)\right)dI_i^x(t) = 0, \tag{32.2.131}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$

$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^{x}\left(T^{x}\left(t\right)\right)=\left(S_{1}^{x}\left(T_{1}^{x}\left(t\right)\right),\ldots,S_{K}^{x}\left(T_{K}^{x}\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^{x}\left(t\right)=Q^{x}\left(0\right)+E^{x}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)-S^{x}\left(T^{x}\left(t\right)\right), \tag{32.2.132}$$

$$Q^{x}\left(t\right)\geq 0, \tag{32.2.133}$$

$$T^{x}\left(0\right)=0,\ y\ \overline{T}^{x}\left(t\right)\ \textit{ es no decreciente,} \tag{32.2.134}$$

$$I^{x}\left(t\right)=et-CT^{x}\left(t\right)\ \textit{ es no decreciente} \tag{32.2.135}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(CQ^{x}\left(t\right)\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0, \tag{32.2.136}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}^{x}\left(\cdot\right),\overline{T}^{x}\left(\cdot\right)\right)\textit{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{32.2.137}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\begin{cases}1, & S\left(k\right)=i,\\ 0, & \textit{en otro caso.}\end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 32.94:

Teorema 32.35 (Teorema 4.1, Dai [10]) *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\left\{x_{n}\right\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_{n}|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_{j}}\right\}$ con $|x_{n_{j}}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_{j}}|}\left(Q^{x_{n_{j}}}\left(0\right),U^{x_{n_{j}}}\left(0\right),V^{x_{n_{j}}}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(0\right),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{32.2.138}$$

$$\frac{1}{|x_{n_{j}}|}\left(Q^{x_{n_{j}}}\left(|x_{n_{j}}|t\right),T^{x_{n_{j}}}\left(|x_{n_{j}}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)\ \textit{u.o.c.} \tag{32.2.139}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{32.2.140}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0, \tag{32.2.141}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\ \textit{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{32.2.142}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right)\ \textit{ es no decreciente,} \tag{32.2.143}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0, \tag{32.2.144}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)\textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{32.2.145}$$

Definición 32.38 (Definición 4.1, , Dai [10]) *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ en 33.1.122 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (33.1.123)-(33.1.128) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta>0$ que depende de μ,α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv 0$.*

Teorema 32.36 (Teorema 4.2, Dai[10]) *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{\left|x\right|}Q^{x}\left(\left|x\right|t\right) \tag{32.2.146}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ *es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo* $\left|q\right|\rightarrow\infty$ *mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado* $\overline{Q}^{x}$ *es solución del siguiente modelo de flujo.*

Definición 32.39 (Definición 3.1, Dai y Meyn [11]) *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}\left(t\right) \tag{32.2.147}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq0\textit{ para }k=1,2,\ldots,K, \tag{32.2.148}$$

$$\overline{T}_{k}\left(0\right)=0,\textit{ y }\overline{T}_{k}\left(\cdot\right)\textit{ es no decreciente,} \tag{32.2.149}$$

$$\overline{I}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{k\in C_{i}}\overline{T}_{k}\left(t\right)\textit{ es no decreciente} \tag{32.2.150}$$

$$\overline{I}_{i}\left(\cdot\right)\textit{ se incrementa al tiempo }t\textit{ cuando }\sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0 \tag{32.2.151}$$

$$\textit{condiciones adicionales sobre }\left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right)\textit{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{32.2.152}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 32.2.216-32.2.182 se le llama Modelo de flujo *y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *se le denotará por* $\mathcal{Q}$.

Si se hace $\left|x\right|\rightarrow\infty$ *sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:*

Definición 32.40 (Definición 3.2, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}\left(0\right),\overline{B}\left(0\right)\right)\in\mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 32.2.216-32.2.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=\overline{Q}\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{A}\left(0\right)\right)^{+}-\left(I-P^{'}\right)M\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{B}\left(0\right)\right)^{+} \tag{32.2.153}$$

Definición 32.41 (Definición 3.3, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$, *con* $t\geq t_{0}$, *para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [8].

Lema 32.5 (Lema 3.1, Dai y Meyn [11]) *Si el modelo de flujo definido por 32.2.216-32.2.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_{0}>0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$ *para cualquier* $t\geq t_{0}$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq1$.

El resultado principal de Down [15] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 32.37 (Teorema 2.1, Down [15]) *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_{p}, *y para cada condición inicial* $x\in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\sup\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}, \tag{32.2.154}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right]\leq\kappa_{r}, \tag{32.2.155}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$. *Donde* π *es la probabilidad invariante para* $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]=0. \tag{32.2.156}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_k\left(0\right)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{32.2.157}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$.

Proposición 32.14 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{32.2.158}$$

Lema 32.6 (Lema 5.2, Dai y Meyn [11]) *Sea $\{\zeta\left(k\right):k\in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{32.2.159}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r:t\geq1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 32.38 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{32.2.160}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 32.39 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{32.2.161}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 32.40 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_f=0. \tag{32.2.162}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 32.41 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_X\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{32.2.163}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 32.42 (Teorema 2.2, Down [15]) *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{32.2.164}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{32.2.165}$$

Teorema 32.43 (Teorema 2.3, Down [15]) *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{32.2.166}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 32.37.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 33.57

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i). \tag{32.2.167}$$

suponiendo que el estado inicial de la red es $x = (q, a, b) \in X$, entonces para cada k

$$E_k^x(t) := \text{máx}\{n \geq 0 : A_k^x(0) + \psi_k(1) + \cdots + \psi_k(n-1) \leq t\} \tag{32.2.168}$$

$$S_k^x(t) := \text{máx}\{n \geq 0 : B_k^x(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(n-1) \leq t\} \tag{32.2.169}$$

Sea $T_k^x(t)$ el tiempo acumulado que el servidor $s(k)$ ha utilizado en los usuarios de la clase k en el intervalo $[0, t]$. Entonces se tienen las siguientes ecuaciones:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{k} \Phi_k^l S_l^x(T_l^x) - S_k^x(T_k^x) \tag{32.2.170}$$

$$Q^x(t) = \left(Q_1^x(t), \ldots, Q_K^x(t)\right)' \geq 0, \tag{32.2.171}$$

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)' \geq 0,\ \textit{es no decreciente} \tag{32.2.172}$$

$$I_i^x(t) = t - \sum_{k\in C_i} T_k^x(t)\ \textit{es no decreciente} \tag{32.2.173}$$

$$\int_0^\infty \sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{32.2.174}$$

$$\textit{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \textit{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{32.2.175}$$

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \tag{32.2.176}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola. Si se hace $|q| \rightarrow \infty$ y se mantienen las componentes restantes fijas, de la condición inicial x, cualquier punto límite del proceso normalizado $\overline{Q}^x$ es una solución del siguiente modelo de flujo, ver [10].

Definición 32.42 *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $\left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right)$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)'$ y $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)'$*

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk}\mu_l \overline{T}_l(t) \tag{32.2.177}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \ \textit{para}\ k = 1, 2, \ldots, K, \tag{32.2.178}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{32.2.179}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k\in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{32.2.180}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempot cuando } \sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{32.2.181}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{32.2.182}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 32.2.216-32.2.182 se le llama Modelo de flujo *y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *se le denotará por* $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ *sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:*

Definición 32.43 *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 32.2.216-32.2.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{32.2.183}$$

Definición 32.44 *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en [8].

Lema 32.7 *Si el modelo de flujo definido por 32.2.216-32.2.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|overlinex| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Supuestos necesarios sobre la red

Supuestos 32.3 *A1)* $\psi_1, \ldots, \psi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ *son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\psi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ *es un singleton, y para cada* $k \in \mathcal{A}$*, existe una función positiva* $q_k(x)$ *definida en* $\mathbb{R}_+$*, y un entero* j_k*, tal que*

$$P(\psi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{32.2.184}$$

$$P(\psi_k(1) + \ldots \psi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\, dx0 \text{ y} \tag{32.2.185}$$

$$\int_0^\infty q_k(x)\, dx > 0 \tag{32.2.186}$$

*El argumento dado en [**?**] en el lema 32.8 se puede aplicar para deducir que todos los subconjuntos compactos de* X *son pequeños.Entonces la condición* $A3$) *se puede generalizar a*

A3') Para el proceso de Markov X*, cada subconjunto compacto de* X *es pequeño.*

Teorema 32.44 *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p*, y para cada condición inicial* $x \in X$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] ds \leq \kappa_p \tag{32.2.187}$$

donde p es el entero dado por A2). Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r \tag{32.2.188}$$

para $r = 1, \ldots, p$ *y* $k = 1, \ldots, K$.

iii) EL primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0. \tag{32.2.189}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right] \tag{32.2.190}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r=1,\ldots,p$ y $k=1,\ldots,K$.

Demostración 32.1 *La demostración de este resultado se da aplicando los teoremas 32.45, 33.53, 33.54 y 32.48*

Definimos un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada. Bajo cualquier preemptive buffer priority *disciplina de servicio, el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$ a cualquier tiempo t puede definirse como*

$$\mathbb{X}\left(t\right)=\left(Q_{k}\left(t\right),A_{l}\left(t\right),B_{k}\left(t\right):k=1,2,\ldots,K,l\in\mathcal{A}\right) \tag{32.2.191}$$

donde $Q_{k}\left(t\right)$ es la longitud de la cola para los usuarios de la clase k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_{k}\left(t\right)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio. Los tiempos de arribo residuales, que son iguales al tiempo que queda hasta que el próximo usuario de la clase k llega, se denotan por $A_{k}\left(t\right)$. Tanto $B_{k}\left(t\right)$ como $A_{k}\left(t\right)$ se suponen continuos por la derecha.

Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$, y sea $x=\left(q,a,b\right)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x=\left(q,a,b\right)\in\mathbb{X}$ definimos la norma *de x como $\|x|=|q|+|a|+|b|$. En [10] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que*

$$\left(\left(\Omega,\mathcal{F}\right),\mathcal{F}_{t},\mathbb{X}\left(t\right),\theta_{t},P_{x}\right)$$

es un proceso de Borel Derecho en el espacio de estadio medible $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X=\left\{\mathbb{X}\left(t\right),t\geq0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, est definida en $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ y est adaptado a $\left\{\mathcal{F}_{t},t\geq0\right\}$; $\left\{P_{x},x\in X\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x\in X$

$$P_{x}\left\{\mathbb{X}\left(0\right)=x\right\}=1$$

y

$$E_{x}\left\{f\left(X\circ\theta_{t}\right)|\mathcal{F}_{t}\right\}=E_{X}\left(\tau\right)f\left(X\right)$$

en $\left\{\tau<\infty\right\}$, P_{x}-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_{t}$-tiempo de paro

$$\left(X\circ\theta_{\tau}\right)\left(w\right)=\left\{\mathbb{X}\left(\tau\left(w\right)+t,w\right),t\geq0\right\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la sigma algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^{t}\left(x,D\right)$, $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t\geq0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^{t}\left(x,D\right)=P_{x}\left(\mathbb{X}\left(t\right)\in D\right)$$

Definición 32.45 *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right)=\int_{X}P^{t}\left(x,D\right)\pi\left(dx\right)$$

para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t\geq0$.

Definición 32.46 *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$, tal que si $\nu\left(D\right)>0$ y $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_{x}\left\{\tau_{D}<\infty\right\}\equiv1$$

cuando $\tau_{D}=\inf\left\{t\geq0:\mathbb{X}_{t}\in D\right\}$.

- *Si X es Harris recurrente, entonces una única medida invariante π existe ([19]).*

- *Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama* Harris recurrente positiva.
- *Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria y hacemos*

$$P_{\pi}\left(\cdot\right)[=\int_{X}P_{x}\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right)$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, as, el proceso $X=\left\{\mathbb{X}\left(t\right),t\geq0\right\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_{π}

Definición 32.47 *Un conjunto $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t>0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta>0$ tal que*

$$P^{t}\left(x,A\right)\geq\delta\nu\left(A\right)$$

para $x\in D,A\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.[7]

El modelo está compuesto por c colas de capacidad infinita, etiquetadas de 1 a c las cuales son atendidas por s servidores. Los servidores atienden de acuerdo a una cadena de Markov independiente $\left(X_{n}^{i}\right)_{n}$ con $1\leq i\leq s$ y $n\in\left\{1,2,\ldots,c\right\}$ con la misma matriz de transición $r_{k,l}$ y única medida invariante $\left(p_{k}\right)$. Cada servidor permanece atendiendo en la cola un periodo llamado de visita y determinada por la política de servicio asignada a la cola.

Los usuarios llegan a la cola k con una tasa λ_{k} y son atendidos a una razón μ_{k}. Las sucesiones de tiempos de interarribo $\left(\tau_{k}\left(n\right)\right)_{n}$, la de tiempos de servicio $\left(\sigma_{k}^{i}\left(n\right)\right)_{n}$ y la de tiempos de cambio $\left(\sigma_{k,l}^{0,i}\left(n\right)\right)_{n}$ requeridas en la cola k para el servidor i son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas con distribución general independiente de i, con media $\sigma_{k}=\frac{1}{\mu_{k}}$, respectivamente $\sigma_{k,l}^{0}=\frac{1}{\mu_{k,l}^{0}}$, e independiente de las cadenas de Markov $\left(X_{n}^{i}\right)_{n}$. Además se supone que los tiempos de interarribo se asume son acotados, para cada $\rho_{k}=\lambda_{k}\sigma_{k}<s$ para asegurar la estabilidad de la cola k cuando opera como una cola $M/GM/1$. Una política de servicio determina el número de usuarios que serán atendidos sin interrupción en periodo de servicio por los servidores que atienden a la cola. Para un solo servidor esta se define a través de una función f donde $f\left(x,a\right)$ es el número de usuarios que son atendidos sin interrupción cuando el servidor llega a la cola y encuentra x usuarios esperando dado el tiempo transcurrido de interarribo a. Sea $v\left(x,a\right)$ la duración del periodo de servicio para una sola condición inicial $\left(x,a\right)$.

Las políticas de servicio consideradas satisfacen las siguientes propiedades:

i) Hay conservación del trabajo, es decir

$$v\left(x,a\right)=\sum_{l=1}^{f\left(x,a\right)}\sigma\left(l\right)$$

con $f\left(0,a\right)=v\left(0,a\right)=0$, donde $\left(\sigma\left(l\right)\right)_{l}$ es una sucesión independiente e idénticamente distribuida de los tiempos de servicio solicitados.

ii) La selección de usuarios para se atendidos es independiente de sus correspondientes tiempos de servicio y del pasado hasta el inicio del periodo de servicio. Así las distribución $\left(f,v\right)$ no depende del orden en el cuál son atendidos los usuarios.

iii) La política de servicio es monótona en el sentido de que para cada $a\geq0$ los números $f\left(x,a\right)$ son monótonos en distribución en x y su límite en distribución cuando $x\rightarrow\infty$ es una variable aleatoria F^{*0} que no depende de a.

iv) El número de usuarios atendidos por cada servidor es acotado por $f^{min}\left(x\right)$ de la longitud de la cola x que además converge monótonamente en distribución a F^{*} cuando $x\rightarrow\infty$

El sistema de colas se describe por medio del proceso de Markov $\left(X\left(t\right)\right)_{t\in\mathbb{R}}$ como se define a continuación. El estado del sistema al tiempo $t\geq0$ está dado por

$$X\left(t\right)=\left(Q\left(t\right),P\left(t\right),A\left(t\right),R\left(t\right),C\left(t\right)\right)$$

donde

[7] En [?] muestran que si $P_{x}\left\{\tau_{D}<\infty\right\}\equiv1$ solamente para uno conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris recurrente

- $Q(t) = (Q_k(t))_{k=1}^{c}$, *número de usuarios en la cola k al tiempo t.*
- $P(t) = \left(P^i(t)\right)_{i=1}^{s}$, *es la posición del servidor i.*
- $A(t) = (A_k(t))_{k=1}^{c}$, *es el residual del tiempo de arribo en la cola k al tiempo t.*
- $R(t) = \left(R_k^i(t), R_{k,l}^{0,i}(t)\right)_{k,l,i=1}^{c,c,s}$, *el primero es el residual del tiempo de servicio del usuario atendido por servidor i en la cola k al tiempo t, la segunda componente es el residual del tiempo de cambio del servidor i de la cola k a la cola l al tiempo t.*
- $C(t) = \left(C_k^i(t)\right)_{k,i=1}^{c,s}$, *es la componente correspondiente a la cola k y al servidor i que está determinada por la política de servicio en la cola k y que hace al proceso $X(t)$ un proceso de Markov.*

Todos los procesos definidos arriba se suponen continuos por la derecha.
El proceso X tiene la propiedad fuerte de Markov y su espacio de estados es el espacio producto

$$\mathcal{X} = \mathbb{N}^c \times E^s \times \mathbb{R}_+^c \times \mathbb{R}_+^{cs} \times \mathbb{R}_+^{c^2 s} \times \mathcal{C}$$

donde $E = \{1, 2, \ldots, c\}^2 \cup \{1, 2, \ldots, c\}$ y $\mathcal{C}$ depende de las políticas de servicio.
Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

a)
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0 \tag{32.2.192}$$

b)
$$\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N} \tag{32.2.193}$$

para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- *Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m} = r_{j,j^{'}}$*
- *La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right] \geq 0$.*
- *Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.*
- *Finalmente, se define*
$$\delta^* := \sum_{j,j^{'}} p_j r_{j,j^{'}} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right]. \tag{32.2.194}$$

El token passing ring *es una estación de un solo servidor con K clases de usuarios. Cada clase tiene su propio regulador en la estación. Los usuarios llegan al regulador con razón α_k y son atendidos con taza μ_k.*
La red se puede modelar como un Proceso de Markov con espacio de estados continuo, continuo en el tiempo:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t), B_k^0(t), C(t) : k = 1, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right) \tag{32.2.195}$$

donde $Q_k(t), B_k(t)$ y $A_k(t)$ se define como en 32.2.210, $B_k^0(t)$ es el tiempo residual de cambio de la clase k a la clase $k+1\,(modK)$; $C(t)$ indica el número de servicios que han sido comenzados y/o completados durante la sesión activa del buffer.
Los parámetros cruciales son la carga nominal de la cola k: $\beta_k = \alpha_k/\mu_k$ y la carga total es $\rho_0 = \sum \beta_k$, la media total del tiempo de cambio en un ciclo del token está definido por

$$u^0 = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}\left[\eta_k^0(1)\right] = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\mu_k^0} \tag{32.2.196}$$

El proceso de la longitud de la cola $Q_k^x(t)$ y el proceso de acumulación del tiempo de servicio $T_k^x(t)$ para el buffer k y para el estado inicial x se definen como antes. Sea $T_k^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el token tarda en cambiar del buffer k al $k+1 \mod K$. Suponga que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^{x,0}(|x|t)\right) \tag{32.2.197}$$

cuando $|x| \rightarrow \infty$. *Entonces* $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right), \overline{T}^{0}\left(t\right)\right)$ *es un flujo límite retrasado del token ring.*
Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado

Proposición 32.15 *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de 32.2.197 y suponga que cuando* $x \rightarrow \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right), \frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right), \frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right), \frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_{k}\left(0\right), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right) = \overline{T}^{0}\left(0\right) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right) + \overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right) = \overline{Q}_{k}\left(0\right) + \alpha_{k}t - \mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right) = \beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right) = \mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right) = l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right) > 0$.

Lema 32.8 *El proceso estocástico* Φ *es un proceso de markov fuerte, temporalmente homogéneo, con trayectorias muestrales continuas por la derecha, cuyo espacio de estados* Y *es igual a* $X \times \mathbb{R}$

Proposición 32.16 *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{32.2.198}$$

Lema 32.9 *Sea* $\{\zeta\left(k\right) : k \in F\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $(0, \infty)$, *y sea* $E\left(t\right) = max\left(n \geq 1 : \zeta\left(1\right) + \cdots + \zeta\left(n-1\right) \leq t\right)$. *Si* $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{32.2.199}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 32.45 *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds \leq \kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{32.2.200}$$

para $t > 0$ *y* $x \in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds \leq \kappa_{p}.$$

Teorema 32.46 *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$||P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)||_{f_p},\ t \to \infty, x \in X. \tag{32.2.201}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 32.47 *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\to\infty} t^{p-1}||P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)||_f = 0. \tag{32.2.202}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\to\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 32.48 *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{32.2.203}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

a)

$$lim_{x\to\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0 \tag{32.2.204}$$

b)

$$\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N} \tag{32.2.205}$$

para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- *Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r^m_{j,j^{'}} = r_{j,j^{'}}$*
- *La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right] \geq 0$.*
- *Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.*
- *Finalmente, se define*

$$\delta^* := \sum_{j,j^{'}} p_j r_{j,j^{'}}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right]. \tag{32.2.206}$$

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Sea x el número de usuarios en la cola esperando por servicio y $N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política dada y fija mientras el servidor permanece dando servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$lim_{x\to\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0. \tag{32.2.207}$$

(S2.)

$$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]\leq\overline{N}, \qquad (32.2.208)$$

para cualquier valor de x.

El tiempo que tarda un servidor en volver a dar servicio después de abandonar la cola inmediata anterior y llegar a la próxima se llama tiempo de traslado o de cambio de cola, al momento de la n-ésima visita del servidor a la cola j se genera una sucesión de variables aleatorias $\delta_{j,j+1}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con la propiedad de que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]\geq0$.

Se define

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j+1}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]. \qquad (32.2.209)$$

Los tiempos entre arribos a la cola k, son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos. Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho<1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Para el caso más sencillo podemos definir un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada, el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}\left(t\right)=\left(Q_{k}\left(t\right),A_{l}\left(t\right),B_{k}\left(t\right):k=1,2,\ldots,K,l\in\mathcal{A}\right), \qquad (32.2.210)$$

donde $Q_{k}\left(t\right)$ es la longitud de la cola k para los usuarios esperando servicio, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_{k}\left(t\right)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio.

*Los tiempos entre arribos residuales, que son el tiempo que queda hasta que el próximo usuario llega a la cola para recibir servicio, se denotan por $A_{k}\left(t\right)$. Tanto $B_{k}\left(t\right)$ como $A_{k}\left(t\right)$ se suponen continuos por la derecha [**?**].*

Sea $\mathcal{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$, y sea $x=\left(q,a,b\right)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $\left|q\right|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x=\left(q,a,b\right)\in\mathbb{X}$ definimos la norma *de x como $\left\|x\right\|=\left|q\right|+\left|a\right|+\left|b\right|$. En [10] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que*

$$\left(\left(\Omega,\mathcal{F}\right),\mathcal{F}_{t},\mathbb{X}\left(t\right),\theta_{t},P_{x}\right)$$

es un proceso de Borel Derecho *en el espacio de estados medible $\left(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}}\right)$.*

Sea $P^{t}\left(x,D\right)$, $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t\geq0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^{t}\left(x,D\right)=P_{x}\left(\mathbb{X}\left(t\right)\in D\right).$$

Definición 32.48 *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right)=\int_{X}P^{t}\left(x,D\right)\pi\left(dx\right),$$

para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t\geq0$.

Definición 32.49 *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$, tal que si $\nu\left(D\right)>0$ y $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_{x}\left\{\tau_{D}<\infty\right\}\equiv1,$$

cuando $\tau_{D}=inf\left\{t\geq0:\mathbb{X}_{t}\in D\right\}$.

Definición 32.50 *Un conjunto $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t>0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta>0$ tal que*

$$P^{t}\left(x,A\right)\geq\delta\nu\left(A\right),$$

para $x\in D,A\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

Nota 32.6 *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π ([19]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso a la medida se le llama ***Harris recurrente positiva****.*

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria; se define

$$P_{\pi}\left(\cdot\right)=\int_{X}P_{x}\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right).$$

Se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, así, el proceso $X=\left\{\mathbb{X}\left(t\right),t\geq0\right\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_{π}.

*iv) En [**?**] se muestra que si $P_{x}\left\{\tau_{D}<\infty\right\}=1$ incluso para solamente un conjunto pequeño, entonces el proceso de Harris es recurrente.*

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $\left(X\left(t\right)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t\geq0$ está dado por

$$X\left(t\right)=\left(Q\left(t\right),A\left(t\right),H\left(t\right),B\left(t\right),B^{0}\left(t\right),C\left(t\right)\right)\tag{32.2.211}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X}=\mathbb{Z}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}^{K},\tag{32.2.212}$$

- *$Q\left(t\right)=\left(Q_{k}\left(t\right),1\leq k\leq K\right)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.*
- *$A\left(t\right)=\left(A_{k}\left(t\right),1\leq k\leq K\right)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.*
- *$H\left(t\right)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.*
- *$B\left(t\right)$ es el tiempo de servicio residual.*
- *$B^{0}\left(t\right)$ es el tiempo residual del cambio de cola.*
- *$C\left(t\right)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H\left(t\right)$.*

$A_{k}\left(t\right),B_{m}\left(t\right)$ y $B_{m}^{0}\left(t\right)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([10]).
Dada una condición inicial $x\in\mathcal{X}$, $Q_{k}^{x}\left(t\right)$ es la longitud de la cola k al tiempo t y $T_{m,k}^{x}\left(t\right)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en atender a los usuarios de la cola k. De igual manera se define $T_{m,k}^{x,0}\left(t\right)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en cambiar de cola para volver a atender a los usuarios.
Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right),\tag{32.2.213}$$

$$\overline{T}_{m}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}T_{m}^{x}\left(|x|t\right),\tag{32.2.214}$$

$$\overline{T}_{m}^{x,0}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}T_{m}^{x,0}\left(|x|t\right).\tag{32.2.215}$$

Cualquier límite $\overline{Q}\left(t\right)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola, al conjunto de todos los posibles flujos límite se le llamará ***modelo de flujo****, ([**?**]).*

Definición 32.51 *Un flujo límite para un sistema de visitas bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)$ y $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)$*

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\lambda_{k}t-\sum_{m=1}^{M}\mu_{k}\overline{T}_{m,k}\left(t\right)\tag{32.2.216}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq0\text{ para }k=1,2,\ldots,K,\tag{32.2.217}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right)=0,\text{ y }\overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right)\text{ es no decreciente,}\tag{32.2.218}$$

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^{0}\left(t\right)+\overline{T}_{m,k}\left(t\right)=t\text{ param}=1,2,\ldots,M\tag{32.2.219}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en (32.2.216)-(32.2.219) se le llama Modelo de flujo *y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *se le denotará por* $\mathcal{Q}$.

Definición 32.52 *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$.

Es necesario realizar los siguientes supuestos, ver ([?]) y ([11]):

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ *son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ *es un singleton, y para cada* $k \in \mathcal{A}$, *existe una función positiva* $q_k\left(x\right)$ *definida en* $\mathbb{R}_+$, *y un entero* j_k, *tal que*

$$P\left(\xi_k\left(1\right) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0 \quad (32.2.220)$$

$$P\left(\xi_k\left(1\right) + \ldots \xi_k\left(j_k\right) \in dx\right) \geq q_k\left(x\right) dx0 \text{ y} \quad (32.2.221)$$

$$\int_0^{\infty} q_k\left(x\right) dx > 0 \quad (32.2.222)$$

En [?] ser da un argumento para deducir que todos los subconjuntos compactos de X *son pequeños. Entonces la condición A3) se puede generalizar a*

A3') Para el proceso de Markov X, *cada subconjunto compacto de* X *es pequeño.*

Teorema 32.49 *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, *y para cada condición inicial* $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right] ds \leq \kappa_p \quad (32.2.223)$$

donde p es el entero dado por A2).

Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \leq \kappa_r \quad (32.2.224)$$

para $r = 1, \ldots, p$ *y* $k = 1, \ldots, K$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right]| = 0. \quad (32.2.225)$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right) ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \quad (32.2.226)$$

$\mathbb{P}$-*c.s., para* $r = 1, \ldots, p$ *y* $k = 1, \ldots, K$.

Teorema 32.50 *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \text{ con } T \geq 0, \quad (32.2.227)$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, *con* $|Q\left(0\right)| = 1$. *Entonces para cualquier* $0 < q \leq 1$, *existe* $B < 0$ *tal que para cualquier* $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \quad (32.2.228)$$

En el caso particular de un modelo con un solo servidor, $M = 1$, se tiene que si se define

Definición 32.53

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + \max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\overline{N}}\right) \delta^*. \tag{32.2.229}$$

entonces

Teorema 32.51 *i) Si $\rho < 1$, entonces la red es estable, es decir el teorema (32.49) se cumple.*

ii) De lo contrario, es decir, si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, el teorema (32.50).

Proposición 32.17 *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 32.15 (Lema 3.1 [8]) *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 32.52 (Teorema 5.2 [8]) *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 32.53 (Teorema 5.1 [8]) *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 32.16 (Lema 5.2 [20]) *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\left\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\right\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{32.2.230}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 32.54 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [20]) *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 32.18 (Proposicin 5.1 [11]) *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{32.2.231}$$

Proposición 32.19 (Proposición 5.3 [11]) *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X(t)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{32.2.232}$$

Proposición 32.20 (Proposición 5.4 [11]) *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{32.2.233}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 32.55 (Teorema 5.5 [11]) *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{32.2.234}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq k_p \tag{32.2.235}$$

Teorema 32.56 (Teorema 6.2[11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 32.57 (Teorema 6.3[11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f(x) = f_1(x)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Si x *es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y* $N_s(x) = N(x)$ *es el número de usuarios que son atendidos con la política* s, *única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:*

(S1.)

$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0. \tag{32.2.236}$$

(S2.)

$$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right] \leq \overline{N}, \tag{32.2.237}$$

para cualquier valor de x.

- *La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right] \geq 0$.*
- *Se define*

$$\delta^{*} := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]. \tag{32.2.238}$$

- *Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.*
- *Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.*
- *Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y además se define*
- *la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$*
- *también se define $\rho_{k} = \lambda_{k}/\mu_{k}$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.*
- *De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).*

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $\left(X\left(t\right)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X\left(t\right) = \left(Q\left(t\right), A\left(t\right), H\left(t\right), B\left(t\right), B^{0}\left(t\right), C\left(t\right)\right) \tag{32.2.239}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \left(\left\{1, 2, \ldots, K\right\} \times \left\{1, 2, \ldots, S\right\}\right)^{M} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}^{K}, \tag{32.2.240}$$

- *$Q\left(t\right) = \left(Q_{k}\left(t\right), 1 \leq k \leq K\right)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.*
- *$A\left(t\right) = \left(A_{k}\left(t\right), 1 \leq k \leq K\right)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.*
- *$H\left(t\right)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.*
- *$B\left(t\right)$ es el tiempo de servicio residual.*
- *$B^{0}\left(t\right)$ es el tiempo residual del cambio de cola.*
- *$C\left(t\right)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H\left(t\right)$.*

$A_{k}\left(t\right), B_{m}\left(t\right)$ y $B_{m}^{0}\left(t\right)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([10])

- *Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.*
- *Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.*
- *Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y además se define*
- *la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$*
- *también se define $\rho_{k} = \lambda_{k}/\mu_{k}$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.*
- *De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}\left(E\right)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.
Sea $\left(X, \mathcal{G}, \mathbb{P}\right)$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f\left(X_{r}\right) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $\left(\mathcal{G}_{t}\right)$ tal que $\left(X_{t}\right)$ sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 32.54 *Una familia $\left(P_{s,t}\right)$ de kernels de Markov en $\left(E, \mathcal{E}\right)$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $\left(E, \mathcal{E}\right)$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}\left(x, B\right) = \int_{E} P_{r,s}\left(x, dy\right) P_{s,t}\left(y, B\right)^{8}. \tag{32.2.241}$$

[8] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ *en* $(E, \mathcal{E})$ *es la función de transición para un proceso* $(X_t)_{t \in I}$ *con valores en* E *y que satisface la propiedad de Markov*[9] *(32.2.309) relativa a* $(\mathcal{G}_t)$ *si*

$$\mathbb{P}\{f(X_t)|\mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{32.2.243}$$

Definición 32.55 *Una familia* $(P_t)_{t \geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E, \mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 32.7 *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (32.2.310) con función de transición homogénea (P_t) *tiene la propiedad característica*

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{32.2.244}$$

La ecuación anterior es la Propiedad Simple de Markov *de* X *relativa a* (P_t).
En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ *cumple con la propiedad de Markov (32.2.311) relativa a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *con semigrupo de transición* (P_t).

Definición 32.56 *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t \in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 32.57 (HD1) *Un semigrupo de Markov* $/P_t)$ *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, *y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t \in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considerese la colección de variables aleatorias X_t *definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas* $\mathbf{P}^x$ *tales que* $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, *y bajo cualquier* $\mathbf{P}^x$, X_t *es de Markov con semigrupo* (P_t). $\mathbf{P}^x$ *puede considerarse como la distribución condicional de* $\mathbf{P}$ *dado* $X_0 = x$.

Definición 32.58 *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E, \mathcal{E})$. *La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t \geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X, *es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \;\; y \;\; X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{32.2.245}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, *y el proceso* $(X_t)_{t \in I}$ *tiene la propiedad de Markov (32.2.311) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 32.59 (HD2) *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$, *el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 32.60 *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 32.100, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 32.101, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

[9]

$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H|X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{32.2.242}$$

Lema 32.17 (Lema 4.2, Dai[10]) *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \rightarrow P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{32.2.246}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{32.2.247}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{32.2.248}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 32.18 (Lema 4.3, Dai[10]) *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{32.2.249}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_{0}^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{32.2.250}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{32.2.251}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{32.2.252}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{32.2.253}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{32.2.254}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{32.2.255}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{32.2.256}$$

donde e *es un vector de unos de dimensión* d, C *es la matriz definida por*

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 32.94:

Teorema 32.58 (Teorema 4.1, Dai [10]) *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales* ω *y cualquier sucesión de estados iniciales* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, *con* $|x_n| \to \infty$, *existe una subsucesión* $\{x_{n_j}\}$ *con* $|x_{n_j}| \to \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{32.2.257}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{32.2.258}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I - P)' M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{32.2.259}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{32.2.260}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{32.2.261}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{32.2.262}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{32.2.263}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{32.2.264}$$

Definición 32.61 (Definición 4.1, , Dai [10]) *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en 33.1.122 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (33.1.123)-(33.1.128) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.

Teorema 32.59 (Teorema 4.2, Dai[10]) *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{32.2.265}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ *es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo* $|q| \to \infty$ *mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado* $\overline{Q}^{x}$ *es solución del siguiente modelo de flujo.*

Al conjunto de ecuaciones dadas en 32.2.216-32.2.182 se le llama Modelo de flujo *y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *se le denotará por* $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ *sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:*

Definición 32.62 (Definición 3.3, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [8].

Lema 32.10 (Lema 3.1, Dai y Meyn [11]) *Si el modelo de flujo definido por 32.2.216-32.2.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 32.21 *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de 32.2.197 y suponga que cuando* $x \to \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right), \frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right), \frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right), \frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right) \to \left(\overline{Q}_{k}\left(0\right), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right) = \overline{T}^{0}\left(0\right) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right) + \overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right) = \overline{Q}_{k}\left(0\right) + \alpha_{k}t - \mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right) = \beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right) = \mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right) = l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right) > 0$.

Lema 32.19 (Lema 3.1 [8]) *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 32.60 (Teorema 5.2 [8]) *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 32.61 (Teorema 5.1 [8]) *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 32.20 (Lema 5.2 [20]) *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \qquad (32.2.266)$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 32.62 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [20]) *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 32.22 (Proposicin 5.1 [11]) *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \qquad (32.2.267)$$

Proposición 32.23 (Proposición 5.3 [11]) *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X(t)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \qquad (32.2.268)$$

Proposición 32.24 (Proposición 5.4 [11]) *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \qquad (32.2.269)$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 32.63 (Teorema 5.5 [11]) *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \qquad (32.2.270)$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq k_p \qquad (32.2.271)$$

Teorema 32.64 (Teorema 6.2[11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t (c, \cdot) - \pi (\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 32.65 (Teorema 6.3[11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 32.25 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{32.2.272}$$

Lema 32.11 (Lema 5.2, Dai y Meyn [11]) *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{32.2.273}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 32.66 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p \left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{32.2.274}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 32.67 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p}, \; t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{32.2.275}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x [|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 32.68 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} \left\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{32.2.276}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q(0)]| = 0.$$

Teorema 32.69 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_o^t f(X(s))\, ds = \pi(f) := \int f(x)\, \pi(dx) \tag{32.2.277}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 32.70 (Teorema 2.2, Down [15]) *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{32.2.278}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \to \infty\} \geq q. \tag{32.2.279}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- *Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,*
- *Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,*
- *Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$,*
- *la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$,*
- *también se define $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.*

Definición 32.63 *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 32.64 *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 32.65 *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 32.66 *Una función $f : X \to \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 32.67 *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 32.68 *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 32.69 *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 32.70 *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 32.71 *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B|\mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B|X(s)\}. \tag{32.2.280}$$

Nota 32.8 *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (32.2.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B|X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B|X(s)\} \tag{32.2.281}$$

Teorema 32.71 *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty|\mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{32.2.282}$$

en $\{T < \infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 32.26 *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 32.21 (Lema 3.1 [8]) *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 32.72 (Teorema 5.2 [8]) *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 32.73 (Teorema 5.1 [8]) *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 32.22 (Lema 5.2 [20]) *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$*, y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$*, entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{32.2.283}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$*,* $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 32.74 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [20]) *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$*. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$*.*

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$*, cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$*..*

Proposición 32.27 (Proposicin 5.1 [11]) *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{32.2.284}$$

Proposición 32.28 (Proposición 5.3 [11]) *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$*,* $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$*.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{32.2.285}$$

Proposición 32.29 (Proposición 5.4 [11]) *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X*, sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$*, y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$*. Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C*, entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{32.2.286}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$*.*

Teorema 32.75 (Teorema 5.5 [11]) *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{32.2.287}$$

para $t \geq 0$*,* $x \in X$*. En particular para cada condicin inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p \tag{32.2.288}$$

Teorema 32.76 (Teorema 6.2[11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$*. En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x[|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 32.77 (Teorema 6.3[11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Sean $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ el tiempo residual de arribos a la cola k, para cada servidor m, sea $H_m(t)$ par ordenado que consiste en la cola que está siendo atendida y la política de servicio que se está utilizando. $B_m(t)$ los tiempos de servicio residuales, $B_m^0(t)$ el tiempo residual de traslado, $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H_m(t)$.
El proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{32.2.289}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) *$\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) *Para algún entero $p \geq 1$*

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) *Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que*

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{32.2.290}$$
$$P(\xi_k(1) + \ldots \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\,dx0 \text{ y} \tag{32.2.291}$$
$$\int_0^\infty q_k(x)\,dx > 0 \tag{32.2.292}$$

En Dai [10] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho, Sharpe [36], en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$.
Se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable.

Definición 32.72 *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 32.73 *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 32.74 *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 32.75 *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{32.2.293}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 32.78 *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 32.76 *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{10}. \tag{32.2.294}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov [11] (32.2.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{32.2.296}$$

Definición 32.77 *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t (P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 32.9 *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (32.2.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{32.2.297}$$

La ecuación anterior es la Propiedad Simple de Markov *de X relativa a (P_t).*

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (32.2.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 32.78 *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \to X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 32.79 (HD1) *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 32.80 *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t \geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{32.2.298}$$

[10]Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[11]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{32.2.295}$$

iii) *Para cualquier* $x \in E, \mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$, *y el proceso* $(X_t)_{t \in I}$ *tiene la propiedad de Markov (32.2.311) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 32.81 (HD2) *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$, *el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 32.82 *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 32.100, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 32.101, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Definición 32.83 *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{F}$ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* X, *la pareja* $(X, \mathcal{F})$ *es llamado espacio medible. Un subconjunto* A *de* X *es llamado medible, o medible con respecto a* $\mathcal{F}$, *si* $A \in \mathcal{F}$.

Definición 32.84 *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *espacio de medida. Se dice que la medida* μ *es* σ*-finita si se puede escribir* $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ *con* $X_n \in \mathcal{F}$ *y* $\mu(X_n) < \infty$.

Definición 32.85 *Sea* X *el conjunto de los úmeros reales* $\mathbb{R}$. *El álgebra de Borel es la* σ*-álgebra* B *generada por los intervalos abiertos* $(a, b) \in \mathbb{R}$. *Cualquier conjunto en* B *es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 32.86 *Una función* $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, *es medible si para cualquier número real* α *el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. *Equivalentemente, se dice que* f *es medible si*

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 32.87 *Sean* $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ *espacios medibles y* $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ *el conjunto de todas las sucesiones* $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ *tales que* $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. *Si* $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, *definimos* $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. *Al conjunto* B_n *se le llama* cilindro *con base* B^n, *el cilindro es llamado medible si* $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.

Definición 32.88 *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de* σ*-álgebras* $\mathcal{F}_t$, *para* $t \geq 0$, *si para* $s < t$ *implica que* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, *y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}_t$*-medible para cada* t. *Si no se especifica* $\mathcal{F}_t$ *entonces se toma* $\mathcal{F}_t$ *como* $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, *la más pequeña* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω *que hace que cada* $X(s)$, *con* $s \leq t$ *sea Borel medible.*

Definición 32.89 *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ *familia creciente de sub* σ*-álgebras. es decir,* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *para* $s \leq t$. *Un tiempo de paro para* $\mathcal{F}(t)$ *es una función* $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ *tal que* $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ *para cada* $t \geq 0$. *Un tiempo de paro para el proceso estocástico* $X(t), t \geq 0$ *es un tiempo de paro para las* σ*-álgebras* $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.

Definición 32.90 *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, con* (S, χ) *espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a* $\{\mathcal{F}(t)\}$, *es decir, si para cualquier* $s, t \in I$, I *conjunto de índices,* $s < t$, *se tiene que* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}(t)$*-medible,*

Definición 32.91 *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a* $\mathcal{F}(t)$ *o que* $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ *es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto* $B \in \chi$, *y* $s, t \in I$, $s < t$ *se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{32.2.299}$$

Nota 32.10 *Si se dice que* $\{X(t)\}$ *es un Proceso de Markov sin mencionar* $\mathcal{F}(t)$, *se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (32.2.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{32.2.300}$$

Teorema 32.79 *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots, m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{32.2.301}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{32.2.302}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{32.2.303}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{32.2.304}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.
Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.
El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{32.2.305}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[12]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

[12]Revisar página 362, y 364 de Davis [14].

Supuestos 32.4 (Supuesto 3.1, Davis [14]) *Sea* $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ *el número de saltos en* $[0,t]$. *Entonces*

$$\mathbb{E}\left[N_t\right] < \infty \text{ para toda } t. \tag{32.2.306}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 32.92 *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 32.93 *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 32.94 *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 32.95 *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{32.2.307}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 32.80 *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 32.96 *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B)\, ^{13}. \tag{32.2.308}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[14] *(32.2.309) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si*

$$\mathbb{P}\left\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{32.2.310}$$

Definición 32.97 *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 32.11 *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (32.2.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\right\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{32.2.311}$$

La ecuación anterior es la Propiedad Simple de Markov *de X relativa a (P_t).*

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (32.2.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

[13] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[14]

$$\mathbb{P}\left\{H | \mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H | X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{32.2.309}$$

Definición 32.98 *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 32.99 (HD1) *Un semigrupo de Markov* $/P_t)$ *en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en E, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, *y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso E-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considerese la colección de variables aleatorias X_t *definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas* $\mathbf{P}^x$ *tales que* $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, *y bajo cualquier* $\mathbf{P}^x$, X_t *es de Markov con semigrupo* (P_t). $\mathbf{P}^x$ *puede considerarse como la distribución condicional de* $\mathbf{P}$ *dado* $X_0 = x$.

Definición 32.100 *Sea E espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E, \mathcal{E})$. *La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso E-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$;

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{32.2.312}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, *y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (32.2.311) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 32.101 (HD2) *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$, *el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 32.102 *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, 32.100, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, 32.101, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 32.23 (Lema 4.2, Dai[10]) *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{32.2.313}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{32.2.314}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{32.2.315}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de t y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 32.24 (Lema 4.3, Dai[10]) *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right)=_k^x\left(0\right)+E_k^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{32.2.316}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_i^x\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{32.2.317}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right)=\left(T_1^x\left(t\right),\ldots,T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$
$$I^x\left(t\right)=\left(I_1^x\left(t\right),\ldots,I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right),\ldots,S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x\left(t\right)=Q^x\left(0\right)+E^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S^x\left(T^x\left(t\right)\right), \tag{32.2.318}$$

$$Q^x\left(t\right)\geq 0, \tag{32.2.319}$$

$$T^x\left(0\right)=0,\ y\ \overline{T}^x\left(t\right)\ \textit{es no decreciente}, \tag{32.2.320}$$

$$I^x\left(t\right)=et-CT^x\left(t\right)\ \textit{es no decreciente} \tag{32.2.321}$$

$$\int_0^{\infty} \left(CQ^x\left(t\right)\right) dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{32.2.322}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x\left(\cdot\right), \overline{T}^x\left(\cdot\right)\right) \textit{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{32.2.323}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S\left(k\right) = i, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 32.94:

Teorema 32.81 (Teorema 4.1, Dai [10]) *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right), U^{x_{n_j}}\left(0\right), V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right) \to \left(\overline{Q}\left(0\right), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{32.2.324}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right) \textit{ u.o.c.} \tag{32.2.325}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right) = Q\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - \left(I - P\right)^{\prime} M^{-1} \left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{32.2.326}$$

$$\overline{Q}\left(t\right) \geq 0, \tag{32.2.327}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \textit{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{32.2.328}$$

$$\overline{I}\left(t\right) = et - C\overline{T}\left(t\right) \textit{ es no decreciente,} \tag{32.2.329}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}\left(t\right)\right) d\overline{I}\left(t\right) = 0, \tag{32.2.330}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{32.2.331}$$

Definición 32.103 (Definición 4.1, , Dai [10]) *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ en 33.1.122 es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (33.1.123)-(33.1.128) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.*

Teorema 32.82 (Teorema 4.2, Dai[10]) *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x\left(t\right) = \frac{1}{|x|} Q^x\left(|x|t\right) \tag{32.2.332}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 32.2.216-32.2.182 se le llama Modelo de flujo *y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 32.104 (Definición 3.3, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [8].

Lema 32.12 (Lema 3.1, Dai y Meyn [11]) *Si el modelo de flujo definido por 32.2.216-32.2.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 32.30 *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de 32.2.197 y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 32.25 (Lema 3.1 [8]) *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 32.83 (Teorema 5.2 [8]) *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 32.84 (Teorema 5.1 [8]) *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 32.26 (Lema 5.2 [20]) *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{32.2.333}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t \geq \delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 32.85 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [20]) *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r} \rightarrow \frac{1}{\mu^{r}}$*, cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$*..*

Proposición 32.31 (Proposicin 5.1 [11]) *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{32.2.334}$$

Proposición 32.32 (Proposición 5.3 [11]) *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$*,* $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$*.*

$$\mathbb{E}_{x}\left[\int_{0}^{\tau_{C}(\delta)}\left(1+|X\left(t\right)|^{p}\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right) \tag{32.2.335}$$

Proposición 32.33 (Proposición 5.4 [11]) *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X*, sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_{+}$ *y defina para alguna* $\delta > 0$*, y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_{x}\left[\int_{0}^{\tau_{C}(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$*. Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C*, entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_{x}\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{32.2.336}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$*.*

Teorema 32.86 (Teorema 5.5 [11]) *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds \leq k_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{32.2.337}$$

para $t \geq 0$*,* $x \in X$*. En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds \leq k_{p} \tag{32.2.338}$$

Teorema 32.87 (Teorema 6.2[11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^{t}\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$*. En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q_t|^{p}\right] = \mathbb{E}_{\pi}\left[|Q_0|^{p}\right] < \infty$$

Teorema 32.88 (Teorema 6.3[11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$*, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^{t}(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_{f}=0},$$

para $x \in X$*. En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_{x}[Q_t]-\mathbb{E}_{\pi}[Q_0]|=0}.$$

Proposición 32.34 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{32.2.339}$$

Lema 32.13 (Lema 5.2, Dai y Meyn [11]) *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^{r}. \qquad (32.2.340)$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 32.89 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q(s)|^{p}\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \qquad (32.2.341)$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q(s)|^{p}\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 32.90 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x \in X. \qquad (32.2.342)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q(t)|^{p}\right] = \mathbb{E}_{\pi}\left[|Q(0)|^{p}\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 32.91 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f} = 0. \qquad (32.2.343)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}[Q(t)] - \mathbb{E}_{\pi}[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 32.92 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f(X(s))ds = \pi(f) := \int f(x)\pi(dx) \qquad (32.2.344)$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_{+}$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 32.93 (Teorema 2.2, Down [15]) *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \qquad (32.2.345)$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \qquad (32.2.346)$$

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- *$Q_{k}^{x}(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,*

- $T^{x}_{m,k}(t)$ *el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.*
- $T^{x,0}_{m,k}(t)$ *el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.*

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}^0_m(\cdot)\right)$ *para* $m = 1, 2, \ldots, M$ *es un punto límite de*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^x_m(|x|t), \frac{1}{|x|}T^{x,0}_m(|x|t)\right) \tag{32.2.347}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, *cuando* $x \to \infty$, *ver [15]. Entonces* $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}^0_m(t)\right)$ *es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama* Modelo de Flujo *y se le denotará por* $\mathcal{Q}$, *ver [15, 10, 11].*

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{32.2.348}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{32.2.349}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{32.2.350}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ *y* $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}^0_{m,k}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{32.2.351}$$

Definición 32.105 (Definición 4.1, Dai [10]) *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (32.2.347) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (32.2.348)-(32.2.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 32.106 *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, *se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Si se hace $|x| \to \infty$ *sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:*

Teorema 32.94 (Teorema 4.2, Dai [10]) *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{32.2.352}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ *es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo* $|q| \to \infty$ *mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado* $\overline{Q}^x$ *es solución del siguiente modelo de flujo.*

Definición 32.107 (Definición 3.3, Dai y Meyn [11]) *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

Lema 32.14 (Lema 3.1, Dai y Meyn [11]) *Si el modelo de flujo definido por (32.2.348)-(32.2.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 32.95 (Teorema 2.1, Down [15]) *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p, \tag{32.2.353}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{32.2.354}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)\right]| = 0. \tag{32.2.355}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right)ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right], \; \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{32.2.356}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.*

Teorema 32.96 (Teorema 2.3, Down [15]) *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{32.2.357}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 32.95.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 33.57

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [14], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [14], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [11], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [36]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x, x \in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1,$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right)|\mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right)f\left(X\right),$$

en $\left\{\tau < \infty\right\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.
Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [10, 21].

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right).$$

Definición 32.108 *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D)\, \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 32.109 *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 32.12 *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [19]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\, \pi(dx),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [11].

Definición 32.110 *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [10]:

Lema 32.27 (Lema 3.1, Dai [10]) *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x [\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{32.2.358}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 32.28 (Lema 3.1, Dai [10]) *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 32.97 (Teorema 3.1, Dai [10]) *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{32.2.359}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (32.2.358) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

CAPÍTULO 33

Teorema de Down

33.1. Teorema de Down

En este apéndice enunciaremos una serie de resultados que son necesarios para la demostración así como su demostración del Teorema de Down 32.95, además de un teorema referente a las propiedades que cumple el Modelo de Flujo.

Dado el proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ *definido en (32.2.289) que describe la dinámica del sistema de visitas cíclicas, si* $U(t)$ *es el residual de los tiempos de llegada al tiempo* t *entre dos usuarios consecutivos y* $V(t)$ *es el residual de los tiempos de servicio al tiempo* t *para el usuario que estás siendo atendido por el servidor. Sea* $\mathbb{X}$ *el espacio de estados que puede tomar el proceso* X.

Lema 33.1 (Lema 4.3, Dai[10]) *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k,$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea e *es un vector de unos,* C *es la matriz definida por*

$$C_{ik} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{array} \right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema (32.94):

Teorema 33.1 (Teorema 4.1, Dai [10]) *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación, para casi todas las trayectorias muestrales* ω *y cualquier sucesión de estados iniciales* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$*, con* $|x_n| \to \infty$*, existe una subsucesión* $\{x_{n_j}\}$ *con* $|x_{n_j}| \to \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} \left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{33.1.1}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{33.1.2}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)' M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{33.1.3}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{33.1.4}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{33.1.5}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{33.1.6}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{33.1.7}$$

$$\text{Condiciones en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{33.1.8}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 33.1 (Proposición 4.2, Dai [10]) *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de 32.2.347 y suponga que cuando* $x \rightarrow \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. *El flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^{0}(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^{0}(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^{0}(t)\right] = t.$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t).$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \rho_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t).$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t),$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 33.2 (Lema 3.1, Chen [8]) *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Lema 33.3 (Lema 5.2, Gut [20]) *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$*, y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\left\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\right\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$*, entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^{r}, \tag{33.1.9}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$.

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 33.2 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo, Gut [20]) *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \to \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \to \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \to \infty$ para todo $r > 0$.

Proposición 33.2 (Proposición 5.1, Dai y Sean [11]) *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{33.1.10}$$

Proposición 33.3 (Proposición 5.3, Dai y Sean [11]) *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right). \tag{33.1.11}$$

Proposición 33.4 (Proposición 5.4, Dai y Sean [11]) *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right],$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{33.1.12}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 33.3 (Teorema 5.5, Dai y Sean [11]) *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\}, \tag{33.1.13}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p. \tag{33.1.14}$$

Teorema 33.4 (Teorema 6.2 Dai y Sean [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \to 0,$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x[|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q_0|^p] < \infty,$$

donde

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_f = sup_{|g\leq f|}|\int \pi(dy)\,g(y) - \int P^t(x,dy)\,g(y)|,$$

para $x \in \mathbb{X}$.

Teorema 33.5 (Teorema 6.3, Dai y Sean [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)} \left|P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot)\right|_f = 0,$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)} \left|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]\right| = 0.$$

Proposición 33.5 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{33.1.15}$$

Teorema 33.6 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p \left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\}, \tag{33.1.16}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 33.7 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\, ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx), \tag{33.1.17}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 33.8 (Teorema 2.2, Down [15]) *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{33.1.18}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{33.1.19}$$

Demostración 33.1 (Teorema 32.95) *La demostración de este teorema se da a continuación:*

i) Utilizando la proposición 33.26 se tiene que la proposición 33.27 es cierta para $f(x) = 1 + |x|^p$.

i) es consecuencia directa del Teorema 33.53.

iii) ver la demostración dada en Dai y Sean [11] páginas 1901-1902.

iv) ver Dai y Sean [11] páginas 1902-1903 ó [27].

Con la finalidad de ejemplificar la simulación y el análisis numérico en los sistemas de visitas cíclicas revisaremos el ejemplo presentado en Roubos [32] donde se presenta un sistema conformado por tres colas, en las cuales los tiempos de arribo ocurren conforme a un proceso Poisson con tasas de arribo $\lambda_1 = 0{,}3$, $\lambda_2 = 0{,}4$ *y* $\lambda_3 = 0{,}2$ *para las colas 1,2 y 3 respectivamente. Los tiempos de servicio para cada una de las colas se distribuyen de manera exponencial con media 1, uniforme sobre el intervalo* $[0,1]$ *y gamma con parámetro de forma 1 y de escala 2, respectivamente. Finalmente se esta considerando que los tiempos de traslado entre las colas se distribuyen de manera exponencial con media 1, 2 y 3 para ir de la cola 1 a 2, de 2 a 3 y de 3 a 1, respectivamente.*

Entonces, conforme a lo descrito en la sección 2.4, los resultados obtenidos para los tiempos de espera en cada una de las colas para las políticas exhaustiva y cerrada considerando diez mil trayectorias son: Resultados numéricos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}W_1 &\cong 18{,}71 \\ \mathbb{E}W_2 &\cong 22{,}38 \\ \mathbb{E}W_3 &\cong 15{,}84 \end{aligned}$$

Cuadro 33.1: Se muestran los resultados obtenidos vía sumulación de Monte Carlo para la cola 1 y valores grandes de T considerando la política Exhaustiva

	Cola 1				
T	Lim Inf	μ	Lim Sup	Var	Error
1000	15.8083	15.9713	16.1342	0.0831	0.0052
5000	18.0915	18.2002	18.3090	0.0555	0.0030
10000	18.3118	18.3926	18.4734	0.0412	0.0020

Cuadro 33.2: Resultados obtenidos para la cola 2

	Cola 2				
T	Lim Inf	μ	Lim Sup	Var	Error
1000	18.9229	19.1150	19.3070	0.0980	0.0051
5000	21.6480	21.7753	21.9026	0.0649	0.0030
10000	21.9448	22.0398	22.1348	0.0485	0.0022

Cuadro 33.3: Resultados obtenidos para la cola 3

	Cola 3				
T	Lim Inf	μ	Lim Sup	Var	Error
1000	13.3704	13.5026	13.6348	0.0674	0.0050
5000	15.3073	15.3962	15.4851	0.0454	0.0029
10000	15.5141	15.5804	15.6467	0.0338	0.0022

En la figura **??** *se muestran los tiempos de espera, los errores relativos para cada una de las colas; Resultados numéricos*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}W_1 &\cong 23{,}51 \\ \mathbb{E}W_2 &\cong 21{,}75 \\ \mathbb{E}W_3 &\cong 25{,}84 \end{aligned}$$

Cuadro 33.4: Se muestran los resultados obtenidos vía sumulación de Monte Carlo para las cola 1 y valores grandes de T considerando la política Cerrada

	Cola 1				
T	Lim Inf	μ	Lim Sup	Var	Error
1000	19.4470	19.6232	19.7994	0.0899	0.0046
5000	22.5228	22.6496	22.7764	0.0647	0.0029
10000	23.0238	23.1182	23.2126	0.0482	0.00231

Cuadro 33.5: Resultados obtenidos para la cola 2

	Cola 2				
T	Lim Inf	μ	Lim Sup	Var	Error
1000	17.9870	18.1421	18.2972	0.0791	0.0044
5000	20.8343	20.9473	21.062	0.0576	0.0028
10000	21.3078	21.3924	21.4771	0.0432	0.0020

Cuadro 33.6: Resultados obtenidos para la cola 3

	Cola 3				
T	Lim Inf	μ	Lim Sup	Var	Error
1000	21.3555	21.5625	21.7695	0.1056	0.0049
5000	24.7102	24.8675	25.0031	0.0747	0.0030
10000	25.3103	25.4197	25.5291	0.0558	0.0022

En la figura **??** *se muestran los tiempos de espera, los errores relativos para cada una de las colas así como el tiempo que requiere el procesador para realizar la simulación de MonteCarlo.*

En este apéndice enunciaremos una serie de resultados que son necesarios para la demostración así como su demostración del Teorema de Down 32.95, además de un teorema referente a las propiedades que cumple el Modelo de Flujo.

Dado el proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ *definido en (32.2.289) que describe la dinámica del sistema de visitas cíclicas, si* $U(t)$ *es el residual de los tiempos de llegada al tiempo* t *entre dos usuarios consecutivos y* $V(t)$ *es el residual de los tiempos de servicio al tiempo* t *para el usuario que estás siendo atendido por el servidor. Sea* $\mathbb{X}$ *el espacio de estados que puede tomar el proceso* X*.*

Lema 33.4 (Lema 4.3, Dai[10]) *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k,$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea e es un vector de unos, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{ll}1, & S\left(k\right)=i,\\ 0, & \textit{en otro caso}.\end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema (32.94):

Teorema 33.9 (Teorema 4.1, Dai [10]) *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right),U^{x_{n_j}}\left(0\right),V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(0\right),\overline{U},\overline{V}\right),\tag{33.1.20}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)\ \textit{u.o.c.}\tag{33.1.21}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+},\tag{33.1.22}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0,\tag{33.1.23}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\ \textit{es no decreciente y comienza en cero},\tag{33.1.24}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right)\ \textit{es no decreciente},\tag{33.1.25}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0,\tag{33.1.26}$$

$$\textit{Condiciones en }\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)\textit{ específicas de la disciplina de la cola},\tag{33.1.27}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 33.6 (Proposición 4.2, Dai [10]) *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^0\right)$ un flujo límite de 32.2.347 y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_k^x\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_k^x\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_k^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_k\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. El flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ y $\overline{T}^0\left(t\right)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^0\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k\left(t\right)+\overline{T}_k^0\left(t\right)\right]=t.$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_k\left(t\right)=\overline{Q}_k\left(0\right)+\alpha_k t-\mu_k\overline{T}_k\left(t\right).$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k\left(t\right)=\rho_k$$

para $\overline{Q}_k\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_k^0\overline{T}_k^0\left(t\right)=\mu_j^0\overline{T}_j^0\left(t\right).$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t),$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 33.5 (Lema 3.1, Chen [8]) *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Lema 33.6 (Lema 5.2, Gut [20]) *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$*, y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$*, entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r, \tag{33.1.28}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$.

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 33.10 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo, Gut [20]) *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$*. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \to \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \to \frac{1}{\mu^r}$*, cuando* $t \to \infty$ *para todo* $r > 0$.

Proposición 33.7 (Proposición 5.1, Dai y Sean [11]) *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{33.1.29}$$

Proposición 33.8 (Proposición 5.3, Dai y Sean [11]) *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right). \tag{33.1.30}$$

Proposición 33.9 (Proposición 5.4, Dai y Sean [11]) *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X*, sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$*, y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right],$$

para $x \in X$*. Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C*, entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{33.1.31}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 33.11 (Teorema 5.5, Dai y Sean [11]) *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\}, \tag{33.1.32}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$*. En particular para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p. \tag{33.1.33}$$

Teorema 33.12 (Teorema 6.2 Dai y Sean [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \to 0,$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty,$$

donde

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_f = sup_{|g\leq f|}|\int \pi(dy)\,g(y) - \int P^t(x,dy)\,g(y)\,|,$$

para $x \in \mathbb{X}$.

Teorema 33.13 (Teorema 6.3, Dai y Sean [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty}t^{(p-1)}\left|P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot)\right|_f = 0,$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_x\left[Q_t\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_0\right]\right| = 0.$$

Proposición 33.10 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{33.1.34}$$

Teorema 33.14 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\}, \tag{33.1.35}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 33.15 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_\mathbb{X})$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx), \tag{33.1.36}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 33.16 (Teorema 2.2, Down [15]) *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{33.1.37}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \to \infty\} \geq q. \tag{33.1.38}$$

Demostración 33.2 (Teorema 32.95) *La demostración de este teorema se da a continuación:*

i) Utilizando la proposición 33.26 se tiene que la proposición 33.27 es cierta para $f(x) = 1 + |x|^p$.

i) es consecuencia directa del Teorema 33.53.

iii) ver la demostración dada en Dai y Sean [11] páginas 1901-1902.

iv) ver Dai y Sean [11] páginas 1902-1903 ó [27].

Teorema 33.17 (Teorema de Continuidad) *Supóngase que* $\{X_n, n = 1, 2, 3, \ldots\}$ *son variables aleatorias finitas, no negativas con valores enteros tales que* $P(X_n = k) = p_k^{(n)}$, *para* $n = 1, 2, 3, \ldots$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *con* $\sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(n)} = 1$, *para* $n = 1, 2, 3, \ldots$. *Sea* g_n *la PGF para la variable aleatoria* X_n. *Entonces existe una sucesión* $\{p_k\}$ *tal que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} p_k^{(n)} = p_k \text{ para } 0 < s < 1.$$

En este caso, $g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$. *Además*

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \text{ si y sólo si } lim_{s\uparrow 1} g(s) = 1$$

Teorema 33.18 *Sea* N *una variable aleatoria con valores enteros no negativos finita tal que* $P(N = k) = p_k$, *para* $k = 0, 1, 2, \ldots$, *y* $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = P(N < \infty) = 1$. *Sea* Φ *la PGF de* N *tal que* $g(s) = \mathbb{E}\left[s^N\right] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$ *con* $g(1) = 1$. *Si* $0 \leq p_1 \leq 1$ *y* $\mathbb{E}[N] = g^{'}(1) \leq 1$, *entonces no existe solución de la ecuación* $g(s) = s$ *en el intervalo* $[0, 1)$. *Si* $\mathbb{E}[N] = g^{'}(1) > 1$, *lo cual implica que* $0 \leq p_1 < 1$, *entonces existe una única solución de la ecuación* $g(s) = s$ *en el intervalo* $[0, 1)$.

Teorema 33.19 *Si* X *y* Y *tienen PGF* G_X *y* G_Y *respectivamente, entonces,*

$$G_X(s) = G_Y(s)$$

para toda s, *si y sólo si*

$$P(X = k)) = P(Y = k)$$

para toda $k = 0, 1, \ldots, .$, *es decir, si y sólo si* X *y* Y *tienen la misma distribución de probabilidad.*

Teorema 33.20 *Para cada n fijo, sea la sucesióin de probabilidades* $\{a_{0,n}, a_{1,n}, \ldots,\}$, *tales que* $a_{k,n} \geq 0$ *para toda* $k = 0, 1, 2, \ldots,$ *y* $\sum_{k\geq 0} a_{k,n} = 1$, *y sea* $G_n(s)$ *la correspondiente función generadora,* $G_n(s) = \sum_{k\geq 0} a_{k,n} s^k$. *De modo que para cada valor fijo de* k

$$lim_{n\rightarrow\infty} a_{k,n} = a_k,$$

es decir converge en distribución, es necesario y suficiente que para cada valor fijo $s \in [0,),$

$$lim_{n\rightarrow\infty} G_n(s) = G(s),$$

donde $G(s) = \sum_{k\geq 0} p_k s^k$, *para cualquier*
la función generadora del límite de la sucesión.

Teorema 33.21 (Teorema de Abel) *Sea* $G(s) = \sum_{k\geq 0} a_k s^k$ *para cualquier* $\{p_0, p_1, \ldots,\}$, *tales que* $p_k \geq 0$ *para toda* $k = 0, 1, 2, \ldots, .$ *Entonces* $G(s)$ *es continua por la derecha en* $s = 1$, *es decir*

$$lim_{s\uparrow 1} G(s) = \sum_{k\geq 0} p_k = G(),$$

sin importar si la suma es finita o no.

Nota 33.1 *El radio de Convergencia para cualquier PGF es* $R \geq 1$, *entonces, el Teorema de Abel nos dice que aún en el peor escenario, cuando* $R = 1$, *aún se puede confiar en que la PGF será continua en* $s = 1$, *en contraste, no se puede asegurar que la PGF será continua en el límite inferior* $-R$, *puesto que la PGF es simétrica alrededor del cero: la PGF converge para todo* $s \in (-R, R)$, *y no lo hace para* $s < -R$ *o* $s > R$. *Además nos dice que podemos escribir* $G_X(1)$ *como una abreviación de* $lim_{s\uparrow 1} G_X(s)$.

Entonces si suponemos que la diferenciación término a término está permitida, entonces

$$G_X^{'}(s) = \sum_{x=1}^{\infty} x s^{x-1} p_x$$

el Teorema de Abel nos dice que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \lim_{s\uparrow 1} G_X^{'}(s) : \\
\mathbb{E}[X] &= = \sum_{x=1}^{\infty} x p_x = G_X^{'}(1) \\
&= \lim_{s\uparrow 1} G_X^{'}(s),
\end{aligned}$$

dado que el Teorema de Abel se aplica a

$$G_X^{'}(s) = \sum_{x=1}^{\infty} x s^{x-1} p_x,$$

estableciendo así que $G_X^{'}(s)$ *es continua en* $s = 1$*. Sin el Teorema de Abel no se podría asegurar que el límite de* $G_X^{'}(s)$ *conforme* $s \uparrow 1$ *sea la respuesta correcta para* $\mathbb{E}[X]$*.*

Nota 33.2 *La PGF converge para todo* $|s| < R$*, para algún* R*. De hecho la PGF converge absolutamente si* $|s| < R$*. La PGF además converge uniformemente en conjuntos de la forma* $\left\{s : |s| < R^{'}\right\}$*, donde* $R^{'} < R$*, es decir,* $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{Z}$ *tal que* $\forall s$*, con* $|s| < R^{'}$*, y* $\forall n \geq n_0$*,*

$$|\sum_{x=0}^{n} s^x \mathbb{P}(X = x) - G_X(s)| < \epsilon.$$

De hecho, la convergencia uniforme es la que nos permite diferenciar término a término:

$$G_X(s) = \mathbb{E}\left[s^X\right] = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \mathbb{P}(X = x),$$

y sea $s < R$*.*

a*)*

$$\begin{aligned} G_X^{'}(s) &= \frac{d}{ds}\left(\sum_{x=0}^{\infty} s^x \mathbb{P}(X = x)\right) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{d}{ds}\left(s^x \mathbb{P}(X = x)\right) \\ &= \sum_{x=0}^{n} x s^{x-1} \mathbb{P}(X = x). \end{aligned}$$

b*)*

$$\begin{aligned} \int_a^b G_X(s)\, ds &= \int_a^b \left(\sum_{x=0}^{\infty} s^x \mathbb{P}(X = x)\right) ds = \sum_{x=0}^{\infty} \left(\int_a^b s^x \mathbb{P}(X = x)\, ds\right) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{s^{x+1}}{x+1} \mathbb{P}(X = x), \end{aligned}$$

para $-R < a < b < R$*.*

Teorema 33.22 (Teorema de Convergencia Monótona para PGF) *Sean* X *y* X_n *variables aleatorias no negativas, con valores en los enteros, finitas, tales que*

$$lim_{n \to \infty} G_{X_n}(s) = G_X(s)$$

para $0 \leq s \leq 1$*, entonces*

$$lim_{n \to \infty} P(X_n = k) = P(X = k),$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$*.*

El teorema anterior requiere del siguiente lema

Lema 33.1 *Sean* $a_{n,k} \in \mathbb{Z}^+$*,* $n \in \mathbb{N}$ *constantes no negativas con* $\sum_{k \geq 0} a_{k,n} \leq 1$*. Supóngase que para* $0 \leq s \leq 1$*, se tiene*

$$a_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} s^k \to a(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k.$$

Entonces

$$a_{0,n} \to a_0.$$

En este apéndice enunciaremos una serie de resultados que son necesarios para la demostración así como su demostración del Teorema de Down 32.95, además de un teorema referente a las propiedades que cumple el Modelo de Flujo.

Dado el proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ definido en (32.2.289) que describe la dinámica del sistema de visitas cíclicas, si $U(t)$ es el residual de los tiempos de llegada al tiempo t entre dos usuarios consecutivos y $V(t)$ es el residual de los tiempos de servicio al tiempo t para el usuario que estás siendo atendido por el servidor. Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados que puede tomar el proceso X.

Lema 33.7 (Lema 4.3, Dai[10]) *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k,$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea e es un vector de unos, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema (32.94):

Teorema 33.23 (Teorema 4.1, Dai [10]) *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{33.1.39}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{33.1.40}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I-P)' M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{33.1.41}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{33.1.42}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{33.1.43}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{33.1.44}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{33.1.45}$$

$$\text{Condiciones en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{33.1.46}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 33.11 (Proposición 4.2, Dai [10]) *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ *un flujo límite de 32.2.347 y suponga que cuando* $x \to \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. *El flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t.$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t).$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \rho_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t).$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t),$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 33.8 (Lema 3.1, Chen [8]) *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Lema 33.9 (Lema 5.2, Gut [20]) *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t \to \infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r, \tag{33.1.47}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t \geq \delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$.

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 33.24 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo, Gut [20]) *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \to \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \to \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \to \infty$ *para todo* $r > 0$.

Proposición 33.12 (Proposición 5.1, Dai y Sean [11]) *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{33.1.48}$$

Proposición 33.13 (Proposición 5.3, Dai y Sean [11]) *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p)\, dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right). \tag{33.1.49}$$

Proposición 33.14 (Proposición 5.4, Dai y Sean [11]) *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right],$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{33.1.50}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 33.25 (Teorema 5.5, Dai y Sean [11]) *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\}, \tag{33.1.51}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p. \tag{33.1.52}$$

Teorema 33.26 (Teorema 6.2 Dai y Sean [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0,$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty,$$

donde

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_f = sup_{|g\leq f|} | \int \pi(dy)\, g(y) - \int P^t(x,dy)\, g(y) |,$$

para $x \in \mathbb{X}$.

Teorema 33.27 (Teorema 6.3, Dai y Sean [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)} \left| P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \right|_f = 0,$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)} |\mathbb{E}_x [Q_t] - \mathbb{E}_\pi [Q_0]| = 0.$$

Proposición 33.15 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0. \tag{33.1.53}$$

Teorema 33.28 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\}, \tag{33.1.54}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 33.29 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_{o}^{t} f\left(X\left(s\right)\right)ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right)\pi\left(dx\right), \tag{33.1.55}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 33.30 (Teorema 2.2, Down [15]) *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\; T \geq 0, \tag{33.1.56}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{33.1.57}$$

Demostración 33.3 (Teorema 32.95) *La demostración de este teorema se da a continuación:*

i) Utilizando la proposición 33.26 se tiene que la proposición 33.27 es cierta para $f\left(x\right) = 1 + |x|^p$.

i) es consecuencia directa del Teorema 33.53.

iii) ver la demostración dada en Dai y Sean [11] páginas 1901-1902.

iv) ver Dai y Sean [11] páginas 1902-1903 ó [27].

Teorema 33.31 (Teorema de Continuidad) *Supóngase que* $\{X_n, n = 1, 2, 3, \ldots\}$ *son variables aleatorias finitas, no negativas con valores enteros tales que* $P(X_n = k) = p_k^{(n)}$, *para* $n = 1, 2, 3, \ldots$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *con* $\sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(n)} = 1$, *para* $n = 1, 2, 3, \ldots$. *Sea* g_n *la PGF para la variable aleatoria* X_n. *Entonces existe una sucesión* $\{p_k\}$ *tal que*

$$lim_{n\to\infty} p_k^{(n)} = p_k \text{ para } 0 < s < 1.$$

En este caso, $g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$. *Además*

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \text{ si y sólo si } lim_{s\uparrow 1} g(s) = 1$$

Teorema 33.32 *Sea* N *una variable aleatoria con valores enteros no negativos finita tal que* $P(N = k) = p_k$, *para* $k = 0, 1, 2, \ldots$, *y* $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = P(N < \infty) = 1$. *Sea* Φ *la PGF de* N *tal que* $g(s) = \mathbb{E}\left[s^N\right] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$ *con* $g(1) = 1$. *Si* $0 \leq p_1 \leq 1$ *y* $\mathbb{E}[N] = g^{'}(1) \leq 1$, *entonces no existe solución de la ecuación* $g(s) = s$ *en el intervalo* $[0, 1)$. *Si* $\mathbb{E}[N] = g^{'}(1) > 1$, *lo cual implica que* $0 \leq p_1 < 1$, *entonces existe una única solución de la ecuación* $g(s) = s$ *en el intervalo* $[0, 1)$.

Teorema 33.33 *Si* X *y* Y *tienen PGF* G_X *y* G_Y *respectivamente, entonces,*

$$G_X(s) = G_Y(s)$$

para toda s, *si y sólo si*

$$P(X = k)) = P(Y = k)$$

para toda $k = 0, 1, \ldots,$, *es decir, si y sólo si* X *y* Y *tienen la misma distribución de probabilidad.*

Teorema 33.34 *Para cada n fijo, sea la sucesióin de probabilidades* $\{a_{0,n}, a_{1,n}, \ldots,\}$, *tales que* $a_{k,n} \geq 0$ *para toda* $k = 0, 1, 2, \ldots$, *y* $\sum_{k\geq 0} a_{k,n} = 1$, *y sea* $G_n(s)$ *la correspondiente función generadora,* $G_n(s) = \sum_{k\geq 0} a_{k,n} s^k$. *De modo que para cada valor fijo de* k

$$lim_{n\to\infty} a_{k,n} = a_k,$$

es decir converge en distribución, es necesario y suficiente que para cada valor fijo $s \in [0,)$,

$$lim_{n\to\infty} G_n(s) = G(s),$$

donde $G(s) = \sum_{k\geq 0} p_k s^k$, *para cualquier*
la función generadora del límite de la sucesión.

Teorema 33.35 (Teorema de Abel) *Sea* $G(s) = \sum_{k\geq 0} a_k s^k$ *para cualquier* $\{p_0, p_1, \ldots,\}$, *tales que* $p_k \geq 0$ *para toda* $k = 0, 1, 2, \ldots,$. *Entonces* $G(s)$ *es continua por la derecha en* $s = 1$, *es decir*

$$lim_{s\uparrow 1} G(s) = \sum_{k\geq 0} p_k = G(),$$

sin importar si la suma es finita o no.

Nota 33.3 *El radio de Convergencia para cualquier PGF es* $R \geq 1$, *entonces, el Teorema de Abel nos dice que aún en el peor escenario, cuando* $R = 1$, *aún se puede confiar en que la PGF será continua en* $s = 1$, *en contraste, no se puede asegurar que la PGF será continua en el límite inferior* $-R$, *puesto que la PGF es simétrica alrededor del cero: la PGF converge para todo* $s \in (-R, R)$, *y no lo hace para* $s < -R$ *o* $s > R$. *Además nos dice que podemos escribir* $G_X(1)$ *como una abreviación de* $lim_{s\uparrow 1} G_X(s)$.

Entonces si suponemos que la diferenciación término a término está permitida, entonces

$$G_X^{'}(s) \quad = \quad \sum_{x=1}^{\infty} x s^{x-1} p_x$$

el Teorema de Abel nos dice que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \lim_{s\uparrow 1} G_X^{'}(s): \\
\mathbb{E}[X] &= = \sum_{x=1}^{\infty} x p_x = G_X^{'}(1) \\
&= \lim_{s\uparrow 1} G_X^{'}(s),
\end{aligned}$$

dado que el Teorema de Abel se aplica a

$$G_X^{'}(s) = \sum_{x=1}^{\infty} x s^{x-1} p_x,$$

estableciendo así que $G_X^{'}(s)$ *es continua en* $s = 1$. *Sin el Teorema de Abel no se podría asegurar que el límite de* $G_X^{'}(s)$ *conforme* $s \uparrow 1$ *sea la respuesta correcta para* $\mathbb{E}[X]$.

Nota 33.4 *La PGF converge para todo* $|s| < R$, *para algún* R. *De hecho la PGF converge absolutamente si* $|s| < R$. *La PGF además converge uniformemente en conjuntos de la forma* $\left\{s : |s| < R^{'}\right\}$, *donde* $R^{'} < R$, *es decir,* $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{Z}$ *tal que* $\forall s$, *con* $|s| < R^{'}$, *y* $\forall n \geq n_0$,

$$|\sum_{x=0}^{n} s^x \mathbb{P}(X = x) - G_X(s)| < \epsilon.$$

De hecho, la convergencia uniforme es la que nos permite diferenciar término a término:

$$G_X(s) = \mathbb{E}\left[s^X\right] = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \mathbb{P}(X = x),$$

y sea $s < R$.

a*)*

$$\begin{aligned} G_X^{'}(s) &= \frac{d}{ds}\left(\sum_{x=0}^{\infty} s^x \mathbb{P}(X = x)\right) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{d}{ds}\left(s^x \mathbb{P}(X = x)\right) \\ &= \sum_{x=0}^{n} x s^{x-1} \mathbb{P}(X = x). \end{aligned}$$

b*)*

$$\begin{aligned} \int_a^b G_X(s)\, ds &= \int_a^b \left(\sum_{x=0}^{\infty} s^x \mathbb{P}(X = x)\right) ds = \sum_{x=0}^{\infty} \left(\int_a^b s^x \mathbb{P}(X = x)\, ds\right) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{s^{x+1}}{x+1} \mathbb{P}(X = x), \end{aligned}$$

para $-R < a < b < R$.

Teorema 33.36 (Teorema de Convergencia Monótona para PGF) *Sean* X *y* X_n *variables aleatorias no negativas, con valores en los enteros, finitas, tales que*

$$lim_{n\to\infty} G_{X_n}(s) = G_X(s)$$

para $0 \leq s \leq 1$, *entonces*

$$lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k),$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

El teorema anterior requiere del siguiente lema

Lema 33.2 *Sean* $a_{n,k} \in \mathbb{Z}^+$, $n \in \mathbb{N}$ *constantes no negativas con* $\sum_{k\geq 0} a_{k,n} \leq 1$. *Supóngase que para* $0 \leq s \leq 1$, *se tiene*

$$a_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} s^k \to a(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k.$$

Entonces

$$a_{0,n} \to a_0.$$

Teorema de Estabilidad

(A1.) *Para* $j, j+1 \in \{1, 2, \ldots, K\}$

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_K \ , \ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_K \ , \ \delta_{j,j+1}, \tag{33.1.58}$$

son mutuamente independientes y sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

(A2.) *Para algún entero* $p \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[\xi_k^{p+1}(1)\right] < \infty \ , \ \mathbb{E}\left[\eta_k^{p+1}(1)\right] < \infty \ y \ \mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}^{p+1}(1)\right] < \infty \tag{33.1.59}$$

para $k = 1, \ldots, K$ *y para* $j, j+1 \in \{1, 2, \ldots, K\}$.

En el caso particular de un modelo con un solo servidor, $M = 1$, *se tiene que si se define*

Definición 33.1

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1 \leq j \leq K}\left(\frac{\lambda_j}{p_j \overline{N}}\right)\delta^*. \tag{33.1.60}$$

Teorema 33.37 (Teorema 2.1 [15]) *Si* $\rho < 1$, *entonces:*

i) *Para alguna constante* κ_p, *y para cada condición inicial* $x \in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \sup \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{33.1.61}$$

donde p *es el entero dado en (33.1.59).*

ii)
$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}\left[Q_k(0)^r\right], \tag{33.1.62}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

iii) *El primer momento converge con razón* t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}\left[Q(0)\right]| = 0. \tag{33.1.63}$$

iv) *La* Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r ds = \mathbb{E}\left[Q_k(0)^r\right], \ \mathbb{P}\text{-}c.s. \tag{33.1.64}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

Definición 33.2 *El flujo modelo se dice* estable *si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier fluido límite.*

Teorema 33.38 *Suponga que el fluido modelo es estable, y suponga que los supuestos (33.1.58) y (33.1.59). Entonces*

i) *Para alguna constante* κ_p, *y para cada condición inicial* $x \in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \sup \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{33.1.65}$$

donde p *es el entero dado en (33.1.59). Si además se cumple la condición (**??**), entonces para cada condición inicial*

ii) *Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right], \tag{33.1.66}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$. *Donde* π *es la probabilidad invariante para* $\mathbb{X}$.

iii) *El primer momento converge con razón* t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right] = 0. \tag{33.1.67}$$

iv) *La* Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}\text{-}c.s. \tag{33.1.68}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$.

Teorema 33.39 *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,

$$|Q\left(T\right)|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ T\geq0, \tag{33.1.69}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, *con* $|Q\left(0\right)|=1$. *Entonces para cualquier* $0<q\leq1$, *existe* $B<0$ *tal que para cualquier* $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{33.1.70}$$

Definición 33.3 *El flujo modelo se dice* estable *si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$, *con* $t\geq t_{0}$, *para cualquier fluido límite.*

Teorema 33.40 *Suponga que el fluido modelo es estable, y suponga que los supuestos (33.1.58) y (33.1.59). Entonces*

i) *Para alguna constante* κ_{p}, *y para cada condición inicial* $x\in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\sup\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}, \tag{33.1.71}$$

*donde p es el entero dado en (33.1.59). Si ademÃ¡s se cumple la condición (**??**), entonces para cada condición inicial*

ii) *Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right], \tag{33.1.72}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$. *Donde* π *es la probabilidad invariante para* $\mathbb{X}$.

iii) *El primer momento converge con razón* t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]=0. \tag{33.1.73}$$

iv) *La* Ley Fuerte de los grandes nÃºmeros *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}\text{-}c.s. \tag{33.1.74}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$.

Teorema 33.41 *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,

$$|Q\left(T\right)|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ T\geq0, \tag{33.1.75}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, *con* $|Q\left(0\right)|=1$. *Entonces para cualquier* $0<q\leq1$, *existe* $B<0$ *tal que para cualquier* $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{33.1.76}$$

Consecuencias del Teorema

En el caso particular de un modelo con un solo servidor, $M=1$, *se tiene que si se define*

Definición 33.4

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}+\max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_{j}}{p_{j}\overline{N}}\right)\delta^{*}. \tag{33.1.77}$$

donde si

- *Si* $\rho<1$, *entonces la red es estable, es decir el teorema (33.40) se cumple.*
- *De lo contrario, es decir, si* $\rho>1$ *entonces la red es inestable, es decir, el teorema (**??**).*

En el caso particular de un modelo con un solo servidor, $M = 1$, se tiene que si se define

Definición 33.5

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + \max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{p_j \overline{N}} \right) \delta^*. \tag{33.1.78}$$

donde si

- *Si $\rho < 1$, entonces la red es estable, es decir el teorema (33.40) se cumple.*
- *De lo contrario, es decir, si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, el teorema (??).*

El metro de la Ciudad de México es uno de los sistemas más grandes del mundo en cuanto al número de pasajeros que transporta, como a la longitud del mismo. El sistema es similar a los de otros países, en los cuales por una vía circula un único tren cuyo orígen y destino siempre el mismo. Una línea consiste de dos vías, una en sentido opuesto a la otra.

El metro de la Ciudad de México cuenta actualmente con 11 líneas. Cada línea tiene tres distintos tipos de estaciones: Terminales, Normales y de Correspondencia. El número de estaciones por línea es variable: la línea dos es la más grande con 24 estaciones, mientras que la línea A sólo cuenta con 10 estaciones. La mayoría de las estaciones de correspondencia unen a dos líneas, pero hay algunas, como la de Pantitlán, que son estación terminal de 4 distintas.

Actualmente se cuenta con 355 trenes de 6 o 9 vagones, cuya capacidad máxima de pasajeros es de 1020 y 1530 respectivamente. Cada línea tiene asignado en principio un número fijo de trenes: la línea 3 cuenta con 58, mientras que la línea 4 dispone solamente de 13.

Dependiendo de la afluencia se divide el intervalo de tiempo en el que funciona el metro en cuatro intervalos distintos, dos para las horas pico y dos para las horas con menor demanda.

Para cada intervalo, cada línea tiene definida la frecuencia con la que circulan los trenes, es decir, la cantidad de trenes por hora.

Notación

- *El metro cuenta con un total de $\mathcal{L}$ líneas.*
- *Cada día se divide en s periodos de tiempo, la longitud de cada segmento es T_s y $\tau_s = T_1 + T_2 + \cdots + T_{s-1}$.*
- *Cada línea del metro tiene asociada un tiempo establecido entre dos trenes consecutivos, variables de control, los cuales se denotarán por $\mu_{l,s}$, $\mu = (\mu_{l,s})_{l,s=1}^{\mathcal{M},S}$.*
- *El par (o, d) denotará una única sucesión de plataformas por origen-destino.*
- *Denotaremos por p cualquier plataforma de la l-ésima línea, L_l.*
- *Para la línea l_l sea $\mathcal{M}$ el número total de líneas con las que se intersectan con la línea L_l en la plataforma p.*
- *(o, d) es el viaje de un pasajero de la plataforma o, a la plataforma d.*
- *El término $\lambda(o, d)$ es la tasa demanda para el recorrido (o, d).*
- *$V_k(p)$ es el tiempo de salida del k-ésimo tren de la plataforma p.*
- *S_k^m es el tiempo de llegada del k-ésimo tren de la plataforma p_m.*
- *$\{\delta_i\}_{i \geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media y varianza conocidas, que modelarán los tiempos de espera del tren en la plataforma ocasionado por el conductor, provocada por los tiempos de viaje más la apertura y cierre de puertas que son manejadas por el conductor del tren.*
- *$P_k^m(o, d)$ es el número de pasajeros de transferencia en el k-ésimo tren de la línea m, para cualquier plataforma $o \in L_m$.*
- *Dado $m \geq 1$, $P_k^m(o_m, d)$ es el número de pasajeros de transferencia en el k-ésimo tren de la línea m, para la plataforma $o_m \in L_m$.*
- *$\hat{D}(p_k, p_{k+1})$ es la distancia entre las plataformas k y $k+1$.*
- *v es la velocidad promedio del tren, es la misma para todas las líneas en cualquier intervalo de tiempo s.*
- *$D_o(p_m, p)$ es el conjunto de los destinos a partir del origen o que requieren un transbordo de p_1 a p.*

- $\eta_m(\cdot)$ *es el proceso de conteo de llegadas de los trenes de la línea* L_m *en la estación donde está ubicada la plataforma* p_m.
- $N_o(\cdot)$ *es un Proceso Poisson acumulado, de todas las llegadas del orígen* p *con tiempos de llegada* S_k^o.

Supuestos Teóricos

Supuestos 33.1 *Los pasajeros con destino la plataforma d, llegán al anden origen, o, conforme a un proceso Poisson con parámetro* $\lambda(o,d)$. *Todos los procesos de llegada Poisson son independientes entre sí e independientes de los procesos de salida de los trenes en la plataforma.*

Supuestos 33.2 *Para cada plataforma* $p \in L_l$ *y para cada línea* L_l, *el tiempo de salida del tren en la plataforma inicial* $p_1 \in L_l$, *sigue la siguiente forma recursiva:*

$$V_j(p_1) = V_{j-1}(p_1) + \mu_l(1 + \delta_j(p)) \tag{33.1.79}$$

Para $k = 0, 1, 2, \ldots$ *y plataformas* p_k *y* p_{k+1}, *el tiempo de salida del* j*-ésimo tren de la plataforma* p_{k+1} *está dada por*

$$V_j(p_{k+1}) = V_j(p_k) + \frac{D_k(p_k, p_{k+1})}{v} + \mu_l\delta_j(p_{k+1}) \tag{33.1.80}$$

donde $\{\delta_i\}_{i\geq 1}$ *es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media y varianza conocidas. Las* $\{\delta_j\}_{j\geq 1}$ *modelan las fluctuaciones en los tiempos de interarribo provocada por los tiempos de viaje más los tiempos provocados por el apertura y cierre de puertas que son manejadas por el conductor del tren.*

Los tiempos de llegada de los pasajeros en cualquier plataforma están completamente determinadas por las llegadas de los pasajeros, conforme a su correspondiente proceso Poisson, desde fuera, y su traslado a lo largo de la red para lograr su destino.

Para un valor fijo de la frecuencia con la que salen los trenes en las plataformas, la distribución de los tiempos de salida en el resto de las plataformas queda completamente determinada por los tiempos de salida en la estación inicial, la sucesión de tiempos de viaje de plataforma a plataforma, así como del número de las mismas para cada línea L_l.

De igual manera los tiempos de llegada de los pasajeros a cualquier plataforma están completamente determinados por el flujo, de pasajeros, que se comporta como un proceso Poisson con parámetro $\lambda(o,d)$, *provenientes de fuera del sistema, además de su movimiento a lo largo de la red para alcanzar sus destinos.*

Si $p_i \in L_l$ *y* $p_k \notin L_l$, *entonces los procesos de salida correspondientes se asume que son independientes bajo el supuesto de no sincronización.*

Los procesos de llegada de los pasajeros en cada plataforma están compuestos por un proceso Poisson de pasajeros que abordan desde fuera del sistema, más los que llegan de otras líÂneas de transferencia.

Los pasajeros de primer orden son aquellos que provienen de la línea L_m, *en el k-ésimo tren, que transbordan por primera vez en la plataforma* $p \in L_l$, *es decir*

$$\sum_{o\in L_m} P_k^m(o,d)\, \mathbb{1}_{\{d\in D_o(p_m,p)\}}$$

Para un valor fijo de la frecuencia con la que salen los trenes en las plataformas, μ_l, *la distribución de los tiempos de salida en el resto de las plataformas queda completamente determinada por los tiempos de salida en la estación inicial, la sucesión de tiempos de viaje de plataforma a plataforma, así como del número de las mismas para cada línea* L_l.

Proposiciones

Proposición 33.16 *Sea p plataforma en* L_l, *ambas fijas. Sea* $(L_m)_{m\geq 1}$ *colección de líneas con correspondencia en p. Para cada m, sea* p_m *una plataforma de correspondencia con la línea* L_l *en la estación donde está ubicada la plataforma p. Para cada* p_m *los tiempos de llegada entre dos trenes consecutivos están dados por* $T_k(p_m) = S_k(p_m) - S_{k-1}(p_m)$, *que se abreviará por* $T_k^m = S_k^m - S_{k-1}^m$. *El número de pasajeros de transferencia de primer orden en la plataforma p, procedentes de* p_m, *con tiempos de llegada* S_k^m, *cumplen con la condición*

$$\mathbb{E}\left[P_k^m \mid T_k^m\right] = \sum_{n=1}^{L}\sum_{o\in L_n} \lambda(o,d)\,\mu_n\left[\mathbb{E}\left[\eta_n(V_j)\right] - \mathbb{E}\left[\eta_n(V_{j-1})\right]\right]\mathbb{1}_{d\in D_o(p_m,p)}. \tag{33.1.81}$$

donde $D_o(p_m, p)$ es el conjunto de los destinos a partir del origen o que requieren un transbordo de $p_m \in L_m$ a $p \in L_l$ y $\eta_m(\cdot)$ es el proceso de conteo de llegadas de los trenes de la línea L_m en la estación donde está ubicada la plataforma p_m.

Demostración 33.4 *Sea $m \geq 1$ fija y sea p_m plataforma en L_m que hace correspondencia con p en la estación de transferencia donde también está ubicada la plataforma $p \in L_l$. Se sabe que para cualquier $o \in L_m$ los tiempos de salida del k-ésimo tren en la misma, son de la forma*

$$\begin{aligned} V_k(o) &= V_k(p_m) - \frac{\hat{D}(o, p_m)}{v} - \mu_m \delta_k(o, p_m) \\ &= S_k(p_m) - \frac{\hat{D}(o, p_m)}{v} - \mu_m \delta_k(o, p_m). \end{aligned}$$

Dado que el número de pasajeros que abordan el k-ésimo tren en $o \in L_m$ con destino $d \in D_o(p_m, p)$ es el número de arribos Poisson con intensidad $\lambda(o, d)$ en $(V_{k-1}(o), V_k(o)]$, entonces dado $o_m \in L_m$ se tiene que:

$$\begin{aligned} V_k(p_m) &= V_k(p_{m-1}) + \frac{\hat{D}(p_{m-1}, p_m)}{v} + \mu_m \delta_k(p_m) \\ &= \left[V_k(p_{m-2}) + \frac{\hat{D}(p_{m-2}, p_{m-1})}{v} + \mu_m \delta_k(p_{m-1}) \right] \\ &+ \frac{D(p_{m-1}, p_m)}{v} + \mu_m \delta_k(p_m) \\ &= V_k(p_{m-2}) + \frac{\hat{D}(p_{m-2}, p_m)}{v} + \mu_m \delta_k(p_{m-1}, p_m) \\ &= \left[V_k(p_{m-3}) + \frac{\hat{D}(p_{m-3}, p_{m-2})}{v} + \mu_m \delta_k(p_{m-2}) \right] \\ &+ \frac{\hat{D}(p_{m-2}, p_m)}{v} + \mu_m \delta_k(p_{m-1}, p_m) \\ &= V_k(p_{m-3}) + \frac{\hat{D}(p_{m-3}, p_m)}{v} + \mu_m \delta_k(p_{m-2}, p_m) \\ &\vdots \\ &= V_k(p_1) + \frac{\hat{D}(p_1, p_m)}{v} + \mu_m \delta_k(p_1, p_m) \\ &= V_k(o) + \frac{\hat{D}(o_m, p_m)}{v} + \mu_m \delta_k(o_m, p_m) \end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$V_k(o_m) = V_k(p_m) - \frac{\hat{D}(o_m, p_m)}{v} - \mu_m \delta_k(o_m, p_m) \tag{33.1.82}$$

y como $V_k(p_m) = S_k^m$

$$V_k(o_m) = S_k^m - \frac{\hat{D}(o_m, p_m)}{v} - \mu_m \delta_k(o_m, p_m) \tag{33.1.83}$$

Por el supuesto (33.1) los pasajeros con destino la plataforma d, llegán a la plataforma o_m, conforme a un proceso Poisson con parámetro $\lambda(o, d)$.

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[P_k^m(o_m, d)] = \lambda(o_m, d)\, \mathbb{E}[V_k(o_m) - V_{k-1}(o_m)] \\ =\;& \lambda(o_m, d)\, \mathbb{E}[(V_k(p_m) - V_{k-1}(p_m)) + \mu_m[\delta_{k-1}(o_m, p_m) - \delta_k(o_m, p_m)]] \\ =\;& \lambda(o_m, d)\, \mathbb{E}[T_k(p_m) + \mu_m[\delta_{k-1}(o_m, p_m) - \delta_k(o_m, p_m)]] \end{aligned}$$

es decir

$$\mathbb{E}[P_k^m(o_m, d)] = \lambda(o_m, d)\, \mathbb{E}[T_k(p_m) + \mu_m[\delta_{k-1}(o_m, p_m) - \delta_k(o_m, p_m)]]. \tag{33.1.84}$$

Lo que se quiere determinar es el valor esperado del número de pasajeros que llegarán a la plataforma p_m entre dos trenes consecutivos, entonces lo que hacemos es utilizar una propiedad de la esperanza condicional

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[P_k^m\left(o_m,d\right)\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[P_k^m\left(o_m,d\right)\right|T_k^m\right]\right]\\
=\;&\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\lambda\left(o_m,d\right)\left\{T_k^m+\mu_m\left[\delta_{k-1}\left(o_m,p_m\right)-\delta_k\left(o_m,p_m\right)\right]\right\}\right|T_k^m\right]\right]\\
=\;&\mathbb{E}\left[\lambda\left(o_m,d\right)\mathbb{E}\left[T_k^m+\mu_m\left[\delta_{k-1}\left(o_m,p_m\right)-\delta_k\left(o_m,p_m\right)\right]\right|T_k^m\right]\right]\\
=\;&\mathbb{E}\;\left[\lambda\left(o_m,d\right)\mathbb{E}\left[T_k^m\right|T_k^m\right]+\lambda\left(o_m,d\right)\mu_m\mathbb{E}\left[\delta_k\left(o_m,p_m\right)-\delta_{k-1}\left(o_m,p_m\right)\right]\right|T_k^m\right]\\
=\;&\mathbb{E}\left[\lambda\left(o_m,d\right)T_k^m+\lambda\left(o_m,d\right)\mu_m\mathbb{E}\left[\delta_k\left(o_m,p_m\right)-\delta_{k-1}\left(o_m,p_m\right)\right]\right]\\
=\;&\mathbb{E}\left[\lambda\left(o_m,d\right)T_k^m\right]
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[P_k^m\left(o_m,d\right)\right]=\lambda\left(o_m,d\right)\mu_m \tag{33.1.85}$$

para todos los pasajeros que tienen como origen una plataforma en la línea L_m y un destido d que requiere hacer una transferencia de p_m a p. La penúltima igualdad es cierta dado que los procesos Poisson con intensidad $\lambda\left(o_m,d\right)$ en el nodo orígen, $o_m\in L_m$ son independientes de los tiempos de salida de los trenes, además del hecho de que las $\delta_k\left(o_m,p_m\right)$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Por el supuesto (33.1) los pasajeros con destino la plataforma d, llegán a la plataforma o_m, conforme a un proceso Poisson con parámetro $\lambda\left(o,d\right)$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[P_k^m\left(o_m,d\right)\right]=\lambda\left(o_m,d\right)\mathbb{E}\left[V_k\left(o_m\right)-V_{k-1}\left(o_m\right)\right]\\
=\;&\lambda\left(o_m,d\right)\mathbb{E}\left[\left(V_k\left(p_m\right)-V_{k-1}\left(p_m\right)\right)+\mu_m\left[\delta_{k-1}\left(o_m,p_m\right)-\delta_k\left(o_m,p_m\right)\right]\right]\\
=\;&\lambda\left(o_m,d\right)\mathbb{E}\left[T_k\left(p_m\right)+\mu_m\left[\delta_{k-1}\left(o_m,p_m\right)-\delta_k\left(o_m,p_m\right)\right]\right]
\end{aligned}$$

es decir

$$\mathbb{E}\left[P_k^m\left(o_m,d\right)\right]=\lambda\left(o_m,d\right)\mathbb{E}\left[T_k\left(p_m\right)+\mu_m\left[\delta_{k-1}\left(o_m,p_m\right)-\delta_k\left(o_m,p_m\right)\right]\right]. \tag{33.1.86}$$

Lo que se quiere determinar es el valor esperado del número de pasajeros que llegarán a la plataforma p_m entre dos trenes consecutivos, entonces lo que hacemos es utilizar una propiedad de la esperanza condicional

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[P_k^m\left(o_m,d\right)\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[P_k^m\left(o_m,d\right)\right|T_k^m\right]\right]\\
=\;&\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\lambda\left(o_m,d\right)\left\{T_k^m+\mu_m\left[\delta_{k-1}\left(o_m,p_m\right)-\delta_k\left(o_m,p_m\right)\right]\right\}\right|T_k^m\right]\right]\\
=\;&\mathbb{E}\left[\lambda\left(o_m,d\right)\mathbb{E}\left[T_k^m+\mu_m\left[\delta_{k-1}\left(o_m,p_m\right)-\delta_k\left(o_m,p_m\right)\right]\right|T_k^m\right]\right]\\
=\;&\mathbb{E}\;\left[\lambda\left(o_m,d\right)\mathbb{E}\left[T_k^m\right|T_k^m\right]+\lambda\left(o_m,d\right)\mu_m\mathbb{E}\left[\delta_k\left(o_m,p_m\right)-\delta_{k-1}\left(o_m,p_m\right)\right]\right|T_k^m\right]\\
=\;&\mathbb{E}\left[\lambda\left(o_m,d\right)T_k^m+\lambda\left(o_m,d\right)\mu_m\mathbb{E}\left[\delta_k\left(o_m,p_m\right)-\delta_{k-1}\left(o_m,p_m\right)\right]\right]\\
=\;&\mathbb{E}\left[\lambda\left(o_m,d\right)T_k^m\right]
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[P_k^m\left(o_m,d\right)\right]=\lambda\left(o_m,d\right)\mu_m \tag{33.1.87}$$

para todos los pasajeros que tienen como origen una plataforma en la línea L_m y un destido d que requiere hacer una transferencia de p_m a p. La penúltima igualdad es cierta dado que los procesos Poisson con intensidad $\lambda\left(o_m,d\right)$ en el nodo orígen, $o_m\in L_m$ son independientes de los tiempos de salida de los trenes, además del hecho de que las $\delta_k\left(o_m,p_m\right)$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Sea L_m cualquier línea de correspondencia con L_l en la misma estación donde está ubicada p.

Sea o plataforma cualesquiera en L_m fija. El número de pasajeros que abordarán el j-ésimo tren de la línea L_l en la plataforma p, es el total de arribos Poisson de pasajeros que lleguen a la misma entre el $j-1$ y el j-ésimo tren.

Tales pasajeros vienen en el k-ésimo tren de la línea L_m que cambian a L_l en la plataforma p_m. El total de trenes que llegan a p_m para subirse al j-ésimo tren en p se estima de la siguiente manera:

Si definimos $\eta_m\left(\cdot\right)$ como el proceso de conteo de llegadas de los trenes de la línea L_m en la estación donde está ubicada la plataforma p_m.

Entonces $\eta_m\left(V_{j-1}\left(p_m\right)\right)$ es el número de trenes que llegan a p_m al tiempo V_{j-1}, análogamente para $\eta_m\left(V_j\left(p_m\right)\right)$. Entonces el total de estos pasajeros, $\hat{P}_j^m\left(o,d\right)$ se puede estimar por:

$$\hat{P}_j^m\left(o,d\right)=\sum_{k=\eta_m\left(V_{j-1}\left(p_m\right)\right)+1}^{\eta_m\left(V_j\left(p_m\right)\right)}P_k^m\left(o,d\right). \tag{33.1.88}$$

Sea $Y_j(p_m) = V_j(p_m) - V_{j-1}(p_m)$, *y entonces*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\hat{P}_j^m(o,d)\middle| Y_j(p)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=\eta_m\left(V_{j-1}(p_m)\right)+1}^{\eta_m\left(V_j(p_m)\right)} P_k^m(o,d)\middle| Y_j(p)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=\eta_m\left(V_{j-1}(p_m)\right)+1}^{\eta_m\left(V_j(p_m)\right)} P_k^m(o,d)\middle| Y_j(p_m)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{\eta_m\left(V_j(p_m)\right)} P_k^m(o,d) - \sum_{k=1}^{\eta_m\left(V_{j-1}(p_m)\right)} P_k^m(o,d)\right)\middle| Y_j(p_m)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\hat{P}_j^m(o,d)\middle| Y_j(p)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\eta_m\left(V_j(p_m)\right)} P_k^m(o,d)\middle| Y_j(p_m)\right] && (33.1.89)\\
&- \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\eta_m\left(V_{j-1}(p_m)\right)+1} P_k^m(o,d)\middle| Y_j(p_m)\right]. && (33.1.90)
\end{aligned}$$

Dado que $\sigma(Y_j(p_m)) \subset \sigma(\eta_m(V_j(p_m)))$, *entonces se tiene que*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\eta_m\left(V_j(p_m)\right)} P_k^m(o,d)\middle| Y_j(p_m)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\eta_m\left(V_j(p_m)\right)} P_k^m(o,d)\middle| Y_j(p_m)\right]\middle| \eta_m(V_j)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\eta_m\left(V_j(p_m)\right)} P_k^m(o,d)\middle| \eta_m(V_j)\right]\middle| Y_j(p_m)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{l\geq 1}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\eta_m\left(V_j(p_m)\right)} P_k^m(o,d)\middle| \eta_m(V_j(p_m)) = l\right]\mathbb{P}\left[\eta_m(V_j(p_m)) = l\right]\middle| Y_j(p_m)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{l\geq 1}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{l} P_k^m(o,d)\right]\mathbb{P}\left[\eta_m(V_j) = l\right]\middle| Y_j(p_m)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{l\geq 1} l\mathbb{E}\left[P_k^m(o,d)\right]\mathbb{P}\left[\eta_m(V_j) = l\right]\middle| Y_j(p_m)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[P_k^m(o,d)\right]\sum_{l\geq 1} l\mathbb{P}\left[\eta_m(V_j) = l\right]\middle| Y_j(p_m)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[P_k^m(o,d)\right]\mathbb{E}\left[\eta_m(V_j)\right]\middle| Y_j(p_m)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[P_k^m(o,d)\right]\mathbb{E}\left[\eta_m(V_j)\right]
\end{aligned}$$

Es decir

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\eta_m\left(V_j(p_m)\right)} P_k^m(o,d)\middle| Y_j(p)\right] = \mathbb{E}\left[P_k^m(o,d)\right]\mathbb{E}\left[\eta_m(V_j)\right] \qquad (33.1.91)$$

entonces procediendo de manera análoga para $\eta_m(V_{j-1})$, *se tiene que*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\eta_m\left(V_{j-1}\right)} P_k^m(o,d)\middle| Y_j(p)\right] = \mathbb{E}\left[P_k^m(o,d)\right]\mathbb{E}\left[\eta_m(V_{j-1})\right]. \qquad (33.1.92)$$

De las ecuaciones (33.1.91) y (33.1.92) se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[P_j^m(o,d)\middle|\, Y_j(p)\right] &= \mathbb{E}\left[P_k^m(o,d)\right]\mathbb{E}\left[\eta_m(V_j)\right]-\mathbb{E}\left[P_k^m(o,d)\right]\mathbb{E}\left[\eta_m(V_{j-1})\right]\\ &= \mathbb{E}\left[P_k^m(o,d)\right]\left(\mathbb{E}\left[\eta_m(V_j)\right]-\mathbb{E}\left[\eta_m(V_{j-1})\right]\right)\end{aligned}$$

por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[P_j^m(o,d)\middle|\, Y_j(p)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[P_k^m(o,d)\middle|\, T_k(p_m)\right]\right]\left(\mathbb{E}\left[\eta_m(V_j)\right]-\mathbb{E}\left[\eta_m(V_{j-1})\right]\right)\\ &= \mathbb{E}\left[\lambda(o,d)\,T_k(p_m)\right]\left(\mathbb{E}\left[\eta_m(V_j)\right]-\mathbb{E}\left[\eta_m(V_{j-1})\right]\right)\\ &= \lambda(o,d)\,\mathbb{E}\left[T_k(p_m)\right]\left(\mathbb{E}\left[\eta_m(V_j)\right]-\mathbb{E}\left[\eta_m(V_{j-1})\right]\right)\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{E}\left[P_j^m(o,d)\middle|\, Y_j(p)\right]=\lambda(o,d)\,\mu_m\left(\mathbb{E}\left[\eta_m(V_j)\right]-\mathbb{E}\left[\eta_m(V_{j-1})\right]\right) \tag{33.1.93}$$

Sea $r\geq 1$ fija, y sea L_r línea tal que L_r y L_l no tienen plataforma en común, de modo tal que la única manera de dirigirse de $o\in L_r$ a $d\in L_l$ es haciendo por lo menos un cambio de línea.

Sea $q\in L_m$ tal que L_r hace correspondencia con L_m en la estación donde está ubicada la plataforma q y la plataforma que llamaremos $p_r\in L_r$.

Consideremos de momento solamente las plataformas $q\in L_m$ y $p_r\in L_r$. Siguiendo el razonamiento dado con anterioridad, los pasajeros de primer orden que llegan a p_r para hacer cambio de línea y abordar el k-ésimo tren en q es:

$$\hat{P}_k^r(o,d)=\sum_{n=\eta_r\left(V_{i-1}(p_r)\right)+1}^{\eta_r(V_i(p_r))} P_i^r(o,d)\,. \tag{33.1.94}$$

Al igual que antes, consideremos $Y_i(p_r)=V_i(p_r)-V_{i-1}(p_r)$, entonces

$$\mathbb{E}\left[P_i^r(o,d)\middle|\, Y_i(q)\right]=\lambda(o,d)\,\mu_r\left(\mathbb{E}\left[\eta_r(V_i)\right]-\mathbb{E}\left[\eta_r(V_{i-1})\right]\right) \tag{33.1.95}$$

Entonces el total de pasajeros que llegan a p para abordar el i-ésimo tren, son los que provienen de cualquier $o\in L_m$, más los pasajeros de primer orden en q procedentes de cualquier $o\in L_r$, es decir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[P_i^m(o,d)\middle|\, Y_j(p)\right] &= \lambda(o,d)\,\mu_m\left(\mathbb{E}\left[\eta_m(V_j)\right]-\mathbb{E}\left[\eta_m(V_{j-1})\right]\right)\\ &+ \lambda(o,d)\,\mu_r\left(\mathbb{E}\left[\eta_r(V_i)\right]-\mathbb{E}\left[\eta_r(V_{i-1})\right]\right)\end{aligned}$$

Utilizando el mismo argumento para los pasajeros de orden superior se tiene

$$\mathbb{E}\left[P_j^m|Y_j(p)\right]=\sum_{n=1}^{L}\sum_{o\in L_n}\lambda(o,d)\,\mu_n\left[\mathbb{E}\left[\eta_n(V_i)\right]-\mathbb{E}\left[\eta_n(V_{i-1})\right]\right]\mathbb{1}_{d\in D_o(p_m,p)}.$$

con $\eta_m(V_i)$ el proceso de conteo de los trenes que llegan a la plataforma p_n.

Proposición 33.17 *Bajo los supuestos (33.1) y (33.2), los tiempos de salida entre dos trenes consecutivos, Y_j en la plataforma $p\in L_l$ sigue una distribución G_μ, donde $\mathbb{E}[Y_j]=\mu$, parámetro de escala de G_μ. Específicamente, si la línea está dada por la sucesión de plataformas $L_1=(p_1,p_2,\ldots,p_L)$, entonces para $q\in\{1,2,\ldots,L\}$ los tiempos de intersalida en la plataforma p_q satisfacen*

$$Var\left[Y_j\right]=\mu^2\left\{Var\left[\delta_j(p_1)\right]-2(q-1)\,Var\left[\delta_j(p)\right]\right\} \tag{33.1.96}$$

A saber, los tiempos de salida del tren V_j en la plataforma incial $p_1\in L_l$ sigue la recursión

$$V_j(p_1) = V_{j-1}(p_1)+\mu_l\left(1+\delta_j(p_1)\right)$$

entonces para $j=1,2,\ldots$

$$Y_j(p_1) = V_j(p_1)-V_{j-1}(p_1)=\mu_l\left(1+\delta_j(p_1)\right)$$

para la siguiente plataforma

$$\begin{aligned}V_j(p_2) &= V_j(p_1) + \frac{D(p_1,p_2)}{v} + \mu_l \delta_j(p_2)\\ V_{j+1}(p_2) &= V_{j+1}(p_1) + \frac{D(p_1,p_2)}{v} + \mu_l \delta_{j+1}(p_2)\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}Y_{j+1}(p_2) &= V_{j+1}(p_2) - V_j(p_2)\\ &= V_{j+1}(p_1) + \mu_l \delta_{j+1}(p_2) - V_j(p_1) - \mu_l \delta_j(p_2)\\ &= Y_{j+1}(p_1) + \mu_l [\delta_{j+1}(p_2) - \delta_j(p_2)]\\ &= \mu_l (1 + \delta_j(p_1)) + \mu_l [\delta_{j+1}(p_2) - \delta_j(p_2)]\\ &= \mu_l [(1 + \delta_j(p_1)) + \delta_{j+1}(p_2) - \delta_j(p_2)]\end{aligned}$$

en términos de la q-ésima plataforma y p_n

$$Y_{j+1}(p_q) = \mu_l \left[(1 + \delta_{j+1}(p_1)) + \sum_{n=2}^{q} (\delta_{j+1}(p_n) - \delta_j(p_n))\right]$$

recordando que la sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{\delta_j\}$ *tienen esperanza cero, se sigue que*

$$\mathbb{E}[Y_{j+1}(p_q)] = \mu$$

y entonces por propiedades de la varianza se tiene la igualdad que falta.

$$Var[Y_j] = \mu^2 \{Var[\delta_j(p_1)] - 2(q-1) Var[\delta_j(p)]\}$$

Utilizando el mismo argumento para los pasajeros de orden superior se tiene

$$\mathbb{E}\left[P_j^m | Y_j(p)\right] = \sum_{n=1}^{L} \sum_{o \in L_n} \lambda(o,d)\, \mu_n \left[\mathbb{E}[\eta_n(V_i)] - \mathbb{E}[\eta_n(V_{i-1})]\right] \mathbb{1}_{d \in D_o(p_m,p)}.$$

con $\eta_m(V_i)$ *el proceso de conteo de los trenes que llegan a la plataforma* p_n.

Proposición 33.18 *Bajo los supuestos (33.1) y (33.2), los tiempos de salida entre dos trenes consecutivos,* Y_j *en la plataforma* $p \in L_l$ *sigue una distribución* G_μ*, donde* $\mathbb{E}[Y_j] = \mu$*, parámetro de escala de* G_μ*. Específicamente, si la línea está dada por la sucesión de plataformas* $L_1 = (p_1, p_2, \ldots, p_L)$*, entonces para* $q \in \{1, 2, \ldots, L\}$ *los tiempos de intersalida en la plataforma* p_q *satisfacen*

$$Var[Y_j] = \mu^2 \{Var[\delta_j(p_1)] - 2(q-1) Var[\delta_j(p)]\} \tag{33.1.97}$$

A saber, los tiempos de salida del tren V_j *en la plataforma incial* $p_1 \in L_l$ *sigue la recursión*

$$V_j(p_1) = V_{j-1}(p_1) + \mu_l (1 + \delta_j(p_1))$$

entonces para $j = 1, 2, \ldots$

$$Y_j(p_1) = V_j(p_1) - V_{j-1}(p_1) = \mu_l (1 + \delta_j(p_1))$$

para la siguiente plataforma

$$\begin{aligned}V_j(p_2) &= V_j(p_1) + \frac{D(p_1,p_2)}{v} + \mu_l \delta_j(p_2)\\ V_{j+1}(p_2) &= V_{j+1}(p_1) + \frac{D(p_1,p_2)}{v} + \mu_l \delta_{j+1}(p_2)\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} Y_{j+1}(p_2) &= V_{j+1}(p_2) - V_j(p_2) \\ &= V_{j+1}(p_1) + \mu_l \delta_{j+1}(p_2) - V_j(p_1) - \mu_l \delta_j(p_2) \\ &= Y_{j+1}(p_1) + \mu_l [\delta_{j+1}(p_2) - \delta_j(p_2)] \\ &= \mu_l (1 + \delta_j(p_1)) + \mu_l [\delta_{j+1}(p_2) - \delta_j(p_2)] \\ &= \mu_l [(1 + \delta_j(p_1)) + \delta_{j+1}(p_2) - \delta_j(p_2)] \end{aligned}$$

en términos de la q-ésima plataforma y p_n

$$Y_{j+1}(p_q) = \mu_l \left[(1 + \delta_{j+1}(p_1)) + \sum_{n=2}^{q} (\delta_{j+1}(p_n) - \delta_j(p_n)) \right]$$

recordando que la sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{\delta_j\}$ tienen esperanza cero, se sigue que

$$\mathbb{E}[Y_{j+1}(p_q)] = \mu$$

y entonces por propiedades de la varianza se tiene la igualdad que falta.

$$Var[Y_j] = \mu^2 \{Var[\delta_j(p_1)] - 2(q-1) Var[\delta_j(p)]\}$$

El Modelo Global

El costo de operación promedio por día es $K(\overline{\mu})$, el costo k_l por viaje en cualquier tren de la línea L_l está dado por:

$$K(\overline{\mu}) = \sum_{s=1}^{S} k_l \frac{T_s}{\mu_{l,s}} \tag{33.1.98}$$

donde s es un segmento del día correspondiente a las distintas demandas del servicio a lo largo de las horas que presta servicio el metro. T_s es la longitud del segmento s, y $\mu_{l,s}$ corresponde al valor del parámetro de control para la línea l en el segmento s.

El tiempo de espera acumulado de los pasajeros es el tiempo total que los pasajeros tienen que esperar en las plataformas, el cuál representa el costo social. *Los pasajeros esperan en cualquier plataforma $p \in L_l$ sin importar de donde vengan, entre dos salidas de trenes consecutivos en p.*

A este tiempo total de espera se le denotará por $W_j(p)$, que es el tiempo total de espera de los pasajeros en la plataforma p de la línea L_l para tomar el j-ésimo tren.

Si $M_p(\cdot)$ denota el proceso de conteo de salida de los trenes de la plataforma en p, entonces

$$F(\overline{\mu}) = K(\overline{\mu}) + \sum_{s=1}^{S} \sum_{l=1}^{L} \sum_{p \in L_l} \mathbb{E}\left[\sum_{j=M_p(\tau_s)+1}^{M_p(\tau_s+T_s)} W_j(p) \right] \tag{33.1.99}$$

Los procesos de llegada de los pasajeros de transferencia de la línea $L_m \neq L_l$ en la estación donde está la plataforma $p \in L_l$ ubicada, dependen de los procesos de salida en las plataformas anteriores a la plataforma de transferencia en la línea L_m, así como de posibles transferencias.

El costo esperado, $F(\mu)$, de la red, es el costo esperado de operación por día, más el tiempo de espera total acumulado de los pasajeros en las plataformas. Calcular directamente el gradiente del costo esperado por día puede ser altamente complicado en términos computacionales.

Es por medio de técnicas de simulación que el cálculo de las derivadas se puede simplificar haciendo estos cálculos por plataforma, es decir, el modelo global lo estudiamos localmente.

Modelo Fantasma

Consideremos cualquier plataforma p en una línea L_l, y supongamos que el segmento del día s se alarga al infinito, es decir, los procesos Poisson de llegada se asumen estacionarios con parámetros constantes, además las frecuencias se consideran invariantes con respecto al tiempo.

El tiempo total de espera para los pasajeros que abordan el tren j en la plataforma p se puede escribir como

$$W_j(p) = \sum_{n=N_o(V_{j-1})+1}^{N_o(V_j)} (V_j - S_n^o) + \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=N_m(V_{j-1})+1}^{N_m(V_j)} P_k^{(m)} (V_j - S_k^m) \tag{33.1.100}$$

donde

- $N_o(\cdot)$ *es un Proceso Poisson acumulado, de todas las llegadas del orígen* p *con tiempos de llegada* S_k^o.
- M *son las distintas líneas que pueden transferir pasajeros en esta estación a traves de la plataforma* p.
- $N_m(\cdot)$ *son los procesos de llegada de los trenes de la línea* L_m *a la estación donde está ubicada la plataforma* p, *con correspondientes tiempos de llegada* S_k^m.
- P_k^m *es el número de pasajeros en transferencia en el tren de llegada* k, *para la línea* L_m.

Sean las plataformas $p \in L_l$ *y* $p_m \in L_m$ *en la misma estación. Los trenes que parten de* p_m *en tiempos* $V_k(p_m)$, *corresponden a los procesos de llegada de transferencia* $N_m(\cdot)$ *en la plataforma* $p \in L_l$ *y a los pasajeros que se moverán de* p_m *a* p.

Si $p_i \in L_l$ *y* $p_k \notin L_l$, *entonces los procesos de salida correspondientes se asume que son independientes bajo el supuesto de no sincronización.*

Los procesos de llegada de los pasajeros en cada plataforma están compuestos por un proceso Poisson de pasajeros, que abordan desde fuera del sistema, más los que llegan de otras líneas de transferencia.

La función susituta

Recordemos las expresiones referentes tanto al modelo global del sistema de transporte colectivo (33.1.99)

$$F(\overline{\mu}) = K(\overline{\mu}) + \sum_{s=1}^{S} \sum_{l=1}^{L} \sum_{p \in L_l} \mathbb{E}\left[\sum_{j=M_p(\tau_s)+1}^{M_p(\tau_s+T_s)} ,W_j(p)\right]$$

como la del tiempo total de espera de los pasajeros para abordar el tren j *en la plataforma* p, *(33.1.100),*

$$W_j(p) = \sum_{n=N_o(V_{j-1})+1}^{N_o(V_j)} (V_j - S_n^o) + \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} \sum_{k=N_m(V_{j-1})+1}^{N_m(V_j)} P_k^m (V_j - S_k^m).$$

Dada la alta interdependencia, es difícil estimar la función costo así como el cálculo de las derivadas con respecto al parámetro de control μ, *recordemos que lo que se quiere es optimizar la función objetivo (33.1.99) entonces lo que se propone es utilizar una función sustituta que se pueda simular, dicha función es:*

$$\Phi(\mu) = \sum_{j=1}^{M(T)} \sum_{m=0}^{\mathcal{M}} \rho_m \sum_{k=N_m(V_{j-1})+1}^{N_m(V_j)} T_k (V_j - S_k^m) \tag{33.1.101}$$

Calculemos la esperanza de Φ:

$$\mathbb{E}[\Phi(\mu)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(\mu) | T_k^m]]$$

De momento supongamos que $M(T)$ *no es aleatorio, y además consideremos solamente la suma a partir de* 1, *entonces,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Phi(\mu)] &\approx \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{M(T)} \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} \mathbb{E}\left[\sum_{k=N_m(V_{j-1})+1}^{N_m} \mathbb{E}[P_k^m | T_k^m] (V_j - S_k^m) | T_k^m\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{M(T)} \sum_{m=1}^{\mathcal{M}} \sum_{k=N_m(V_{j-1})+1}^{N_m} P_k^m (V_j - S_k^m)\right] \\
&\approx \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{M(T)} W_j(p)\right]
\end{aligned}$$

En este apéndice enunciaremos una serie de resultados que son necesarios para la demostración así como su demostración del Teorema de Down 32.95, además de un teorema referente a las propiedades que cumple el Modelo de Flujo.

Dado el proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ *definido en (32.2.289) que describe la dinámica del sistema de visitas cíclicas, si* $U(t)$ *es el residual de los tiempos de llegada al tiempo* t *entre dos usuarios consecutivos y* $V(t)$ *es el residual de los tiempos de servicio al tiempo* t *para el usuario que estás siendo atendido por el servidor. Sea* $\mathbb{X}$ *el espacio de estados que puede tomar el proceso* X.

Lema 33.10 (Lema 4.3, Dai[10]) *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k,$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea e *es un vector de unos,* C *es la matriz definida por*

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema (32.94):

Teorema 33.42 (Teorema 4.1, Dai [10]) *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación, para casi todas las trayectorias muestrales* ω *y cualquier sucesión de estados iniciales* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *existe una subsucesión* $\{x_{n_j}\}$ *con* $|x_{n_j}| \rightarrow \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} \left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{33.1.102}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} \left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}| t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}| t\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{33.1.103}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I - P)' M^{-1} \left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{33.1.104}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{33.1.105}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{33.1.106}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{33.1.107}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{33.1.108}$$

$$\text{Condiciones en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{33.1.109}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 33.19 (Proposición 4.2, Dai [10]) *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de 32.2.347 y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *El flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t.$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right).$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\rho_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right).$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right),$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 33.11 (Lema 3.1, Chen [8]) *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Lema 33.12 (Lema 5.2, Gut [20]) *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r},\tag{33.1.110}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$.

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 33.43 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo, Gut [20]) *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N\left(t\right)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N\left(t\right)}{t}\right]^{r}\rightarrow\frac{1}{\mu^{r}}$, *cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$.

Proposición 33.20 (Proposición 5.1, Dai y Sean [11]) *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_{0}>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0.\tag{33.1.111}$$

Proposición 33.21 (Proposición 5.3, Dai y Sean [11]) *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1}<\infty$, $\delta>0$ *y un conjunto compacto* $C\subset X$.

$$\mathbb{E}_{x}\left[\int_{0}^{\tau_{C}\left(\delta\right)}\left(1+|X\left(t\right)|^{p}\right)dt\right]\leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right).\tag{33.1.112}$$

Proposición 33.22 (Proposición 5.4, Dai y Sean [11]) *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right],$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{33.1.113}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 33.44 (Teorema 5.5, Dai y Sean [11]) *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\}, \tag{33.1.114}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p. \tag{33.1.115}$$

Teorema 33.45 (Teorema 6.2 Dai y Sean [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \to 0,$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x[|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q_0|^p] < \infty,$$

donde

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_f = sup_{|g\leq f|} | \int \pi(dy)\, g(y) - \int P^t(x,dy)\, g(y) |,$$

para $x \in \mathbb{X}$.

Teorema 33.46 (Teorema 6.3, Dai y Sean [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)} \left| P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \right|_f = 0,$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)} |\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]| = 0.$$

Proposición 33.23 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0. \tag{33.1.116}$$

Teorema 33.47 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\}, \tag{33.1.117}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 33.48 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right) ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right)\pi\left(dx\right), \tag{33.1.118}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 33.49 (Teorema 2.2, Down [15]) *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{33.1.119}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{33.1.120}$$

Demostración 33.5 (Teorema 32.95) *La demostración de este teorema se da a continuación:*

i) Utilizando la proposición 33.26 se tiene que la proposición 33.27 es cierta para $f\left(x\right) = 1 + |x|^p$.

i) es consecuencia directa del Teorema 33.53.

iii) ver la demostración dada en Dai y Sean [11] páginas 1901-1902.

iv) ver Dai y Sean [11] páginas 1902-1903 ó [27].

En este apéndice enunciaremos una serie de resultados que son necesarios para la demostración así como su demostración del Teorema de Down 32.95, además de un teorema referente a las propiedades que cumple el Modelo de Flujo.

Dado el proceso $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ definido en (32.2.289) que describe la dinámica del sistema de visitas cíclicas, si $U\left(t\right)$ es el residual de los tiempos de llegada al tiempo t entre dos usuarios consecutivos y $V\left(t\right)$ es el residual de los tiempos de servicio al tiempo t para el usuario que estás siendo atendido por el servidor. Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados que puede tomar el proceso X.

Lema 33.13 (Lema 4.3, Dai[10]) *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right) = \overline{U}_k,$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+,\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea e es un vector de unos, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema (32.94):

Teorema 33.50 (Teorema 4.1, Dai [10]) *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{33.1.121}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \ \text{u.o.c.} \tag{33.1.122}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I - P)' M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{33.1.123}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{33.1.124}$$

$$\overline{T}(t) \ \text{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{33.1.125}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \ \text{es no decreciente,} \tag{33.1.126}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{33.1.127}$$

$$\text{Condiciones en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{33.1.128}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 33.24 (Proposición 4.2, Dai [10]) *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de 32.2.347 y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. El flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) *Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.*

ii) *Para todo $t \geq 0$*
$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t.$$

iii) *Para todo $1 \leq k \leq K$*
$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t).$$

iv) *Para todo $1 \leq k \leq K$*
$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \rho_k$$
para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) *Para todo k, j*
$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t).$$

vi) *Para todo $1 \leq k \leq K$*
$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t),$$
para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 33.14 (Lema 3.1, Chen [8]) *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Lema 33.15 (Lema 5.2, Gut [20]) *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r, \tag{33.1.129}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$.

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 33.51 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo, Gut [20]) *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$.

Proposición 33.25 (Proposición 5.1, Dai y Sean [11]) *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{33.1.130}$$

Proposición 33.26 (Proposición 5.3, Dai y Sean [11]) *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right). \tag{33.1.131}$$

Proposición 33.27 (Proposición 5.4, Dai y Sean [11]) *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right],$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{33.1.132}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 33.52 (Teorema 5.5, Dai y Sean [11]) *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\}, \tag{33.1.133}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p. \tag{33.1.134}$$

Teorema 33.53 (Teorema 6.2 Dai y Sean [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0,$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x[|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q_0|^p] < \infty,$$

donde

$$\| P^t (c, \cdot) - \pi (\cdot) \|_f = sup_{|g \leq f|} | \int \pi (dy) g (y) - \int P^t (x, dy) g (y) |,$$

para $x \in \mathbb{X}$.

Teorema 33.54 (Teorema 6.3, Dai y Sean [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f(x) = f_1(x)$*, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)} \left| P^t (c, \cdot) - \pi (\cdot) \right|_f = 0,$$

para $x \in X$*. En particular, para cada condición inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)} \left| \mathbb{E}_x [Q_t] - \mathbb{E}_\pi [Q_0] \right| = 0.$$

Proposición 33.28 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X (t_0|x|) |^{p+1} \right] = 0. \quad (33.1.135)$$

Teorema 33.55 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [11]) *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q (s) |^p \right] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\}, \quad (33.1.136)$$

para $t > 0$ *y* $x \in X$*. En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q (s) |^p \right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 33.56 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [11]) *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea* ν *cualquier distribución de probabilidad en* $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$*, y* π *la distribución estacionaria de* X.

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_o^t f (X (s)) ds = \pi (f) := \int f (x) \pi (dx), \quad (33.1.137)$$

$\mathbb{P}$*-c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *con* $\pi (|f|) < \infty$*, la ecuación anterior se cumple.*

Teorema 33.57 (Teorema 2.2, Down [15]) *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,

$$|Q (T) | \geq \epsilon_0 T - c_0, \; T \geq 0, \quad (33.1.138)$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$*, con* $|Q(0)| = 1$*. Entonces para cualquier* $0 < q \leq 1$*, existe* $B < 0$ *tal que para cualquier* $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{ \mathbb{X} \rightarrow \infty \} \geq q. \quad (33.1.139)$$

Demostración 33.6 (Teorema 32.95) *La demostración de este teorema se da a continuación:*

i) Utilizando la proposición 33.26 se tiene que la proposición 33.27 es cierta para $f(x) = 1 + |x|^p$.

i) es consecuencia directa del Teorema 33.53.

iii) ver la demostración dada en Dai y Sean [11] páginas 1901-1902.

iv) ver Dai y Sean [11] páginas 1902-1903 ó [27].

Supuestos 33.1 *a) c is lower semicontinuous, and inf-compact on* $\mathbb{K}$ *(i.e. for every* $x \in X$ *and* $r \in \mathbb{R}$ *the set* $\{a \in A(x) : c(x, a) \leq r\}$ *is compact).*

b) The transition law Q is strongly continuous, i.e. $u(x, a) = \int u(y)Q(dy|x, a)$*,* $(x, a) \in \mathbb{K}$ *is continuous and bounded on* $\mathbb{K}$*, for every measurable bounded function u on* X.

c) There exists a policy π such that $V(\pi, x) < \infty$, for each $x \in X$.

Observación 33.1 *The following consequences of Assumption 33.9 are well-known (see Theorem 4.2.3 and Lemma 4.2.8 in [?]):*

a) The optimal value function V^* is the solution of the Optimality Equation (OE), i.e. for all $x \in X$,

$$V^*(x) = \min_{a\in A(x)} \left\{ c(x,a) + \alpha \int V^*(y)Q(dy|x,a) \right\}.$$

There is also $f^* \in \mathbb{F}$ such that:

$$V^*(x) = c(x, f^*(x)) + \alpha \int V^*(y)Q(dy|x, f^*(x)), \tag{33.1.140}$$

$x \in X$, and f^* is optimal.

b) For every $x \in X$, $v_n(x) \uparrow V^*$, with v_n defined as

$$v_n(x) = \min_{a\in A(x)} \left\{ c(x,a) + \alpha \int v_{n-1}(y)Q(dy|x,a) \right\},$$

$x \in X, n = 1, 2, \cdots$, and $v_0(x) = 0$. Moreover, for each n, there is $f_n \in \mathbb{F}$ such that, for each $x \in X$,

$$\min_{a\in A(x)} \left\{ c(x,a) + \alpha \int v_{n-1}(y)Q(dy|x,a) \right\} = c(x, f_n(x)) + \alpha \int v_{n-1}(y)Q(dy|x, f_n(x)). \tag{33.1.141}$$

Let $(X, A, \{A(x) : x \in X\}, Q, c)$ be a fixed Markov control model. Take M as the MDP with the Markov control model $(X, A, \{A(x) : x \in X\}, Q, c)$. The optimal value function, the optimal policy which comes from (33.35.9), and the minimizers in (33.35.10) will be denoted for M by V^*, f^*, and f_n , $n = 1, 2, \cdots$, respectively. Also let v_n, $n = 1, 2, \cdots$, be the value iteration functions for M. Let $G(x, a) := c(x, a) + \alpha \int V^*(y)Q(dy|x, a)$, $(x, a) \in \mathbb{K}$.
It will be also supposed that the MDPs taken into account satisfy one of the following Assumptions 33.10 or 33.11.

Supuestos 33.2 *a) X and A are convex;*

b) $(1 - \lambda)a + a' \in A((1 - \lambda)x + x')$ for all x, $x' \in X$, $a \in A(x)$, $a' \in A(x')$ and $\lambda \in [0, 1]$. Besides it is assumed that: if x and $y \in X$, $x < y$, then $A(y) \subseteq A(x)$, and $A(x)$ are convex for each $x \in X$;

c) Q is induced by a difference equation $x_{t+1} = F(x_t, a_t, \xi_t)$, with $t = 0, 1, \cdots$, where $F : X \times A \times S \to X$ is a measurable function and $\{\xi_t\}$ is a sequence of independent and identically distributed (i.i.d.) random variables with values in $S \subseteq \mathbb{R}$, and with a common density Δ. In addition, we suppose that $F(\cdot, \cdot, s)$ is a convex function on $\mathbb{K}$, for each $s \in S$; and if x and $y \in X$, $x < y$, then $F(x, a, s) \le F(y, a, s)$ for each $a \in A(y)$ and $s \in S$;

d) c is convex on $\mathbb{K}$, and if x and $y \in X$, $x < y$, then $c(x, a) \le c(y, a)$, for each $a \in A(y)$.

Supuestos 33.3 *a) Same as Assumption 33.10 (a);*

b) $(1 - \lambda)a + a' \in A((1 - \lambda)x + x')$ for all x, $x' \in X$, $a \in A(x)$, $a' \in A(x')$ and $\lambda \in [0, 1]$. Besides $A(x)$ is assumed to be convex for each $x \in X$;

c) Q is given by the relation $x_{t+1} = \gamma x_t + \delta a_t + \xi_t$, $t = 0, 1, \cdots$, where $\{\xi_t\}$ are i.i.d. random variables taking values in $S \subseteq \mathbb{R}$ with the density Δ, γ and δ are real numbers;

d) c is convex on $\mathbb{K}$.

Observación 33.2 *Assumptions 33.10 and 33.11 are essentially presented in Conditions C1 and C2 in [?], but changing a strictly convex $c(\cdot, \cdot)$ by a convex $c(\cdot, \cdot)$. (In fact, in [?], Conditions C1 and C2 take into account the more general situation in which both X and A are subsets of Euclidean spaces of the dimension greater than one.) Also note that it is possible to obtain that each of Assumptions 33.10 and 33.11 implies that, for each $x \in X$, $G(x, \cdot)$ is convex but not necessarily strictly convex (hence, M does not necessarily have a unique optimal policy). The proof of this fact is a direct consequence of the convexity of the cost function c, and of the proof of Lemma 6.2 in [?].*

Supuestos 33.4 *There is a policy ϕ such that $E_x^{\phi}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t c^*(x_t, a_t)\right] < \infty$, for each $x \in X$.*

Observación 33.3 *Suppose that, for M, Assumption 2.1 holds. Then, it is direct to verify that if M_ϵ satisfies Assumption 33.12, then it also satisfies Assumption 33.9.*

Condición 33.1 *There exists a measurable function $Z : X \to \mathbb{R}$, which may depend on α, such that $c^*(x,a) - c(x,a) = \epsilon a^2 \leq \epsilon Z(x)$, and $\int Z(y)Q(dy|x,a) \leq Z(x)$ for each $x \in X$ and $a \in B(x)$.*

Teorema 33.1 *Suppose that Assumptions 33.9 and 33.12 hold, and that, for M, one of Assumptions 33.10 or 33.11 holds. Let ϵ be a positive number. Then,*

a) If A is compact, $|W^*(x) - V^*(x)| \leq \epsilon K^2/(1-\alpha)$, $x \in X$, where K is the diameter of a compact set D such that $0 \in D$ and $A \subseteq D$.

b) Under Condition 33.3, $|W^*(x) - V^*(x)| \leq \epsilon Z(x)/(1-\alpha)$, $x \in X$.

Demostración 33.1 *The proof of case (a) follows from the proof of case (b) given that $Z(x) = K^2$, $x \in X$. (Observe that in this case, if $a \in A$, then $a^2 = (a-0)^2 \leq K^2$.)*
(b) *Assume that M satisfies Assumption 33.10. (The proof for the case in which M satisfies Assumption 33.11 is similar.)*

The following Corollary is immediate.

Corolario 33.1 *Suppose that Assumptions 33.9 and 33.12 hold. Suppose that for M one of Assumptions 33.10 or 33.11 holds (hence M does not necessarily have a unique optimal policy). Let ϵ be a positive number. If A is compact or Condition 33.3 holds, then there exists an MDP M_ϵ with a unique optimal policy g^*, such that inequalities in Theorem 3.7 (a) or (b) hold, respectively.*

Ejemplo 33.1 *Ejemplo1*

Lema 33.3 *Lema1*

Demostración 33.2 *Assumption 33.9 (a) trivially holds. The proof of the strong continuity of Q*

33.2. Preliminaries:

Consider a Network consisting in two cyclic polling systems with two queues each other, Q_1, Q_2 for the first system and $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ for the second one, each with infinite-sized buffer. In each system a single server visits the queues in cyclic order, where he applies the exhaustive policy, i.e., when the server polls a queue, he serves all the customers present until the queue becomes empty.
At the second system the customers at queue 2 moves to the first system's queue 2, we assume that the network is open; that is, all customers eventually leave the network. As usually in Polling Systems Theory we assume the arrivals in each queue the arrival processes are Poisson whit i.i.d. interarrival times, their service times are also i.i.d. and finally upon completion of a visit at any queue, the servers incurs in a random switchover time according to an arbitray distribution. We define a cycle to be the time interval between two consecutive polling instants, the time period in a cycle during which the server is serving a queue is called a service period. The queues are attended in cyclic order.
Time is slotted with slot size equal to the service time of a fixed costumer, we call the time interval $[t, t+1]$ the t-th slot. The arrival processes are denoted by $X_1(t), X_2(t)$ for the first system and $\hat{X}_1(t)$,$\hat{X}_2(t)$ for the second, the arrival rate at Q_i and $\hat{Q}_i$ is denoted by μ_i and $\hat{\mu}_i$ respectively, with the condition $\mu_i < 1$ and $\hat{\mu}_i < 1$. The users arrives in a independent form at each of the queues.
We define the process Y_2 to consider the costumers who pass from system 2, to system 1, with arrival rate $\tilde{\mu}_2$. The service time customers of queue i is a random variable τ_i with process defined by S_i. In similar manner the switchover period following the service of queue i is an independent random variable R_i with general distribution. To determine the length of the queues, i.e., the number of users in the queue at the moment the server arrives we define the process L_i and $\hat{L}_i$ for the first and second system respectively. In the sequel, we use the buffer occupancy method to obtain the generating function, first and second moments of queue size distributions at polling instants.
At each of the queues in the network the number of users is the number of users at the time the server arrives plus the numbers of arrivals during the service time.
In order to obtain the joint probability generating function (PGF) for the number or users residing in queue i when the queue is polled in the NCPS, we define for each of the arrival processes $X_i, \hat{X}_i$, $i = 1,2$, Y_2 and $\tilde{X}_2$ with $\tilde{X}_2 = X_2 + Y_2$, their PGF $P_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_i^{X_i(t)}\right], \hat{P}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\hat{X}_i(t)}\right]$, for

$i=1,2$, and $\check{P}_2(z_2)=\mathbb{E}\left[z_2^{Y_2(t)}\right], \tilde{P}_2(z_2)=\mathbb{E}\left[z_2^{\tilde{X}_2(t)}\right]$, with first moment given by $\mu_i=\mathbb{E}[X_i(t)]=P_i^{(1)}(1), \hat{\mu}_i=\mathbb{E}\left[\hat{X}_i(t)\right]=\hat{P}_i^{(1)}(1)$, for $i=1,2$, while $\check{\mu}_2=\mathbb{E}[Y_2(t)]=\check{P}_2^{(1)}(1), \tilde{\mu}_2=\mathbb{E}\left[\tilde{X}_2(t)\right]=\tilde{P}_2^{(1)}(1)$.

The PGF For the service time is defined by: $S_i(z_i)=\mathbb{E}\left[z_i^{\overline{\tau}_i-\tau_i}\right]$ y $\hat{S}_i(w_i)=\mathbb{E}\left[w_i^{\overline{\zeta}_i-\zeta_i}\right]$, with first moment $s_i=\mathbb{E}[\overline{\tau}_i-\tau_i]$ y $\hat{s}_i=\mathbb{E}\left[\overline{\zeta}_i-\zeta_i\right]$, for $i=1,2$.

In a similar manner the PGF for the switchover time of the server from the moment it ends to attend a queue to the time of arrival to the next queue are given by $R_i(z_i)=\mathbb{E}\left[z_1^{\tau_{i+1}-\overline{\tau}_i}\right]$ and $\hat{R}_i(w_i)=\mathbb{E}\left[w_i^{\zeta_{i+1}-\overline{\zeta}_i}\right]$ with first moment $r_i=R_i^{(1)}(1)=\mathbb{E}[\tau_{i+1}-\overline{\tau}_i]$ and $\hat{r}_i=\hat{R}_i^{(1)}(1)=\mathbb{E}\left[\zeta_{i+1}-\overline{\zeta}_i\right]$ with $i=1,2$.

The number of users in the queue at time $\overline{\tau}_1,\overline{\tau}_2,\overline{\zeta}_1,\overline{\zeta}_2$, it's zero, i.e., $L_i(\overline{\tau_i})=0$, and $\hat{L}_i\left(\overline{\zeta_i}\right)=0$ for $i=1,2$. Then the number of users in the queue of the second system at the moment the server ends attending in the queue is given by the number of users present at the moment it arrives plus the number of arrivals during the service time, i.e., $\hat{L}_i(\overline{\tau}_j)=\hat{L}_i(\tau_j)+\hat{X}_i(\overline{\tau}_j-\tau_j)$, for $i,j=1,2$, meanwhile for the first system : $L_1(\overline{\tau}_j)=L_1(\tau_j)+X_1(\overline{\tau}_j-\tau_j)$. Specifically for the second queue of the first system we need to consider the users of transfer becoming from the second queue in the second system while the server it's in the other queue attending, it means that this users have been aready attended by the server before they can go to the first system:

$$L_2(\overline{\tau}_1)=L_2(\tau_1)+X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)+Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1). \tag{33.2.1}$$

As is know the gambler's ruin problem can be used to model the server's busy period in a Cyclic Polling System, so let $\tilde{L}_0\geq 0$ the number of users present at the moment the server arrives to start serving, also let T be the time the server need to attend the users in the queue starting with $\tilde{L}_0$ users.

Suppose the gambler has two simultaneous, independent and simultaneous moves, such events are independent and identical to each other for each realization. The gain on the n-th game is $\tilde{X}_n=X_n+Y_n$ units from which is substracted a playing fee of 1 unit for each move. His PGF is given by $F(z)=\mathbb{E}\left[z^{\tilde{L}_0}\right]$, futhermore

$$\tilde{P}(z)=\mathbb{E}\left[z^{\tilde{X}_n}\right]=\mathbb{E}\left[z^{X_n+Y_n}\right]=\mathbb{E}\left[z^{X_n}z^{Y_n}\right]=\mathbb{E}\left[z^{X_n}\right]\mathbb{E}\left[z^{Y_n}\right]=P(z)\check{P}(z),$$

with $\tilde{\mu}=\mathbb{E}\left[\tilde{X}_n\right]=\tilde{P}[z]<1$. If $\tilde{L}_n$ denotes the capital remaining after the n-th game, then

$$\tilde{L}_n=\tilde{L}_0+\tilde{X}_1+\tilde{X}_2+\cdots+\tilde{X}_n-2n.$$

The result that relates the gambler's ruin problem with the busy period of the serverit's a generalization of the result given in Takagi [42] chapter 3.

***Proposition** 33.31 Let's $G_n(z)$ and $G(z,w)$ defined as in (33.33.2), then*

$$G_n(z)=\frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z)-G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z).$$

Futhermore

$$G(z,w)=\frac{zF(z)-wP(z)G(0,w)}{z-wR(z)},$$

with a unique pole in the unit circle, also the pole is of the form $z=\theta(w)$ and satisfies

i) $\tilde{\theta}(1)=1$,

ii) $\tilde{\theta}^{(1)}(1)=\frac{1}{1-\tilde{\mu}}$,

iii) $\tilde{\theta}^{(2)}(1)=\frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}+\frac{\tilde{\sigma}}{(1-\tilde{\mu})^3}$.

Finally the following satisfies $\mathbb{E}\left[w^T\right]=G(0,w)=F\left[\tilde{\theta}(w)\right]$.

***Corollary** 33.7 The first and second moments for the gambler's ruin are*

$$\mathbb{E}\left[T\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{1-\tilde{\mu}},\quad Var\left[T\right]=\frac{Var\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^3}.$$

In order to model the network of cyclic polling system it's necessary to define the arrival processes for the queues belonging to the system that the server doesn't correspond. In the case of the first system and the server arrive to a queue in the second one:$F_{i,j}\left(z_i;\zeta_j\right)=\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\zeta_j)}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[L_i\left(\zeta_j\right)=k\right]z_i^k$*for* $i,j=1,2$. *For the second system and the server arrives to a queue in the first system* $\hat{F}_{i,j}\left(w_i;\tau_j\right)=\mathbb{E}\left[w_i^{\hat{L}_i(\tau_j)}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\hat{L}_i\left(\tau_j\right)=k\right]w_i^k$ *for* $i,j=1,2$. *With the developed we can define the joint PGF for the second system:*

$$\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_j)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_j)}\right] = \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_j)}\right]\mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2(\tau_j)}\right]=\hat{F}_{1,j}\left(w_1;\tau_j\right)\hat{F}_{2,j}\left(w_2;\tau_j\right)=\hat{F}_j\left(w_1,w_2;\tau_j\right).$$

In a similar manner we defin the joint PGF for the first system, and the second system's server

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_j)}z_2^{L_2(\zeta_j)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_j)}\right]\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\zeta_j)}\right]=F_{1,j}\left(z_1;\zeta_j\right)F_{2,j}\left(z_2;\zeta_j\right)=F_j\left(z_1,z_2;\zeta_j\right).$$

Now we proceed to determine the joint PGF for the times that the server visit each queue in each system, i.e., $t=\{\tau_1,\tau_2,\zeta_1,\zeta_2\}$:

$$F_j\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)=\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^2 z_i^{L_i(\tau_j)}\prod_{i=1}^2 w_i^{\hat{L}_i(\tau_j)}\right],\quad \hat{F}_j\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)=\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^2 z_i^{L_i(\zeta_j)}\prod_{i=1}^2 w_i^{\hat{L}_i(\zeta_j)}\right] \tag{33.2.2}$$

for $j=1,2$. *Then with the purpose of find the number of users present in the netwotk when the server ends attending one of the queues in any of the systems*

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]=\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]\\ =\ &\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)+X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)+Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)+\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)+\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]\end{aligned}$$

using the equation(34.4.1) we have

$$\begin{aligned}=\ &\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]\\ =\ &\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right\}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\end{aligned}$$

applying the fact that the arrivals processes in the queues in each systems are independent:

$$=\ \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]$$

given that the arrival processes in the queues are independent, it's possible to separate the expectation for the arrival processes in Q_1 *and* Q_2 *at time* τ_1, *which is the time the server visits* Q_1. *Considering* $\tilde{X}_2\left(z_2\right)=X_2\left(z_2\right)+Y_2\left(z_2\right)$ *we have*

$$\begin{aligned}=\ &\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]=\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{\tilde{P}_2\left(z_2\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\hat{P}_1\left(w_1\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right.\right.\\ &\left.\left.\hat{P}_2\left(w_2\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]=\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right\}^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\ =\ &\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)^{L_1(\tau_1)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]=F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z2\right)\\ &\cdot\hat{F}_1\left(w_1,w_2;\tau_1\right)\equiv F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2,w_1,w_2\right).\end{aligned}$$

The last equalities are true because the number of arrivals to $\hat{Q}_2$ during the time interval $[\tau_1, \overline{\tau}_1]$ still haven't been attended by the server in the system 2, then the users can't pass to the first system through the queue Q_2. Therefore the number of users switching from $\hat{Q}_2$ to Q_2 during the time interval $[\tau_1, \overline{\tau}_1]$ depends on the policy of transfer between the two systems, according to the last section

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right] = F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right)\\
&= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2\right)\hat{F}_1(w_1, w_2; \tau_1)
\end{aligned}
$$

Using reasoning similar for the rest of the server's arrival times

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right] &= F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1, w_2; \tau_2)\\
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)} z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right] &= F_1(z_1, z_2; \zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right),\\
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)} z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right] &= F_2(z_1, z_2; \zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right).
\end{aligned}
$$

Now we are in conditions to obtain the recursive equations that model the NCPS we need to consider the swithcover times that the server ocuppies to translate from one queue to another and, the number or user presents in the system at the time the server leaves to queue to start attending the next. Thus far developed, we can find that for the NCPS:

$$
\begin{aligned}
F_2(z_1, z_2, w_1, w_2) &= R_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2\right)\hat{F}_1(w_1, w_2; \tau_1),\\
F_1(z_1, z_2, w_1, w_2) &= R_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1, w_2; \tau_2),\\
\hat{F}_2(z_1, z_2, w_1, w_2) &= \hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1(z_1, z_2; \zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right),\\
\hat{F}_1(z_1, z_2, w_1, w_2) &= \hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2(z_1, z_2; \zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right).
\end{aligned}
\tag{33.2.3}
$$

33.3. Main Result and An Example

It's necessary to give an step ahead, considering the case illustrated in `Figure 1`*, where just like before, the server's switchover times are given by the generals equations $R_i(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = R_i\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\tilde{P}_3(z_3)\tilde{P}_4(z_4)\right)$, with first order derivatives given by $D_iR_i = r_i\tilde{\mu}_i$, and second order partial derivatives $D_jD_iR_k = R_k^{(2)}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{i=j}r_kP_i^{(2)} + \mathbb{1}_{i=j}r_k\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j$ for any i, j, k. According to the equations given before, the queue lengths for the other sytem's server times, we can obtain general expressions, so for $F_1(z_1, z_2; \tau_3)$, $F_2(z_1, z_2; \tau_4)$, $F_3(z_3, z_4; \tau_1)$, $F_4(z_3, z_4; \tau_2)$, we can obtain general expressions,*

$$
D_jF_i(z_1, z_2; \tau_{i+2}) = \mathbb{1}_{j\leq 2}F_{j,i+2}^{(1)}, \quad D_jF_i(z_3, z_4; \tau_{i-2}) = \mathbb{1}_{j\geq 3}F_{j,i-2}^{(1)} \tag{33.3.1}
$$

for $i = 1, 2, 3, 4$ and $j = 1, 2, 3, 4$. With second order derivatives given by.

$$
\begin{aligned}
D_jD_iF_k(z_1, z_2; \tau_{k+2}) &= \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,k+2}^{(2)} + \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,k-2}^{(1)}F_{i,k+2}^{(1)}\\
D_jD_iF_k(z_3, z_4; \tau_{k-2}) &= \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,k-2}^{(2)} + \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,k-2}^{(1)}F_{i,k-2}^{(1)}
\end{aligned}
\tag{33.3.2}
$$

According with the developed at the moment, we can get the recursive equations which are of the following form

$$
\begin{aligned}
F_1(z_1, z_2, z_3, z_4) &= R_2\left(\prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i(z_i)\right)F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_3(z_3)\tilde{P}_4(z_4)\right)\right)F_4(z_3, z_4; \tau_2),\\
F_2(z_1, z_2, z_3, z_4) &= R_1\left(\prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i(z_i)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\tilde{P}_3(z_3)\tilde{P}_4(z_4)\right), z_2\right)F_3(z_3, z_4; \tau_1),\\
F_3(z_1, z_2, z_3, z_4) &= R_4\left(\prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i(z_i)\right)F_4\left(z_3, \tilde{\theta}_4\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\tilde{P}_3(z_3)\right)\right)F_2(z_1, z_2; \tau_4),\\
F_4(z_1, z_2, z_3, z_4) &= R_3\left(\prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i(z_i)\right)F_3\left(\tilde{\theta}_3\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\tilde{P}_4(z_4)\right), z_4\right)F_1(z_1, z_2; \tau_3),
\end{aligned}
\tag{33.3.3}
$$

So we have the first theorem

Teorema 33.58 *Suppose $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2 < 1$, $\hat{\mu} = \tilde{\mu}_3 + \tilde{\mu}_4 < 1$, then the number of users en the queues conforming the network of cyclic polling system, (34.4.6), when the server visit a queue can be found solving the linear system given by equations (34.4.7) and (34.4.8),*

$$f_j(i) = r_{j+1}\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i\neq j+1} f_{j+1}(j+1)\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_{j+1}} + \mathbb{1}_{i=j} f_{j+1}(i) + \mathbb{1}_{j=1}\mathbb{1}_{i\geq 3}F^{(1)}_{i,j+1} + \mathbb{1}_{j=3}\mathbb{1}_{i\leq 2}F^{(1)}_{i,j+1} \quad (33.3.4)$$

$j = 1, 3$ *and* $i = 1, 2, 3, 4$

$$f_j(i) = r_{j-1}\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i\neq j-1} f_{j-1}(j-1)\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_{j-1}} + \mathbb{1}_{i=j} f_{j-1}(i) + \mathbb{1}_{j=2}\mathbb{1}_{i\geq 3}F^{(1)}_{i,j-1} + \mathbb{1}_{j=4}\mathbb{1}_{i\leq 2}F^{(1)}_{i,j-1} \quad (33.3.5)$$

$j = 2, 4$ *and* $i = 1, 2, 3, 4$.
whose solutions are:

$$\begin{array}{lll}
f_2(1) = r_1\tilde{\mu}_1, & f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2, & f_3(4) = r_4\tilde{\mu}_4, \\
f_4(3) = r_3\tilde{\mu}_3, & f_1(1) = r\frac{\tilde{\mu}_1(1-\tilde{\mu}_1)}{1-\tilde{\mu}}, & f_2(2) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\tilde{\mu}}, \\
f_1(3) = \tilde{\mu}_3\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}}\right) + F^{(1)}_{3,2}(1), & f_1(4) = \tilde{\mu}_4\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}}\right) + F^{(1)}_{4,2}(1), & f_2(3) = \tilde{\mu}_3\left(r_1 + \frac{r\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}}\right) + F^{(1)}_{3,1}(1), \\
f_2(4) = \tilde{\mu}_4\left(r_1 + \frac{r\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}}\right) + F^{(1)}_{4,1}(1), & f_3(1) = \tilde{\mu}_1\left(r_4 + \frac{\hat{r}\tilde{\mu}_4}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,4}(1), & f_3(2) = \tilde{\mu}_2\left(r_4 + \frac{\hat{r}\tilde{\mu}_4}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,4}(1), \\
f_3(3) = \hat{r}\frac{\tilde{\mu}_3(1-\tilde{\mu}_3)}{1-\hat{\mu}}, & f_4(1) = \tilde{\mu}_1\left(r_3 + \frac{\hat{r}\tilde{\mu}_3}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,3}(1), & f_4(2) = \tilde{\mu}_2\left(r_3 + \frac{\hat{r}\tilde{\mu}_3}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,3}(1), \\
 & f_4(4) = \hat{r}\frac{\tilde{\mu}_4(1-\tilde{\mu}_4)}{1-\hat{\mu}} &
\end{array} \quad (33.3.6)$$

Teorema 33.59 *For the system given by 34.4.6 we have that the second moments are in their general form*

$$\begin{aligned}
f_1(i,j) &= \mathbb{1}_{i=1} f_2(1,1) + \left[(1-\mathbb{1}_{i=j=3})\mathbb{1}_{i+j\leq 6}\mathbb{1}_{i\leq j}\frac{\mu_j}{1-\tilde{\mu}_2} + (1-\mathbb{1}_{i=j=3})\mathbb{1}_{i+j\leq 6}\mathbb{1}_{i>j}\frac{\mu_i}{1-\tilde{\mu}_2} + \mathbb{1}_{i=1}\frac{\mu_i}{1-\tilde{\mu}_2}\right] f_2(1,2) \\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 2}\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 \mu_i\mu_j f_2(2,2) + \left[\mathbb{1}_{i,j\neq 2}\tilde{\theta}^{(2)}_2\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 2}\mathbb{1}_{i=j}\frac{\tilde{P}^{(2)}_i}{1-\tilde{\mu}_2} + \mathbb{1}_{i,j\neq 2}\mathbb{1}_{i\neq j}\frac{\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_2}\right] f_2(2) \\
&+ \left[r_2\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i\geq 3}F^{(1)}_{i,2}\right] f_2(j) + \left[r_2\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{j\geq 3}F^{(1)}_{j,2}\right] f_2(i) + \left[R^{(2)}_2 + \mathbb{1}_{i=j} r_2\right]\tilde{\mu}_i\mu_j \\
&+ \mathbb{1}_{j\geq 3}F^{(1)}_{j,2}\left[\mathbb{1}_{j\neq i}F^{(1)}_{i,2} + r_2\tilde{\mu}_i\right] + r_2\left[\mathbb{1}_{i=j}P^{(2)}_i + \mathbb{1}_{i\geq 3}F^{(1)}_{i,2}\tilde{\mu}_j\right] + \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F^{(2)}_{i,2} \\
f_2(i,j) &= \mathbb{1}_{i,j\neq 1}\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j f_1(1,1) + \left[(1-\mathbb{1}_{i=j=3})\mathbb{1}_{i+j\leq 6}\mathbb{1}_{i\leq j}\frac{\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_1} + (1-\mathbb{1}_{i=j=3})\mathbb{1}_{i+j\leq 6}\mathbb{1}_{i>j}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_1}\right. \\
&+ \left.\mathbb{1}_{i=2}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_1}\right] f_1(1,2) + \mathbb{1}_{i=2} f_1(2,2) + \left[\mathbb{1}_{i,j\neq 1}\tilde{\theta}^{(2)}_1\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 1}\mathbb{1}_{i\neq j}\frac{\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_1} + \mathbb{1}_{i,j\neq 1}\mathbb{1}_{i=j}\frac{\tilde{P}^{(2)}_i}{1-\tilde{\mu}_1}\right] f_1(1) \\
&+ \left[r_1\mu_i + \mathbb{1}_{i\geq 3}F^{(1)}_{i,1}\right] f_1(j) + \left[\mathbb{1}_{j\geq 3}F^{(1)}_{j,1} + r_1\mu_j\right] f_1(i) + \left[R^{(2)}_1 + \mathbb{1}_{i=j}\right]\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{i\geq 3}F^{(1)}_{i,1}\left[r_1\mu_j + \mathbb{1}_{j\neq i}F^{(1)}_{j,1}\right] \\
&+ r_1\left[\mathbb{1}_{j\geq 3}\mu_i F^{(1)}_{j,1} + \mathbb{1}_{i=j}P^{(2)}_i\right] + \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F^{(2)}_{i,1} \\
f_3(i,j) &= \mathbb{1}_{i=3} f_4(3,3) + \left[(1-\mathbb{1}_{i=j=2})\mathbb{1}_{i+j\geq 4}\mathbb{1}_{i\leq j}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_4} + (1-\mathbb{1}_{i=j=2})\mathbb{1}_{i+j\geq 4}\mathbb{1}_{i>j}\frac{\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_4} + \mathbb{1}_{i=3}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_4}\right] f_4(3,4) \\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 4} f_4(4,4)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j + \left[\mathbb{1}_{i,j\neq 4}\tilde{\theta}^{(2)}_4\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 4}\mathbb{1}_{i=j}\frac{\tilde{P}^{(2)}_i}{1-\tilde{\mu}_4} + \mathbb{1}_{i,j\neq 4}\mathbb{1}_{i\neq j}\frac{\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_4}\right] f_4(4) \\
&+ \left[r_4\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i\leq 2}F^{(1)}_{i,4}\right] f_4(j) + \left[r_4\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{j\leq 2}F^{(1)}_{j,4}\right] f_4(i) + \left[R^{(2)}_4 + \mathbb{1}_{i=j} r_4\right]\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j \\
&+ \mathbb{1}_{i\leq 2}F^{(1)}_{i,4}\left[r_4\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{j\neq i}F^{(1)}_{j,4}\right] + r_4\left[\mathbb{1}_{i=j}P^{(2)}_i + \mathbb{1}_{j\leq 2}\tilde{\mu}_i F^{(1)}_{j,4}\right] + \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j=i}F^{(2)}_{i,4} \\
f_4(i,j) &= \mathbb{1}_{i,j\neq 3} f_3(3,3)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j + \left[(1-\mathbb{1}_{i=j=2})\mathbb{1}_{i+j\geq 5}\mathbb{1}_{i\leq j}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_3} + (1-\mathbb{1}_{i=j=2})\mathbb{1}_{i+j\geq 5}\mathbb{1}_{i>j}\frac{\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_3}\right. \\
&+ \left.\mathbb{1}_{i=4}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_3}\right] f_3(3,4) + \mathbb{1}_{i=4} f_3(4,4) + \left[\mathbb{1}_{i,j\neq 3}\tilde{\theta}^{(2)}_3\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 3}\mathbb{1}_{i=j}\frac{\tilde{P}^{(2)}_i}{1-\tilde{\mu}_3} + \mathbb{1}_{i,j\neq 3}\mathbb{1}_{i\neq j}\frac{\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_3}\right] f_3(3) \\
&+ \left[r_3\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i\leq 2}F^{(1)}_{i,3}\right] f_3(j) + \left[r_3\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{j\leq 2}F^{(1)}_{j,3}\right] f_3(i) + \left[R^{(2)}_3 + \mathbb{1}_{i=j} r_3\right]\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j \\
&+ \mathbb{1}_{i\leq 2}F^{(1)}_{i,3}\left[r_3\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{j\neq i}F^{(1)}_{j,3}\right] + r_3\left[\mathbb{1}_{i=j}P^{(2)}_i + \mathbb{1}_{j\leq 2}\tilde{\mu}_i F^{(1)}_{j,3}\right] + \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j=i}F^{(2)}_{i,3}
\end{aligned} \quad (33.3.7)$$

Corolario 33.1 *Conforming the equations given in 33.34.2 the second order moments are obtained solving the system*

$$
\begin{array}{ll}
f_1(1,1) = a_1 f_2(2,2) + a_2 f_2(2,1) + a_3 f_2(1,1) + K_1, & f_1(1,2) = K_2 \\
f_1(1,3) = a_4 f_2(2,2) + a_5 f(2,1) + K_3, & f_1(1,4) = a_6 f_2(2,2) + a_7 f_2(2,1) + K_4 \\
f_1(2,2) = K_5, & f_1(2,3) = K_6 \\
f_1(2,4) = K_7, & f_1(3,3) = a_8 f_2(2,2) + K_8 \\
f_1(3,4) = a_9 f_2(2,2) + K_9, & f_1(4,4) = a_{10} f_2(2,2) + K_{10} \\
f_2(1,1) = K_{11}, & f_2(1,2) = K_{12} \\
f_2(1,3) = K_{13}, & f_2(1,4) = K_{14} \\
f_2(2,2) = a_{11} f_1(1,1) + a_{12} f_1(1,2) + a_{13} f_1(2,2) + K_{15}, & f_2(2,3) = a_{14} f_1(1,1) + a_{15} f_1(1,2) + K_{16} \\
f_2(2,4) = a_{16} f_1(1,1) + a_{17} f_1(1,2) + K_{17}, & f_2(3,3) = a_{18} f_1(1,1) + K_{18} \\
f_2(3,4) = a_{19} f_1(1,1) + K_{19}, & f_2(4,4) = a_{20} f_1(1,1) + K_{20} \\
f_3(1,1) = a_{21} f_4(4,4) + K_{21}, & f_3(1,2) = a_{22} f_4(4,4) + K_{22} \\
f_3(1,3) = a_{23} f_4(4,4) + a_{24} f_4(4,3) + K_{23}, & f_3(1,4) = K_{24} \\
f_3(2,2) = a_{25} f_4(4,4) + K_{25}, & f_3(2,3) = a_{26} f_4(4,4) + a_{27} f_4(4,3) + K_{26} \\
f_3(2,4) = K_{27}, & f_3(3,3) = a_{28} f_4(4,4) + a_{29} f_4(4,3) + a_{30} f_4(3,3) + K_{28} \\
f_3(3,4) = K_{29}, & f_3(4,4) = K_{30} \\
f_4(1,1) = a_{31} f_3(3,3) + K_{31}, & f_4(1,2) = a_{32} f_3(3,3) + K_{32} \\
F_4(1,3) = K_{33}, & f_4(1,4) = a_{33} f_3(3,3) + a_{34} f_3(3,4) + K_{34} \\
f_4(2,2) = a_{35} f_3(3,3) + K_{35}, & f_4(2,3) = K_{36} \\
f_4(2,4) = a_{36} f_3(3,3) + a_{37} f_3(3,4) + K_{37}, & f_4(3,3) = K_{38} \\
f_4(3,4) = K_{39}, & f_4(4,4) = a_{38} f_3(3,3) + a_{39} f_3(3,4) + a_{40} f_3(4,4) + K_{40}
\end{array}
$$

The system solutions are given by

$$
\begin{array}{lll}
f_1(1,1) = b_3, & f_2(2,2) = \frac{b_2}{1-b_1}, & f_1(1,3) = a_4\left(\frac{b_2}{1-b_1}\right) + a_5 K_{12} + K_3, \\
f_1(1,4) = a_6\left(\frac{b_2}{1-b_1}\right) + a_7 K_{12} + K_4, & f_1(3,3) = a_8\left(\frac{b_2}{1-b_1}\right) + K_8, & f_1(3,4) = a_9\left(\frac{b_2}{1-b_1}\right) + K_9 \\
f_1(4,4) = a_{10}\left(\frac{b_2}{1-b_1}\right) + a_5 K_{12} + K_{10}, & f_2(2,3) = a_{14} b_3 + a_{15} K_2 + K_{16}, & f_2(2,4) = a_{16} b_3 + a_{17} K_2 + K_{17}, \\
f_2(3,3) = a_{18} b_3 + K_{18}, & f_2(3,4) = a_{19} b_3 + K_{19}, & f_2(4,4) = a_{20} b_3 + K_{20} \\
f_3(3,3) = \frac{b_5}{1-b_4}, & f_4(2,2) = b_6, & f_3(1,1) = a_{21} b_6 + K_{21}, \\
f_3(1,2) = a_{22} b_6 + K_{22}, & f_3(1,3) = a_{23} b_6 + a_{24} K_{39} + K_{23}, & f_3(2,2) = a_{25} b_6 + K_{25} \\
f_3(2,3) = a_{26} b_6 + a_{27} K_{39} + K_{26}, & f_4(1,1) = a_{31}\left(\frac{b_5}{1-b_4}\right) + K_{31}, & f_4(1,2) = a_{32}\left(\frac{b_5}{1-b_4}\right) + K_{32}, \\
f_4(1,4) = a_{33}\left(\frac{b_5}{1-b_4}\right) + a_{34} K_{29} + K_{31}, & f_4(2,2) = a_{35}\left(\frac{b_5}{1-b_4}\right) + K_{35}, & f_4(2,4) = a_{36}\left(\frac{b_5}{1-b_4}\right) + a_{37} K_{29} + K_{37}
\end{array}
$$

where

$$
\begin{array}{lll}
N_1 = a_2 K_{12} + a_3 K_{11} + K_1, & N_2 = a_{12} K_2 + a_{13} K_5 + K_{15}, & b_1 = a_1 a_{11} \\
b_2 = a_{11} N_1 + N_2, & b_3 = a_1\left(\frac{b_2}{1-b_1}\right) + N_1, & N_3 = a_{29} K_{39} + a_{30} K_{38} + K_{28} \\
N_4 = a_{39} K_{29} + a_{40} K_{30} + K_{40}, & b_4 = a_{28} a_{38}, & b_5 = a_{28} N_4 + N_3 \\
 & b_6 = a_{38}\left(\frac{b_5}{1-b_4}\right) + N_4 &
\end{array}
$$

the values for the a_i's and K_i can be found in Appendix B

33.4. Concluding Remarks

Using a similar reasoning it's possible to find de first and second moments for the queue lengths of the CPSN. We have the following theorem

Teorema 33.60 *Given a CPSN attended by a single server who attends conforming to the gated policy and suppose $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2 < 1$, $\hat{\mu} = \tilde{\mu}_3 + \tilde{\mu}_4 < 1$, then the number of users en the queues conforming the network of cyclic polling system, when the server visit a queue can be found solving the linear system given by equations (33.32.1) and (33.32.2),*

$$
f_j(i) = r_{j+1}\tilde{\mu}_i + f_{j+1}(j+1)\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i=j} f_{j+1}(i) + \mathbb{1}_{j=1}\mathbb{1}_{i\geq 3} F^{(1)}_{i,j+1} + \mathbb{1}_{j=3}\mathbb{1}_{i\leq 2} F^{(1)}_{i,j+1} \qquad (33.4.1)
$$

$j = 1,3$ *and* $i = 1,2,3,4$

$$f_j(i) = r_{j-1}\tilde{\mu}_i + f_{j-1}(j-1)\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i=j} f_{j-1}(i) + \mathbb{1}_{j=2}\mathbb{1}_{i\geq 3} F^{(1)}_{i,j-1} + \mathbb{1}_{j=4}\mathbb{1}_{i\leq 2} F^{(1)}_{i,j-1} \tag{33.4.2}$$

$j = 2, 4$ and $i = 1, 2, 3, 4$.
whose solutions are:

$$\begin{array}{lll}
f_1(1) = \frac{r\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}}, & f_1(2) = \tilde{\mu}_2 \frac{r_2(1-\tilde{\mu}_1)+r_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}}, & f_1(3) = \tilde{\mu}_3\left[r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}}\right] + F^{(1)}_{3,2}, \\
f_1(4) = \tilde{\mu}_4\left[r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}}\right] + F^{(1)}_{4,2}, & f_2(1) = \tilde{\mu}_1 \frac{r_1(1-\tilde{\mu}_2)+r_2\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}}, & f_2(2) = r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}}, \\
f_2(3) = \tilde{\mu}_3 \frac{r_1(1-\tilde{\mu}_2)+r_2\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}} + F^{(1)}_{3,1}, & f_2(4) = \tilde{\mu}_4 \frac{r_1(1-\tilde{\mu}_2)+r_2\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}} + F^{(1)}_{4,1}, & f_3(1) = \tilde{\mu}_1\left[r_4 + \frac{\hat{r}\mu_4}{1-\hat{\mu}}\right] + F^{(1)}_{1,4} \\
f_3(2) = \tilde{\mu}_2\left[r_4 + \frac{\hat{r}\mu_4}{1-\hat{\mu}}\right] + F^{(1)}_{2,4}, & f_3(3) = \frac{\hat{r}\tilde{\mu}_3}{1-\hat{\mu}}, & f_3(4) = \tilde{\mu}_4 \frac{r_4(1-\tilde{\mu}_3)+r_3\tilde{\mu}_4}{1-\hat{\mu}}, \\
f_4(1) = \tilde{\mu}_1 \frac{r_3(1-\tilde{\mu}_4)+r_4\tilde{\mu}_3}{1-\hat{\mu}} + F^{(1)}_{1,3}, & f_4(2) = \tilde{\mu}_2 \frac{r_3(1-\tilde{\mu}_4)+r_4\tilde{\mu}_3}{1-\hat{\mu}} + F^{(1)}_{2,3}, & f_4(3) = \tilde{\mu}_3 \frac{r_3(1-\tilde{\mu}_4)+r_4\tilde{\mu}_3}{1-\hat{\mu}}, \\
 & f_4(4) = \frac{\hat{r}\tilde{\mu}_4}{1-\hat{\mu}}. &
\end{array} \tag{33.4.3}$$

for the second moments

Teorema 33.61 *Given a CPSN attended by a single server who attends conforming to the gated policy and suppose $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2 < 1$, $\hat{\mu} = \tilde{\mu}_3 + \tilde{\mu}_4 < 1$, we have that the second moments are in their general form*

$$\begin{array}{l}
f_1(i,k) = \mathbb{1}_{k=1}\mathbb{1}_{i=k}\tilde{\mu}_i f_2(1,1) + \left[\mathbb{1}_{k=1}\tilde{\mu}_1 + \mathbb{1}_{i=1}\tilde{\mu}_k\right] f_2(1,2) + \tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k f_2(2,2) + \left[\mathbb{1}_{i=k}\tilde{P}^{(2)}_i + \mathbb{1}_{i\neq k}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k\right] f_2(2) \\
+ \left[r_2\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i\geq 3}F^{(1)}_{i,2}\right] f_2(k) + \left[r_2\tilde{\mu}_k + \mathbb{1}_{k\geq 3}F^{(1)}_{k,2}\right] f_2(i) + \left[R^{(2)}_2 + \mathbb{1}_{i=k}r_2\right]\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k \\
+ \left[\mathbb{1}_{k\geq 3}\tilde{\mu}_i F^{(1)}_{k,2} + \mathbb{1}_{i=k}P^{(2)}_i\right] r_2 + \left[\mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{k\neq i}F^{(1)}_{k,2} + \mathbb{1}_{i\geq 3}r_2\tilde{\mu}_k\right] F^{(1)}_{i,2} + \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{k=i}F^{(2)}_{i,2} \\
f_2(i,k) = \tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k f_1(1,1) + \left[\mathbb{1}_{k=2}\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i=2}\tilde{\mu}_k\right] f_1(1,2) + \mathbb{1}_{k=2}\mathbb{1}_{i=k}\tilde{\mu}_i f_1(2,2) + \left[\mathbb{1}_{i=k}\tilde{P}^{(2)}_i + \mathbb{1}_{i\neq k}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k\right] f_1(1) \\
+ \left[r_1\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i\geq 3}F^{(1)}_{i,1}\right] f_1(k) + \left[r_1\tilde{\mu}_k + \mathbb{1}_{k\geq 3}F^{(1)}_{k,1}\right] f_1(i) + \left[R^{(2)}_1 + \mathbb{1}_{i=k}r_1\right]\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k \\
+ \left[\mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{k\neq i}F^{(1)}_{i,1} + \mathbb{1}_{k\geq 3}r_1\tilde{\mu}_i\right] F^{(1)}_{k,1} + \left[\mathbb{1}_{i=k}P^{(2)}_i + \mathbb{1}_{i\geq 3}F^{(1)}_{i,1}\tilde{\mu}_k\right] r_1 + \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{k=i}F^{(2)}_{i,1} \\
f_3(i,k) = \mathbb{1}_{k=3}\mathbb{1}_{i=k}\tilde{\mu}_i f_4(3,3) + \left[\mathbb{1}_{k=3}\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i=3}\tilde{\mu}_k\right] f_4(3,4) + \tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k f_4(4,4) + \left[\mathbb{1}_{i=k}\tilde{P}^{(2)}_i + \mathbb{1}_{i\neq k}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k\right] f_4(4) \\
+ \left[r_4\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i\leq 2}F^{(1)}_{i,4}\right] f_4(k) + \left[r_4\tilde{\mu}_k + \mathbb{1}_{k\leq 2}F^{(1)}_{k,4}\right] f_4(i) + \left[R^{(2)}_4 + \mathbb{1}_{i=k}r_4\right]\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k \\
+ \left[\mathbb{1}_{i=k}P^{(2)}_i + \mathbb{1}_{k\leq 2}\tilde{\mu}_i F^{(1)}_{k,4}\right] r_4 + \left[\mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{k\neq i}F^{(1)}_{k,4} + \mathbb{1}_{i\leq 2}r_4\tilde{\mu}_k\right] F^{(1)}_{i,4} + \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{k=i}F^{(2)}_{i,4} \\
f_4(i,k) = \tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k f_3(3,3) + \left[\mathbb{1}_{k=4}\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i=4}\tilde{\mu}_k\right] f_3(3,4) + \mathbb{1}_{k=4}\mathbb{1}_{i=k}\tilde{\mu}_i f_3(4,4) + \left[\mathbb{1}_{i=k}\tilde{P}^{(2)}_i + \mathbb{1}_{i\neq k}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k\right] f_3(3) \\
+ \left[r_3\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i\leq 2}F^{(1)}_{i,3}\right] f_3(k) + \left[r_3\tilde{\mu}_k + \mathbb{1}_{k\leq 2}F^{(1)}_{k,3}\right] f_3(i) + \left[R^{(2)}_3 + \mathbb{1}_{i=k}r_3\right]\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k \\
+ \left[\mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{k\neq i}F^{(1)}_{k,3} + \mathbb{1}_{i\leq 2}r_3\tilde{\mu}_k\right] F^{(1)}_{i,3} + \left[\mathbb{1}_{k\leq 2}\tilde{\mu}_i F^{(1)}_{k,3} + \mathbb{1}_{i=k}P^{(2)}_i\right] r_3 + \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{k=i}F^{(2)}_{i,3}
\end{array} \tag{33.4.4}$$

Corolario 33.2 *Conforming the equations given in 33.35.3 the second order moments are obtained solving the system*

33.5. General Case Calculations Exhaustive Policy

Remember the equations given in equations (34.4.4) and (34.4.5) which can be written in particular cases like

33.6. Descripción

Let's define the probability of the event no ruin before the n-th period begining with $\tilde{L}_0$ users, $g_{n,k}$ considering a capital equal to k units after $n-1$ events, i.e., given $n \in \{1, 2, \ldots\}$ y $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ $g_{n,k} := P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1, \ldots, n, \tilde{L}_n = k\right\}$, which can be written as:

Supuestos 33.5 *a) c is lower semicontinuous, and inf-compact on $\mathbb{K}$ (i.e. for every $x \in X$ and $r \in \mathbb{R}$ the set $\{a \in A(x) : c(x,a) \leq r\}$ is compact).*

b) The transition law Q is strongly continuous, i.e. $u(x,a) = \int u(y)Q(dy|x,a)$, $(x,a) \in \mathbb{K}$ is continuous and bounded on $\mathbb{K}$, for every measurable bounded function u on X.

c) There exists a policy π such that $V(\pi, x) < \infty$, for each $x \in X$.

Observación 33.4 *The following consequences of Assumption 33.9 are well-known (see Theorem 4.2.3 and Lemma 4.2.8 in [**?**]):*

a) The optimal value function V^* is the solution of the Optimality Equation (OE), i.e. for all $x \in X$,

$$V^*(x) = \min_{a \in A(x)} \left\{ c(x,a) + \alpha \int V^*(y)Q(dy|x,a) \right\}.$$

There is also $f^* \in \mathbb{F}$ such that:

$$V^*(x) = c(x, f^*(x)) + \alpha \int V^*(y)Q(dy|x, f^*(x)), \tag{33.6.1}$$

$x \in X$, and f^* is optimal.

b) For every $x \in X$, $v_n(x) \uparrow V^*$, with v_n defined as

$$v_n(x) = \min_{a \in A(x)} \left\{ c(x,a) + \alpha \int v_{n-1}(y)Q(dy|x,a) \right\},$$

$x \in X, n = 1, 2, \cdots$, and $v_0(x) = 0$. Moreover, for each n, there is $f_n \in \mathbb{F}$ such that, for each $x \in X$,

$$\min_{a \in A(x)} \left\{ c(x,a) + \alpha \int v_{n-1}(y)Q(dy|x,a) \right\} = c(x, f_n(x)) + \alpha \int v_{n-1}(y)Q(dy|x, f_n(x)). \tag{33.6.2}$$

Let $(X, A, \{A(x) : x \in X\}, Q, c)$ be a fixed Markov control model. Take M as the MDP with the Markov control model $(X, A, \{A(x) : x \in X\}, Q, c)$. The optimal value function, the optimal policy which comes from (33.35.9), and the minimizers in (33.35.10) will be denoted for M by V^*, f^*, and f_n , $n = 1, 2, \cdots$, respectively. Also let v_n, $n = 1, 2, \cdots$, be the value iteration functions for M. Let $G(x,a) := c(x,a) + \alpha \int V^*(y)Q(dy|x,a)$, $(x,a) \in \mathbb{K}$.
It will be also supposed that the MDPs taken into account satisfy one of the following Assumptions 33.10 or 33.11.

Supuestos 33.6 *a) X and A are convex;*

b) $(1-\lambda)a + a' \in A((1-\lambda)x + x')$ for all x, $x' \in X$, $a \in A(x)$, $a' \in A(x')$ and $\lambda \in [0,1]$. Besides it is assumed that: if x and $y \in X$, $x < y$, then $A(y) \subseteq A(x)$, and $A(x)$ are convex for each $x \in X$;

c) Q is induced by a difference equation $x_{t+1} = F(x_t, a_t, \xi_t)$, with $t = 0, 1, \cdots$, where $F : X \times A \times S \to X$ is a measurable function and $\{\xi_t\}$ is a sequence of independent and identically distributed (i.i.d.) random variables with values in $S \subseteq \mathbb{R}$, and with a common density Δ. In addition, we suppose that $F(\cdot, \cdot, s)$ is a convex function on $\mathbb{K}$, for each $s \in S$; and if x and $y \in X$, $x < y$, then $F(x,a,s) \leq F(y,a,s)$ for each $a \in A(y)$ and $s \in S$;

d) c is convex on $\mathbb{K}$, and if x and $y \in X$, $x < y$, then $c(x,a) \leq c(y,a)$, for each $a \in A(y)$.

Supuestos 33.7 *a) Same as Assumption 33.10 (a);*

b) $(1-\lambda)a + a' \in A((1-\lambda)x + x')$ for all x, $x' \in X$, $a \in A(x)$, $a' \in A(x')$ and $\lambda \in [0,1]$. Besides $A(x)$ is assumed to be convex for each $x \in X$;

c) Q is given by the relation $x_{t+1} = \gamma x_t + \delta a_t + \xi_t$, $t = 0, 1, \cdots$, where $\{\xi_t\}$ are i.i.d. random variables taking values in $S \subseteq \mathbb{R}$ with the density Δ, γ and δ are real numbers;

d) c is convex on $\mathbb{K}$.

Observación 33.5 *Assumptions 33.10 and 33.11 are essentially presented in Conditions C1 and C2 in [?], but changing a strictly convex $c(\cdot,\cdot)$ by a convex $c(\cdot,\cdot)$. (In fact, in [?], Conditions C1 and C2 take into account the more general situation in which both X and A are subsets of Euclidean spaces of the dimension greater than one.) Also note that it is possible to obtain that each of Assumptions 33.10 and 33.11 implies that, for each $x \in X$, $G(x,\cdot)$ is convex but not necessarily strictly convex (hence, M does not necessarily have a unique optimal policy). The proof of this fact is a direct consequence of the convexity of the cost function c, and of the proof of Lemma 6.2 in [?].*

Supuestos 33.8 *There is a policy ϕ such that $E_x^{\phi}\left[\sum\limits_{t=0}^{\infty}\alpha^t c^*(x_t,a_t)\right] < \infty$, for each $x \in X$.*

Observación 33.6 *Suppose that, for M, Assumption 2.1 holds. Then, it is direct to verify that if M_ϵ satisfies Assumption 33.12, then it also satisfies Assumption 33.9.*

Condición 33.2 *There exists a measurable function $Z : X \to \mathbb{R}$, which may depend on α, such that $c^*(x,a) - c(x,a) = \epsilon a^2 \leq \epsilon Z(x)$, and $\int Z(y)Q(dy|x,a) \leq Z(x)$ for each $x \in X$ and $a \in B(x)$.*

Teorema 33.2 *Suppose that Assumptions 33.9 and 33.12 hold, and that, for M, one of Assumptions 33.10 or 33.11 holds. Let ϵ be a positive number. Then,*

a) If A is compact, $|W^*(x) - V^*(x)| \leq \epsilon K^2/(1-\alpha)$, $x \in X$, where K is the diameter of a compact set D such that $0 \in D$ and $A \subseteq D$.

b) Under Condition 33.3, $|W^*(x) - V^*(x)| \leq \epsilon Z(x)/(1-\alpha)$, $x \in X$.

Demostración 33.3 *The proof of case (a) follows from the proof of case (b) given that $Z(x) = K^2$, $x \in X$. (Observe that in this case, if $a \in A$, then $a^2 = (a-0)^2 \leq K^2$.)*
(b) *Assume that M satisfies Assumption 33.10. (The proof for the case in which M satisfies Assumption 33.11 is similar.)*

The following Corollary is immediate.

Corolario 33.2 *Suppose that Assumptions 33.9 and 33.12 hold. Suppose that for M one of Assumptions 33.10 or 33.11 holds (hence M does not necessarily have a unique optimal policy). Let ϵ be a positive number. If A is compact or Condition 33.3 holds, then there exists an MDP M_ϵ with a unique optimal policy g^*, such that inequalities in Theorem 3.7 (a) or (b) hold, respectively.*

Ejemplo 33.2 *Ejemplo1*

Lema 33.4 *Lema1*

Demostración 33.4 *Assumption 33.9 (a) trivially holds. The proof of the strong continuity of Q*

33.7. Descripción de una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas

Consideremos una red de sistema de visitas cíclicas conformada por dos sistemas de visitas cíclicas, cada una con dos colas independientes, donde además se permite el intercambio de usuarios entre los dos sistemas en la segunda cola de cada uno de ellos.

Supuestos sobre la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas

- *Los arribos de los usuarios ocurren conforme a un proceso de conteo general con tasa de llegada μ_1 y μ_2 para el sistema 1, mientras que para el sistema 2, lo hacen conforme a un proceso Poisson con tasa $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ respectivamente.*
- *Se considerarán intervalos de tiempo de la forma $[t, t+1]$. Los usuarios arriban de manera independiente del resto de las colas. Se define el grupo de usuarios que llegan a cada una de las colas del sistema 1, caracterizadas por Q_1 y Q_2 respectivamente, en el intervalo de tiempo $[t, t+1]$ por $X_1(t), X_2(t)$.*
- *Se definen los procesos $\hat{X}_1(t), \hat{X}_2(t)$ para las colas del sistema 2, denotadas por $\hat{Q}_1$ y $\hat{Q}_2$ respectivamente. Donde además se supone que $\mu_i < 1$ y $\hat{\mu}_i < 1$ para $i = 1, 2$.*

- *Se define el proceso $Y_2(t)$ para el número de usuarios que se trasladan del sistema 2 al sistema 1 en el intervalo de tiempo $[t, t+1]$, este proceso tiene parámetro $\check{\mu}_2$.*
- *En lo que respecta al servidor, en términos de los tiempos de visita a cada una de las colas, se definen las variables aleatorias τ_i, para Q_i, para $i = 1, 2$, respectivamente; y ζ_i para $\hat{Q}_i$, $i = 1, 2$, del sistema 2 respectivamente. A los tiempos en que el servidor termina de atender en las colas $Q_i, \hat{Q}_i$, se les denotará por $\overline{\tau}_i, \overline{\zeta}_i$ para $i = 1, 2$, respectivamente.*
- *Los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por $\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i$ y $\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i$, $i = 1, 2$, para el sistema 1 y el sistema 2, respectivamente.*

El uso de la FGP nos permite determinar las funciones de distribución de probabilidades conjunta de manera indirecta, sin necesidad de hacer uso de las propiedades de las distribuciones de probabilidad de cada uno de los procesos que intervienen en la RSVC. Para cada una de las colas en cada sistema, el número de usuarios al tiempo en que llega el servidor a dar servicio está dado por el número de usuarios presentes en la cola al tiempo t, más el número de usuarios que llegan a la cola en el intervalo de tiempo $[\tau_i, \overline{\tau}_i]$. Una vez definidas las FGP's conjuntas, se construyen las ecuaciones recursivas que permiten obtener la información sobre la longitud de cada una de las colas al momento en que uno de los servidores llega a una de ellas para dar servicio.

33.7.1. Funciones Generadoras de Probabilidades

Para cada uno de los procesos de llegada a las colas $X_i, \hat{X}_i$, $i = 1, 2$, y Y_2, con $\tilde{X}_2 = X_2 + Y_2$ se define FGP: $P_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_i^{X_i(t)}\right], \hat{P}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\hat{X}_i(t)}\right]$, para $i = 1, 2$, y $\check{P}_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{Y_2(t)}\right], \tilde{P}_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{\tilde{X}_2(t)}\right]$, con primer momento definidos por $\mu_i = \mathbb{E}[X_i(t)] = P_i^{(1)}(1), \hat{\mu}_i = \mathbb{E}\left[\hat{X}_i(t)\right] = \hat{P}_i^{(1)}(1)$, para $i = 1, 2$, y por otra parte $\check{\mu}_2 = \mathbb{E}[Y_2(t)] = \check{P}_2^{(1)}(1), \tilde{\mu}_2 = \mathbb{E}\left[\tilde{X}_2(t)\right] = \tilde{P}_2^{(1)}(1)$.

Sus procesos se definen por: $S_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_i^{\overline{\tau}_i - \tau_i}\right]$ y $\hat{S}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\overline{\zeta}_i - \zeta_i}\right]$, con primer momento dado por: $s_i = \mathbb{E}[\overline{\tau}_i - \tau_i]$ y $\hat{s}_i = \mathbb{E}\left[\overline{\zeta}_i - \zeta_i\right]$, para $i = 1, 2$. Análogamente los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por $\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i$ y $\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i$ para el sistema 1 y el sistema 2, respectivamente, con $i = 1, 2$.

La FGP para estos tiempos de traslado están dados por $R_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_1^{\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i}\right]$ y $\hat{R}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i}\right]$ y al igual que como se hizo con anterioridad, se tienen los primeros momentos de estos procesos de traslado del servidor entre las colas de cada uno de los sistemas que conforman la red de sistemas de visitas cíclicas: $r_i = R_i^{(1)}(1) = \mathbb{E}[\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i]$ y $\hat{r}_i = \hat{R}_i^{(1)}(1) = \mathbb{E}\left[\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i\right]$ para $i = 1, 2$.
Para el proceso $L_i(t)$ que determina el número de usuarios presentes en cada una de las colas al tiempo t, se define su FGP, $H_i(t)$, correspondiente al sistema 1, mientras que para el segundo sistema el proceso correspondiente está dado por $\hat{L}_i(t)$, con FGP $\hat{H}_i(t)$, es decir $H_i(t) = \mathbb{E}\left[z_i^{L_i(t)}\right]$ y $\hat{H}_i(t) = \mathbb{E}\left[w_i^{\hat{L}_i(t)}\right]$ para el sistema 1 y 2 respectivamente. Con lo dicho hasta ahora, se tiene que el número de usuarios presentes en los tiempos $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$, es cero, es decir, $L_i(\overline{\tau_i}) = 0$, y $\hat{L}_i\left(\overline{\zeta_i}\right) = 0$ para i=1,2 para cada uno de los dos sistemas.
Para cada una de las colas en la RSVC, el número de usuarios al tiempo en que llega el servidor a una de ellas está dado por el número de usuarios presentes en la cola al tiempo $t = \tau_i, \zeta_i$, más el número de usuarios que llegan a la cola en el intervalo de tiempo $[\tau_i, \overline{\tau}_i], \left[\zeta_i, \overline{\zeta}_i\right]$, es decir $\hat{L}_i(\overline{\tau}_j) = \hat{L}_i(\tau_j) + \hat{X}_i(\overline{\tau}_j - \tau_j)$, para $i, j = 1, 2$, mientras que para el primer sistema: $L_1(\overline{\tau}_j) = L_1(\tau_j) + X_1(\overline{\tau}_j - \tau_j)$.
En el caso específico de Q_2, además, hay que considerar el número de usuarios que pasan del sistema 2 al sistema 1, a traves de $\hat{Q}_2$ mientras el servidor en Q_2 está ausente, es decir, una vez que son atendidos en $\hat{Q}_2$:

$$L_2(\overline{\tau}_1) = L_2(\tau_1) + X_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1) + Y_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1). \tag{33.7.1}$$

33.7.2. El problema de la ruina del jugador

Sea $\tilde{L}_0$ el número de usuarios presentes en la cola al momento en que el servidor llega para dar servicio. Sea T el tiempo que requiere el servidor para atender a todos los usuarios presentes en la *cola comenzando con $\tilde{L}_0$ usuarios. Supongamos que se tiene un jugador que cuenta con un capital inicial de $\tilde{L}_0 \geq 0$ unidades, esta persona realiza una serie de dos juegos simultáneos e independientes de manera sucesiva, dichos eventos son independientes e idénticos entre sí para cada realización. La ganancia en el n-ésimo juego es $\tilde{X}_n = X_n + Y_n$ unidades de las cuales se resta una cuota de 1 unidad por cada juego simultáneo, es decir, se restan dos unidades por cada juego realizado. En el contexto de teoría de colas este proceso se puede pensar como el número de usuarios que llegan a una cola vía dos procesos de arribo distintos e independientes entre sí. Su FGP está dada por $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{L}_0}\right]$, además*

$$\tilde{P}(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{X}_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n+Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n}z^{Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right]\mathbb{E}\left[z^{Y_n}\right] = P(z)\check{P}(z),$$

con $\tilde{\mu} = \mathbb{E}\left[\tilde{X}_n\right] = \tilde{P}[z] < 1$. Sea $\tilde{L}_n$ el capital remanente después del n-ésimo juego. Entonces

$$\tilde{L}_n = \tilde{L}_0 + \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \cdots + \tilde{X}_n - 2n.$$

La ruina del jugador ocurre después del n-ésimo juego, es decir, la cola se vacía después del n-ésimo juego. Sea $g_{n,k}$ la probabilidad del evento de que el jugador no caiga en ruina antes del n-ésimo juego, y que además tenga un capital de k unidades antes del n-ésimo juego, es decir, dada $n \in \{1, 2, \ldots\}$ y $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ $g_{n,k} := P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1, \ldots, n, \tilde{L}_n = k\right\}$, la cual además se puede escribir como:

$$g_{n,k} = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-j-l+1\}P\{Y_n = l\}. \quad (33.7.2)$$

Se definen las siguientes FGP:

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k}z^k, \text{ para } n = 0, 1, \ldots, \quad (33.7.3)$$

$$G(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z)w^n. \quad (33.7.4)$$

Proposición 33.29 *Sean $G_n(z)$ y $G(z,w)$ definidas como en (33.80.4) y (33.80.5) respectivamente, entonces*

$$G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z). \quad (33.7.5)$$

Además

$$G(z,w) = \frac{zF(z) - wP(z)G(0,w)}{z - wR(z)}, \quad (33.7.6)$$

con un único polo en el círculo unitario, además, el polo es de la forma $z = \theta(w)$ y satisface que

i) $\tilde{\theta}(1) = 1$,

ii) $\tilde{\theta}^{(1)}(1) = \frac{1}{1-\tilde{\mu}}$,

iii) $\tilde{\theta}^{(2)}(1) = \frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2} + \frac{\tilde{\sigma}}{(1-\tilde{\mu})^3}$.

Finalmente, además se cumple que

$$\mathbb{E}\left[w^T\right] = G(0,w) = F\left[\tilde{\theta}(w)\right]. \quad (33.7.7)$$

Corolario 33.3 *El tiempo de ruina del jugador tiene primer y segundo momento dados por*

$$\mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{1-\tilde{\mu}} \quad (33.7.8)$$

$$Var[T] = \frac{Var\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^3}. \quad (33.7.9)$$

33.8. Procesos de Llegadas a las colas en la RSVC

Se definen los procesos de llegada de los usuarios a cada una de las colas dependiendo de la llegada del servidor pero del sistema al cuál no pertenece la cola en cuestión:
Para el sistema 1 y el servidor del segundo sistema

$$F_{i,j}\left(z_i;\zeta_j\right)=\mathbb{E}\left[z_i^{L_i\left(\zeta_j\right)}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[L_i\left(\zeta_j\right)=k\right]z_i^k,\ para\ i,j=1,2.$$

Para el segundo sistema y el servidor del primero

$$\hat{F}_{i,j}\left(w_i;\tau_j\right) = \mathbb{E}\left[w_i^{\hat{L}_i\left(\tau_j\right)}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\hat{L}_i\left(\tau_j\right)=k\right]w_i^k,\ para\ i,j=1,2.$$

Ahora, con lo anterior definamos la FGP conjunta para el segundo sistema;

$$\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1\left(\tau_j\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\tau_j\right)}\right] = \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1\left(\tau_j\right)}\right]\mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2\left(\tau_j\right)}\right]=\hat{F}_{1,j}\left(w_1;\tau_j\right)\hat{F}_{2,j}\left(w_2;\tau_j\right)=\hat{F}_j\left(w_1,w_2;\tau_j\right).$$

Con respecto al sistema 1 se tiene la FGP conjunta con respecto al servidor del otro sistema:

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1\left(\zeta_j\right)}z_2^{L_2\left(\zeta_j\right)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1\left(\zeta_j\right)}\right]\mathbb{E}\left[z_2^{L_2\left(\zeta_j\right)}\right]=F_{1,j}\left(z_1;\zeta_j\right)F_{2,j}\left(z_2;\zeta_j\right)=F_j\left(z_1,z_2;\zeta_j\right).$$

Ahora analicemos la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas, se define la PGF conjunta al tiempo t para los tiempos de visita del servidor en cada una de las colas, para comenzar a dar servicio, definidos anteriormente al tiempo $t=\{\tau_1,\tau_2,\zeta_1,\zeta_2\}$:

$$F_j\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{2}z_i^{L_i\left(\tau_j\right)}\prod_{i=1}^{2}w_i^{\hat{L}_i\left(\tau_j\right)}\right] \tag{33.8.1}$$

$$\hat{F}_j\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{2}z_i^{L_i\left(\zeta_j\right)}\prod_{i=1}^{2}w_i^{\hat{L}_i\left(\zeta_j\right)}\right] \tag{33.8.2}$$

para $j=1,2$. Entonces, con la finalidad de encontrar el número de usuarios presentes en el sistema cuando el servidor termina de atender una de las colas de cualquier sistema se tiene lo siguiente

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1\left(\overline{\tau}_1\right)}z_2^{L_2\left(\overline{\tau}_1\right)}w_1^{\hat{L}_1\left(\overline{\tau}_1\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\overline{\tau}_1\right)}\right]=\mathbb{E}\left[z_2^{L_2\left(\overline{\tau}_1\right)}w_1^{\hat{L}_1\left(\overline{\tau}_1\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\overline{\tau}_1\right)}\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2\left(\tau_1\right)+X_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)+Y_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}w_1^{\hat{L}_1\left(\tau_1\right)+\hat{X}_1\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\tau_1\right)+\hat{X}_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}\right]$$

utilizando la (34.4.1), se tiene que

$$= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2\left(\tau_1\right)}z_2^{X_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}z_2^{Y_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}w_1^{\hat{L}_1\left(\tau_1\right)}w_1^{\hat{X}_1\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\tau_1\right)}w_2^{\hat{X}_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2\left(\tau_1\right)}\left\{w_1^{\hat{L}_1\left(\tau_1\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\tau_1\right)}\right\}\left\{z_2^{X_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}z_2^{Y_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}w_1^{\hat{X}_1\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}w_2^{\hat{X}_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}\right\}\right]$$

aplicando el hecho de que el número de usuarios que llegan a cada una de las colas del segundo sistema es independiente de las llegadas a las colas del primer sistema:

$$= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2\left(\tau_1\right)}\left\{z_2^{X_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}z_2^{Y_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}w_1^{\hat{X}_1\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}w_2^{\hat{X}_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1\left(\tau_1\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\tau_1\right)}\right]$$

dado que los arribos a cada una de las colas son independientes, podemos separar la esperanza para los procesos de llegada a Q_1 y Q_2 al tiempo τ_1, que es el tiempo en que el servidor visita a Q_1. Recordando que $\tilde{X}_2\left(z_2\right)=X_2\left(z_2\right)+Y_2\left(z_2\right)$ se tiene

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{\tilde{P}_2\left(z_2\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\hat{P}_1\left(w_1\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\hat{P}_2\left(w_2\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right\}^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)^{L_1(\tau_1)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z2\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2;\tau_1\right)\equiv F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2,w_1,w_2\right).
\end{aligned}
$$

Las igualdades anteriores son ciertas pues el número de usuarios que llegan a $\hat{Q}_2$ durante el intervalo $[\tau_1,\overline{\tau}_1]$ aún no han sido atendidos por el servidor del sistema 2 y por tanto aún no pueden pasar al sistema 1 a traves de Q_2. Por tanto el número de usuarios que pasan de $\hat{Q}_2$ a Q_2 en el intervalo de tiempo $[\tau_1,\overline{\tau}_1]$ depende de la política de traslado entre los dos sistemas, conforme a la sección anterior.

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right] &= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2,w_1,w_2\right) && (33.8.3)\\
&= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2;\tau_1\right) && (33.8.4)
\end{aligned}
$$

Utilizando un razonamiento análogo para $\overline{\tau}_2$ y la proposición (33.90) referente al problema de la ruina del jugador obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right]=\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}\left\{P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right\}^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)^{L_2(\tau_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
&= F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2;\tau_2\right)
\end{aligned}
$$

entonces se define

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right] &= F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_1,w_2\right) && (33.8.5)\\
&\equiv F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2;\tau_2\right) && (33.8.6)
\end{aligned}
$$

Para $\overline{\zeta}_1$ obtenemos una expresión similar

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right] &= \hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right) && (33.8.7)\\
&= F_1\left(z_1,z_2;\zeta_1\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right) && (33.8.8)
\end{aligned}
$$

Finalmente para $\overline{\zeta}_2$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right] &= \hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right) && (33.8.9)\\
&= F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right) && (33.8.10)
\end{aligned}
$$

33.9. Ecuaciones Recursivas para la RSVC

Con lo desarrollado hasta ahora podemos encontrar las ecuaciones recursivas que modelan la RSVC:

$$
\begin{aligned}
F_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) &= R_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2;\tau_1\right),\\
F_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) &= R_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2;\tau_2\right),\\
\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) &= \hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_1\left(z_1,z_2;\zeta_1\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right),\\
\hat{F}_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) &= \hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right),
\end{aligned}
$$

Con la finalidad de facilitar los cálculos para determinar los primeros y segundos momentos de los procesos involucrados en la RSVC, es conveniente utilizar la notación propuesta por Lang [24], es por eso que requerimos definir el operador diferencial D_i, $i=1,2,3,4$, donde D_1f denota la derivad parcial de f con respecto a z_1, D_3f es la derivada parcial de f con respecto a w_1 y D_4f es la derivada parcial de f con respecto a w_2. Otra consideración de gran utilidad es que la expresión expresada, es obtenida como consecuencia de aplicar el operador diferencial y además evaluarla en $z_1=1,z_2=1,w_1=1$ y $w_2=1$. En este sentido, la expresiíon $F_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)=R_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2;\tau_1\right)$ será representada por su versión simplificada $F_2=R_1F_1\hat{F}_3$. Por otra parte $D_1\left[R_1F_1\right]=D_1R_1\left(F_1\right)+R_1D_1F_1$, se tomará simplemente como $D_1\left[R_1F_1\right]=D_1R_1+D_1F_1$.

33.9.1. Tiempos de Traslado del Servidor

Recordemos que los tiempos de traslado del servidor para cualquiera de las colas del sistema 1 están dados por la expresión:

$$
R_i\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)=R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right) \tag{33.9.1}
$$

entonces, las derivadas parciales con respecto a cada uno de los argumentos z_1,z_2,w_1 y w_2 son de la forma

$$
D_iR_i = DR_iD_iP_i \tag{33.9.2}
$$

donde se hacen las siguientes convenciones:

$$
D_2P_2\equiv D_2\tilde{P}_2,\quad D_3P_3\equiv D_3\hat{P}_1,\quad D_4P_4\equiv D_4\hat{P}_2,
$$

33.9.2. Longitudes de la Cola en tiempos del servidor del otro sistema

Recordemos que $F_{1,2}\left(z_1;\zeta_2\right)F_{2,2}\left(z_2;\zeta_2\right)=F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)$, entonces

$$
D_1F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right) = D_1\left[F_{1,2}\left(z_1;\zeta_2\right)F_{2,2}\left(z_2;\zeta_2\right)\right]=F_{2,2}\left(z_2;\zeta_2\right)D_1F_{1,2}\left(z_1;\zeta_2\right)=F_{1,2}^{(1)}\left(1\right)
$$

es decir, $D_1F_2=F_{1,2}^{(1)}(1)$; de manera análoga se puede ver que $D_2F_2=F_{2,2}^{(1)}\left(1\right)$, mientras que $D_3F_2=D_4F_2=0$. Es decir, las expresiones resultantes pueden expresarse de manera general como:

$$
D_iF_j=\mathbb{1}_{i\leq2}F_{i,j}^{(1)}\left(1\right),\quad y\quad D_i\hat{F}_j=\mathbb{1}_{i\geq2}F_{i,j}^{(1)}\left(1\right)
$$

33.9.3. Usuarios presentes en la cola en tiempos del servidor de sus sistema

Recordemos la expresión obtenida para las longitudes de la cola para cada uno de los sistemas considerando que los tiempos del servidor correspondiente al mismo sistema: $F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)$. *Al igual que antes, podemos obtener las expresiones resultantes de aplicar el operador diferencial con respecto a cada uno de los argumentos:*
$D_1F_1=0$, $D_2F_1=D_1F_1D\theta_1D_2\tilde{P}_2+D_2F_1$, $D_3F_1=D_1F_1D\theta_1D_3\hat{P}_1+D_3\hat{F}_1$ *y finalmente* $D_4F_1=D_1F_1D\theta_1D_4\hat{P}_2+D_4\hat{F}_1$, *en términos generales:*

$$\begin{array}{ll} D_iF_1=\mathbb{1}_{i\neq 1}D_1F_1D\theta_1D_iP_i+\mathbb{1}_{i=2}D_iF_1, & D_iF_2=\mathbb{1}_{i\neq 2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_iP_i+\mathbb{1}_{i=1}D_iF_2\\ D_i\hat{F}_1=\mathbb{1}_{i\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i+\mathbb{1}_{i=4}D_i\hat{F}_1, & D_i\hat{F}_2=\mathbb{1}_{i\neq 4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i+\mathbb{1}_{i=3}D_i\hat{F}_2. \end{array}$$

$$D_iF_1 = \mathbb{1}_{i\neq 1}D_1F_1D\theta_1D_iP_i+\mathbb{1}_{i=2}D_iF_1, \tag{33.9.3}$$
$$D_iF_2 = \mathbb{1}_{i\neq 2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_iP_i+\mathbb{1}_{i=1}D_iF_2 \tag{33.9.4}$$
$$D_i\hat{F}_1 = \mathbb{1}_{i\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i+\mathbb{1}_{i=4}D_i\hat{F}_1, \tag{33.9.5}$$
$$D_i\hat{F}_2 = \mathbb{1}_{i\neq 4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i+\mathbb{1}_{i=3}D_i\hat{F}_2. \tag{33.9.6}$$

33.9.4. Usuarios presentes en la RSVC

Hagamos lo correspondiente para las longitudes de las colas de la RSVC utilizando las expresiones obtenidas en las secciones anteriores, recordemos que

$$\mathbf{F}_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2,w_1,w_2\right)=F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2;\tau_1\right)$$

entonces

$$\begin{aligned} D_1\mathbf{F}_1 &= 0\\ D_2\mathbf{F}_1 &= f_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2+f_1\left(2\right)\\ D_3\mathbf{F}_1 &= f_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_1+\hat{F}_{1,1}^{(1)}\left(1\right)\\ D_4\mathbf{F}_1 &= f_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_2+\hat{F}_{2,1}^{(1)}\left(1\right) \end{aligned}$$

para τ_2*:*

$$\mathbf{F}_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_1,w_2\right)=F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2;\tau_2\right)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} D_1\mathbf{F}_2 &= f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\mu_1+f_2\left(1\right)\\ D_2\mathbf{F}_2 &= 0\\ D_3\mathbf{F}_2 &= f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1+\hat{F}_{2,1}^{(1)}\left(1\right)\\ D_4\mathbf{F}_2 &= f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_2+\hat{F}_{2,2}^{(1)}\left(1\right) \end{aligned}$$

Ahora para el segundo sistema

$$\hat{\mathbf{F}}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)=F_1\left(z_1,z_2;\zeta_1\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)$$

entonces

$$\begin{aligned}
D_1\hat{\mathbf{F}}_1 &= \hat{f}_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1+F_{1,1}^{(1)}\left(1\right)\\
D_2\hat{\mathbf{F}}_1 &= \hat{f}_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2+F_{2,1}^{(1)}\left(1\right)\\
D_3\hat{\mathbf{F}}_1 &= 0\\
D_4\hat{\mathbf{F}}_1 &= \hat{f}_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2+\hat{f}_1\left(2\right)
\end{aligned}$$

Finalmente para ζ_2

$$\hat{\mathbf{F}}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right) = F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right]$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
D_1\hat{\mathbf{F}}_2 &= \hat{f}_2\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1+F_{1,2}^{(1)}\left(1\right)\\
D_2\hat{\mathbf{F}}_2 &= \hat{f}_2\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2+F_{2,2}^{(1)}\left(1\right)\\
D_3\hat{\mathbf{F}}_2 &= \hat{f}_2\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1+\hat{f}_2\left(1\right)\\
D_4\hat{\mathbf{F}}_2 &= 0
\end{aligned}$$

33.9.5. Ecuaciones Recursivas

Entonces, de todo lo desarrollado hasta ahora se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{F}_1=R_2F_2\hat{F}_2, & D_i\mathbf{F}_1=D_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_2\right)\\
\mathbf{F}_2=R_1F_1\hat{F}_1, & D_i\mathbf{F}_2=D_i\left(R_1+F_1+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_1\right)\\
\hat{\mathbf{F}}_1=\hat{R}_2\hat{F}_2F_2, & D_i\hat{\mathbf{F}}_1=D_i\left(\hat{R}_2+\hat{F}_2+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_2\right)\\
\hat{\mathbf{F}}_2=\hat{R}_1\hat{F}_1F_1, & D_i\hat{\mathbf{F}}_2=D_i\left(\hat{R}_1+\hat{F}_1+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_1\right)
\end{array} \tag{33.9.7}$$

cuyas expresiones son de la forma:

$$\begin{array}{ll}
D_1\mathbf{F}_2=r_1\mu_1, & D_2\mathbf{F}_2=r_1\tilde{\mu}_2+f_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2+f_1\left(2\right),\\
D_3\mathbf{F}_2=r_1\hat{\mu}_1+f_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_1+\hat{F}_{1,1}^{(1)}\left(1\right), & D_4\mathbf{F}_2=r_1\hat{\mu}_2+f_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_2+\hat{F}_{2,1}^{(1)}\left(1\right),\\
D_1\mathbf{F}_1=r_2\mu_1+f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\mu_1+f_2\left(1\right), & D_2\mathbf{F}_1=r_2\tilde{\mu}_2,\\
D_3\mathbf{F}_1=r_2\hat{\mu}_1+f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1+\hat{F}_{2,1}^{(1)}\left(1\right), & D_4\mathbf{F}_1=r_2\hat{\mu}_2+f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_2+\hat{F}_{2,2}^{(1)}\left(1\right),\\
D_1\hat{\mathbf{F}}_2=\hat{r}_1\mu_1+\hat{f}_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1+F_{1,1}^{(1)}\left(1\right), & D_2\hat{\mathbf{F}}_2=\hat{r}_1\mu_2+\hat{f}_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2+F_{2,1}^{(1)}\left(1\right),\\
D_3\hat{\mathbf{F}}_2=\hat{r}_1\hat{\mu}_1, & D_4\hat{\mathbf{F}}_2=\hat{r}_1\hat{\mu}_2+\hat{f}_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2+\hat{f}_1\left(2\right),\\
D_1\hat{\mathbf{F}}_1=\hat{r}_2\mu_1+\hat{f}_2\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1+F_{1,2}^{(1)}\left(1\right), & D_2\hat{\mathbf{F}}_1=\hat{r}_2\tilde{\mu}_2+\hat{f}_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2+F_{2,2}^{(1)}\left(1\right),\\
D_3\hat{\mathbf{F}}_1=\hat{r}_2\hat{\mu}_1+\hat{f}_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1+\hat{f}_2\left(1\right), & D_4\hat{\mathbf{F}}_1=\hat{r}_2\hat{\mu}_2
\end{array}$$

de las cuales resulta

$$f_2(1) = r_1\mu_1, \quad f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2, \quad \hat{f}_1(4) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2, \quad \hat{f}_2(3) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1$$

$$\begin{aligned} f_1(1) &= r_2\mu_1 + \mu_1\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + r_1\mu_1 = \mu_1\left(r_1 + r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) = \mu_1\left(r + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right), \\ f_1(3) &= r_2\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_1\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,2}(1) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,2}(1), \end{aligned}$$

utilizando un razonamiento análogo a los anteriores se puede verificar que

$$\begin{aligned} f_1(4) &= \hat{\mu}_2\left(r_2 + \tfrac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1), \quad f_2(2) = \left(r + \tfrac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2, \\ f_2(3) &= \hat{\mu}_1\left(r_1 + \tfrac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,1}(1), \quad f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \tfrac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(1) &= \left(\hat{r}_2 + \tfrac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1 + F^{(1)}_{1,2}(1), \quad \hat{f}_1(2) = \left(\hat{r}_2 + \tfrac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,2}(1), \\ \hat{f}_1(3) &= \left(\hat{r} + \tfrac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1, \quad \hat{f}_2(1) = \left(\hat{r}_1 + \tfrac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1 + F^{(1)}_{1,1}(1), \\ \hat{f}_2(2) &= \left(\hat{r}_1 + \tfrac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,1}(1), \quad \hat{f}_2(4) = \left(\hat{r} + \tfrac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2, \end{aligned}$$

33.9.6. Solución del Sistema de Ecuaciones Lineales

Si $\mu = \mu_1 + \tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2$, $r = r_1 + r_2$ y $\hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$ la solución del sistema de ecuaciones está dada por

$$f_1(1) = \mu_1\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1) = \mu_1\left(r_2 + \frac{r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1) = \mu_1\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1),$$

de manera análoga se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} f_1(3) &= \hat{\mu}_1\left(r_2 + \tfrac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1), \quad f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \tfrac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1), \\ f_2(3) &= \hat{\mu}_1\left(r_1 + \tfrac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,1}(1), \quad f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \tfrac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1), \\ \hat{f}_1(1) &= \mu_1\left(\hat{r}_2 + \tfrac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,2}(1), \quad \hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \tfrac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,2}(1), \\ \hat{f}_2(1) &= \mu_1\left(\hat{r}_1 + \tfrac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,1}(1), \quad \hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \tfrac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,1}(1) \end{aligned}$$

33.10. Resultado Principal

Sean $\mu_1, \mu_2, \check{\mu}_2, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ y $\tilde{\mu}_2 = \mu_2 + \check{\mu}_2$ los valores esperados de los proceso definidos anteriormente, y sean $r_1, r_2, \hat{r}_1$ y $\hat{r}_2$ los valores esperado s de los tiempos de traslado del servidor entre las colas para cada uno de los sistemas de visitas cíclicas. Si se definen $\mu = \mu_1 + \tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2$, y $r = r_1 + r_2$ y $\hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$, entonces se tiene el siguiente resultado.

Teorema 33.62 *Supongamos que $\mu < 1$, $\hat{\mu} < 1$, entonces, el número de usuarios presentes en cada una de las colas que conforman la RSVC cuando uno de los servidores visita a alguna de ellas está dada por la solución del Sistema de Ecuaciones Lineales presentados arriba cuyas expresiones damos a continuación:*

$$\begin{aligned} f_1(1) &= \mu_1\left(r_2 + \tfrac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1), \quad f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2, \quad f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \tfrac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1), \\ f_1(4) &= \hat{\mu}_2\left(r_2 + \tfrac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1), \quad f_2(1) = r_1\mu_1, \quad f_2(2) = r\tfrac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}, \\ f_2(3) &= \hat{\mu}_1\left(r_1 + \tfrac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,1}(1), \quad f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \tfrac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1), \quad \hat{f}_1(1) = \mu_1\left(\hat{r}_2 + \tfrac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,2}(1), \\ \hat{f}_1(2) &= \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \tfrac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,2}(1), \quad \hat{f}_1(3) = \hat{r}\tfrac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}, \quad \hat{f}_1(4) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2, \\ \hat{f}_2(1) &= \mu_1\left(\hat{r}_1 + \tfrac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,1}(1), \quad \hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \tfrac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,1}(1), \quad \hat{f}_2(3) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1, \\ \hat{f}_2(4) &= \hat{r}\tfrac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}. \end{aligned}$$

33.11. Derivadas de Orden Superior

Si tomamos la derivada de segundo orden con respecto a las ecuaciones dadas en (33.28.7) obtenemos

$$
\begin{aligned}
D_kD_iF_1 &= D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)+D_iR_2D_k\left(F_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)+D_iF_2D_k\left(R_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_4D_k\left(R+F\right.\\
D_kD_iF_2 &= D_kD_i\left(R_1+F_1+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_3\right)+D_iR_1D_k\left(F_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right)+D_iF_1D_k\left(R_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_3D_k\left(R_1+\right.\\
D_kD_i\hat{F}_3 &= D_kD_i\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_2+\hat{F}_4\right)+D_i\hat{R}_4D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2+\hat{F}_4\right)+D_i\hat{F}_4D_k\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_k\left(\hat{R}_4+\right.\\
D_kD_i\hat{F}_4 &= D_kD_i\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{R}_3D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{F}_3D_k\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_k\left(\hat{R}_3+\right.
\end{aligned}
$$

para $i,k=1,\dots,4$. Es necesario determinar las derivadas de segundo orden para las expresiones de la forma $D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)$

33.11.1. Derivadas de Segundo Orden: Tiempos de Traslado del Servidor

A saber, $R_i\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)=R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)$, la denotaremos por la expresión $R_i=R_i\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right)$, donde al igual que antes, utilizando la notación dada en [24] se tiene que

$$D_iD_iR_k=D^2R_k\left(D_iP_i\right)^2+DR_kD_iD_iP_i \tag{33.11.1}$$

mientras que para $i\neq j$

$$D_iD_jR_k=D^2R_kD_iP_iD_jP_j+DR_kD_jP_jD_iP_i \tag{33.11.2}$$

33.11.2. Derivadas de Segundo Orden: Longitudes de las Colas

Recordemos la expresión $F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)$, que denotaremos por $F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$, entonces las derivadas parciales mixtas son:

$$D_iF_1=\mathbb{1}_{i\geq 2}D_iF_1D\theta_1D_iP_i+\mathbb{1}_{i=2}D_iF_1,$$

entonces para $F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$

$$D_2F_1=D_1F_1D_1\theta_1D_2\tilde{P}_2\left\{\hat{P}_1\hat{P}_2\right\}+D_2F_1$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_1F_1 &= 0\\
D_2D_1F_1 &= 0\\
D_3D_1F_1 &= 0\\
D_4D_1F_1 &= 0\\
D_1D_2F_1 &= 0\\
D_2D_2F_1 &= D_1D_1F_1D\theta_1D_2\tilde{P}_2D\theta_1D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1DD\theta_1D_2D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D\theta_1D_2D_2\tilde{P}_2 + D_1D_2F_1D\theta_1D_2\tilde{P}_2\\
&+ D_1D_2F_1D\theta_1D_2\tilde{P}_2 + D_2D_2F_1\\
D_3D_2F_1 &= D_1D_1F_1D\theta_1D_3\hat{P}_1D\theta_1D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1DD\theta_1D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D\theta_1D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1D_2F_1D\theta_1D_3\hat{P}_1\\
D_4D_2F_1 &= D_1D_1F_1D\theta_1D_4\hat{P}_2D\theta_1D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1DD\theta_1D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D\theta_1D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1D_2F_1D\theta_1D_4\hat{P}_2\\
D_1D_3F_1 &= 0\\
D_2D_3F_1 &= D_1D_1F_1D\theta_1D_2\tilde{P}_2D\theta_1D_3\hat{P}_1 + D_2D_1F_1D\theta_1D_3\hat{P}_1 + D_1F_1DD\theta_1D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D\theta_1D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2\\
D_3D_3F_1 &= D_1D_1F_1D\theta_1D_3\hat{P}_1D\theta_1D_3\hat{P}_1 + D_1F_1DD\theta_1D_3\hat{P}_1D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D\theta_1D_3D_3\hat{P}_1\\
D_4D_3F_1 &= D_1D_1F_1D\theta_1D_4\hat{P}_2D\theta_1D_3\hat{P}_1 + D_1F_1DD\theta_1D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D\theta_1D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2\\
D_1D_4F_1 &= 0\\
D_2D_4F_1 &= D_1D_1F_1D\theta_1D_2\tilde{P}_2D\theta_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1DD\theta_1D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D\theta_1D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_2D_1F_1D\theta_1D_4\hat{P}_2\\
D_3D_4F_1 &= D_1D_1F_1D\theta_1D_3\hat{P}_1D\theta_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1DD\theta_1D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D\theta_1D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1\\
D_4D_4F_1 &= D_1D_1F_1D\theta_1D_4\hat{P}_2D\theta_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1DD\theta_1D_4\hat{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D\theta_1D_4D_4\hat{P}_2
\end{aligned}
$$

Para $F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1\hat{P}_1\hat{P}_2\right)\right)$

$$D_iF_2 = \mathbb{1}_{i\neq 2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=1}D_iF_2,$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_1F_2 &= \left(D_2D_2F_2D_1\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_1D_2F_2\right)D_2\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_2F_2D_1D_2\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_2F_2D_2\tilde{\theta}_2D_1D_1P_1 + D_1D_1F_2\\
D_2D_1F_2 &= 0\\
D_3D_1F_2 &= D_2D_1F_2D_3\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_2D_2F_2D_3\tilde{\theta}_2D_3P_1D_2\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_2F_2D_3D_2\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1 + D_2F_2D_2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1\\
D_4D_1F_2 &= D_2D_1F_2D_4\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2 + D_2D_2F_2D_4\tilde{\theta}_2D_4P_2D_4\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_2F_2D_4D_2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1 + D_2F_2D_2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2\\
D_1D_3F_2 &= \left(D_2D_2F_2D_1\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_1D_2F_2\right)D_3\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D_1D_3\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D_3\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1\\
D_2D_3F_3 &= 0\\
D_3D_3F_2 &= D_2D_2F_2D_3\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_3\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D_3D_3\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D_3\tilde{\theta}_2D_3D_3\hat{P}_1\\
D_4D_3F_2 &= D_2D_2F_2D_4\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D_4D_3\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D_3\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2\\
D_1D_4F_2 &= \left(D_2D_2F_2D_4\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_1D_2F_2\right)D_4\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D_1D_4\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D_4\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1\\
D_2D_4F_2 &= 0\\
D_3D_4F_2 &= D_2F_2D_4\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D_3D_4\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D_4\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1\\
D_4D_4F_2 &= D_2F_2D_4\tilde{\theta}_2D_4D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D_4D_4\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D_4\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_4\hat{P}_2
\end{aligned}
$$

para $\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_2\right), w_2\right)$

$$D_i\hat{F}_1 = \mathbb{1}_{i\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=4}D_i\hat{F}_1,$$

$$
\begin{array}{rcl}
D_1D_1\hat{F}_1 &=& D_1\hat{\theta}_1D_1D_1P_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_1P_1D_1D_1\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_1P_1D_1\hat{\theta}_1D_1\hat{\theta}_1D_1D_1\hat{F}_1\\
D_1D_1\hat{F}_1 &=& D_1P_1D_2P_1D\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_2P_1DD\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_2P_1D\hat{\theta}_1D\hat{\theta}_1D_1D_1\hat{\theta}_1\\
D_3D_1\hat{F}_1 &=& 0\\
D_4D_1\hat{F}_1 &=& D_1P_1D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1D_4\hat{P}_2DD\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1D\hat{\theta}_1\left(D_2D1\hat{F}_1 + D_4P_2D\hat{\theta}_1D_1D_1\hat{F}_1\right)\\
D_1D_2\hat{F}_1 &=& D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_2P_2DD\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_1D\hat{\theta}_1D_1D_1\hat{F}_1\\
D_2D_2\hat{F}_1 &=& D\hat{\theta}_1D_2D_2P_2D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D_2P_2DD\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D_2P_2D\hat{\theta}_1D\hat{\theta}_1D_1D_1\hat{F}_1\\
D_3D_2\hat{F}_1 &=& 0\\
D_4D_2\hat{F}_1 &=& D_2P_2D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D\hat{F}_1 + D_2P_2D_4\hat{P}_2DD\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D\hat{\theta}_1\left(D_2D_1\hat{F}_1 + D_2\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_1D_1\hat{F}_1\right)\\
D_1D_3\hat{F}_1 &=& 0\\
D_2D_3\hat{F}_1 &=& 0\\
D_3D_3\hat{F}_1 &=& 0\\
D_4D_3\hat{F}_1 &=& 0\\
D_1D_4\hat{F}_1 &=& D_1P_1D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_4\hat{P}_2DD\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D\hat{\theta}_1D_2D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D\hat{\theta}_1D_1D_1\hat{F}_1\\
D_2D_4\hat{F}_1 &=& D_2P_2D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D_4\hat{P}_2DD\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D\hat{\theta}_1D_2D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D\hat{\theta}_1D_1D_1\hat{F}_1\\
D_3D_4\hat{F}_1 &=& 0\\
D_4D_4\hat{F}_1 &=& D_2D_2\hat{F}_1 + D\hat{\theta}_1D_4D_4\hat{F}_2 + D_1\hat{F}_1 + D_4\hat{P}_2D_4\hat{P}_2DD\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_2D_1\hat{F}_1\\
&+& D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1\left(D_2D_1\hat{F}_1 + D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_1D_1\hat{F}_1\right)
\end{array}
$$

finalmente, para $\hat{F}_2\left(w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1\tilde{F}_2\hat{P}_1\right)\right)$

$$D_i\hat{F}_2 = \mathbb{1}_{i\neq 4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=3}D_i\hat{F}_2,$$

$$
\begin{array}{rcl}
D_1D_1\hat{F}_2 &=& D_1\hat{\theta}_2D_2D_2P_1D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D_1P_1D_1D_1\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D_1P_1D_1\hat{\theta}_2D_1\hat{\theta}_2D_1D_1\hat{F}_2\\
D_2D_1\hat{F}_2 &=& D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D_2P_2DD\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_2D\hat{\theta}_2D_2D_2\hat{\theta}_2\\
D_3D_1\hat{F}_2 &=& D_1P_1D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D_3\hat{P}_1DD\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D\hat{\theta}_2\left(D_2D1\hat{F}_2 + D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2D_2\hat{F}_2\right)\\
D_4D_1\hat{F}_2 &=& 0\\
D_1D_2\hat{F}_2 &=& D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D_2P_2DD\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_2D\hat{\theta}_2D_2D_2\hat{F}_2\\
D_2D_2\hat{F}_2 &=& DD\hat{\theta}_2D_2D_2P_2D_2\hat{F}_2 + D_2P_2D_2P_2DD\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_2P_2D_2P_2D\hat{\theta}_2D\hat{\theta}_2D_2D_2\hat{F}_2\\
D_3D_2\hat{F}_2 &=& D_2P_2D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_2P_2D_3\hat{P}_1DD\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_2P_2D\hat{\theta}_2\left(D_2D_1\hat{F}_2 + D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2D_2\hat{F}_2\right)\\
D_4D_2\hat{F}_2 &=& 0\\
D_1D_3\hat{F}_2 &=& D_1P_1D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D_3\hat{P}_1DD\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D\hat{\theta}_2D\hat{\theta}_2D_2D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D\hat{\theta}_1D_2D_1\hat{F}_2\\
D_2D_3\hat{F}_2 &=& D_2P_2D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_2P_2D_3\hat{P}_1DD\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_2P_2D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2D_2\hat{F}_2 + D_2P_2D\hat{\theta}_2D\hat{\theta}_2D_1D_2\hat{F}_2\\
D_4D_3\hat{F}_2 &=& D_3D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_3\hat{P}_1D_3\hat{P}_1DD\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_1D_2\hat{F}_2 + D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2\Big(D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2D_2\hat{F}_2 + D_1D_2\\
D_4D_3\hat{F}_2 &=& 0\\
D_1D_4\hat{F}_2 &=& 0\\
D_2D_4\hat{F}_2 &=& 0\\
D_3D_4\hat{F}_2 &=& 0\\
D_4D_4\hat{F}_2 &=& 0
\end{array}
$$

33.12. Aplicaciones

33.12.1. Ejemplo 1: Automatización en dos líneas de trabajo

Consideremos dos líneas de producción atendidas cada una de ellas por un robot, en las que en una de ellas un robot realiza la misma actividad en dos estaciones distintas, una vez que termina de realizar una actividad en una de las colas, se desplaza a la siguiente para hacer lo correspondientes con los materiales presentes en la estación. Una vez que las piezas son liberadas por el robot se desplazan al otro sistema en donde son objeto del terminado de la pieza para su almacenamiento. En este caso el sistema 1 consta de una sola cola de tipo $M/M/1$ *y el sistema 2 es un sistema de visitas cíclicas conformado por dos colas idénticas, donde al igual que antes, el traslado de un sistema a otro se realiza de la cola* $\hat{Q}_2$ *a la única cola* Q_1 *del sistema 1.*

El número de usuarios presentes en el sistema 1 se sigue modelando conforme a un SVC, mientras que para es sistema 1, Q_1 *se comporta como una Red de Jackson, una red conformada por* $\hat{Q}_2$ *y* Q_1*, donde el número de usuarios que llegan a* Q_1 *lo hacen de acuerdo a su propio proceso de arribos más los que provienen del sistema 2, los tiempos entre arribos de los usuarios procedentes del sistema 2, lo hacen conforme a una distribución exponencial.*

Las ecuaciones recursivas son

$$
\begin{aligned}
F_1(z_1,w_1,w_2) &= R\left(\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2\left(\tilde{\theta}_2\left(\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2),\\
\hat{F}_1(z_1,w_1,w_2) &= \hat{R}_2\left(\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2(z_1;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right),\\
\hat{F}_2(z_1,w_1,w_2) &= \hat{R}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1(z_1;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right),
\end{aligned}
$$

33.12.2. Ejemplo 2: Sistema de Salud Pública

Consideremos un hospital en el área de urgencias, donde hay una ventanilla a la cuál van llegando todos los posibles pacientes para su valoración, después de la cual pueden o ser canalizados a un área de atención que requiera de atención sin llegar a ser urgencia, o puede abandonar el sistema dependiendo de la valoración hecha por el médico en turno. Por otra parte, hay una sección del hospital en la que son atendidas las personas sin necesidad de pasar por la ventanilla de valoración, es decir, son atenciones de urgencia. Las personas que después de la valoración son turnadas al área de atención deben de esperar su turno pues a esta sección también llegan pacientes provenientes de otras áreas del hospital. Para este caso, el sistema 1 está conformado por una única cola Q_1 *que podemos asumir sin pérdida de generalidad que es de tipo* $M/M/1$*, mientras que el sistema 2 es un SVC como los hasta ahora estudiados. Es decir, en este caso en particular el servidor del sistema 1 da servicio de manera ininterrumpida en* Q_1 *en tanto no se vacíe la cola.*

Las ecuaciones recursivas son de la forma

$$
\begin{aligned}
F_1(z_1,z_2,w_1) &= R_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)\hat{F}_2(w_1;\tau_2),\\
F_2(z_1,z_2,w_1) &= R_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)F_1\left(\theta_1\left(\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1;\tau_1),\\
\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1) &= \hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right),
\end{aligned}
$$

33.12.3. Ejemplo 3: RSVC con dos conexiones

Al igual que antes consideremos una RSVC conformada por dos SVC que se comunican entre sí en $\hat{Q}_2$ y Q_2, permitiendo el paso de los usuarios del sistema 2 hacia el sistema 1. Ahora supongamos que también se permite el paso en $\hat{Q}_1$ hacia Q_1.
Cuyas ecuaciones recursivas son de la forma

$$
\begin{aligned}
F_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) &= R_2\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2;\tau_2\right),\\
F_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) &= R_1\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2;\tau_1\right),\\
\hat{F}_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) &= \hat{R}_2\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right),\\
\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) &= \hat{R}_1\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_1\left(z_1,z_2;\zeta_1\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right),
\end{aligned}
$$

Objetivos Principales

- *Encontrar las ecuaciones que modelan el comportamiento de una RSVC con propiedades similares.*
- *Encontrar expresiones analíticas para las longitudes de las colas al momento en que el servidor llega a una de ellas para comenzar a dar servicio, así como de sus segundos momentos.*
- *Determinar las principales medidas de desempeño para la RSVC tales como: Número de usuarios presentes en cada una de las colas del sistema cuando uno de los servidores está presente atendiendo, Tiempos que transcurre entre las visitas del servidor a la misma cola.*

33.13. Descripción de una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas

Consideremos una red de sistema de visitas cíclicas conformada por dos sistemas de visitas cíclicas, cada una con dos colas independientes, donde además se permite el intercambio de usuarios entre los dos sistemas en la segunda cola de cada uno de ellos.

Supuestos sobre la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas

- *Los arribos de los usuarios ocurren conforme a un proceso de conteo general con tasa de llegada μ_1 y μ_2 para el sistema 1, mientras que para el sistema 2, lo hacen conforme a un proceso Poisson con tasa $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ respectivamente.*
- *Se considerarán intervalos de tiempo de la forma $[t, t+1]$. Los usuarios arriban de manera independiente del resto de las colas. Se define el grupo de usuarios que llegan a cada una de las colas del sistema 1, caracterizadas por Q_1 y Q_2 respectivamente, en el intervalo de tiempo $[t, t+1]$ por $X_1(t), X_2(t)$.*
- *Se definen los procesos $\hat{X}_1(t), \hat{X}_2(t)$ para las colas del sistema 2, denotadas por $\hat{Q}_1$ y $\hat{Q}_2$ respectivamente. Donde además se supone que $\mu_i < 1$ y $\hat{\mu}_i < 1$ para $i = 1, 2$.*
- *Se define el proceso $Y_2(t)$ para el número de usuarios que se trasladan del sistema 2 al sistema 1 en el intervalo de tiempo $[t, t+1]$, este proceso tiene parámetro $\tilde{\mu}_2$.*
- *En lo que respecta al servidor, en términos de los tiempos de visita a cada una de las colas, se definen las variables aleatorias τ_i, para Q_i, para $i = 1, 2$, respectivamente; y ζ_i para $\hat{Q}_i$, $i = 1, 2$, del sistema 2 respectivamente. A los tiempos en que el servidor termina de atender en las colas $Q_i, \hat{Q}_i$, se les denotará por $\overline{\tau}_i, \overline{\zeta}_i$ para $i = 1, 2$, respectivamente.*

- *Los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por* $\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i$ *y* $\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i$, $i = 1, 2$, *para el sistema 1 y el sistema 2, respectivamente.*

El uso de la FGP nos permite determinar las funciones de distribución de probabilidades conjunta de manera indirecta, sin necesidad de hacer uso de las propiedades de las distribuciones de probabilidad de cada uno de los procesos que intervienen en la RSVC. Para cada una de las colas en cada sistema, el número de usuarios al tiempo en que llega el servidor a dar servicio está dado por el número de usuarios presentes en la cola al tiempo t, más el número de usuarios que llegan a la cola en el intervalo de tiempo $[\tau_i, \overline{\tau}_i]$. *Una vez definidas las FGP's conjuntas, se construyen las ecuaciones recursivas que permiten obtener la información sobre la longitud de cada una de las colas al momento en que uno de los servidores llega a una de ellas para dar servicio.*

33.13.1. Funciones Generadoras de Probabilidades

Para cada uno de los procesos de llegada a las colas $X_i, \hat{X}_i$, $i = 1, 2$, *y* Y_2, *con* $\tilde{X}_2 = X_2 + Y_2$ *se define FGP:* $P_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_i^{X_i(t)}\right], \hat{P}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\hat{X}_i(t)}\right]$, *para* $i = 1, 2$, *y* $\check{P}_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{Y_2(t)}\right], \tilde{P}_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{\tilde{X}_2(t)}\right]$, *con primer momento definidos por* $\mu_i = \mathbb{E}[X_i(t)] = P_i^{(1)}(1), \hat{\mu}_i = \mathbb{E}\left[\hat{X}_i(t)\right] = \hat{P}_i^{(1)}(1)$, *para* $i = 1, 2$, *y por otra parte* $\check{\mu}_2 = \mathbb{E}[Y_2(t)] = \check{P}_2^{(1)}(1), \tilde{\mu}_2 = \mathbb{E}\left[\tilde{X}_2(t)\right] = \tilde{P}_2^{(1)}(1)$.

Sus procesos se definen por: $S_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_i^{\overline{\tau}_i - \tau_i}\right]$ *y* $\hat{S}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\overline{\zeta}_i - \zeta_i}\right]$, *con primer momento dado por:* $s_i = \mathbb{E}[\overline{\tau}_i - \tau_i]$ *y* $\hat{s}_i = \mathbb{E}\left[\overline{\zeta}_i - \zeta_i\right]$, *para* $i = 1, 2$. *Análogamente los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por* $\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i$ *y* $\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i$ *para el sistema 1 y el sistema 2, respectivamente, con* $i = 1, 2$.

La FGP para estos tiempos de traslado están dados por $R_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_1^{\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i}\right]$ *y* $\hat{R}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i}\right]$ *y al igual que como se hizo con anterioridad, se tienen los primeros momentos de estos procesos de traslado del servidor entre las colas de cada uno de los sistemas que conforman la red de sistemas de visitas cíclicas:* $r_i = R_i^{(1)}(1) = \mathbb{E}[\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i]$ *y* $\hat{r}_i = \hat{R}_i^{(1)}(1) = \mathbb{E}\left[\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i\right]$ *para* $i = 1, 2$.

Para el proceso $L_i(t)$ *que determina el número de usuarios presentes en cada una de las colas al tiempo t, se define su FGP,* $H_i(t)$, *correspondiente al sistema 1, mientras que para el segundo sistema el proceso correspondiente está dado por* $\hat{L}_i(t)$, *con FGP* $\hat{H}_i(t)$, *es decir* $H_i(t) = \mathbb{E}\left[z_i^{L_i(t)}\right]$ *y* $\hat{H}_i(t) = \mathbb{E}\left[w_i^{\hat{L}_i(t)}\right]$ *para el sistema 1 y 2 respectivamente. Con lo dicho hasta ahora, se tiene que el número de usuarios presentes en los tiempos* $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$, *es cero, es decir,* $L_i(\overline{\tau_i}) = 0$, *y* $\hat{L}_i\left(\overline{\zeta_i}\right) = 0$ *para i=1,2 para cada uno de los dos sistemas.*

Para cada una de las colas en la RSVC, el número de usuarios al tiempo en que llega el servidor a una de ellas está dado por el número de usuarios presentes en la cola al tiempo $t = \tau_i, \zeta_i$, *más el número de usuarios que llegan a la cola en el intervalo de tiempo* $[\tau_i, \overline{\tau}_i], \left[\zeta_i, \overline{\zeta}_i\right]$, *es decir* $\hat{L}_i(\overline{\tau}_j) = \hat{L}_i(\tau_j) + \hat{X}_i(\overline{\tau}_j - \tau_j)$, *para* $i, j = 1, 2$, *mientras que para el primer sistema:* $L_1(\overline{\tau}_j) = L_1(\tau_j) + X_1(\overline{\tau}_j - \tau_j)$.

En el caso específico de Q_2, *además, hay que considerar el número de usuarios que pasan del sistema 2 al sistema 1, a traves de* $\hat{Q}_2$ *mientras el servidor en* Q_2 *está ausente, es decir, una vez que son atendidos en* $\hat{Q}_2$:

$$L_2(\overline{\tau}_1) = L_2(\tau_1) + X_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1) + Y_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1). \tag{33.13.1}$$

33.13.2. El problema de la ruina del jugador

Sea $\tilde{L}_0$ *el número de usuarios presentes en la cola al momento en que el servidor llega para dar servicio. Sea* T *el tiempo que requiere el servidor para atender a todos los usuarios presentes en la cola comenzando con* $\tilde{L}_0$ *usuarios. Supongamos que se tiene un jugador que cuenta con un capital inicial de* $\tilde{L}_0 \geq 0$ *unidades, esta persona realiza una serie de dos juegos simultáneos e independientes de manera sucesiva, dichos eventos son independientes e idénticos entre sí para cada realización. La ganancia en el n-ésimo juego es* $\tilde{X}_n = X_n + Y_n$ *unidades de las cuales se resta una cuota de 1 unidad por cada juego simultáneo, es decir, se restan dos unidades por cada juego realizado. En el contexto de* *teoría de colas este proceso se puede pensar como el número de usuarios que llegan a una cola vía dos procesos de arribo distintos e independientes entre sí. Su FGP está dada por* $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{L}_0}\right]$*, además*

$$\tilde{P}(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{X}_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n+Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n}z^{Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right]\mathbb{E}\left[z^{Y_n}\right] = P(z)\check{P}(z),$$

con $\tilde{\mu} = \mathbb{E}\left[\tilde{X}_n\right] = \tilde{P}[z] < 1$*. Sea* $\tilde{L}_n$ *el capital remanente después del n-ésimo juego. Entonces*

$$\tilde{L}_n = \tilde{L}_0 + \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \cdots + \tilde{X}_n - 2n.$$

La ruina del jugador ocurre después del n-ésimo juego, es decir, la cola se vacía después del n-ésimo juego. Sea $g_{n,k}$ *la probabilidad del evento de que el jugador no caiga en ruina antes del n-ésimo juego, y que además tenga un capital de* k *unidades antes del n-ésimo juego, es decir, dada* $n \in \{1,2,\dots\}$ *y* $k \in \{0,1,2,\dots\}$ $g_{n,k} := P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1,\dots,n, \tilde{L}_n = k\right\}$*, la cual además se puede escribir como:*

$$g_{n,k} = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-j-l+1\}P\{Y_n = l\}. \tag{33.13.2}$$

Se definen las siguientes FGP:

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k}z^k, \text{ para } n = 0,1,\dots, \tag{33.13.3}$$

$$G(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z)w^n. \tag{33.13.4}$$

Proposición 33.30 *Sean* $G_n(z)$ *y* $G(z,w)$ *definidas como en (33.80.4) y (33.80.5) respectivamente, entonces*

$$G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z). \tag{33.13.5}$$

Además

$$G(z,w) = \frac{zF(z) - wP(z)G(0,w)}{z - wR(z)}, \tag{33.13.6}$$

con un único polo en el círculo unitario, además, el polo es de la forma $z = \theta(w)$ *y satisface que*

i) $\tilde{\theta}(1) = 1$,

ii) $\tilde{\theta}^{(1)}(1) = \frac{1}{1-\tilde{\mu}}$,

iii) $\tilde{\theta}^{(2)}(1) = \frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2} + \frac{\tilde{\sigma}}{(1-\tilde{\mu})^3}$.

Finalmente, además se cumple que

$$\mathbb{E}\left[w^T\right] = G(0,w) = F\left[\tilde{\theta}(w)\right]. \tag{33.13.7}$$

Corolario 33.4 *El tiempo de ruina del jugador tiene primer y segundo momento dados por*

$$\mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{1-\tilde{\mu}} \tag{33.13.8}$$

$$Var[T] = \frac{Var\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^3}. \tag{33.13.9}$$

33.14. Procesos de Llegadas a las colas en la RSVC

Se definen los procesos de llegada de los usuarios a cada una de las colas dependiendo de la llegada del servidor pero del sistema al cuál no pertenece la cola en cuestión:
Para el sistema 1 y el servidor del segundo sistema

$$F_{i,j}\left(z_i;\zeta_j\right)=\mathbb{E}\left[z_i^{L_i\left(\zeta_j\right)}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[L_i\left(\zeta_j\right)=k\right]z_i^k,\ para\ i,j=1,2.$$

Para el segundo sistema y el servidor del primero

$$\hat{F}_{i,j}\left(w_i;\tau_j\right)\ =\ \mathbb{E}\left[w_i^{\hat{L}_i\left(\tau_j\right)}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\hat{L}_i\left(\tau_j\right)=k\right]w_i^k,\ para\ i,j=1,2.$$

Ahora, con lo anterior definamos la FGP conjunta para el segundo sistema;

$$\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_j)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_j)}\right]\ =\ \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_j)}\right]\mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2(\tau_j)}\right]=\hat{F}_{1,j}\left(w_1;\tau_j\right)\hat{F}_{2,j}\left(w_2;\tau_j\right)=\hat{F}_j\left(w_1,w_2;\tau_j\right).$$

Con respecto al sistema 1 se tiene la FGP conjunta con respecto al servidor del otro sistema:

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_j)}z_2^{L_2(\zeta_j)}\right]\ =\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_j)}\right]\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\zeta_j)}\right]=F_{1,j}\left(z_1;\zeta_j\right)F_{2,j}\left(z_2;\zeta_j\right)=F_j\left(z_1,z_2;\zeta_j\right).$$

Ahora analicemos la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas, se define la PGF conjunta al tiempo t para los tiempos de visita del servidor en cada una de las colas, para comenzar a dar servicio, definidos anteriormente al tiempo $t=\{\tau_1,\tau_2,\zeta_1,\zeta_2\}$:

$$F_j\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)\ =\ \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{2}z_i^{L_i(\tau_j)}\prod_{i=1}^{2}w_i^{\hat{L}_i(\tau_j)}\right]\tag{33.14.1}$$

$$\hat{F}_j\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)\ =\ \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{2}z_i^{L_i(\zeta_j)}\prod_{i=1}^{2}w_i^{\hat{L}_i(\zeta_j)}\right]\tag{33.14.2}$$

para $j=1,2$. Entonces, con la finalidad de encontrar el número de usuarios presentes en el sistema cuando el servidor termina de atender una de las colas de cualquier sistema se tiene lo siguiente

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]=\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]$$
$$=\ \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)+X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)+Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)+\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)+\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]$$

utilizando la (34.4.1), se tiene que

$$=\ \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]$$
$$=\ \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right\}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]$$

aplicando el hecho de que el número de usuarios que llegan a cada una de las colas del segundo sistema es independiente de las llegadas a las colas del primer sistema:

$$=\ \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]$$

dado que los arribos a cada una de las colas son independientes, podemos separar la esperanza para los procesos de llegada a Q_1 y Q_2 al tiempo τ_1, que es el tiempo en que el servidor visita a Q_1. Recordando que $\tilde{X}_2\left(z_2\right)=X_2\left(z_2\right)+Y_2\left(z_2\right)$ se tiene

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{\tilde{P}_2\left(z_2\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\hat{P}_1\left(w_1\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\hat{P}_2\left(w_2\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right\}^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)^{L_1(\tau_1)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z2\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2;\tau_1\right)\equiv F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2,w_1,w_2\right).
\end{aligned}
$$

Las igualdades anteriores son ciertas pues el número de usuarios que llegan a $\hat{Q}_2$ durante el intervalo $[\tau_1,\overline{\tau}_1]$ aún no han sido atendidos por el servidor del sistema 2 y por tanto aún no pueden pasar al sistema 1 a traves de Q_2. Por tanto el número de usuarios que pasan de $\hat{Q}_2$ a Q_2 en el intervalo de tiempo $[\tau_1,\overline{\tau}_1]$ depende de la política de traslado entre los dos sistemas, conforme a la sección anterior.

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right] &= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2,w_1,w_2\right) && (33.14.3)\\
&= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2;\tau_1\right) && (33.14.4)
\end{aligned}
$$

Utilizando un razonamiento análogo para $\overline{\tau}_2$ y la proposición (33.90) referente al problema de la ruina del jugador obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right]=\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}\left\{P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right\}^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)^{L_2(\tau_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
&= F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2;\tau_2\right)
\end{aligned}
$$

entonces se define

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right] &= F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_1,w_2\right) && (33.14.5)\\
&\equiv F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2;\tau_2\right) && (33.14.6)
\end{aligned}
$$

Para $\overline{\zeta}_1$ obtenemos una expresión similar

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1\left(\overline{\zeta}_1\right)}z_2^{L_2\left(\overline{\zeta}_1\right)}w_1^{\hat{L}_1\left(\overline{\zeta}_1\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\overline{\zeta}_1\right)}\right] &= \hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right) && (33.14.7)\\
&= F_1\left(z_1,z_2;\zeta_1\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right) && (33.14.8)
\end{aligned}
$$

Finalmente para $\overline{\zeta}_2$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1\left(\overline{\zeta}_2\right)}z_2^{L_2\left(\overline{\zeta}_2\right)}w_1^{\hat{L}_1\left(\overline{\zeta}_2\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\overline{\zeta}_2\right)}\right] &= \hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right) && (33.14.9)\\
&= F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right) && (33.14.10)
\end{aligned}
$$

33.15. Ecuaciones Recursivas para la RSVC

Con lo desarrollado hasta ahora podemos encontrar las ecuaciones recursivas que modelan la RSVC:

$$F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1),$$

$$F_1(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2),$$

$$\hat{F}_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = \hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right),$$

$$\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1,w_2) = \hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right),$$

Con la finalidad de facilitar los cálculos para determinar los primeros y segundos momentos de los procesos involucrados en la RSVC, es conveniente utilizar la notación propuesta por Lang [24], es por eso que requerimos definir el operador diferencial D_i, $i=1,2,3,4$, donde D_1f denota la derivad parcial de f con respecto a z_1, D_3f es la derivada parcial de f con respecto a w_1 y D_4f es la derivada parcial de f con respecto a w_2. Otra consideración de gran utilidad es que la expresión expresada, es obtenida como consecuencia de aplicar el operador diferencial y además evaluarla en $z_1=1, z_2=1, w_1=1$ y $w_2=1$. En este sentido, la expresiíon $F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1)$ será representada por su versión simplificada $F_2=R_1F_1\hat{F}_3$. Por otra parte $D_1[R_1F_1]=D_1R_1(F_1)+R_1D_1F_1$, se tomará simplemente como $D_1[R_1F_1]=D_1R_1+D_1F_1$.

33.15.1. Tiempos de Traslado del Servidor

Recordemos que los tiempos de traslado del servidor para cualquiera de las colas del sistema 1 están dados por la expresión:

$$R_i(\mathbf{z},\mathbf{w}) = R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.15.1}$$

entonces, las derivadas parciales con respecto a cada uno de los argumentos z_1,z_2,w_1 y w_2 son de la forma

$$D_iR_i = DR_iD_iP_i \tag{33.15.2}$$

donde se hacen las siguientes convenciones:

$$D_2P_2 \equiv D_2\tilde{P}_2, \quad D_3P_3 \equiv D_3\hat{P}_1, \quad D_4P_4 \equiv D_4\hat{P}_2,$$

33.15.2. Longitudes de la Cola en tiempos del servidor del otro sistema

Recordemos que $F_{1,2}(z_1;\zeta_2)F_{2,2}(z_2;\zeta_2)=F_2(z_1,z_2;\zeta_2)$, entonces

$$D_1F_2(z_1,z_2;\zeta_2) = D_1[F_{1,2}(z_1;\zeta_2)F_{2,2}(z_2;\zeta_2)] = F_{2,2}(z_2;\zeta_2)D_1F_{1,2}(z_1;\zeta_2) = F_{1,2}^{(1)}(1)$$

es decir, $D_1F_2=F_{1,2}^{(1)}(1)$; de manera análoga se puede ver que $D_2F_2=F_{2,2}^{(1)}(1)$, mientras que $D_3F_2=D_4F_2=0$. Es decir, las expresiones resultantes pueden expresarse de manera general como:

$$D_iF_j = \mathbb{1}_{i\leq 2}F_{i,j}^{(1)}(1), \quad y \quad D_i\hat{F}_j = \mathbb{1}_{i\geq 2}F_{i,j}^{(1)}(1)$$

33.15.3. Usuarios presentes en la cola en tiempos del servidor de sus sistema

Recordemos la expresión obtenida para las longitudes de la cola para cada uno de los sistemas considerando que los tiempos del servidor correspondiente al mismo sistema: $F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2\right)$. *Al igual que antes, podemos obtener las expresiones resultantes de aplicar el operador diferencial con respecto a cada uno de los argumentos:*
$D_1F_1 = 0$, $D_2F_1 = D_1F_1D\theta_1D_2\tilde{P}_2 + D_2F_1$, $D_3F_1 = D_1F_1D\theta_1D_3\hat{P}_1 + D_3\hat{F}_1$ *y finalmente* $D_4F_1 = D_1F_1D\theta_1D_4\hat{P}_2 + D_4\hat{F}_1$, *en términos generales:*

$$D_iF_1 = \mathbb{1}_{i\neq 1}D_1F_1D\theta_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=2}D_iF_1, \quad D_iF_2 = \mathbb{1}_{i\neq 2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=1}D_iF_2$$
$$D_i\hat{F}_1 = \mathbb{1}_{i\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=4}D_i\hat{F}_1, \quad D_i\hat{F}_2 = \mathbb{1}_{i\neq 4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=3}D_i\hat{F}_2.$$

$$D_iF_1 = \mathbb{1}_{i\neq 1}D_1F_1D\theta_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=2}D_iF_1, \tag{33.15.3}$$
$$D_iF_2 = \mathbb{1}_{i\neq 2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=1}D_iF_2 \tag{33.15.4}$$
$$D_i\hat{F}_1 = \mathbb{1}_{i\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=4}D_i\hat{F}_1, \tag{33.15.5}$$
$$D_i\hat{F}_2 = \mathbb{1}_{i\neq 4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=3}D_i\hat{F}_2. \tag{33.15.6}$$

33.15.4. Usuarios presentes en la RSVC

Hagamos lo correspondiente para las longitudes de las colas de la RSVC utilizando las expresiones obtenidas en las secciones anteriores, recordemos que

$$\mathbf{F}_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right) = F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2\right)\hat{F}_1(w_1, w_2; \tau_1)$$

entonces

$$\begin{aligned}
D_1\mathbf{F}_1 &= 0\\
D_2\mathbf{F}_1 &= f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2 + f_1(2)\\
D_3\mathbf{F}_1 &= f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{1,1}(1)\\
D_4\mathbf{F}_1 &= f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1)
\end{aligned}$$

para τ_2*:*

$$\mathbf{F}_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), w_1, w_2\right) = F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1, w_2; \tau_2)$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
D_1\mathbf{F}_2 &= f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\mu_1 + f_2(1)\\
D_2\mathbf{F}_2 &= 0\\
D_3\mathbf{F}_2 &= f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1)\\
D_4\mathbf{F}_2 &= f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1)
\end{aligned}$$

Ahora para el segundo sistema

$$\hat{\mathbf{F}}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)=F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)$$

entonces

$$\begin{aligned}
D_1\hat{\mathbf{F}}_1 &= \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1+F_{1,1}^{(1)}(1)\\
D_2\hat{\mathbf{F}}_1 &= \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2+F_{2,1}^{(1)}(1)\\
D_3\hat{\mathbf{F}}_1 &= 0\\
D_4\hat{\mathbf{F}}_1 &= \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2+\hat{f}_1(2)
\end{aligned}$$

Finalmente para ζ_2

$$\hat{\mathbf{F}}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right) = F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right]$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
D_1\hat{\mathbf{F}}_2 &= \hat{f}_2(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1+F_{1,2}^{(1)}(1)\\
D_2\hat{\mathbf{F}}_2 &= \hat{f}_2(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2+F_{2,2}^{(1)}(1)\\
D_3\hat{\mathbf{F}}_2 &= \hat{f}_2(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1+\hat{f}_2(1)\\
D_4\hat{\mathbf{F}}_2 &= 0
\end{aligned}$$

33.15.5. Ecuaciones Recursivas

Entonces, de todo lo desarrollado hasta ahora se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{F}_1=R_2F_2\hat{F}_2, & D_i\mathbf{F}_1=D_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_2\right)\\
\mathbf{F}_2=R_1F_1\hat{F}_1, & D_i\mathbf{F}_2=D_i\left(R_1+F_1+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_1\right)\\
\hat{\mathbf{F}}_1=\hat{R}_2\hat{F}_2F_2, & D_i\hat{\mathbf{F}}_1=D_i\left(\hat{R}_2+\hat{F}_2+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_2\right)\\
\hat{\mathbf{F}}_2=\hat{R}_1\hat{F}_1F_1, & D_i\hat{\mathbf{F}}_2=D_i\left(\hat{R}_1+\hat{F}_1+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_1\right)
\end{array}\tag{33.15.7}$$

cuyas expresiones son de la forma:

$$\begin{array}{ll}
D_1\mathbf{F}_2=r_1\mu_1, & D_2\mathbf{F}_2=r_1\tilde{\mu}_2+f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2+f_1(2),\\
D_3\mathbf{F}_2=r_1\hat{\mu}_1+f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_1+\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1), & D_4\mathbf{F}_2=r_1\hat{\mu}_2+f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_2+\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1),\\
D_1\mathbf{F}_1=r_2\mu_1+f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\mu_1+f_2(1), & D_2\mathbf{F}_1=r_2\tilde{\mu}_2,\\
D_3\mathbf{F}_1=r_2\hat{\mu}_1+f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1+\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1), & D_4\mathbf{F}_1=r_2\hat{\mu}_2+f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_2+\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1),\\
D_1\hat{\mathbf{F}}_2=\hat{r}_1\mu_1+\hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1+F_{1,1}^{(1)}(1), & D_2\hat{\mathbf{F}}_2=\hat{r}_1\mu_2+\hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2+F_{2,1}^{(1)}(1),\\
D_3\hat{\mathbf{F}}_2=\hat{r}_1\hat{\mu}_1, & D_4\hat{\mathbf{F}}_2=\hat{r}_1\hat{\mu}_2+\hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2+\hat{f}_1(2),\\
D_1\hat{\mathbf{F}}_1=\hat{r}_2\mu_1+\hat{f}_2(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1+F_{1,2}^{(1)}(1), & D_2\hat{\mathbf{F}}_1=\hat{r}_2\tilde{\mu}_2+\hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2+F_{2,2}^{(1)}(1),\\
D_3\hat{\mathbf{F}}_1=\hat{r}_2\hat{\mu}_1+\hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1+\hat{f}_2(1), & D_4\hat{\mathbf{F}}_1=\hat{r}_2\hat{\mu}_2
\end{array}$$

de las cuales resulta

$$f_2(1) = r_1\mu_1, \quad f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2, \quad \hat{f}_1(4) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2, \quad \hat{f}_2(3) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1$$

$$\begin{aligned} f_1(1) &= r_2\mu_1 + \mu_1\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + r_1\mu_1 = \mu_1\left(r_1 + r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) = \mu_1\left(r + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right), \\ f_1(3) &= r_2\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_1\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,2}(1) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,2}(1), \end{aligned}$$

utilizando un razonamiento análogo a los anteriores se puede verificar que

$$\begin{aligned} &f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \tfrac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1), \quad f_2(2) = \left(r + \tfrac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2, \\ &f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \tfrac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,1}(1), \quad f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \tfrac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\hat{f}_1(1) = \left(\hat{r}_2 + \tfrac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1 + F^{(1)}_{1,2}(1), \quad \hat{f}_1(2) = \left(\hat{r}_2 + \tfrac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,2}(1), \\ &\hat{f}_1(3) = \left(\hat{r} + \tfrac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1, \quad \hat{f}_2(1) = \left(\hat{r}_1 + \tfrac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1 + F^{(1)}_{1,1}(1), \\ &\hat{f}_2(2) = \left(\hat{r}_1 + \tfrac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,1}(1), \quad \hat{f}_2(4) = \left(\hat{r} + \tfrac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2, \end{aligned}$$

33.15.6. Solución del Sistema de Ecuaciones Lineales

Si $\mu = \mu_1 + \tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2$, $r = r_1 + r_2$ y $\hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$ la solución del sistema de ecuaciones está dada por

$$f_1(1) = \mu_1\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1) = \mu_1\left(r_2 + \frac{r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1) = \mu_1\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1),$$

de manera análoga se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} &f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \tfrac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1), \quad f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \tfrac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1), \\ &f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \tfrac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,1}(1), \quad f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \tfrac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1), \\ &\hat{f}_1(1) = \mu_1\left(\hat{r}_2 + \tfrac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,2}(1), \quad \hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \tfrac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,2}(1), \\ &\hat{f}_2(1) = \mu_1\left(\hat{r}_1 + \tfrac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,1}(1), \quad \hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \tfrac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,1}(1) \end{aligned}$$

33.16. Resultado Principal

Sean $\mu_1, \mu_2, \tilde{\mu}_2, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ y $\tilde{\mu}_2 = \mu_2 + \check{\mu}_2$ los valores esperados de los proceso definidos anteriormente, y sean $r_1, r_2, \hat{r}_1$ y $\hat{r}_2$ los valores esperado s de los tiempos de traslado del servidor entre las colas para cada uno de los sistemas de visitas cíclicas. Si se definen $\mu = \mu_1 + \tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2$, y $r = r_1 + r_2$ y $\hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$, entonces se tiene el siguiente resultado.

Teorema 33.63 *Supongamos que $\mu < 1$, $\hat{\mu} < 1$, entonces, el número de usuarios presentes en cada una de las colas que conforman la RSVC cuando uno de los servidores visita a alguna de ellas está dada por la solución del Sistema de Ecuaciones Lineales presentados arriba cuyas expresiones damos a continuación:*

$$\begin{aligned} &f_1(1) = \mu_1\left(r_2 + \tfrac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1), \quad f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2, \quad f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \tfrac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1), \\ &f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \tfrac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1), \quad f_2(1) = r_1\mu_1, \quad f_2(2) = r\tfrac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}, \\ &f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \tfrac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,1}(1), \quad f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \tfrac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1), \quad \hat{f}_1(1) = \mu_1\left(\hat{r}_2 + \tfrac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,2}(1), \\ &\hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \tfrac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,2}(1), \quad \hat{f}_1(3) = \hat{r}\tfrac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}, \quad \hat{f}_1(4) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2, \\ &\hat{f}_2(1) = \mu_1\left(\hat{r}_1 + \tfrac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,1}(1), \quad \hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \tfrac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,1}(1), \quad \hat{f}_2(3) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1, \\ &\hat{f}_2(4) = \hat{r}\tfrac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}. \end{aligned}$$

33.17. Derivadas de Orden Superior

Si tomamos la derivada de segundo orden con respecto a las ecuaciones dadas en (33.28.7) obtenemos

$$
\begin{aligned}
D_kD_iF_1 &= D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)+D_iR_2D_k\left(F_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)+D_iF_2D_k\left(R_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_4D_k\left(R+F\right.\\
D_kD_iF_2 &= D_kD_i\left(R_1+F_1+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_3\right)+D_iR_1D_k\left(F_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right)+D_iF_1D_k\left(R_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_3D_k\left(R_1+\right.\\
D_kD_i\hat{F}_3 &= D_kD_i\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_2+\hat{F}_4\right)+D_i\hat{R}_4D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2+\hat{F}_4\right)+D_i\hat{F}_4D_k\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_k\left(\hat{R}_4+\right.\\
D_kD_i\hat{F}_4 &= D_kD_i\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{R}_3D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{F}_3D_k\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_k\left(\hat{R}_3+\right.
\end{aligned}
$$

para $i,k=1,\ldots,4$. Es necesario determinar las derivadas de segundo orden para las expresiones de la forma $D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)$

33.17.1. Derivadas de Segundo Orden: Tiempos de Traslado del Servidor

A saber, $R_i\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)=R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)$, la denotaremos por la expresión $R_i=R_i\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right)$, donde al igual que antes, utilizando la notación dada en [24] se tiene que

$$
D_iD_iR_k=D^2R_k\left(D_iP_i\right)^2+DR_kD_iD_iP_i \tag{33.17.1}
$$

mientras que para $i\neq j$

$$
D_iD_jR_k=D^2R_kD_iP_iD_jP_j+DR_kD_jP_jD_iP_i \tag{33.17.2}
$$

33.17.2. Derivadas de Segundo Orden: Longitudes de las Colas

Recordemos la expresión $F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)$, que denotaremos por $F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$, entonces las derivadas parciales mixtas son:

$$
D_iF_1=\mathbb{1}_{i\geq 2}D_iF_1D\theta_1D_iP_i+\mathbb{1}_{i=2}D_iF_1,
$$

entonces para $F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$

$$
D_2F_1=D_1F_1D_1\theta_1D_2\tilde{P}_2\left\{\hat{P}_1\hat{P}_2\right\}+D_2F_1
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_1F_1 &= 0\\
D_2D_1F_1 &= 0\\
D_3D_1F_1 &= 0\\
D_4D_1F_1 &= 0\\
D_1D_2F_1 &= 0\\
D_2D_2F_1 &= D_1D_1F_1D_1\theta_1D_2\tilde{P}_2D_1\theta_1D_2\tilde{P}_2 + D_2D_1F_1D_1\theta_1D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D_1\theta_1D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D_1\theta_1D_2D_2\tilde{P}_2 + D_2D_2F_1\\
&+ D_1D_2F_1D\theta_1D_2\tilde{P}_2\\
D_3D_2F_1 &= D_1D_1F_1D_3\theta_1D_3\hat{P}_1D_2\theta_1D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D_3D_2\theta_1D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D_2\theta_1D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_3D_2F_1D_3\theta_1D_3\hat{P}_1\\
D_4D_2F_1 &= D_1D_1F_1D_4\theta_1D_4\hat{P}_2D_2\theta_1D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D_4D_2\theta_1D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D_2\theta_1D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_4D_2F_1D_4\theta_1D_4\hat{P}_2\\
D_1D_3F_1 &= 0\\
D_2D_3F_1 &= D_1D_1F_1D_2\theta_1D_2\tilde{P}_2D_3\theta_1D_3\hat{P}_1 + D_2D_1F_1D_3\theta_1D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D_2D_3\theta_1D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D_3\theta_1D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2\\
D_3D_3F_1 &= D_1D_1F_1D_3\theta_1D_3\hat{P}_1D_3\theta_1D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D_3D_3\theta_1D_3\hat{P}_1D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D_3\theta_1D_3D_3\hat{P}_1\\
D_4D_3F_1 &= D_1D_1F_1D_4\theta_1D_4\hat{P}_2D_3\theta_1D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D_4D_3\theta_1D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D_3\theta_1D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2\\
D_1D_4F_1 &= 0\\
D_2D_4F_1 &= D_1D_1F_1D_2\theta_1D_2\tilde{P}_2D_4\theta_1D_4\hat{P}_2 + D_2D_1F_1D_4\theta_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D_2D_4\theta_1D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D_4\theta_1D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2\\
D_3D_4F_1 &= D_1D_1F_1D_3\theta_1D_3\hat{P}_1D_4\theta_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D_3D_4\theta_1D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D_4\theta_1D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1\\
D_4D_4F_1 &= D_1D_1F_1D_4\theta_1D_4\hat{P}_2D_4\theta_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D_4D_4\theta_1D_4\hat{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D_4\theta_1D_4D_4\hat{P}_2
\end{aligned}
$$

Para $F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1\hat{P}_1\hat{P}_2\right)\right)$

$$D_iF_2 = \mathbb{1}_{i\neq 2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=1}D_iF_2,$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_1F_2 &= \left(D_2D_2F_2D_1\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_1D_2F_2\right)D_2\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_2F_2D_1D_2\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_2F_2D_2\tilde{\theta}_2D_1D_1P_1 + D_1D_1F_2\\
D_2D_1F_2 &= 0\\
D_3D_1F_2 &= D_2D_1F_2D_3\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_2D_2F_2D_3\tilde{\theta}_2D_3P_1D_2\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_2F_2D_3D_2\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1 + D_2F_2D_2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1\\
D_4D_1F_2 &= D_2D_1F_2D_4\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2 + D_2D_2F_2D_4\tilde{\theta}_2D_4P_2D_4\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_2F_2D_4D_2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1 + D_2F_2D_2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2\\
D_1D_3F_2 &= \left(D_2D_2F_2D_1\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_1D_2F_2\right)D_3\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D_1D_3\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D_3\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1\\
D_2D_3F_3 &= 0\\
D_3D_3F_2 &= D_2D_2F_2D_3\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_3\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D_3D_3\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D_3\tilde{\theta}_2D_3D_3\hat{P}_1\\
D_4D_3F_2 &= D_2D_2F_2D_4\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D_4D_3\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D_3\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2\\
D_1D_4F_2 &= \left(D_2D_2F_2D_4\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_1D_2F_2\right)D_4\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D_1D_4\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D_4\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1\\
D_2D_4F_2 &= 0\\
D_3D_4F_2 &= D_2F_2D_4\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D_3D_4\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D_4\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1\\
D_4D_4F_2 &= D_2F_2D_4\tilde{\theta}_2D_4D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D_4D_4\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D_4\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_4\hat{P}_2
\end{aligned}
$$

para $\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_2\right), w_2\right)$

$$D_i\hat{F}_1 = \mathbb{1}_{i\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=4}D_i\hat{F}_1,$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_1\hat{F}_1 &= D_1\hat{\theta}_1D_1D_1P_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_1P_1D_1D_1\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_1P_1D_1\hat{\theta}_1D_1\hat{\theta}_1D_1D_1\hat{F}_1\\
D_1D_1\hat{F}_1 &= D_1P_1D_2P_1D\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_2P_1DD\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_2P_1D\hat{\theta}_1D\hat{\theta}_1D_1D_1\hat{\theta}_1\\
D_3D_1\hat{F}_1 &= 0\\
D_4D_1\hat{F}_1 &= D_1P_1D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1D_4\hat{P}_2DD\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1D\hat{\theta}_1\left(D_2D1\hat{F}_1 + D_4P_2D\hat{\theta}_1D_1D_1\hat{F}_1\right)\\
D_1D_2\hat{F}_1 &= D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_2P_2DD\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_1D\hat{\theta}_1D_1D_1\hat{F}_1\\
D_2D_2\hat{F}_1 &= D\hat{\theta}_1D_2D_2P_2D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D_2P_2DD\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D_2P_2D\hat{\theta}_1D\hat{\theta}_1D_1D_1\hat{F}_1\\
D_3D_2\hat{F}_1 &= 0\\
D_4D_2\hat{F}_1 &= D_2P_2D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D\hat{F}_1 + D_2P_2D_4\hat{P}_2DD\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D\hat{\theta}_1\left(D_2D_1\hat{F}_1 + D_2\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_1D_1\hat{F}_1\right)\\
D_1D_3\hat{F}_1 &= 0\\
D_2D_3\hat{F}_1 &= 0\\
D_3D_3\hat{F}_1 &= 0\\
D_4D_3\hat{F}_1 &= 0\\
D_1D_4\hat{F}_1 &= D_1P_1D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_4\hat{P}_2DD\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D\hat{\theta}_1D_2D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D\hat{\theta}_1D_1D_1\hat{F}_1\\
D_2D_4\hat{F}_1 &= D_2P_2D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D_4\hat{P}_2DD\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D\hat{\theta}_1D_2D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D\hat{\theta}_1D_1D_1\hat{F}_1\\
D_3D_4\hat{F}_1 &= 0\\
D_4D_4\hat{F}_1 &= D_2D_2\hat{F}_1 + D\hat{\theta}_1D_4D_4\hat{F}_2 + D_1\hat{F}_1 + D_4\hat{P}_2D_4\hat{P}_2DD\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_2D_1\hat{F}_1\\
&+ D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1\left(D_2D_1\hat{F}_1 + D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_1D_1\hat{F}_1\right)
\end{aligned}
$$

finalmente, para $\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_1\right)\right)$

$$D_i\hat{F}_2 = \mathbb{1}_{i\neq 4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=3}D_i\hat{F}_2,$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_1\hat{F}_2 &= D_1\hat{\theta}_2D_2D_2P_1D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D_1P_1D_1D_1\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D_1P_1D_1\hat{\theta}_2D_1\hat{\theta}_2D_1D_1\hat{F}_2\\
D_2D_1\hat{F}_2 &= D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D_2P_2DD\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_2D\hat{\theta}_2D_2D_2\hat{\theta}_2\\
D_3D_1\hat{F}_2 &= D_1P_1D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D_3\hat{P}_1DD\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D\hat{\theta}_2\left(D_2D1\hat{F}_2 + D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2D_2\hat{F}_2\right)\\
D_4D_1\hat{F}_2 &= 0\\
D_1D_2\hat{F}_2 &= D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D_2P_2DD\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_2D\hat{\theta}_2D_2D_2\hat{F}_2\\
D_2D_2\hat{F}_2 &= DD\hat{\theta}_2D_2D_2P_2D_2\hat{F}_2 + D_2P_2D_2P_2DD\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_2P_2D_2P_2D\hat{\theta}_2D\hat{\theta}_2D_2D_2\hat{F}_2\\
D_3D_2\hat{F}_2 &= D_2P_2D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_2P_2D_3\hat{P}_1DD\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_2P_2D\hat{\theta}_2\left(D_2D_1\hat{F}_2 + D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2D_2\hat{F}_2\right)\\
D_4D_2\hat{F}_2 &= 0\\
D_1D_3\hat{F}_2 &= D_1P_1D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D_3\hat{P}_1DD\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D\hat{\theta}_2D\hat{\theta}_2D_2D_2\hat{F}_2 + D_1P_1D\hat{\theta}_1D_2D_1\hat{F}_2\\
D_2D_3\hat{F}_2 &= D_2P_2D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_2P_2D_3\hat{P}_1DD\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_2P_2D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2D_2\hat{F}_2 + D_2P_2D\hat{\theta}_2D\hat{\theta}_2D_1D_2\hat{F}_2\\
D_4D_3\hat{F}_2 &= D_3D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_3\hat{P}_1D_3\hat{P}_1DD\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2 + D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_1D_2\hat{F}_2 + D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2\Big(D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2D_2\hat{F}_2 + D_1D_2\\
D_4D_3\hat{F}_2 &= 0\\
D_1D_4\hat{F}_2 &= 0\\
D_2D_4\hat{F}_2 &= 0\\
D_3D_4\hat{F}_2 &= 0\\
D_4D_4\hat{F}_2 &= 0
\end{aligned}
$$

33.18. Aplicaciones

33.18.1. Ejemplo 1: Automatización en dos líneas de trabajo

Consideremos dos líneas de producción atendidas cada una de ellas por un robot, en las que en una de ellas un robot realiza la misma actividad en dos estaciones distintas, una vez que termina de realizar una actividad en una de las colas, se desplaza a la siguiente para hacer lo correspondientes con los materiales presentes en la estación. Una vez que las piezas son liberadas por el robot se desplazan al otro sistema en donde son objeto del terminado de la pieza para su almacenamiento. En este caso el sistema 1 consta de una sola cola de tipo $M/M/1$ *y el sistema 2 es un sistema de visitas cíclicas conformado por dos colas idénticas, donde al igual que antes, el traslado de un sistema a otro se realiza de la cola* $\hat{Q}_2$ *a la única cola* Q_1 *del sistema 1.*

El número de usuarios presentes en el sistema 1 se sigue modelando conforme a un SVC, mientras que para es sistema 1, Q_1 *se comporta como una Red de Jackson, una red conformada por* $\hat{Q}_2$ *y* Q_1*, donde el número de usuarios que llegan a* Q_1 *lo hacen de acuerdo a su propio proceso de arribos más los que provienen del sistema 2, los tiempos entre arribos de los usuarios procedentes del sistema 2, lo hacen conforme a una distribución exponencial.*

Las ecuaciones recursivas son

$$
\begin{aligned}
F_1(z_1,w_1,w_2) &= R\left(\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2\left(\tilde{\theta}_2\left(\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2),\\
\hat{F}_1(z_1,w_1,w_2) &= \hat{R}_2\left(\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2(z_1;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right),\\
\hat{F}_2(z_1,w_1,w_2) &= \hat{R}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1(z_1;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right),
\end{aligned}
$$

33.18.2. Ejemplo 2: Sistema de Salud Pública

Consideremos un hospital en el área de urgencias, donde hay una ventanilla a la cuál van llegando todos los posibles pacientes para su valoración, después de la cual pueden o ser canalizados a un área de atención que requiera de atención sin llegar a ser urgencia, o puede abandonar el sistema dependiendo de la valoración hecha por el médico en turno. Por otra parte, hay una sección del hospital en la que son atendidas las personas sin necesidad de pasar por la ventanilla de valoración, es decir, son atenciones de urgencia. Las personas que después de la valoración son turnadas al área de atención deben de esperar su turno pues a esta sección también llegan pacientes provenientes de otras áreas del hospital. Para este caso, el sistema 1 está conformado por una única cola Q_1 *que podemos asumir sin pérdida de generalidad que es de tipo* $M/M/1$*, mientras que el sistema 2 es un SVC como los hasta ahora estudiados. Es decir, en este caso en particular el servidor del sistema 1 da servicio de manera ininterrumpida en* Q_1 *en tanto no se vacíe la cola.*

Las ecuaciones recursivas son de la forma

$$
\begin{aligned}
F_1(z_1,z_2,w_1) &= R_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)\hat{F}_2(w_1;\tau_2),\\
F_2(z_1,z_2,w_1) &= R_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)F_1\left(\theta_1\left(\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1;\tau_1),\\
\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1) &= \hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right),
\end{aligned}
$$

33.18.3. Ejemplo 3: RSVC con dos conexiones

Al igual que antes consideremos una RSVC conformada por dos SVC que se comunican entre sí en $\hat{Q}_2$ y Q_2, permitiendo el paso de los usuarios del sistema 2 hacia el sistema 1. Ahora supongamos que también se permite el paso en $\hat{Q}_1$ hacia Q_1.
Cuyas ecuaciones recursivas son de la forma

$$F_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = R_2\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2;\tau_2\right),$$

$$F_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = R_1\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2;\tau_1\right),$$

$$\hat{F}_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = \hat{R}_2\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right),$$

$$\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = \hat{R}_1\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_1\left(z_1,z_2;\zeta_1\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right),$$

Queue lengths for server times in the System

Now, we obtain the first moments equations for the queue lengths as before for the times the server arrives to the queue to start attending
Remember that

$$F_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = R_1\left(\prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i\left(z_i\right)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\tilde{P}_3\left(z_3\right)\tilde{P}_4\left(z_4\right)\right),z_2\right)F_3\left(z_3,z_4;\tau_1\right),$$

where

$$F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\tilde{P}_3\tilde{P}_4\right),z_2\right)$$

so

$$D_iF_1 = \mathbb{1}_{i\neq 1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_i\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i=2}D_iF_1, \tag{33.18.1}$$

then

$$D_1F_1=0, \qquad D_2F_1=D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2+D_2F_1=f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{\mu}_2+f_1\left(2\right),$$
$$D_3F_1=D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3\tilde{P}_3=f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{\mu}_3, \qquad D_4F_1=D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4\tilde{P}_4=f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{\mu}_4$$

$$D_iF_2 = \mathbb{1}_{i\neq 2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_i\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i=1}D_iF_2 \tag{33.18.2}$$

$$D_1F_2=D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1\tilde{P}_1+D_1F_2=f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_1, \qquad D_2F_2=0$$
$$D_3F_2=D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3\tilde{P}_3=f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_3, \qquad D_4F_2=D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\tilde{P}_4=f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_4$$

$$D_iF_3 = \mathbb{1}_{i\neq 3}D_3F_3D\hat{\theta}_1D_i\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i=4}D_iF_3, \tag{33.18.3}$$

$D_1F_3 = D_3F_3D\tilde{\theta}_3D_1\tilde{P}_1 = F_3\left(3\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\tilde{\mu}_1,\quad D_2F_3 = D_3F_3D\tilde{\theta}_3D_2\tilde{P}_2 = F_3\left(3\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\tilde{\mu}_2$
$D_3F_3 = 0,\quad D_4F_3 = D_3F_3D\tilde{\theta}_3D_4\tilde{P}_4 + D_4F_3 = F_3\left(3\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\tilde{\mu}_4 + F_3\left(2\right),$

$$D_iF_4 = \mathbb{1}_{i\neq 4}D_4F_4D\tilde{\theta}_4D_i\tilde{P}_i + \mathbb{1}_{i=3}D_iF_4. \tag{33.18.4}$$

$D_1F_4 = D_4F_4D\tilde{\theta}_4D_1\tilde{P}_1 = F_4\left(4\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\tilde{\mu}_1,\quad D_2F_4 = D_4F_4D\tilde{\theta}_4D_2\tilde{P}_2 = F_4\left(4\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\tilde{\mu}_2,$
$D_3F_4 = D_4F_4D\tilde{\theta}_4D_3\tilde{P}_3 + D_3F_4 = F_4\left(4\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\tilde{\mu}_3 + F_4\left(4\right)$
$D_4F_4 = 0$

Recursive Equations for the Cyclic Polling System

Then, now we can obtain the linear system of equations in order to obtain the first moments of the lengths of the queues:
For $\mathbf{F}_1 = R_2F_2F_4$ *we get the general equations*

$$D_i\mathbf{F}_1 = D_i\left(R_2 + F_2 + \mathbb{1}_{i\geq 3}F_4\right) \tag{33.18.5}$$

So

$$\begin{aligned}
D_1\mathbf{F}_1 &= D_1R_2 + D_1F_2 = r_1\tilde{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_1\\
D_2\mathbf{F}_1 &= D_2\left(R_2 + F_2\right) = r_2\tilde{\mu}_1\\
D_3\mathbf{F}_1 &= D_3\left(R_2 + F_2 + F_4\right) = r_1\tilde{\mu}_3 + f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_3 + F_{3,2}^{(1)}\left(1\right)\\
D_4\mathbf{F}_1 &= D_4\left(R_2 + F_2 + F_4\right) = r_2\tilde{\mu}_4 + f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_4 + F_{4,2}^{(1)}\left(1\right)
\end{aligned}$$

it means

$D_1\mathbf{F}_1 = r_2\tilde{\mu}_3 + f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + f_2\left(1\right),\quad D_2\mathbf{F}_1 = r_2\tilde{\mu}_2,$
$D_3\mathbf{F}_1 = r_2\tilde{\mu}_3 + f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_3 + F_{3,2}^{(1)}\left(1\right),\quad D_4\mathbf{F}_1 = r_2\tilde{\mu}_4 + f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_4 + F_{4,2}^{(1)}\left(1\right),$

$$\mathbf{F}_2 = R_1F_1F_3,\quad D_i\mathbf{F}_2 = D_i\left(R_1 + F_1 + \mathbb{1}_{i\geq 3}F_3\right) \tag{33.18.6}$$

equivalently

$D_1\mathbf{F}_2 = r_1\tilde{\mu}_1,\quad D_2\mathbf{F}_2 = r_1\tilde{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + f_1\left(2\right),$
$D_3\mathbf{F}_2 = r_1\tilde{\mu}_3 + f_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_3 + F_{3,1}^{(1)}\left(1\right),\quad D_4\mathbf{F}_2 = r_1\tilde{\mu}_4 + f_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_4 + F_{4,,1}^{(1)}\left(1\right),$

$$\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{R}_2F_4F_2,\quad D_i\hat{\mathbf{F}}_1 = D_i\left(\hat{R}_2 + F_4 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_2\right) \tag{33.18.7}$$

equivalently

$D_1\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\tilde{\mu}_1 + F_4\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)\tilde{\mu}_1 + F_{1,4}^{(1)}\left(1\right),\quad D_2\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\tilde{\mu}_2 + F_4\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)\tilde{\mu}_2 + F_{2,4}^{(1)}\left(1\right),$
$D_3\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\tilde{\mu}_3 + F_4\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)\tilde{\mu}_3 + F_4\left(1\right),\quad D_4\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\tilde{\mu}_4$

$$\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{R}_1F_3F_1,\quad D_i\hat{\mathbf{F}}_2 = D_i\left(\hat{R}_1 + F_3 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_1\right) \tag{33.18.8}$$

equivalently

$$
\begin{array}{ll}
D_1\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\tilde{\mu}_1 + F_3\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)\tilde{\mu}_1 + F_{1,3}^{(1)}\left(1\right), & D_2\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\mu_2 + F_3\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)\tilde{\mu}_2 + F_{2,3}^{(1)}\left(1\right), \\
D_3\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\tilde{\mu}_3, & D_4\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\tilde{\mu}_4 + F_3\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)\tilde{\mu}_4 + F_3\left(2\right),
\end{array}
$$

Then we have that if $\mu = \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu} = \tilde{\mu}_3 + \tilde{\mu}_4$, $r = r_1 + r_2$ *and* $\hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$ *the system's solution is given by*

$$
f_2\left(1\right) = r_1\tilde{\mu}_1, \quad f_1\left(2\right) = r_2\tilde{\mu}_2, \quad F_3\left(4\right) = \hat{r}_2\tilde{\mu}_4, \quad F_4\left(3\right) = \hat{r}_1\tilde{\mu}_3
$$

it's easy to verify that

$$
\begin{array}{ll}
f_1\left(1\right) = \tilde{\mu}_1\left(r + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right), & f_1\left(3\right) = \tilde{\mu}_3\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + F_{3,2}^{(1)}\left(1\right) \\
f_1\left(4\right) = \tilde{\mu}_4\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + F_{4,2}^{(1)}\left(1\right), & f_2\left(2\right) = \left(r + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2, \\
f_2\left(3\right) = \tilde{\mu}_3\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\tilde{\mu}_1}\right) + F_{3,1}^{(1)}\left(1\right), & f_2\left(4\right) = \tilde{\mu}_4\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + F_{4,,1}^{(1)}\left(1\right), \\
F_3\left(1\right) = \left(\hat{r}_2 + \frac{F_4(4)}{1-\tilde{\mu}_4}\right)\tilde{\mu}_1 + F_{1,4}^{(1)}\left(1\right), & F_3\left(2\right) = \left(\hat{r}_2 + \frac{F_4(4)}{1-\tilde{\mu}_4}\right)\tilde{\mu}_2 + F_{2,4}^{(1)}\left(1\right), \\
F_3\left(3\right) = \left(\hat{r} + \frac{F_4(4)}{1-\tilde{\mu}_4}\right)\tilde{\mu}_3, & F_4\left(1\right) = \left(\hat{r}_1 + \frac{F_3(3)}{1-\tilde{\mu}_3}\right)\mu_1 + F_{1,3}^{(1)}\left(1\right), \\
F_4\left(2\right) = \left(\hat{r}_1 + \frac{F_3(3)}{1-\tilde{\mu}_3}\right)\tilde{\mu}_2 + F_{2,3}^{(1)}\left(1\right), & F_4\left(4\right) = \left(\hat{r} + \frac{F_3(3)}{1-\tilde{\mu}_3}\right)\tilde{\mu}_4,
\end{array}
\tag{33.18.9}
$$

with system's solutions given by

$$
\begin{array}{ll}
f_1\left(1\right) = r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}, & f_2\left(2\right) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}, \\
f_1\left(3\right) = \tilde{\mu}_3\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + F_{3,2}^{(1)}\left(1\right), & f_1\left(4\right) = \tilde{\mu}_4\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + F_{4,2}^{(1)}\left(1\right), \\
f_2\left(3\right) = \tilde{\mu}_3\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + F_{3,1}^{(1)}\left(1\right), & f_2\left(4\right) = \tilde{\mu}_4\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + F_{4,,1}^{(1)}\left(1\right), \\
F_3\left(1\right) = \tilde{\mu}_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\tilde{\mu}_4}{1-\hat{\mu}}\right) + F_{1,4}^{(1)}\left(1\right), & F_3\left(2\right) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\tilde{\mu}_4}{1-\hat{\mu}}\right) + F_{2,4}^{(1)}\left(1\right), \\
F_4\left(1\right) = \tilde{\mu}_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\tilde{\mu}_3}{1-\hat{\mu}}\right) + F_{1,3}^{(1)}\left(1\right), & F_4\left(2\right) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\tilde{\mu}_3}{1-\hat{\mu}}\right) + F_{2,3}^{(1)}\left(1\right)
\end{array}
\tag{33.18.10}
$$

33.18.4. General Second Order Derivatives

Now, taking the second order derivative with respect to the equations given in (33.26.20) we obtain it in their general form

$$
\begin{array}{rcl}
D_kD_iF_1 & = & D_kD_i\left(R_2 + F_2 + 1\!\!1_{i\geq 3}F_4\right) + D_iR_2D_k\left(F_2 + 1\!\!1_{k\geq 3}F_4\right) + D_iF_2D_k\left(R_2 + 1\!\!1_{k\geq 3}F_4\right) + 1\!\!1_{i\geq 3}D_i\hat{F}_4D_k\left(R_2 + F_2\right) \\
D_kD_iF_2 & = & D_kD_i\left(R_1 + F_1 + 1\!\!1_{i\geq 3}F_3\right) + D_iR_1D_k\left(F_1 + 1\!\!1_{k\geq 3}F_3\right) + D_iF_1D_k\left(R_1 + 1\!\!1_{k\geq 3}F_3\right) + 1\!\!1_{i\geq 3}D_i\hat{F}_3D_k\left(R_1 + F_1\right) \\
D_kD_iF_3 & = & D_kD_i\left(\hat{R}_4 + 1\!\!1_{i\leq 2}F_2 + F_4\right) + D_i\hat{R}_4D_k\left(1\!\!1_{k\leq 2}F_2 + F_4\right) + D_i\hat{F}_4D_k\left(\hat{R}_4 + 1\!\!1_{k\leq 2}F_2\right) + 1\!\!1_{i\leq 2}D_iF_2D_k\left(\hat{R}_4 + \right. \\
D_kD_iF_4 & = & D_kD_i\left(\hat{R}_3 + 1\!\!1_{i\leq 2}F_1 + F_3\right) + D_i\hat{R}_3D_k\left(1\!\!1_{k\leq 2}F_1 + F_3\right) + D_i\hat{F}_3D_k\left(\hat{R}_3 + 1\!\!1_{k\leq 2}F_1\right) + 1\!\!1_{i\leq 2}D_iF_1D_k\left(\hat{R}_3 + \right.
\end{array}
$$

for $i, k = 1, \ldots, 4$. *In order to have it in an specific way we need to compute the expressions* $D_kD_i\left(R_2 + F_2 + 1\!\!1_{i\geq 3}F_4\right)$

Second Order Derivatives: Serve's Switchover Times

Remind $R_i\left(z_1, z_2, w_1, w_2\right) = R_i\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\tilde{P}_3\left(w_1\right)\tilde{P}_4\left(w_2\right)\right)$, *which we will write in his reduced form* $R_i = R_i\left(\tilde{P}_1\tilde{P}_2\tilde{P}_3\tilde{P}_4\right)$, *and according to the notation given in [24] we obtain*

$$
D_iD_iR_k = D^2R_k\left(D_i\tilde{P}_i\right)^2 + DR_kD_iD_i\tilde{P}_i \tag{33.18.11}
$$

whereas for $i \neq j$

$$
D_iD_jR_k = D^2R_kD_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j + DR_kD_j\tilde{P}_jD_i\tilde{P}_i \tag{33.18.12}
$$

Second Order Derivatives: Queue Lengths

Just like before the expression $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\tilde{P}_3\left(w_1\right)\tilde{P}_4\left(w_2\right)\right),z_2\right)$*, will be denoted by* $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\tilde{P}_3\tilde{P}_4\right),z_2\right)$*, then the mixed partial derivatives are:*

$$\begin{aligned}D_jD_iF_1 &= \mathbb{1}_{i,j\neq1}D_1D_1F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq1}D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i\neq j}D_i\tilde{P}\right.\\&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq6}D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i>j}D_i\tilde{P}_i\right)+\mathbb{1}_{i=2}\left(D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_i\tilde{P}_i+D_i^2F_1\right)\end{aligned}$$

Recall the expression for $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\tilde{P}_3\left(w_1\right)\tilde{P}_4\left(w_2\right)\right),z_2\right)$*, which is denoted by* $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\tilde{P}_3\tilde{P}_4\right),z_2\right)$*, then the mixed partial derivatives are given by*

$$\begin{array}{llll}D_1D_1F_1=0, & D_2D_1F_1=0, & D_3D_1F_1=0, & D_4D_1F_1=0,\\ D_1D_2F_1=0, & D_1D_3F_1=0, & D_1D_4F_1=0, & \end{array}$$

$$\begin{aligned}D_2D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_2\tilde{P}_2\right)^2+D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_2\tilde{P}_2\right)^2+D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2^2\tilde{P}_2+D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2\\&+ D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2+D_2D_2F_1\\&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2+f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(}2)\tilde{\mu}_2^{(2)}+f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}+f_1\left(1,2\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1\left(1,2\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1\left(2,2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_3D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_3\tilde{P}_3D_2\tilde{P}_2+D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_3\tilde{P}_3D_2\tilde{P}_2+D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_3\tilde{P}_3+D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_3\tilde{P}_3\\&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3+f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3+f_1\left(1\right)\frac{\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1\left(1,2\right)\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_4D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_4\tilde{P}_4D_2\tilde{P}_2+D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_4\tilde{P}_4D_2\tilde{P}_2+D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_4\tilde{P}_4+D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_4\tilde{P}_4\\&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4+f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4+f_1\left(1\right)\frac{\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1\left(1,2\right)\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_2D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_2\tilde{P}_2D_3\tilde{P}_3+D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_3\tilde{P}_3+D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3\tilde{P}_3D_2\tilde{P}_2+D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_3\tilde{P}_3\\&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3+f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3+f_1\left(1\right)\frac{\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1\left(1,2\right)\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_3D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_3\tilde{P}_3\right)^2+D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_3\tilde{P}_3\right)^2+D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3^2\tilde{P}_3\\&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2+f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_3^2+f_1\left(1\right)\frac{\tilde{\mu}_3^2}{1-\tilde{\mu}_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_4D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_4\tilde{P}_4D_3\tilde{P}_3+D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_4\tilde{P}_4D_3\tilde{P}_3+D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3\tilde{P}_3D_4\tilde{P}_4\\&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4+f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^2\tilde{\mu}_4\tilde{\mu}_3+f_1\left(1\right)\frac{\tilde{\mu}_4\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_2D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_2\tilde{P}_2D_4\tilde{P}_4+D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_4\tilde{P}_4+D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4\tilde{P}_4D_2\tilde{P}_2+D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_4\tilde{P}_4\\&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_4\tilde{\mu}_2+f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_4\tilde{\mu}_2+f_1\left(1\right)\frac{\tilde{\mu}_4\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1\left(1,2\right)\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_3\tilde{P}_3D_4\tilde{P}_4 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_3\tilde{P}_3D_4\tilde{P}_4 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4\tilde{P}_4D_3\tilde{P}_3\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4 + f_1\left(1\right)\frac{\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_4\tilde{P}_4\right)^2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_4\tilde{P}_4\right)^2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4^2\tilde{P}_4\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_4^2 + f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{P}_4^{(2)}
\end{aligned}$$

Meanwhile for $F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(\tilde{P}_1\tilde{P}_3\tilde{P}_4\right)\right)$

$$\begin{aligned}
D_jD_iF_2 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2D_2F_2\left(D\theta_2\right)^2D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2F_2D^2\theta_2D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2F_2D\theta_2\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2\tilde{P}_i + \mathbb{1}_{i\neq j}D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j\right)\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq 6}D_2D_1F_2D\theta_2\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_j\tilde{P}_j + \mathbb{1}_{i>j}D_i\tilde{P}_i\right) + \mathbb{1}_{i=1}\left(D_2D_1F_2D\theta_2D_i\tilde{P}_i + D_i^2F_2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll}
D_2D_1F_2 = 0, & D_2D_3F_3 = 0, & D_2D_4F_2 = 0, & \\
D_1D_2F_2 = 0, & D_2D_2F_2 = 0, & D_3D_2F_2 = 0, & D_4D_2F_2 = 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
D_1D_1F_2 &= \left(D_1\tilde{P}_1\right)^2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_2^2F_2 + \left(D_1\tilde{P}_1\right)^2D^2\tilde{\theta}_2D_2F_2 + D_1^2\tilde{P}_1D\tilde{\theta}_2D_2F_2 + D_1\tilde{P}_1D\tilde{\theta}_2D_2D_1F_2\\
&+ D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_1\tilde{P}_1 + D_1^2F_2\\
&= f_2\left(2\right)\frac{\tilde{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2\right)\theta_2^{(2)}\tilde{\mu}_1^2 + f_2\left(2,1\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} + \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2f_2\left(2,2\right) + \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(2,1\right) + f_2\left(1,1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_1F_2 &= D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_3\tilde{P}_3 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_3\tilde{P}_1D_1\tilde{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_3\tilde{P}_3D_1\tilde{P}_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1\tilde{P}_1D_3\tilde{P}_3\\
&= f_2\left(2,1\right)\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_1F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_4\tilde{P}_2D_1\tilde{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\tilde{P}_4D_1\tilde{P}_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1\tilde{P}_1D_4\tilde{P}_4 + D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_4\tilde{P}_4\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2,1\right)\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_1\tilde{P}_1D_3\tilde{P}_3 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_1\tilde{P}_1D_3\tilde{P}_3 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3\tilde{P}_3D_1\tilde{P}_1 + D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_3\tilde{P}_3\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2,1\right)\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_3\tilde{P}_3\right)^2 + D_2F_2\left(D_3\tilde{P}_3\right)^2D^2\tilde{\theta}_2 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3^2\tilde{P}_3\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_3^2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_3^2 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{P}_3^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_4\tilde{P}_4D_3\tilde{P}_3 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\tilde{P}_4D_3\tilde{P}_3 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3\tilde{P}_3D_4\tilde{P}_4\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_1D_4F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_1\tilde{P}_1D_4\tilde{P}_4 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_1\tilde{P}_1D_4\tilde{P}_4 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\tilde{P}_4D_1\tilde{P}_1 + D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_4\tilde{P}_4\\ &= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2,1\right)\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_3D_4F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_4\tilde{P}_4D_3\tilde{P}_3 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\tilde{P}_4D_3\tilde{P}_3 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\tilde{P}_4D_3\tilde{P}_3\\ &= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_4D_4F_2 &= D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4^2\tilde{P}_4 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2\left(D_4\tilde{P}_4\right)^2 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_4\tilde{P}_4\right)^2\\ &= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_4^2 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{P}_4^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}\end{aligned}$$

For $F_3\left(\hat{\theta}_1\left(\tilde{P}_1\tilde{P}_2\tilde{P}_4\right),w_2\right)$

$$\begin{aligned}D_jD_iF_3 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3D_3F_3\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3F_3D^2\tilde{\theta}_1D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3F_3D\tilde{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2\tilde{P}_i + \mathbb{1}_{i\neq j}D_i\tilde{P}\right.\\ &+ \mathbb{1}_{i+j\geq 5}D_3D_4F_3D\tilde{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_i\tilde{P}_i + \mathbb{1}_{i>j}D_j\tilde{P}_j\right) + \mathbb{1}_{i=4}\left(D_3D_4F_3D\tilde{\theta}_1D_i\tilde{P}_i + D_i^2F_3\right)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll}D_3D_1F_3=0, & D_3D_2F_3=0, & D_1D_3F_3=0, & D_2D_3F_3=0\\ D_3D_3F_3=0, & D_4D_3F_3=0, & D_3D_4F_3=0, & \end{array}$$

$$\begin{aligned}D_1D_1F_3 &= D_3^2F_3\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_1\tilde{P}_1\right)^2 + D_3F_3D^2\tilde{\theta}_1\left(D_1\tilde{P}_1\right)^2 + D_3F_3D\tilde{\theta}_1D_1^2\tilde{P}_1\\ &= F_3\left(3,3\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2 + F_3\left(3\right)\frac{\tilde{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_3} + F_3\left(3\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_2D_1F_3 &= D_3^2F_3\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_1\tilde{P}_1D_2\tilde{P}_1 + D_3F_3D^2\tilde{\theta}_1D_1\tilde{P}_1D_2\tilde{P}_2 + D_3F_3D\tilde{\theta}_1D_1\tilde{P}_1D_2\tilde{P}_2\\ &= F_3\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + F_3\left(3\right)\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\tilde{\theta}_1^{(2)} + F_3\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_4D_1F_3 &= D_3D_3F_3\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_4\tilde{P}_4D_1\tilde{P}_1 + D_3F_3D^2\tilde{\theta}_1D_1\tilde{P}_1D_4\tilde{P}_4 + D_3F_3D\tilde{\theta}_1D_1\tilde{P}_1D_4\tilde{P}_4 + D_3D_4F_3D\tilde{\theta}_1D_1\tilde{P}_1\\ &= F_3\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3 + F_3\left(3\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4 + F_3\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_3} + F_3\left(3,4\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_1D_2F_3 &= D_3^2F_3\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_1\tilde{P}_1D_2\tilde{P}_2 + D_3F_3D^2\tilde{\theta}_1D_1\tilde{P}_1D_2\tilde{P}_2 + D_3F_3D\tilde{\theta}_1D_1\tilde{P}_1D_2\tilde{P}_2\\ &= F_3\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + F_3\left(3\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + F_3\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_2D_2F_3 &= D_3^2F_3\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_2\tilde{P}_2\right)^2 + D_3F_3D^2\tilde{\theta}_1\left(D_2\tilde{P}_2\right)^2 + D_3F_3D\tilde{\theta}_1D_2^2\tilde{P}_2\\ &= F_3\left(3,3\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2 + F_3\left(3\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2^2 + F_3\left(3\right)\tilde{P}_2^{(2)}\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_2F_3 &= D_3^2F_3\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_4\tilde{P}_4D_2\tilde{P}_2 + D_3F_3D^2\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_4\tilde{P}_4 + D_3F_3D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_4\tilde{P}_4 + D_3D_4F_3D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2\\
&= F_3\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 + F_3\left(3\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 + F_3\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_3} + F_3\left(3,4\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_4F_3 &= D_3D_3F_3\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_1\tilde{P}_1D_4\tilde{P}_4 + D_3F_3D^2\tilde{\theta}_1D_1\tilde{P}_1D_4\tilde{P}_4 + D_3F_3D\tilde{\theta}_1D_1\tilde{P}_1D_4\tilde{P}_4 + D_3D_4F_3D\tilde{\theta}_1D_1\tilde{P}_1\\
&= F_3\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4 + F_3\left(3\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4 + F_3\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_3} + F_3\left(3,4\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2D_4F_3 &= D_3^2F_3\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_2\tilde{P}_2D_4\tilde{P}_4 + D_3F_3D^2\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_4\tilde{P}_4 + D_3F_3D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_4\tilde{P}_4 + D_3D_4F_3D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2\\
&= F_3\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 + F_3\left(3\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 + F_3\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_3} + F_3\left(3,4\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_4F_3 &= D_3^2F_3\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_4\tilde{P}_4\right)^2 + D_3F_3D^2\tilde{\theta}_1\left(D_4\tilde{P}_4\right)^2 + D_3F_3D\tilde{\theta}_1D_4^2\tilde{P}_4 + D_3D_4F_3D\tilde{\theta}_1D_4\tilde{P}_4\\
&+ D_3D_4F_3D\tilde{\theta}_1D_4\tilde{P}_4 + D_4D_4F_3\\
&= F_3\left(3,3\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2 + F_3\left(3\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_4^2 + F_3\left(3\right)\frac{\tilde{P}_4^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_3} + F_3\left(3,4\right)\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_3} + F_3\left(3,4\right)\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_3} + F_3\left(4,4\right)
\end{aligned}
$$

Finally for $F_4\left(w_1,\tilde{\theta}_2\left(\tilde{P}_1\tilde{P}_2\tilde{P}_3\right)\right)$

$$
\begin{aligned}
D_jD_iF_4 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 4}D_4D_4F_4\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 4}D_4F_4D^2\tilde{\theta}_2D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 4}D_4F_4D\tilde{\theta}_2\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2\tilde{P}_i + \mathbb{1}_{i\neq j}D_i\tilde{P}\right.\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=2}\right)\mathbb{1}_{i+j\geq 4}D_4D_3F_4D\tilde{\theta}_2\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_i\tilde{P}_i + \mathbb{1}_{i>j}D_j\tilde{P}_j\right) + \mathbb{1}_{i=3}\left(D_4D_3F_4D\tilde{\theta}_2D_i\tilde{P}_i + D_i^2F_4\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llll}
D_4D_1F_4=0, & D_4D_2F_4=0, & D_4D_3F_4=0, & D_1D_4F_4=0\\
D_2D_4F_4=0, & D_3D_4F_4=0, & D_4D_4F_4=0, &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_1F_4 &= D_4^2F_4\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_1\tilde{P}_1\right)^2 + D_4F_4\tilde{\theta}_2\left(D_1\tilde{P}_1\right)^2D^2 + D_4F_4D\tilde{\theta}_2D_1^2\tilde{P}_1\\
&= F_4\left(4,4\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2 + F_4\left(4\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1^2 + F_4\left(4\right)\frac{\tilde{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2D_1F_4 &= D_4^2F_4\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_1\tilde{P}_1D_2\tilde{P}_2 + D_4F_4D^2\tilde{\theta}_2D_1\tilde{P}_1D_2\tilde{P}_2 + D_4F_4D\tilde{\theta}_2D_1\tilde{P}_1D_2\tilde{P}_2\\
&= F_4\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + F_4\left(4\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + F_4\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_1F_4 &= D_4^2F_4\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_1\tilde{P}_1D_3\tilde{P}_3 + D_4F_4D^2\tilde{\theta}_2D_1\tilde{P}_1D_3\tilde{P}_3 + D_4F_4D\tilde{\theta}_2D_1\tilde{P}_1D_3\tilde{P}_3 + D_4D_3F_4D\tilde{\theta}_2D_1\tilde{P}_1\\
&= F_4\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3 + F_4\left(4\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3 + F_4\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4} + F_4\left(4,3\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_2F_4 &= D_4D_4F_4\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_1\tilde{P}_1D_2\tilde{P}_2 + D_4F_4D^2\tilde{\theta}_2D_1\tilde{P}_1D_2\tilde{P}_2 + D_4F_4D\tilde{\theta}_2D_1\tilde{P}_1D_2\tilde{P}_2\\
&= F_4\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + F_4\left(4\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + F_4\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
D_2D_2F_4 &= D_4^2F_4\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_2\tilde{P}_2\right)^2 + D_4F_4D^2\tilde{\theta}_2\left(D_2\tilde{P}_2\right)^2 + D_4F_4D\tilde{\theta}_2D_2^2\tilde{P}_2\\
&= F_4\left(4,4\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2 + F_4\left(4\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2^2 + F_4\left(4\right)\frac{\tilde{P}_2^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_2F_4 &= D_4^2F_4\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_2\tilde{P}_2D_3\tilde{P}_3 + D_4F_4D^2\tilde{\theta}_2D_2\tilde{P}_2D_3\tilde{P}_3 + D_4F_4D\tilde{\theta}_2D_2\tilde{P}_2D_3\tilde{P}_3 + D_4D_3F_4D\tilde{\theta}_2D_2\tilde{P}_2\\
&= F_4\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3 + F_4\left(4\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3 + F_4\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4} + F_4\left(4,3\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1D_3F_4 &= D_4D_4F_4\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_1\tilde{P}_1D_3\tilde{P}_3 + D_4F_4D^2\tilde{\theta}_2D_1\tilde{P}_1D_3\tilde{P}_3 + D_4F_4D\tilde{\theta}_2D_1\tilde{P}_1D_3\tilde{P}_3 + D_4D_3F_4D\tilde{\theta}_2D_1\tilde{P}_1\\
&= F_4\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3 + F_4\left(4\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3 + F_4\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4} + F_4\left(4,3\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_3F_4 &= D_4^2F_4\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_2\tilde{P}_2D_3\tilde{P}_3 + D_4F_4D^2\tilde{\theta}_2D_2\tilde{P}_2D_3\tilde{P}_3 + D_4F_4D\tilde{\theta}_2D_2\tilde{P}_2D_3\tilde{P}_3 + D_4D_3F_4D\tilde{\theta}_2D_2\tilde{P}_2\\
&= F_4\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3 + F_4\left(4\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3 + F_4\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4} + F_4\left(4,3\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_3F_4 &= D_4^2F_4\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_3\tilde{P}_3\right)^2 + D_4F_4D^2\tilde{\theta}_2\left(D_3\tilde{P}_3\right)^2 + D_4F_4D\tilde{\theta}_2D_3^2\tilde{P}_3 + D_4D_3F_4D\tilde{\theta}_2D_3\tilde{P}_3\\
&+ D_4D_3F_4D\tilde{\theta}_2D_3\tilde{P}_3 + D_3^2F_4\\
&= F_4\left(4,4\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2 + F_4\left(4\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_3^2 + F_4\left(4\right)\frac{\tilde{P}_3^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_4} + F_4\left(4,3\right)\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4} + F_4\left(4,3\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_4} + F_4\left(3,3\right)
\end{aligned}$$

33.18.5. Second Grade Derivative Recursive Equations

Then according to the equations given at the beginning of this section, we have

$$\begin{aligned}
D_kD_iF_1 &= D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq3}F_4\right) + D_iR_2D_k\left(F_2+\mathbb{1}_{k\geq3}F_4\right)\\
&+ D_iF_2D_k\left(R_2+\mathbb{1}_{k\geq3}F_4\right) + \mathbb{1}_{i\geq3}D_iF_4D_k\left(R_2+F_2\right)
\end{aligned}$$

F_1

F_1 and $i=1$

for $i=1$, and $k=1$

$$\begin{aligned}
D_1D_1F_1 &= D_1D_1\left(R_2+F_2\right) + D_1R_2D_1F_2 + D_1F_2D_1R_2 = D_1^2R_2 + D_1^2F_2 + D_1R_2D_1F_2 + D_1F_2D_1R_2\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1 + r_2\tilde{P}_1^{(2)} + D_1^2F_2 + 2r_2\tilde{\mu}_1f_2\left(1\right)
\end{aligned}$$

$k=2$

$$\begin{aligned}
D_2D_iF_1 &= D_2D_1\left(R_2+F_2\right) + D_1R_2D_2F_2 + D_1F_2D_2R_2 = D_2D_1R_2 + D_2D_1F_2 + D_1R_2D_2F_2 + D_1F_2D_2R_2\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + r_2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + D_2D_1F_2 + r_2\tilde{\mu}_1f_2\left(2\right) + r_2\tilde{\mu}_2f_2\left(1\right)
\end{aligned}$$

$k=3$

$$\begin{aligned}
D_3D_1F_1 &= D_3D_1\left(R_2+F_2\right) + D_1R_2D_3\left(F_2+F_4\right) + D_1F_2D_3\left(R_2+F_4\right)\\
&= D_3D_1R_2 + D_3D_1F_2 + D_1R_2D_3F_2 + D_1R_2D_3F_4 + D_1F_2D_3R_2 + D_1F_2D_3F_4\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3 + r_2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3 + D_3D_1F_2 + r_2\tilde{\mu}_1f_2\left(3\right) + r_2\tilde{\mu}_1D_3F_4 + r_2\tilde{\mu}_3f_2\left(1\right) + D_3F_4f_2\left(1\right)
\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_1F_1 &= D_4D_1\left(R_2+F_2\right) + D_1R_2D_4\left(F_2+F_4\right) + D_1F_2D_4\left(R_2+F_4\right)\\
&= D_4D_1R_2 + D_4D_1F_2 + D_1R_2D_4F_2 + D_1R_2D_4F_4 + D_1F_2D_4R_2 + D_1F_2D_4F_4\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4 + r_2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4 + D_4D_1F_2 + r_2\tilde{\mu}_1f_2\left(4\right) + r_2\tilde{\mu}_1D_4F_4 + r_2\tilde{\mu}_4f_2\left(1\right) + f_2\left(1\right)D_4F_4
\end{aligned}$$

F_1 and $i=2$

for $i=2$,
$k=2$

$$
\begin{aligned}
D_2D_2F_1 &= D_2D_2\left(R_2+F_2\right)+D_2R_2D_2F_2+D_2F_2D_2R_2 = D_2D_2R_2+D_2D_2F_2+D_2R_2D_2F_2+D_2F_2D_2R_2\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2^2+r_2\tilde{P}_2^{(2)}+D_2D_2F_2+2r_2\tilde{\mu}_2f_2\left(2\right)
\end{aligned}
$$

$k=3$

$$
\begin{aligned}
D_3D_2F_1 &= D_3D_2\left(R_2+F_2\right)+D_2R_2D_3\left(F_2+F_4\right)+D_2F_2D_3\left(R_2+F_4\right)\\
&= D_3D_2R_2+D_3D_2F_2+D_2R_2D_3F_2+D_2R_2D_3F_4+D_2F_2D_3R_2+D_2F_2D_3F_4\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3+r_2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3+D_3D_2F_2+r_2\tilde{\mu}_2f_2\left(3\right)+r_2\tilde{\mu}_2D_3F_4+r_2\tilde{\mu}_3f_2\left(2\right)+f_2\left(2\right)D_3F_4
\end{aligned}
$$

$k=4$

$$
\begin{aligned}
D_4D_2F_1 &= D_4D_2\left(R_2+F_2\right)+D_2R_2D_4\left(F_2+F_4\right)+D_2F_2D_4\left(R_2+F_4\right)\\
&= D_4D_2R_2+D_4D_2F_2+D_2R_2D_4F_2+D_2R_2D_4F_4+D_2F_2D_4R_2+D_2F_2D_4F_4\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4+r_2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4+D_4D_2F_2+r_2\tilde{\mu}_2f_2\left(4\right)+r_2\tilde{\mu}_2D_4F_4+r_2\tilde{\mu}_4f_2\left(2\right)+f_2\left(2\right)D_4F_4
\end{aligned}
$$

F_1 and $i=3$

for $i=3$, *and* $k=3$

$$
\begin{aligned}
D_3D_3F_1 &= D_3D_3\left(R_2+F_2+F_4\right)+D_3R_2D_3\left(F_2+F_4\right)+D_3F_2D_3\left(R_2+F_4\right)+D_3F_4D_3\left(R_2+F_2\right)\\
&= D_3D_3R_2+D_3D_3F_2+D_3D_3F_4+D_3R_2D_3F_2+D_3R_2D_3F_4\\
&+ D_3F_2D_3R_2+D_3F_2D_3F_4+D_3F_4D_3R_2+D_3F_4D_3F_2\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_3^2+r_2\tilde{P}_3^{(2)}+D_3D_3F_2+D_3D_3F_4+r_2\tilde{\mu}_3f_2\left(3\right)+r_2\tilde{\mu}_3D_3F_4\\
&+ r_2\tilde{\mu}_3f_2\left(3\right)+f_2\left(3\right)D_3F_4+r_2\tilde{\mu}_3D_3F_4+f_2\left(3\right)D_3F_4
\end{aligned}
$$

$k=4$

$$
\begin{aligned}
D_4D_3F_1 &= D_4D_3\left(R_2+F_2+F_4\right)+D_3R_2D_4\left(F_2+F_4\right)+D_3F_2D_4\left(R_2+F_4\right)+D_3F_4D_4\left(R_2+F_2\right)\\
&= D_4D_3R_2+D_4D_3F_2+D_4D_3F_4+D_3R_2D_4F_2+D_3R_2D_4F_4\\
&+ D_3F_2D_4R_2+D_3F_2D_4F_4+D_3F_4D_4R_2+D_3F_4D_4F_2\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4+r_2\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4+D_4D_3F_2+D_4D_3F_4+r_2\tilde{\mu}_3f_2\left(4\right)+r_2\tilde{\mu}_3D_4F_4\\
&+ r_2\tilde{\mu}_4f_2\left(3\right)+D_4F_4f_2\left(3\right)+D_3F_4r_2\tilde{\mu}_4+D_3F_4f_2\left(4\right)
\end{aligned}
$$

F_1 and $i=4$

for $i=4$, $k=4$

$$
\begin{aligned}
D_4D_4F_1 &= D_4D_4\left(R_2+F_2+F_4\right)+D_4R_2D_4\left(F_2+F_4\right)+D_4F_2D_4\left(R_2+F_4\right)+D_4F_4D_4\left(R_2+F_2\right)\\
&= D_4D_4R_2+D_4D_4F_2+D_4D_4F_4+D_4R_2D_4F_2+D_4R_2D_4F_4\\
&+ D_4F_2D_4R_2+D_4F_2D_4F_4+D_4F_4D_4R_2+D_4F_4D_4F_2\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_4^2+r_2\tilde{P}_4^{(2)}+D_4D_4F_2+D_4D_4F_4+r_2\tilde{\mu}_4f_2\left(4\right)+r_2\tilde{\mu}_4D_4F_4\\
&+ r_2\tilde{\mu}_4f_2\left(4\right)+D_4F_4f_2\left(4\right)+D_4F_4r_2\tilde{\mu}_4+D_4F_4f_2\left(4\right)
\end{aligned}
$$

F_2

$$
D_kD_iF_2 = D_kD_i\left(R_1+F_1+\mathbb{1}_{i\geq3}F_3\right)+D_iR_1D_k\left(F_1+\mathbb{1}_{k\geq3}F_3\right)+D_iF_1D_k\left(R_1+\mathbb{1}_{k\geq3}F_3\right)+\mathbb{1}_{i\geq3}D_i\hat{F}_3D_k\left(R_1+F_1\right) \tag{33.18.F3}
$$

F_2 and $i=1$

$i=1,\ k=1$

$$\begin{aligned} D_1D_1F_2 &= D_1D_1\left(R_1+F_1\right)+D_1R_1D_1F_1+D_1F_1D_1R_1=D_1^2R_1+D_1^2F_1+D_1R_1D_1F_1+D_1F_1D_1R_1\\ &= R_1^2\tilde{\mu}_1^2+r_1\tilde{P}_1^{(2)}+D_1^2F_1+2r_1\tilde{\mu}_1f_1\left(1\right) \end{aligned}$$

$k=2$

$$\begin{aligned} D_2D_1F_2 &= D_2D_1\left(R_1+F_1\right)+D_1R_1D_2F_1+D_1F_1D_2R_1=D_2D_1R_1+D_2D_1F_1+D_1R_1D_2F_1+D_1F_1D_2R_1\\ &= R_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+r_1\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+D_2D_1F_1+r_1\tilde{\mu}_1f_1\left(2\right)+r_1\tilde{\mu}_2f_1\left(1\right) \end{aligned}$$

$k=3$

$$\begin{aligned} D_3D_1F_2 &= D_3D_1\left(R_1+F_1\right)+D_1R_1D_3\left(F_1+F_3\right)+D_1F_1D_3\left(R_1+F_3\right)\\ &= D_3D_1R_1+D_3D_1F_1+D_1R_1D_3F_1+D_1R_1D_3F_3+D_1F_1D_3R_1+D_1F_1D_3F_3\\ &= R_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3+r_1\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3+D_3D_1F_1+r_1\tilde{\mu}_1f_1\left(3\right)+r_1\tilde{\mu}_1D_3F_3+r_1\tilde{\mu}_3f_1\left(1\right)+D_3\hat{F}_3f_1\left(1\right) \end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned} D_4D_1F_2 &= D_4D_1\left(R_1+F_1\right)+D_1R_1D_4\left(F_1+F_3\right)+D_1F_1D_4\left(R_1+F_3\right)\\ &= D_4D_1R_1+D_4D_1F_1+D_1R_1D_4F_1+D_1R_1D_4F_3+D_1F_1D_4R_1+D_1F_1D_4F_3\\ &= R_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4+r_1\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4+D_4D_1F_1+r_1\tilde{\mu}_1f_1\left(4\right)+\tilde{\mu}_1D_4f_3\left(4\right)+\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4f_1\left(1\right)+f_1\left(1\right)D_4F_4 \end{aligned}$$

F_2 and $i=2$

$i=2\ k=2$

$$\begin{aligned} D_2D_2F_2 &= D_2D_2\left(R_1+F_1\right)+D_2R_1D_2F_1+D_2F_1D_2R_1=D_2D_2R_1+D_2D_2F_1+D_2R_1D_2F_1+D_2F_1D_2R_1\\ &= R_1^{(2)}\tilde{\mu}_2^2+r_1\tilde{P}_2^{(2)}+D_2D_2F_12r_1\tilde{\mu}_2f_1\left(2\right) \end{aligned}$$

$k=3$

$$\begin{aligned} D_3D_2F_2 &= D_3D_2\left(R_1+F_1\right)+D_2R_1D_3\left(F_1+F_3\right)+D_2F_1D_3\left(R_1+F_3\right)\\ &= D_3D_2R_1+D_3D_2F_1+D_2R_1D_3F_1+D_2R_1D_3F_3+D_2F_1D_3R_1+D_2F_1D_3F_3\\ &= R_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3+r_1\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3+D_3D_2F_1+r_1\tilde{\mu}_2f_1\left(3\right)+r_1\tilde{\mu}_2D_3F_3+r_1\tilde{\mu}_3f_1\left(2\right)+D_3\hat{F}_3f_1\left(2\right) \end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned} D_4D_2F_2 &= D_4D_2\left(R_1+F_1\right)+D_2R_1D_4\left(F_1+F_3\right)+D_2F_1D_4\left(R_1+F_3\right)\\ &= D_4D_2R_1+D_4D_2F_1+D_2R_1D_4F_1+D_2R_1D_4F_3+D_2F_1D_4R_1+D_2F_1D_4F_3\\ &= R_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4+r_1\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4+D_4D_2F_1+r_1\tilde{\mu}_2f_1\left(4\right)+r_1\tilde{\mu}_2D_4F_3+r_1\tilde{\mu}_4f_1\left(2\right)+D_4\hat{F}_3f_1\left(2\right) \end{aligned}$$

F_2 and $i=3$

$i=3\ k=3$

$$\begin{aligned} D_3D_3F_2 &= D_3D_3\left(R_1+F_1+F_3\right)+D_3R_1D_3\left(F_1+F_3\right)+D_3F_1D_3\left(R_1+F_3\right)+D_3\hat{F}_3D_3\left(R_1+F_1\right)\\ &= D_3D_3R_1+D_3D_3F_1+D_3D_3F_3+D_3R_1D_3F_1+D_3R_1D_3F_3\\ &+ D_3F_1D_3R_1+D_3F_1D_3F_3+D_3\hat{F}_3D_3R_1+D_3\hat{F}_3D_3F_1\\ &= R_1^{(2)}\tilde{\mu}_3^2+r_1\tilde{P}_3^{(2)}+D_3D_3F_1+D_3D_3F_3+r_1\tilde{\mu}_3f_1\left(3\right)+r_1\tilde{\mu}_3f_3\left(3\right)\\ &+ r_1\tilde{\mu}_3f_1\left(3\right)+D_3\hat{F}_3f_1\left(3\right)+D_3\hat{F}_3r_1\tilde{\mu}_3+D_3\hat{F}_3f_1\left(3\right) \end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned} D_4D_3F_2 &= D_4D_3\left(R_1+F_1+F_3\right)+D_3R_1D_4\left(F_1+F_3\right)+D_3F_1D_4\left(R_1+F_3\right)+D_3\hat{F}_3D_4\left(R_1+F_1\right)\\ &= D_4D_3R_1+D_4D_3F_1+D_4D_3F_3+D_3R_1D_4F_1+D_3R_1D_4F_3\\ &+ D_3F_1D_4R_1+D_3F_1D_4F_3+D_3\hat{F}_3D_4R_1+D_3\hat{F}_3D_4F_1\\ &= R_1^{(2)}\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4+r_1\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4+D_4D_3F_1+D_4D_3F_3+r_1\tilde{\mu}_3f_1\left(4\right)+r_1\tilde{\mu}_3D_4F_3\\ &+ r_1\tilde{\mu}_4f_1\left(3\right)+D_4\hat{F}_3f_1\left(3\right)+r_1\tilde{\mu}_4D_3F_3+D_3\hat{F}_3f_1\left(4\right) \end{aligned}$$

F_2 and $i = 4$

$i = 4$ *and* $k = 4$

$$\begin{aligned}
D_4D_4F_2 &= D_4D_4\left(R_1 + F_1 + F_3\right) + D_4R_1D_4\left(F_1 + F_3\right) + D_4F_1D_4\left(R_1 + F_3\right) + D_4\hat{F}_3D_4\left(R_1 + F_1\right)\\
&= D_4D_4R_1 + D_4D_4F_1 + D_4D_4F_3 + D_4R_1D_4F_1 + D_4R_1D_4F_3\\
&+ D_4F_1D_4R_1 + D_4F_1D_4F_3 + D_4\hat{F}_3D_4R_1 + D_4\hat{F}_3D_4F_1\\
&= R_1^{(2)}\tilde{\mu}_4^2 + r_1\tilde{P}_4^{(2)} + D_4D_4F_1 + D_4D_4F_3 + f_1\left(4\right)r_1\tilde{\mu}_4 + r_1\tilde{\mu}_4D_4F_3\\
&+ r_1\tilde{\mu}_4f_1\left(4\right) + D_4\hat{F}_3f_1\left(4\right) + D_4\hat{F}_3r_1\tilde{\mu}_4 + D_4\hat{F}_3f_1\left(4\right)
\end{aligned}$$

F_3

$$D_kD_iF_3 = D_kD_i\left(\hat{R}_4 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_2 + F_4\right) + D_i\hat{R}_4D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2 + F_4\right) + D_iF_4D_k\left(\hat{R}_4 + \mathbb{1}_{k\leq 2}F_2\right) + \mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_k\Big(\hat{R}_4 + \ldots \quad (33.18$$

F_3, $i = 1$

$i = 1$ *and* $k = 1$

$$\begin{aligned}
D_1D_1F_3 &= D_1D_1\left(\hat{R}_4 + F_2 + F_4\right) + D_1\hat{R}_4D_1\left(F_2 + F_4\right) + D_1F_4D_1\left(\hat{R}_4 + F_2\right) + D_1F_2D_1\left(\hat{R}_4 + F_4\right)\\
&= D_1^2\hat{R}_4 + D_1^2F_2 + D_1^2F_4 + D_1\hat{R}_4D_1F_2 + D_1\hat{R}_4D_1F_4 + D_1F_4D_1\hat{R}_4 + D_1F_4D_1F_2 + D_1F_2D_1\hat{R}_4 + D_1F_2D_1F\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1^2 + \hat{r}_2\tilde{P}_1^{(2)} + D_1^2F_2 + D_1^2F_4 + \hat{r}_2\tilde{\mu}_1D_1F_2\\
&+ \hat{r}_2\tilde{\mu}_1F_4\left(1\right) + F_4\left(1\right)\hat{r}_2\tilde{\mu}_1 + F_4\left(1\right)D_1F_2 + D_1F_2\hat{r}_2\tilde{\mu}_1 + D_1F_2F_4\left(1\right)
\end{aligned}$$

$k = 2$

$$\begin{aligned}
D_2D_1F_3 &= D_2D_1\left(\hat{R}_4 + F_2 + F_4\right) + D_1\hat{R}_4D_2\left(F_2 + F_4\right) + D_1F_4D_2\left(\hat{R}_4 + F_2\right) + D_1F_2D_2\left(\hat{R}_4 + F_4\right)\\
&= D_2D_1\hat{R}_4 + D_2D_1F_2 + D_2D_1F_4 + D_1\hat{R}_4D_2F_2 + D_1\hat{R}_4D_2F_4\\
&+ D_1F_4D_2\hat{R}_4 + D_1F_4D_2F_2 + D_1F_2D_2\hat{R}_4 + D_1F_2D_2F_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + \hat{r}_2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + D_2D_1F_2 + D_2D_1F_4 + \hat{r}_2\tilde{\mu}_1D_2F_2 + \hat{r}_2\tilde{\mu}_1F_4\left(2\right)\\
&+ \hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_4\left(1\right) + F_4\left(1\right)D_2F_2 + \hat{r}_2\tilde{\mu}_2D_1F_2 + D_1F_2F_4\left(2\right)
\end{aligned}$$

$k = 3$

$$\begin{aligned}
D_3D_1F_3 &= D_3D_1\left(\hat{R}_4 + F_2 + F_4\right) + D_1\hat{R}_4D_3\left(F_4\right) + D_1F_4D_3\hat{R}_4 + D_1F_2D_3\left(\hat{R}_4 + F_4\right)\\
&= D_3D_1\hat{R}_4 + D_3D_1F_2 + D_3D_1F_4 + D_1\hat{R}_4D_3F_4 + D_1F_4D_3\hat{R}_4 + D_1F_2D_3\hat{R}_4 + D_1F_2D_3F_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3 + \hat{r}_2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3 + D_3D_1F_2 + D_3D_1F_4 + \hat{r}_2\tilde{\mu}_1F_4\left(3\right) + F_4\left(1\right)\hat{r}_2\tilde{\mu}_3 + D_1F_2\hat{r}_2\tilde{\mu}_3 + D_1F_2F_4\left(3\right)
\end{aligned}$$

$k = 4$

$$\begin{aligned}
D_4D_1F_3 &= D_4D_1\left(\hat{R}_4 + F_2 + F_4\right) + D_1\hat{R}_4D_4F_4 + D_1F_4D_4\hat{R}_4 + D_1F_2D_4\left(\hat{R}_4 + F_4\right)\\
&= D_4D_1\hat{R}_4 + D_4D_1F_2 + D_4D_1F_4 + D_1\hat{R}_4D_4F_4 + D_1F_4D_4\hat{R}_4 + D_1F_2D_4\hat{R}_4 + D_1F_2D_4F_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4 + \hat{r}_2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4 + D_4D_1F_2 + D_4D_1F_4 + \hat{r}_2\tilde{\mu}_1F_4\left(4\right) + F_4\left(1\right)\hat{r}_2\tilde{\mu}_4 + D_1F_2\hat{r}_2\tilde{\mu}_4 + D_1F_2F_4\left(4\right)
\end{aligned}$$

F_3, $i = 2$

$i = 2$ *and* $k = 2$

$$\begin{aligned}
D_2D_2F_3 &= D_2D_2\left(\hat{R}_4 + F_2 + F_4\right) + D_2\hat{R}_4D_2\left(F_2 + F_4\right) + D_2F_4D_2\left(\hat{R}_4 + F_2\right) + D_2F_2D_2\left(\hat{R}_4 + F_4\right)\\
&= D_2D_2\hat{R}_4 + D_2D_2F_2 + D_2D_2F_4 + D_2\hat{R}_4D_2F_2 + D_2\hat{R}_4D_2F_4\\
&+ D_2F_4D_2\hat{R}_4 + D_2F_4D_2F_2 + D_2F_2D_2\hat{R}_4 + D_2F_2D_2F_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2^2 + \hat{r}_2\tilde{P}_1^{(2)} + D_2D_2F_2 + D_2D_2F_4 + \hat{r}_2\tilde{\mu}_2D_2F_2 + \hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_4\left(4\right)\\
&+ F_4\left(4\right)\hat{r}_2\tilde{\mu}_2 + F_4\left(4\right)D_2F_2 + D_2F_2\hat{r}_2\tilde{\mu}_2 + D_2F_2F_4\left(4\right)
\end{aligned}$$

$k=3$

$$
\begin{aligned}
D_3D_2F_3 &= D_3D_2\left(\hat{R}_4+F_2+F_4\right)+D_2\hat{R}_4D_3F_4+D_2F_4D_3\hat{R}_4+D_2F_2D_3\left(\hat{R}_4+F_4\right)\\
&= D_3D_2\hat{R}_4+D_3D_2F_2+D_3D_2F_4+D_2\hat{R}_4D_3F_4+D_2F_4D_3\hat{R}_4+D_2F_2D_3\hat{R}_4+D_2F_2D_3F_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3+D_3D_2F_2+D_3D_2F_4+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_4\left(3\right)+F_4\left(4\right)\hat{r}_2\tilde{\mu}_3+\hat{r}_2\tilde{\mu}_3D_2F_2+D_2F_2F_4\left(3\right)
\end{aligned}
$$

$k=4$

$$
\begin{aligned}
D_4D_2F_3 &= D_4D_2\left(\hat{R}_4+F_2+F_4\right)+D_2\hat{R}_4D_4F_4+D_2F_4D_4\hat{R}_4+D_2F_2D_4\left(\hat{R}_4+F_4\right)\\
&= D_4D_2\hat{R}_4+D_4D_2F_2+D_4D_2F_4+D_2\hat{R}_4D_4F_4+D_2F_4D_4\hat{R}_4+D_2F_2D_4\hat{R}_4+D_2F_2D_4F_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4+D_4D_2F_2+D_4D_2F_4+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_4\left(4\right)+F_4\left(4\right)\hat{r}_2\tilde{\mu}_4+D_2F_2\hat{r}_2\tilde{\mu}_4+D_2F_2F_4\left(4\right)
\end{aligned}
$$

$F_3,\ i=3$

$k=3$

$$
\begin{aligned}
D_3D_3F_3 &= D_3D_3\left(\hat{R}_4+F_4\right)+D_3\hat{R}_4D_3F_4+D_3F_4D_3\hat{R}_4=D_3^2\hat{R}_4+D_3^2F_4+D_3\hat{R}_4D_3F_4+D_3F_4D_3\hat{R}_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_3^2+\hat{r}_2\tilde{P}_3^{(2)}+D_3^2F_4+\hat{r}_2\tilde{\mu}_3F_4\left(4\right)+\hat{r}_2\tilde{\mu}_3F_4\left(3\right)
\end{aligned}
$$

$k=4$

$$
\begin{aligned}
D_4D_3F_3 &= D_4D_3\left(\hat{R}_4+F_4\right)+D_3\hat{R}_4D_4F_4+D_3F_4D_4\hat{R}_4=D_4D_3\hat{R}_4+D_4D_3F_4+D_3\hat{R}_4D_4F_4+D_3F_4D_4\hat{R}_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4+\hat{r}_2\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4+D_4D_3F_4+\hat{r}_2\tilde{\mu}_3F_4\left(4\right)+\hat{r}_2\tilde{\mu}_4F_4\left(3\right)
\end{aligned}
$$

$F_3,\ i=4$

$k=4$

$$
\begin{aligned}
D_4D_4F_3 &= D_4D_4\left(\hat{R}_4+F_4\right)+D_4\hat{R}_4D_4F_4+D_4F_4D_4\hat{R}_4=D_4^2\hat{R}_4+D_4^2F_4+D_4\hat{R}_4D_4F_4+D_4F_4D_4\hat{R}_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_4^2+\hat{r}_2\tilde{P}_4^{(2)}+D_4^2F_4+2\hat{r}_2\tilde{\mu}_4F_4\left(4\right)
\end{aligned}
$$

F_4

for F_4

$$
\begin{aligned}
D_kD_iF_4 &= D_kD_i\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{i\leq2}F_1+F_3\right)+D_i\hat{R}_3D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq2}F_1+F_3\right)+D_i\hat{F}_3D_k\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{k\leq2}F_1\right)+\mathbb{1}_{i\leq2}D_iF_1D_k\left(\hat{R}_3+\right. && (33.18\\
&= && (33.18
\end{aligned}
$$

$F_4,\ i=1$

$k=1$

$$
\begin{aligned}
D_1D_1F_4 &= D_1^2\left(\hat{R}_3+F_1+F_3\right)+D_1\hat{R}_3D_1\left(F_1+F_3\right)+D_1\hat{F}_3D_1\left(\hat{R}_3+F_1\right)+D_1F_1D_1\left(\hat{R}_3+F_3\right)\\
&= D_1^2\hat{R}_3+D_1^2F_1+D_1^2F_3+D_1\hat{R}_3D_1F_1+D_1\hat{R}_3D_1F_3+D_1\hat{F}_3D_1\hat{R}_3+D_1\hat{F}_3D_1F_1+D_1F_1D_1\hat{R}_3+D_1F_1D_1F\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1^2+\hat{r}_1\tilde{P}_2^{(2)}+D_1^2F_1+D_1^2F_3+D_1F_1\hat{r}_1\tilde{\mu}_1\\
&+ \hat{r}_1\tilde{\mu}_1F_3\left(1\right)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1F_3\left(1\right)+D_1F_1F_3\left(1\right)+D_1F_1\hat{r}_1\tilde{\mu}_1+D_1F_1F_3\left(1\right)
\end{aligned}
$$

$k=2$

$$
\begin{aligned}
D_2D_1F_4 &= D_2D_1\left(\hat{R}_3+F_1+F_3\right)+D_1\hat{R}_3D_2\left(F_1+F_3\right)+D_1\hat{F}_3D_2\left(\hat{R}_3+F_1\right)+D_1F_1D_2\left(\hat{R}_3+F_3\right)\\
&= D_2D_1\hat{R}_3+D_2D_1F_1+D_2D_1F_3+D_1\hat{R}_3D_2F_1+D_1\hat{R}_3D_2F_3\\
&+ D_1\hat{F}_3D_2\hat{R}_3+D_1\hat{F}_3D_2F_1+D_1F_1D_2\hat{R}_3+D_1F_1D_2F_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+D_2D_1F_1+D_2D_1F_3+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1D_2F_1+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1F_3\left(2\right)\\
&+ F_3\left(1\right)\hat{r}_1\tilde{\mu}_2+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1D_2F_1+D_1F_1\hat{r}_1\tilde{\mu}_2+D_1F_1F_3\left(2\right)
\end{aligned}
$$

$k=3$

$$\begin{aligned}
D_3D_1F_4 &= D_3D_1\left(\hat{R}_3+F_1+F_3\right)+D_1\hat{R}_3D_3F_3+D_1\hat{F}_3D_3\hat{R}_3+D_1F_1D_3\left(\hat{R}_3+F_3\right)\\
&= D_3D_1\hat{R}_3+D_3D_1F_1+D_3D_1F_3+D_1\hat{R}_3D_3F_3+D_1\hat{F}_3D_3\hat{R}_3+D_1F_1D_3\hat{R}_3+D_1F_1D_3F_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3+D_3D_1F_1+D_3D_1F_3+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1F_3\left(3\right)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_3F_3\left(1\right)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_3D_1F_1+D_1F_1F_3\left(3\right)
\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_1F_4 &= D_4D_1\left(\hat{R}_3+F_1+F_3\right)+D_1\hat{R}_3D_4F_3+D_1\hat{F}_3D_4\hat{R}_3+D_1F_1D_4\left(\hat{R}_3+F_3\right)\\
&= D_4D_1\hat{R}_3+D_4D_1F_1+D_4D_1F_3+D_1\hat{R}_3D_4F_3+D_1\hat{F}_3D_4\hat{R}_3+D_1F_1D_4\hat{R}_3+D_1F_1D_4F_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4+D_4D_1F_1+D_4D_1F_3+F_3\left(4\right)\hat{r}_1\tilde{\mu}_1+F_3\left(3\right)\hat{r}_1\tilde{\mu}_4+D_1F_1\hat{r}_1\tilde{\mu}_4+D_1F_1F_3\left(4\right)
\end{aligned}$$

$F_4,\ i=2$

$k=2$

$$\begin{aligned}
D_2D_2F_4 &= D_2D_2\left(\hat{R}_3+F_1+F_3\right)+D_2\hat{R}_3D_2\left(F_1+F_3\right)+D_2\hat{F}_3D_2\left(\hat{R}_3+F_1\right)+D_2F_1D_2\left(\hat{R}_3+F_3\right)\\
&= D_2^2\hat{R}_3+D_2^2F_1+D_2^2F_3+D_2\hat{R}_3D_2F_1+D_2\hat{R}_3D_2F_3+D_2\hat{F}_3D_2\hat{R}_3+D_2\hat{F}_3D_2F_1+D_2F_1D_2\hat{R}_3+D_2F_1D_2F\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2^2+\hat{r}_1\tilde{P}_2^{(2)}+D_2^2F_1+D_2^2F_3+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2D_2F_1\\
&+ \hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_3\left(2\right)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_3\left(2\right)+F_3\left(1\right)D_2F_1+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2D_2F_1+F_3\left(3\right)D_2F_1
\end{aligned}$$

$k=3$

$$\begin{aligned}
D_3D_2F_4 &= D_3D_2\left(\hat{R}_3+F_1+F_3\right)+D_2\hat{R}_3D_3F_3+D_2\hat{F}_3D_3\hat{R}_3+D_2F_1D_3\left(\hat{R}_3+F_3\right)\\
&= D_3D_2\hat{R}_3+D_3D_2F_1+D_3D_2F_3+D_2\hat{R}_3D_3F_3+D_2\hat{F}_3D_3\hat{R}_3+D_2F_1D_3\hat{R}_3+D_2F_1D_3F_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3+D_3D_2F_1+D_3D_2F_3+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_3\left(3\right)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_3F_3\left(2\right)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_3D_2F_1+F_3\left(3\right)D_2F_1
\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_2F_4 &= D_4D_2\left(\hat{R}_3+F_1+F_3\right)+D_2\hat{R}_3D_4F_3+D_2\hat{F}_3D_4\hat{R}_3+D_2F_1D_4\left(\hat{R}_3+F_3\right)\\
&= D_4D_2\hat{R}_3+D_4D_2F_1+F_3+D_2\hat{R}_3D_4F_3+D_2\hat{F}_3D_4\hat{R}_3+D_2F_1D_4\hat{R}_3+D_2F_1D_4F_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4+D_4D_2F_1+D_4D_2F_3+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_3\left(4\right)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_4F_3\left(2\right)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_4D_2F_1+F_3\left(4\right)D_2F_1
\end{aligned}$$

$F_4,\ i=3$

$k=3$

$$\begin{aligned}
D_3D_3F_4 &= D_3D_3\left(\hat{R}_3+F_3\right)+D_3\hat{R}_3D_3F_3+D_3\hat{F}_3D_3\hat{R}_3=D_3^2\hat{R}_3+D_3^2F_3+D_3\hat{R}_3D_3F_3+D_3\hat{F}_3D_3\hat{R}_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_3^2+\hat{r}_1\tilde{P}_3^{(2)}+D_3^2F_3+\hat{r}_1\tilde{\mu}_3F_3\left(3\right)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_3F_3\left(3\right)
\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_3F_4 &= D_4D_3\left(\hat{R}_3+F_3\right)+D_3\hat{R}_3D_4F_3+D_3\hat{F}_3D_4\hat{R}_3=D_4D_3\hat{R}_3+D_4D_3F_3+D_3\hat{R}_3D_4F_3+D_3\hat{F}_3D_4\hat{R}_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4+\hat{r}_1\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4+D_4D_3F_3+\hat{r}_1\tilde{\mu}_3F_3\left(4\right)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_4F_3\left(3\right)
\end{aligned}$$

$i=4$
$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_4F_4 &= D_4^2\left(\hat{R}_3+F_3\right)+D_4\hat{R}_3D_4F_3+D_4\hat{F}_3D_4\hat{R}_3=D_4^2\hat{R}_3+D_4^2F_3+D_4\hat{R}_3D_4F_3+D_4\hat{F}_3D_4\hat{R}_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_4^2+\hat{r}_1\tilde{P}_4^{(2)}+D_4^2F_3+\hat{r}_1\tilde{\mu}_4F_3\left(4\right)
\end{aligned}$$

33.19. Generalizaciones

33.19.1. RSVC con dos conexiones

Sus ecuaciones recursivas son de la forma

$$\begin{aligned}
F_1(z_1,z_2,z_3,z_4) &= R_2\left(\prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i(z_i)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_3(z_3)\tilde{P}_4(z_4)\right)\right)F_4(z_3,z_4;\tau_2),\\
F_2(z_1,z_2,z_3,z_4) &= R_1\left(\prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i(z_i)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\tilde{P}_1(z_3)\tilde{P}_4(z_4)\right),z_2\right)F_3(z_3,z_4;\tau_1),\\
F_3(z_1,z_2,z_3,z_4) &= R_4\left(\prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i(z_i)\right)F_4\left(z_3,\tilde{\theta}_4\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\tilde{P}_3(z_3)\right)\right)F_2(z_1,z_2;\zeta_4),\\
F_4(z_1,z_2,z_3,z_4) &= R_3\left(\prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i(z_i)\right)F_3\left(\tilde{\theta}_3\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\tilde{P}_4(z_4)\right),z_4\right)F_1(z_1,z_2;\zeta_3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1(z_1,z_2,w_1,w_2) &= R_2\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2),\\
F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) &= R_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1),\\
\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1,w_2) &= \hat{R}_2\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right),\\
\hat{F}_2(z_1,z_2,w_1,w_2) &= \hat{R}_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right),
\end{aligned}$$

33.19.2. First Moments of the Queue Lengths

The server's switchover times are given by the general equation

$$R_i(\mathbf{z},\mathbf{w}) = R_i\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\tilde{P}_3(z_3)\tilde{P}_4(z_4)\right) \tag{33.19.1}$$

with

$$D_iR_i = DR_iD_i\tilde{P}_i \tag{33.19.2}$$

also we need to recall that
$F_1(z_1,z_2;\tau_3) = F_{1,1}(z_1;\tau_3)F_{2,1}(z_2;\tau_3)$ *then*
$D_1F_1(z_1,z_2;\tau_3) = D_1F_{1,1}(z_1;\tau_3) = F_{1,1}^{(1)}(1)$, *and* $D_2F_1(z_1,z_2;\tau_3) = D_2F_{2,1}(z_1;\tau_3) = F_{2,1}^{(1)}(1)$, *with second order derivatives given by*

$$\begin{aligned}
D_1^2F_1(z_1,z_2;\tau_3) &= D_1^2F_{1,1}(z_1;\tau_3) = F_{1,1}^{(2)}(1)\\
D_2D_1F_1(z_1,z_2;\tau_3) &= D_2F_{2,1}(z_2;\tau_3)D_1F_{1,1}(z_1;\tau_3) = F_{1,1}^{(1)}(1)F_{1,1}^{(1)}(1)\\
D_2^2F_1(z_1,z_2;\tau_3) &= D_2^2F_{2,1}(z_2;\tau_3) = F_{2,1}^{(2)}(1)
\end{aligned}$$

in a similar manner we can obtain the following for

- $F_2(z_1, z_2; \tau_4) = F_{1,2}(z_1; \tau_4) F_{2,2}(z_2; \tau_4)$ *with* $D_1F_2(z_1, z_2; \tau_4) = D_1F_{1,2}(z_1; \tau_4) = F_{1,2}^{(1)}(1)$, *and* $D_2F_2(z_1, z_2; \tau_4) = D_2F_{2,2}(z_1; \tau_4) = F_{2,2}^{(1)}(1)$, *with*

$$\begin{aligned} D_1^2F_2(z_1, z_2; \tau_4) &= D_1^2F_{1,2}(z_1; \tau_4) = F_{1,2}^{(2)}(1) \\ D_2D_1F_2(z_1, z_2; \tau_4) &= D_2F_{2,1}(z_2; \tau_4) D_1F_{1,2}(z_1; \tau_4) = F_{2,2}^{(1)}(1) F_{1,2}^{(1)}(1) \\ D_2^2F_2(z_1, z_2; \tau_4) &= D_2^2F_{2,2}(z_2; \tau_4) = F_{2,2}^{(2)}(1) \end{aligned}$$

- $F_3(z_3, z_3; \zeta_2) = F_{1,2}(z_1; \zeta_2) F_{2,2}(z_2; \zeta_2)$ *with* $D_1F_2(z_1, z_2; \zeta_2) = D_1F_{1,2}(z_1; \zeta_2) = F_{1,2}^{(1)}(1)$, *and* $D_2F_2(z_1, z_2; \zeta_2) = D_2F_{2,2}(z_1; \zeta_2) = F_{2,2}^{(1)}(1)$, *with*

$$\begin{aligned} D_1^2F_2(z_1, z_2; \zeta_2) &= D_1^2F_{1,2}(z_1; \zeta_2) = F_{1,2}^{(2)}(1) \\ D_2D_1F_2(z_1, z_2; \zeta_2) &= D_2F_{2,1}(z_2; \zeta_1) D_1F_{1,2}(z_1; \zeta_2) = F_{2,2}^{(1)}(1) F_{1,2}^{(1)}(1) \\ D_2^2F_2(z_1, z_2; \zeta_2) &= D_2^2F_{2,2}(z_2; \zeta_2) = F_{2,2}^{(2)}(1) \end{aligned}$$

also we need to remind $F_{1,2}(z_1; \zeta_2) F_{2,2}(z_2; \zeta_2) = F_2(z_1, z_2; \zeta_2)$, *therefore*

$$D_1F_2(z_1, z_2; \zeta_2) = D_1[F_{1,2}(z_1; \zeta_2) F_{2,2}(z_2; \zeta_2)] = F_{2,2}(z_2; \zeta_2) D_1F_{1,2}(z_1; \zeta_2) = F_{1,2}^{(1)}(1)$$

i.e., $D_1F_2 = F_{1,2}^{(1)}(1)$; $D_2F_2 = F_{2,2}^{(1)}(1)$, *whereas that* $D_3F_2 = D_4F_2 = 0$, *then*

$$D_iF_j = \mathbb{1}_{i \leq 2} F_{i,j}^{(1)}(1), \quad \text{and} \quad D_i\hat{F}_j = \mathbb{1}_{i \geq 2} F_{i,j}^{(1)}(1). \tag{33.19.3}$$

Now, we obtain the first moments equations for the queue lengths as before for the times the server arrives to the queue to start attending
Remember that

$$F_2(z_1, z_2, w_1, w_2) = R_1\left(\prod_{i=1}^{2} \tilde{P}_i(z_i) \prod_{i=1}^{2} \hat{P}_i(w_i)\right) F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2)\right), z_2\right) \hat{F}_1(w_1, w_2; \tau_1),$$

where

$$F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right), z_2\right)$$

so

$$D_iF_1 = \mathbb{1}_{i \neq 1} D_1F_1 D\tilde{\theta}_1 D_iP_i + \mathbb{1}_{i=2} D_iF_1, \tag{33.19.4}$$

then

$$\begin{array}{ll} D_1F_1 = 0, & D_2F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2P_2 + D_2F_1 = f_1(1)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{\mu}_2 + f_1(2), \\ D_3F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3P_3 = f_1(1)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{\mu}_1, & D_4F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4P_4 = f_1(1)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{\mu}_2 \end{array}$$

$$D_iF_2 = \mathbb{1}_{i \neq 2} D_2F_2 D\tilde{\theta}_2 D_iP_i + \mathbb{1}_{i=1} D_iF_2 \tag{33.19.5}$$

$$\begin{array}{ll} D_1F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_1F_2 = f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_1, & D_2F_2 = 0 \\ D_3F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3P_3 = f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_1, & D_4F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4P_4 = f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_2 \end{array}$$

$$D_i\hat{F}_1 = \mathbb{1}_{i\neq 3}D_3\hat{F}_1 D\hat{\theta}_1 D_i P_i + \mathbb{1}_{i=4}D_i\hat{F}_1, \tag{33.19.6}$$

$$D_1\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1 D\hat{\theta}_1 D_1 P_1 = \hat{f}_1(3)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_1, \quad D_2\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1 D\hat{\theta}_1 D_2 P_2 = \hat{f}_1(3)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_2$$
$$D_3\hat{F}_1 = 0, \quad D_4\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1 D\hat{\theta}_1 D_4 P_4 + D_4\hat{F}_1 = \hat{f}_1(3)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(2),$$

$$D_i\hat{F}_2 = \mathbb{1}_{i\neq 4}D_4\hat{F}_2 D\hat{\theta}_2 D_i P_i + \mathbb{1}_{i=3}D_i\hat{F}_2. \tag{33.19.7}$$

$$D_1\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2 D\hat{\theta}_2 D_1 P_1 = \hat{f}_2(4)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{\mu}_1, \quad D_2\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2 D\hat{\theta}_2 D_2 P_2 = \hat{f}_2(4)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{\mu}_2,$$
$$D_3\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2 D\hat{\theta}_2 D_3 P_3 + D_3\hat{F}_2 = \hat{f}_2(4)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(4)$$
$$D_4\hat{F}_2 = 0$$

Then, now we can obtain the linear system of equations in order to obtain the first moments of the lengths of the queues:
For $\mathbf{F}_1 = R_2F_2\hat{F}_2$ we get the general equations

$$D_i\mathbf{F}_1 = D_i\left(R_2 + F_2 + \mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_2\right) \tag{33.19.8}$$

So

$$\begin{aligned}
D_1\mathbf{F}_1 &= D_1R_2 + D_1F_2 = r_1\tilde{\mu}_1 + f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_1\\
D_2\mathbf{F}_1 &= D_2(R_2+F_2) = r_2\tilde{\mu}_1\\
D_3\mathbf{F}_1 &= D_3\left(R_2+F_2+\hat{F}_2\right) = r_1\hat{\mu}_1 + f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_1 + \hat{F}_{1,2}^{(1)}(1)\\
D_4\mathbf{F}_1 &= D_4\left(R_2+F_2+\hat{F}_2\right) = r_2\hat{\mu}_2 + f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_2 + \hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)
\end{aligned}$$

it means

$$D_1\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_1 + f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + f_2(1), \quad D_2\mathbf{F}_1 = r_2\tilde{\mu}_2,$$
$$D_3\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_1 + f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}_{1,2}^{(1)}(1), \quad D_4\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_2 + f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}_{2,2}^{(1)}(1),$$

$$\mathbf{F}_2 = R_1F_1\hat{F}_1, \quad D_i\mathbf{F}_2 = D_i\left(R_1 + F_1 + \mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_1\right) \tag{33.19.9}$$

equivalently

$$D_1\mathbf{F}_2 = r_1\tilde{\mu}_1, \quad D_2\mathbf{F}_2 = r_1\tilde{\mu}_2 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + f_1(2),$$
$$D_3\mathbf{F}_2 = r_1\hat{\mu}_1 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}_{1,1}^{(1)}(1), \quad D_4\mathbf{F}_2 = r_1\hat{\mu}_2 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1),$$

$$\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{R}_2\hat{F}_2F_2, \quad D_i\hat{\mathbf{F}}_1 = D_i\left(\hat{R}_2 + \hat{F}_2 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_2\right) \tag{33.19.10}$$

equivalently

$$D_1\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\tilde{\mu}_1 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + F_{1,2}^{(1)}(1), \quad D_2\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F_{2,2}^{(1)}(1),$$
$$D_3\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(1), \quad D_4\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\hat{\mu}_2$$

$$\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{R}_1\hat{F}_1 F_1, \quad D_i\hat{\mathbf{F}}_2 = D_i\left(\hat{R}_1 + \hat{F}_1 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_1\right) \tag{33.19.11}$$

equivalently

$$\begin{array}{ll} D_1\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\tilde{\mu}_1 + \hat{f}_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_1 + F_{1,1}^{(1)}\left(1\right), & D_2\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\mu_2 + \hat{f}_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F_{2,1}^{(1)}\left(1\right),\\ D_3\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\hat{\mu}_1, & D_4\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1\left(2\right), \end{array}$$

Then we have that if $\mu = \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2$, $r = r_1 + r_2$ and $\hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$ the system's solution is given by

$$f_2\left(1\right) = r_1\tilde{\mu}_1, \quad f_1\left(2\right) = r_2\tilde{\mu}_2, \quad \hat{f}_1\left(4\right) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2, \quad \hat{f}_2\left(3\right) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1$$

it's easy to verify that

$$\begin{array}{ll} f_1\left(1\right) = \tilde{\mu}_1\left(r + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right), & f_1\left(3\right) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}_{1,2}^{(1)}\left(1\right)\\ f_1\left(4\right) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}_{2,2}^{(1)}\left(1\right), & f_2\left(2\right) = \left(r + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2,\\ f_2\left(3\right) = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\tilde{\mu}_1}\right) + \hat{F}_{1,1}^{(1)}\left(1\right), & f_2\left(4\right) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \hat{F}_{2,1}^{(1)}\left(1\right),\\ \hat{f}_1\left(1\right) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + F_{1,2}^{(1)}\left(1\right), & \hat{f}_1\left(2\right) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F_{2,2}^{(1)}\left(1\right),\\ \hat{f}_1\left(3\right) = \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1, & \hat{f}_2\left(1\right) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1 + F_{1,1}^{(1)}\left(1\right),\\ \hat{f}_2\left(2\right) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F_{2,1}^{(1)}\left(1\right), & \hat{f}_2\left(4\right) = \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2, \end{array} \tag{33.19.12}$$

with system's solutions given by

$$\begin{array}{ll} f_1\left(1\right) = r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}, & f_2\left(2\right) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu},\\ f_1\left(3\right) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}_{1,2}^{(1)}\left(1\right), & f_1\left(4\right) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}_{2,2}^{(1)}\left(1\right),\\ f_2\left(3\right) = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}_{1,1}^{(1)}\left(1\right), & f_2\left(4\right) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}_{2,1}^{(1)}\left(1\right),\\ \hat{f}_1\left(1\right) = \tilde{\mu}_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F_{1,2}^{(1)}\left(1\right), & \hat{f}_1\left(2\right) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F_{2,2}^{(1)}\left(1\right),\\ \hat{f}_2\left(1\right) = \tilde{\mu}_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F_{1,1}^{(1)}\left(1\right), & \hat{f}_2\left(2\right) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F_{2,1}^{(1)}\left(1\right) \end{array} \tag{33.19.13}$$

33.19.3. General Second Order Derivatives

Now, taking the second order derivative with respect to the equations given in (33.26.20) we obtain it in their general form

$$\begin{array}{rcl} D_kD_iF_1 &=& D_kD_i\left(R_2 + F_2 + \mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right) + D_iR_2D_k\left(F_2 + \mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right) + D_iF_2D_k\left(R_2 + \mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right) + \mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_4D_k\left(R_2 + \right.\\ D_kD_iF_2 &=& D_kD_i\left(R_1 + F_1 + \mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_3\right) + D_iR_1D_k\left(F_1 + \mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right) + D_iF_1D_k\left(R_1 + \mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right) + \mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_3D_k\left(R_1 + \right.\\ D_kD_i\hat{F}_3 &=& D_kD_i\left(\hat{R}_4 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_2 + \hat{F}_4\right) + D_i\hat{R}_4D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2 + \hat{F}_4\right) + D_i\hat{F}_4D_k\left(\hat{R}_4 + \mathbb{1}_{k\leq 2}F_2\right) + \mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_k\left(\hat{R}_4 + \right.\\ D_kD_i\hat{F}_4 &=& D_kD_i\left(\hat{R}_3 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_1 + \hat{F}_3\right) + D_i\hat{R}_3D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1 + \hat{F}_3\right) + D_i\hat{F}_3D_k\left(\hat{R}_3 + \mathbb{1}_{k\leq 2}F_1\right) + \mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_k\left(\hat{R}_3 + \right. \end{array}$$

for $i,k = 1,\ldots,4$. In order to have it in an specific way we need to compute the expressions $D_kD_i\left(R_2 + F_2 + \mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)$

Second Order Derivatives: Serve's Switchover Times

Remind $R_i(z_1, z_2, w_1, w_2) = R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)$, *which we will write in his reduced form* $R_i = R_i\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right)$, *and according to the notation given in [24] we obtain*

$$D_iD_iR_k = D^2R_k(D_iP_i)^2 + DR_kD_iD_iP_i \tag{33.19.14}$$

whereas for $i \neq j$

$$D_iD_jR_k = D^2R_kD_iP_iD_jP_j + DR_kD_jP_jD_iP_i \tag{33.19.15}$$

Second Order Derivatives: Queue Lengths

Just like before the expression $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2\right)$, *will be denoted by* $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right), z_2\right)$, *then the mixed partial derivatives are:*

$$\begin{aligned}
D_jD_iF_1 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1D_1F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_iP_iD_jP_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_iP_iD_jP_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i + \mathbb{1}_{i\neq j}D_iP\right.\\
&+ (1-\mathbb{1}_{i=j=3})\mathbb{1}_{i+j\leq 6}D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_jP_j + \mathbb{1}_{i>j}D_iP_i\right) + \mathbb{1}_{i=2}\left(D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_iP_i + D_i^2F_1\right)
\end{aligned}$$

Recall the expression for $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2\right)$, *which is denoted by* $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right), z_2\right)$, *then the mixed partial derivatives are given by*

$$\begin{array}{llll}
D_1D_1F_1 = 0, & D_2D_1F_1 = 0, & D_3D_1F_1 = 0, & D_4D_1F_1 = 0,\\
D_1D_2F_1 = 0, & D_1D_3F_1 = 0, & D_1D_4F_1 = 0, &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_2\tilde{P}_2\right)^2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_2\tilde{P}_2\right)^2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2^2\tilde{P}_2 + D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2\\
&+ D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2 + D_2D_2F_1\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 + f_1(1)\tilde{\theta}_1^{(}2)\tilde{\mu}_2^{(2)} + f_1(1)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)} + f_1(1,2)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1(1,2)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1(2,2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1(1)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1(1)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1(1,2)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + f_1(1)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + f_1(1)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1(1,2)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2 + D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1(1)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1(1)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1(1,2)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3^2\hat{P}_1\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 + f_1(1)\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_1^2 + f_1(1)\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1\left(1\right)\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1\left(1,2\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4^2\hat{P}_2\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_2^2 + f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}
\end{aligned}$$

Meanwhile for $F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\hat{P}_1\hat{P}_2\right)\right)$

$$\begin{aligned}
D_jD_iF_2 &= \mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2D_2F_2\left(D\theta_2\right)^2D_iP_iD_jP_j + \mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2F_2D^2\theta_2D_iP_iD_jP_j\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2F_2D\theta_2\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i + \mathbb{1}_{i\neq j}D_iP_iD_jP_j\right)\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq6}D_2D_1F_2D\theta_2\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_jP_j + \mathbb{1}_{i>j}D_iP_i\right) + \mathbb{1}_{i=1}\left(D_2D_1F_2D\theta_2D_iP_i + D_i^2F_2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll}
D_2D_1F_2=0, & D_2D_3F_3=0, & D_2D_4F_2=0, & \\
D_1D_2F_2=0, & D_2D_2F_2=0, & D_3D_2F_2=0, & D_4D_2F_2=0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
D_1D_1F_2 &= \left(D_1P_1\right)^2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_2^2F_2 + \left(D_1P_1\right)^2D^2\tilde{\theta}_2D_2F_2 + D_1^2P_1D\tilde{\theta}_2D_2F_2 + D_1P_1D\tilde{\theta}_2D_2D_1F_2\\
&+ D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_1^2F_2\\
&= f_2\left(2\right)\frac{\tilde{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2\right)\theta_2^{(2)}\tilde{\mu}_1^2 + f_2\left(2,1\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} + \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2f_2\left(2,2\right) + \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(2,1\right) + f_2\left(1,1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_1F_2 &= D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_3P_1D_1P_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1\\
&= f_2\left(2,1\right)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_1F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_4P_2D_1P_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2,1\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1 + D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2,1\right)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2+D_2F_2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2D^2\tilde{\theta}_2+D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3^2\hat{P}_1\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\hat{\mu}_1^2+f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1^2+f_2\left(2\right)\frac{\hat{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1+D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1+D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+f_2\left(2\right)\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_4F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_1P_1D_4\hat{P}_2+D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2+D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1+D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}+f_2\left(2,1\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_4F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1+D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1+D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+f_2\left(2\right)\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_4F_2 &= D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4^2\hat{P}_2+D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2+D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2+f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_2^2+f_2\left(2\right)\frac{\hat{P}_2^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

For $\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_2\right),w_2\right)$

$$
\begin{aligned}
D_jD_i\hat{F}_1 &= \mathbb{1}_{i,j\neq3}D_3D_3\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq3}D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i+\mathbb{1}_{i\neq j}D_iP\right.\\
&+ \mathbb{1}_{i+j\geq5}D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_iP_i+\mathbb{1}_{i>j}D_jP_j\right)+\mathbb{1}_{i=4}\left(D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i+D_i^2\hat{F}_1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llll}
D_3D_1\hat{F}_1=0, & D_3D_2\hat{F}_1=0, & D_1D_3\hat{F}_1=0, & D_2D_3\hat{F}_1=0\\
D_3D_3\hat{F}_1=0, & D_4D_3\hat{F}_1=0, & D_3D_4\hat{F}_1=0, &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_1\hat{F}_1 &= D_3^2\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2\left(D_1P_1\right)^2+D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1\left(D_1P_1\right)^2+D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1^2P_1\\
&= \hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2+\hat{f}_1\left(3\right)\frac{P_1^{(2)}}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2D_1\hat{F}_1 &= D_3^2\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_1P_1D_2P_1+D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_1P_1D_2P_2+D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1D_2P_2\\
&= \hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{f}_1\left(3\right)\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}+\hat{f}_1\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_1\hat{F}_1 &= D_3D_3\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_4\hat{P}_2D_1P_1+D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_1P_1D_4\hat{P}_2+D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1D_4\hat{P}_2+D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1\\
&= \hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+\hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{f}_1\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3,4\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}D_1D_2\hat{F}_1 &= D_3^2\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1P_1D_2P_2 + D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_1P_1D_2P_2 + D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1D_2P_2\\ &= \hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_1\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_2D_2\hat{F}_1 &= D_3^2\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2\left(D_2P_2\right)^2 + D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1\left(D_2P_2\right)^2 + D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2^2P_2\\ &= \hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2 + \hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2^2 + \hat{f}_1\left(3\right)\tilde{P}_2^{(2)}\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_4D_2\hat{F}_1 &= D_3^2\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_4\hat{P}_2D_2P_2 + D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_2P_2D_4\hat{P}_2 + D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2P_2D_4\hat{P}_2 + D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2P_2\\ &= \hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1} + \hat{f}_1\left(3,4\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_1D_4\hat{F}_1 &= D_3D_3\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1\\ &= \hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1} + \hat{f}_1\left(3,4\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_2D_4\hat{F}_1 &= D_3^2\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_2P_2D_4\hat{P}_2 + D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_2P_2D_4\hat{P}_2 + D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2P_2D_4\hat{P}_2 + D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2P_2\\ &= \hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1} + \hat{f}_1\left(3,4\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_4D_4\hat{F}_1 &= D_3^2\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_4^2\hat{P}_2 + D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_4\hat{P}_2\\ &+ D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_4\hat{P}_2 + D_4D_4\hat{F}_1\\ &= \hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2 + \hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_2^2 + \hat{f}_1\left(3\right)\frac{\hat{P}_2^{(2)}}{1-\hat{\mu}_1} + \hat{f}_1\left(3,4\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1} + \hat{f}_1\left(3,4\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1} + \hat{f}_1\left(4,4\right)\end{aligned}$$

Finally for $\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_1\right)\right)$

$$\begin{aligned}D_jD_i\hat{F}_2 &= 1\!\!1_{i,j\neq4}D_4D_4\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_iP_iD_jP_j + 1\!\!1_{i,j\neq4}D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_iP_iD_jP_j + 1\!\!1_{i,j\neq4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2\left(1\!\!1_{i=j}D_i^2P_i + 1\!\!1_{i\neq j}D_iP\right.\\ &+ \left(1-1\!\!1_{i=j=2}\right)1\!\!1_{i+j\geq4}D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2\left(1\!\!1_{i\leq j}D_iP_i + 1\!\!1_{i>j}D_jP_j\right) + 1\!\!1_{i=3}\left(D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i + D_i^2\hat{F}_2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&D_4D_1\hat{F}_2 = 0,\quad D_4D_2\hat{F}_2 = 0,\quad D_4D_3\hat{F}_2 = 0,\quad D_1D_4\hat{F}_2 = 0\\ &D_2D_4\hat{F}_2 = 0,\quad D_3D_4\hat{F}_2 = 0,\quad D_4D_4\hat{F}_2 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_1D_1\hat{F}_2 &= D_4^2\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2\left(D_1P_1\right)^2 + D_4\hat{F}_2\hat{\theta}_2\left(D_1P_1\right)^2D^2 + D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1^2P_1\\ &= \hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 + \hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1^2 + \hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_2D_1\hat{F}_2 &= D_4^2\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_1P_1D_2P_2 + D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_1P_1D_2P_2 + D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1D_2P_2\\ &= \hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_1\hat{F}_2 &= D_4^2\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1\\
&= \hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4,3\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1D_2\hat{F}_2 &= D_4D_4\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_1P_1D_2P_2 + D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_1P_1D_2P_2 + D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1D_2P_2\\
&= \hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_2\hat{F}_2 &= D_4^2\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2\left(D_2P_2\right)^2 + D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2\left(D_2P_2\right)^2 + D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2^2P_2\\
&= \hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 + \hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2^2 + \hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{P}_2^{(2)}}{1-\hat{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_2\hat{F}_2 &= D_4^2\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_2P_2D_3\hat{P}_1 + D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_2P_2D_3\hat{P}_1 + D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2P_2D_3\hat{P}_1 + D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2P_2\\
&= \hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4,3\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1D_3\hat{F}_2 &= D_4D_4\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1\\
&= \hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4,3\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_3\hat{F}_2 &= D_4^2\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_2P_2D_3\hat{P}_1 + D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_2P_2D_3\hat{P}_1 + D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2P_2D_3\hat{P}_1 + D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2P_2\\
&= \hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4,3\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_3\hat{F}_2 &= D_4^2\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_3^2\hat{P}_1 + D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_3\hat{P}_1\\
&+ D_4D_3\hat{f}_2D\hat{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_3^2\hat{F}_2\\
&= \hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 + \hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1^2 + \hat{f}_2\left(4\right)\frac{\hat{P}_1^{(2)}}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4,3\right)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4,3\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(3,3\right)
\end{aligned}$$

33.19.4. Second Grade Derivative Recursive Equations

Then according to the equations given at the beginning of this section, we have

$$\begin{aligned}
D_kD_iF_1 &= D_kD_i\left(R_2 + F_2 + \mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right) + D_iR_2D_k\left(F_2 + \mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)\\
&+ D_iF_2D_k\left(R_2 + \mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right) + \mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_4D_k\left(R_2 + F_2\right)
\end{aligned}$$

F_1

F_1 and $i = 1$

for $i = 1$, and $k = 1$

$$\begin{aligned}
D_1D_1F_1 &= D_1D_1\left(R_2+F_2\right)+D_1R_2D_1F_2+D_1F_2D_1R_2 = D_1^2R_2+D_1^2F_2+D_1R_2D_1F_2+D_1F_2D_1R_2\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1+r_2\tilde{P}_1^{(2)}+D_1^2F_2+2r_2\tilde{\mu}_1f_2\left(1\right)
\end{aligned}$$

$k=2$

$$\begin{aligned}
D_2D_iF_1 &= D_2D_1\left(R_2+F_2\right)+D_1R_2D_2F_2+D_1F_2D_2R_2 = D_2D_1R_2+D_2D_1F_2+D_1R_2D_2F_2+D_1F_2D_2R_2\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+r_2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+D_2D_1F_2+r_2\tilde{\mu}_1f_2\left(2\right)+r_2\tilde{\mu}_2f_2\left(1\right)
\end{aligned}$$

$k=3$

$$\begin{aligned}
D_3D_1F_1 &= D_3D_1\left(R_2+F_2\right)+D_1R_2D_3\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_1F_2D_3\left(R_2+\hat{F}_4\right)\\
&= D_3D_1R_2+D_3D_1F_2+D_1R_2D_3F_2+D_1R_2D_3\hat{F}_4+D_1F_2D_3R_2+D_1F_2D_3\hat{F}_4\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+r_2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+D_3D_1F_2+r_2\tilde{\mu}_1f_2\left(3\right)+r_2\tilde{\mu}_1D_3\hat{F}_4+r_2\hat{\mu}_1f_2\left(1\right)+D_3\hat{F}_4f_2\left(1\right)
\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_1F_1 &= D_4D_1\left(R_2+F_2\right)+D_1R_2D_4\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_1F_2D_4\left(R_2+\hat{F}_4\right)\\
&= D_4D_1R_2+D_4D_1F_2+D_1R_2D_4F_2+D_1R_2D_4\hat{F}_4+D_1F_2D_4R_2+D_1F_2D_4\hat{F}_4\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+r_2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+D_4D_1F_2+r_2\tilde{\mu}_1f_2\left(4\right)+r_2\tilde{\mu}_1D_4\hat{F}_4+r_2\hat{\mu}_2f_2\left(1\right)+f_2\left(1\right)D_4\hat{F}_4
\end{aligned}$$

F_1 and $i=2$

for $i=2$,
$k=2$

$$\begin{aligned}
D_2D_2F_1 &= D_2D_2\left(R_2+F_2\right)+D_2R_2D_2F_2+D_2F_2D_2R_2 = D_2D_2R_2+D_2D_2F_2+D_2R_2D_2F_2+D_2F_2D_2R_2\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2^2+r_2\tilde{P}_2^{(2)}+D_2D_2F_2+2r_2\tilde{\mu}_2f_2\left(2\right)
\end{aligned}$$

$k=3$

$$\begin{aligned}
D_3D_2F_1 &= D_3D_2\left(R_2+F_2\right)+D_2R_2D_3\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_2F_2D_3\left(R_2+\hat{F}_4\right)\\
&= D_3D_2R_2+D_3D_2F_2+D_2R_2D_3F_2+D_2R_2D_3\hat{F}_4+D_2F_2D_3R_2+D_2F_2D_3\hat{F}_4\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+D_3D_2F_2+r_2\tilde{\mu}_2f_2\left(3\right)+r_2\tilde{\mu}_2D_3\hat{F}_4+r_2\hat{\mu}_1f_2\left(2\right)+f_2\left(2\right)D_3\hat{F}_4
\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_2F_1 &= D_4D_2\left(R_2+F_2\right)+D_2R_2D_4\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_2F_2D_4\left(R_2+\hat{F}_4\right)\\
&= D_4D_2R_2+D_4D_2F_2+D_2R_2D_4F_2+D_2R_2D_4\hat{F}_4+D_2F_2D_4R_2+D_2F_2D_4\hat{F}_4\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+D_4D_2F_2+r_2\tilde{\mu}_2f_2\left(4\right)+r_2\tilde{\mu}_2D_4\hat{F}_4+r_2\hat{\mu}_2f_2\left(2\right)+f_2\left(2\right)D_4\hat{F}_4
\end{aligned}$$

F_1 and $i=3$

for $i=3$, *and* $k=3$

$$\begin{aligned}
D_3D_3F_1 &= D_3D_3\left(R_2+F_2+\hat{F}_4\right)+D_3R_2D_3\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_3F_2D_3\left(R_2+\hat{F}_4\right)+D_3\hat{F}_4D_3\left(R_2+F_2\right)\\
&= D_3D_3R_2+D_3D_3F_2+D_3D_3\hat{F}_4+D_3R_2D_3F_2+D_3R_2D_3\hat{F}_4\\
&+ D_3F_2D_3R_2+D_3F_2D_3\hat{F}_4+D_3\hat{F}_4D_3R_2+D_3\hat{F}_4D_3F_2\\
&= R_2^{(2)}\hat{\mu}_1^2+r_2\hat{P}_1^{(2)}+D_3D_3F_2+D_3D_3\hat{F}_4+r_2\hat{\mu}_1f_2\left(3\right)+r_2\hat{\mu}_1D_3\hat{F}_4\\
&+ r_2\hat{\mu}_1f_2\left(3\right)+f_2\left(3\right)D_3\hat{F}_4+r_2\hat{\mu}_1D_3\hat{F}_4+f_2\left(3\right)D_3\hat{F}_4
\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_3F_1 &= D_4D_3\left(R_2+F_2+\hat{F}_4\right)+D_3R_2D_4\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_3F_2D_4\left(R_2+\hat{F}_4\right)+D_3\hat{F}_4D_4\left(R_2+F_2\right)\\
&= D_4D_3R_2+D_4D_3F_2+D_4D_3\hat{F}_4+D_3R_2D_4F_2+D_3R_2D_4\hat{F}_4\\
&+ D_3F_2D_4R_2+D_3F_2D_4\hat{F}_4+D_3\hat{F}_4D_4R_2+D_3\hat{F}_4D_4F_2\\
&= R_2^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+r_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+D_4D_3F_2+D_4D_3\hat{F}_4+r_2\hat{\mu}_1f_2\left(4\right)+r_2\hat{\mu}_1D_4\hat{F}_4\\
&+ r_2\hat{\mu}_2f_2\left(3\right)+D_4\hat{F}_4f_2\left(3\right)+D_3\hat{F}_4r_2\hat{\mu}_2+D_3\hat{F}_4f_2\left(4\right)
\end{aligned}$$

F_1 and $i = 4$

for $i = 4$, $k = 4$

$$
\begin{aligned}
D_4 D_4 F_1 &= D_4 D_4 \left(R_2 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_4 R_2 D_4 \left(F_2 + \hat{F}_4\right) + D_4 F_2 D_4 \left(R_2 + \hat{F}_4\right) + D_4 \hat{F}_4 D_4 \left(R_2 + F_2\right) \\
&= D_4 D_4 R_2 + D_4 D_4 F_2 + D_4 D_4 \hat{F}_4 + D_4 R_2 D_4 F_2 + D_4 R_2 D_4 \hat{F}_4 \\
&+ D_4 F_2 D_4 R_2 + D_4 F_2 D_4 \hat{F}_4 + D_4 \hat{F}_4 D_4 R_2 + D_4 \hat{F}_4 D_4 F_2 \\
&= R_2^{(2)} \hat{\mu}_2^2 + r_2 \hat{P}_2^{(2)} + D_4 D_4 F_2 + D_4 D_4 \hat{F}_4 + r_2 \hat{\mu}_2 f_2 (4) + r_2 \hat{\mu}_2 D_4 \hat{F}_4 \\
&+ r_2 \hat{\mu}_2 f_2 (4) + D_4 \hat{F}_4 f_2 (4) + D_4 \hat{F}_4 r_2 \hat{\mu}_2 + D_4 \hat{F}_4 f_2 (4)
\end{aligned}
$$

F_2

$$
D_k D_i F_2 = D_k D_i \left(R_1 + F_1 + \mathbb{1}_{i \geq 3} \hat{F}_3\right) + D_i R_1 D_k \left(F_1 + \mathbb{1}_{k \geq 3} \hat{F}_3\right) + D_i F_1 D_k \left(R_1 + \mathbb{1}_{k \geq 3} \hat{F}_3\right) + \mathbb{1}_{i \geq 3} D_i \hat{F}_3 D_k \left(R_1 + F_1\right) \qquad (33.19.
$$

F_2 and $i = 1$

$i = 1$, $k = 1$

$$
\begin{aligned}
D_1 D_1 F_2 &= D_1 D_1 \left(R_1 + F_1\right) + D_1 R_1 D_1 F_1 + D_1 F_1 D_1 R_1 = D_1^2 R_1 + D_1^2 F_1 + D_1 R_1 D_1 F_1 + D_1 F_1 D_1 R_1 \\
&= R_1^2 \tilde{\mu}_1^2 + r_1 \tilde{P}_1^{(2)} + D_1^2 F_1 + 2 r_1 \tilde{\mu}_1 f_1 (1)
\end{aligned}
$$

$k = 2$

$$
\begin{aligned}
D_2 D_1 F_2 &= D_2 D_1 \left(R_1 + F_1\right) + D_1 R_1 D_2 F_1 + D_1 F_1 D_2 R_1 = D_2 D_1 R_1 + D_2 D_1 F_1 + D_1 R_1 D_2 F_1 + D_1 F_1 D_2 R_1 \\
&= R_1^{(2)} \tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2 + r_1 \tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2 + D_2 D_1 F_1 + r_1 \tilde{\mu}_1 f_1 (2) + r_1 \tilde{\mu}_2 f_1 (1)
\end{aligned}
$$

$k = 3$

$$
\begin{aligned}
D_3 D_1 F_2 &= D_3 D_1 \left(R_1 + F_1\right) + D_1 R_1 D_3 \left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_1 F_1 D_3 \left(R_1 + \hat{F}_3\right) \\
&= D_3 D_1 R_1 + D_3 D_1 F_1 + D_1 R_1 D_3 F_1 + D_1 R_1 D_3 \hat{F}_3 + D_1 F_1 D_3 R_1 + D_1 F_1 D_3 \hat{F}_3 \\
&= R_1^{(2)} \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_1 + r_1 \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_1 + D_3 D_1 F_1 + r_1 \tilde{\mu}_1 f_1 (3) + r_1 \tilde{\mu}_1 D_3 \hat{F}_3 + r_1 \hat{\mu}_1 f_1 (1) + D_3 \hat{F}_3 f_1 (1)
\end{aligned}
$$

$k = 4$

$$
\begin{aligned}
D_4 D_1 F_2 &= D_4 D_1 \left(R_1 + F_1\right) + D_1 R_1 D_4 \left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_1 F_1 D_4 \left(R_1 + \hat{F}_3\right) \\
&= D_4 D_1 R_1 + D_4 D_1 F_1 + D_1 R_1 D_4 F_1 + D_1 R_1 D_4 \hat{F}_3 + D_1 F_1 D_4 R_1 + D_1 F_1 D_4 \hat{F}_3 \\
&= R_1^{(2)} \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_2 + r_1 \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_2 + D_4 D_1 F_1 + r_1 \tilde{\mu}_1 f_1 (4) + \tilde{\mu}_1 D_4 f_3 (4) + \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_2 f_1 (1) + f_1 (1) D_4 F_4
\end{aligned}
$$

F_2 and $i = 2$

$i = 2$ $k = 2$

$$
\begin{aligned}
D_2 D_2 F_2 &= D_2 D_2 \left(R_1 + F_1\right) + D_2 R_1 D_2 F_1 + D_2 F_1 D_2 R_1 = D_2 D_2 R_1 + D_2 D_2 F_1 + D_2 R_1 D_2 F_1 + D_2 F_1 D_2 R_1 \\
&= R_1^{(2)} \tilde{\mu}_2^2 + r_1 \tilde{P}_2^{(2)} + D_2 D_2 F_1 2 r_1 \tilde{\mu}_2 f_1 (2)
\end{aligned}
$$

$k = 3$

$$
\begin{aligned}
D_3 D_2 F_2 &= D_3 D_2 \left(R_1 + F_1\right) + D_2 R_1 D_3 \left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_2 F_1 D_3 \left(R_1 + \hat{F}_3\right) \\
&= D_3 D_2 R_1 + D_3 D_2 F_1 + D_2 R_1 D_3 F_1 + D_2 R_1 D_3 \hat{F}_3 + D_2 F_1 D_3 R_1 + D_2 F_1 D_3 \hat{F}_3 \\
&= R_1^{(2)} \tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_1 + r_1 \tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_1 + D_3 D_2 F_1 + r_1 \tilde{\mu}_2 f_1 (3) + r_1 \tilde{\mu}_2 D_3 \hat{F}_3 + r_1 \hat{\mu}_1 f_1 (2) + D_3 \hat{F}_3 f_1 (2)
\end{aligned}
$$

$k = 4$

$$
\begin{aligned}
D_4 D_2 F_2 &= D_4 D_2 \left(R_1 + F_1\right) + D_2 R_1 D_4 \left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_2 F_1 D_4 \left(R_1 + \hat{F}_3\right) \\
&= D_4 D_2 R_1 + D_4 D_2 F_1 + D_2 R_1 D_4 F_1 + D_2 R_1 D_4 \hat{F}_3 + D_2 F_1 D_4 R_1 + D_2 F_1 D_4 \hat{F}_3 \\
&= R_1^{(2)} \tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_2 + r_1 \tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_2 + D_4 D_2 F_1 + r_1 \tilde{\mu}_2 f_1 (4) + r_1 \tilde{\mu}_2 D_4 \hat{F}_3 + r_1 \hat{\mu}_2 f_1 (2) + D_4 \hat{F}_3 f_1 (2)
\end{aligned}
$$

F_2 and $i = 3$

$i = 3$ $k = 3$

$$\begin{aligned}
D_3D_3F_2 &= D_3D_3\left(R_1 + F_1 + \hat{F}_3\right) + D_3R_1D_3\left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_3F_1D_3\left(R_1 + \hat{F}_3\right) + D_3\hat{F}_3D_3\left(R_1 + F_1\right)\\
&= D_3D_3R_1 + D_3D_3F_1 + D_3D_3\hat{F}_3 + D_3R_1D_3F_1 + D_3R_1D_3\hat{F}_3\\
&+ D_3F_1D_3R_1 + D_3F_1D_3\hat{F}_3 + D_3\hat{F}_3D_3R_1 + D_3\hat{F}_3D_3F_1\\
&= R_1^{(2)}\hat{\mu}_1^2 + r_1\hat{P}_1^{(2)} + D_3D_3F_1 + D_3D_3\hat{F}_3 + r_1\hat{\mu}_1f_1(3) + r_1\hat{\mu}_1f_3(3)\\
&+ r_1\hat{\mu}_1f_1(3) + D_3\hat{F}_3f_1(3) + D_3\hat{F}_3r_1\hat{\mu}_1 + D_3\hat{F}_3f_1(3)
\end{aligned}$$

$k = 4$

$$\begin{aligned}
D_4D_3F_2 &= D_4D_3\left(R_1 + F_1 + \hat{F}_3\right) + D_3R_1D_4\left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_3F_1D_4\left(R_1 + \hat{F}_3\right) + D_3\hat{F}_3D_4\left(R_1 + F_1\right)\\
&= D_4D_3R_1 + D_4D_3F_1 + D_4D_3\hat{F}_3 + D_3R_1D_4F_1 + D_3R_1D_4\hat{F}_3\\
&+ D_3F_1D_4R_1 + D_3F_1D_4\hat{F}_3 + D_3\hat{F}_3D_4R_1 + D_3\hat{F}_3D_4F_1\\
&= R_1^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + D_4D_3F_1 + D_4D_3\hat{F}_3 + r_1\hat{\mu}_1f_1(4) + r_1\hat{\mu}_1D_4\hat{F}_3\\
&+ r_1\hat{\mu}_2f_1(3) + D_4\hat{F}_3f_1(3) + r_1\hat{\mu}_2D_3\hat{F}_3 + D_3\hat{F}_3f_1(4)
\end{aligned}$$

F_2 and $i = 4$

$i = 4$ *and* $k = 4$

$$\begin{aligned}
D_4D_4F_2 &= D_4D_4\left(R_1 + F_1 + \hat{F}_3\right) + D_4R_1D_4\left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_4F_1D_4\left(R_1 + \hat{F}_3\right) + D_4\hat{F}_3D_4\left(R_1 + F_1\right)\\
&= D_4D_4R_1 + D_4D_4F_1 + D_4D_4\hat{F}_3 + D_4R_1D_4F_1 + D_4R_1D_4\hat{F}_3\\
&+ D_4F_1D_4R_1 + D_4F_1D_4\hat{F}_3 + D_4\hat{F}_3D_4R_1 + D_4\hat{F}_3D_4F_1\\
&= R_1^{(2)}\hat{\mu}_2^2 + r_1\hat{P}_2^{(2)} + D_4D_4F_1 + D_4D_4\hat{F}_3 + f_1(4)\,r_1\hat{\mu}_2 + r_1\hat{\mu}_2D_4\hat{F}_3\\
&+ r_1\hat{\mu}_2f_1(4) + D_4\hat{F}_3f_1(4) + D_4\hat{F}_3r_1\hat{\mu}_2 + D_4\hat{F}_3f_1(4)
\end{aligned}$$

$\hat{F}_1$

$$D_kD_i\hat{F}_1 = D_kD_i\left(\hat{R}_4 + 1\!\!1_{i\leq 2}F_2 + \hat{F}_4\right) + D_i\hat{R}_4D_k\left(1\!\!1_{k\leq 2}F_2 + \hat{F}_4\right) + D_i\hat{F}_4D_k\left(\hat{R}_4 + 1\!\!1_{k\leq 2}F_2\right) + 1\!\!1_{i\leq 2}D_iF_2D_k\left(\hat{R}_4\right. \quad (33.19$$

$\hat{F}_1$, $i = 1$

$i = 1$ *and* $k = 1$

$$\begin{aligned}
D_1D_1\hat{F}_1 &= D_1D_1\left(\hat{R}_4 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_1\hat{R}_4D_1\left(F_2 + \hat{F}_4\right) + D_1\hat{F}_4D_1\left(\hat{R}_4 + F_2\right) + D_1F_2D_1\left(\hat{R}_4 + \hat{F}_4\right)\\
&= D_1^2\hat{R}_4 + D_1^2F_2 + D_1^2\hat{F}_4 + D_1\hat{R}_4D_1F_2 + D_1\hat{R}_4D_1\hat{F}_4 + D_1\hat{F}_4D_1\hat{R}_4 + D_1\hat{F}_4D_1F_2 + D_1F_2D_1\hat{R}_4 + D_1F_2D_1\hat{F}\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1^2 + \hat{r}_2\tilde{P}_1^{(2)} + D_1^2F_2 + D_1^2\hat{F}_4 + \hat{r}_2\tilde{\mu}_1D_1F_2\\
&+ \hat{r}_2\tilde{\mu}_1\hat{f}_2(1) + \hat{f}_2(1)\,\hat{r}_2\tilde{\mu}_1 + \hat{f}_2(1)\,D_1F_2 + D_1F_2\hat{r}_2\tilde{\mu}_1 + D_1F_2\hat{f}_2(1)
\end{aligned}$$

$k = 2$

$$\begin{aligned}
D_2D_1\hat{F}_1 &= D_2D_1\left(\hat{R}_4 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_1\hat{R}_4D_2\left(F_2 + \hat{F}_4\right) + D_1\hat{F}_4D_2\left(\hat{R}_4 + F_2\right) + D_1F_2D_2\left(\hat{R}_4 + \hat{F}_4\right)\\
&= D_2D_1\hat{R}_4 + D_2D_1F_2 + D_2D_1\hat{F}_4 + D_1\hat{R}_4D_2F_2 + D_1\hat{R}_4D_2\hat{F}_4\\
&+ D_1\hat{F}_4D_2\hat{R}_4 + D_1\hat{F}_4D_2F_2 + D_1F_2D_2\hat{R}_4 + D_1F_2D_2\hat{F}_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + \hat{r}_2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + D_2D_1F_2 + D_2D_1\hat{F}_4 + \hat{r}_2\tilde{\mu}_1D_2F_2 + \hat{r}_2\tilde{\mu}_1\hat{f}_2(2)\\
&+ \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2(1) + \hat{f}_2(1)\,D_2F_2 + \hat{r}_2\tilde{\mu}_2D_1F_2 + D_1F_2\hat{f}_2(2)
\end{aligned}$$

$k = 3$

$$\begin{aligned}
D_3D_1\hat{F}_1 &= D_3D_1\left(\hat{R}_4 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_1\hat{R}_4D_3\left(\hat{F}_4\right) + D_1\hat{F}_4D_3\hat{R}_4 + D_1F_2D_3\left(\hat{R}_4 + \hat{F}_4\right)\\
&= D_3D_1\hat{R}_4 + D_3D_1F_2 + D_3D_1\hat{F}_4 + D_1\hat{R}_4D_3\hat{F}_4 + D_1\hat{F}_4D_3\hat{R}_4 + D_1F_2D_3\hat{R}_4 + D_1F_2D_3\hat{F}_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + \hat{r}_2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + D_3D_1F_2 + D_3D_1\hat{F}_4 + \hat{r}_2\tilde{\mu}_1\hat{f}_2(3) + \hat{f}_2(1)\,\hat{r}_2\hat{\mu}_1 + D_1F_2\hat{r}_2\hat{\mu}_1 + D_1F_2\hat{f}_2(3)
\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_1\hat{F}_1 &= D_4D_1\left(\hat{R}_4+F_2+\hat{F}_4\right)+D_1\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_1\hat{F}_4D_4\hat{R}_4+D_1F_2D_4\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)\\
&= D_4D_1\hat{R}_4+D_4D_1F_2+D_4D_1\hat{F}_4+D_1\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_1\hat{F}_4D_4\hat{R}_4+D_1F_2D_4\hat{R}_4+D_1F_2D_4\hat{F}_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{r}_2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+D_4D_1F_2+D_4D_1\hat{F}_4+\hat{r}_2\tilde{\mu}_1\hat{f}_2\left(4\right)+\hat{f}_2\left(1\right)\hat{r}_2\hat{\mu}_2+D_1F_2\hat{r}_2\hat{\mu}_2+D_1F_2\hat{f}_2\left(4\right)
\end{aligned}$$

$\hat{F}_1$, $i=2$

$i=2$ *and* $k=2$

$$\begin{aligned}
D_2D_2\hat{F}_1 &= D_2D_2\left(\hat{R}_4+F_2+\hat{F}_4\right)+D_2\hat{R}_4D_2\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_2\hat{F}_4D_2\left(\hat{R}_4+F_2\right)+D_2F_2D_2\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)\\
&= D_2D_2\hat{R}_4+D_2D_2F_2+D_2D_2\hat{F}_4+D_2\hat{R}_4D_2F_2+D_2\hat{R}_4D_2\hat{F}_4\\
&+ D_2\hat{F}_4D_2\hat{R}_4+D_2\hat{F}_4D_2F_2+D_2F_2D_2\hat{R}_4+D_2F_2D_2\hat{F}_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2^2+\hat{r}_2\tilde{P}_1^{(2)}+D_2D_2F_2+D_2D_2\hat{F}_4+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2D_2F_2+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2\left(4\right)\\
&+ \hat{f}_2\left(4\right)\hat{r}_2\tilde{\mu}_2+\hat{f}_2\left(4\right)D_2F_2+D_2F_2\hat{r}_2\tilde{\mu}_2+D_2F_2\hat{f}_2\left(4\right)
\end{aligned}$$

$k=3$

$$\begin{aligned}
D_3D_2\hat{F}_1 &= D_3D_2\left(\hat{R}_4+F_2+\hat{F}_4\right)+D_2\hat{R}_4D_3\hat{F}_4+D_2\hat{F}_4D_3\hat{R}_4+D_2F_2D_3\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)\\
&= D_3D_2\hat{R}_4+D_3D_2F_2+D_3D_2\hat{F}_4+D_2\hat{R}_4D_3\hat{F}_4+D_2\hat{F}_4D_3\hat{R}_4+D_2F_2D_3\hat{R}_4+D_2F_2D_3\hat{F}_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+D_3D_2F_2+D_3D_2\hat{F}_4+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2\left(3\right)+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{r}_2\hat{\mu}_1+\hat{r}_2\hat{\mu}_1D_2F_2+D_2F_2\hat{f}_2\left(3\right)
\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_2\hat{F}_1 &= D_4D_2\left(\hat{R}_4+F_2+\hat{F}_4\right)+D_2\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_2\hat{F}_4D_4\hat{R}_4+D_2F_2D_4\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)\\
&= D_4D_2\hat{R}_4+D_4D_2F_2+D_4D_2\hat{F}_4+D_2\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_2\hat{F}_4D_4\hat{R}_4+D_2F_2D_4\hat{R}_4+D_2F_2D_4\hat{F}_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+D_4D_2F_2+D_4D_2\hat{F}_4+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2\left(4\right)+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{r}_2\hat{\mu}_2+D_2F_2\hat{r}_2\hat{\mu}_2+D_2F_2\hat{f}_2\left(4\right)
\end{aligned}$$

$\hat{F}_1$, $i=3$

$k=3$

$$\begin{aligned}
D_3D_3\hat{F}_1 &= D_3D_3\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)+D_3\hat{R}_4D_3\hat{F}_4+D_3\hat{F}_4D_3\hat{R}_4=D_3^2\hat{R}_4+D_3^2\hat{F}_4+D_3\hat{R}_4D_3\hat{F}_4+D_3\hat{F}_4D_3\hat{R}_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\hat{\mu}_1^2+\hat{r}_2\hat{P}_1^{(2)}+D_3^2\hat{F}_4+\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{f}_2\left(4\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{f}_2\left(3\right)
\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_3\hat{F}_1 &= D_4D_3\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)+D_3\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_3\hat{F}_4D_4\hat{R}_4=D_4D_3\hat{R}_4+D_4D_3\hat{F}_4+D_3\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_3\hat{F}_4D_4\hat{R}_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+D_4D_3\hat{F}_4+\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{f}_2\left(4\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{f}_2\left(3\right)
\end{aligned}$$

$\hat{F}_1$, $i=4$

$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_4\hat{F}_1 &= D_4D_4\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)+D_4\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_4\hat{F}_4D_4\hat{R}_4=D_4^2\hat{R}_4+D_4^2\hat{F}_4+D_4\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_4\hat{F}_4D_4\hat{R}_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\hat{\mu}_2^2+\hat{r}_2\hat{P}_2^{(2)}+D_4^2\hat{F}_4+2\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{f}_2\left(4\right)
\end{aligned}$$

$\hat{F}_2$

for $\hat{F}_2$

$$\begin{aligned}
D_kD_i\hat{F}_2 &= D_kD_i\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{i\leq2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{R}_3D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{F}_3D_k\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{k\leq2}F_1\right)+\mathbb{1}_{i\leq2}D_iF_1D_k\left(\hat{R}_3+\right. \quad (33.19\\
&= \quad (33.19
\end{aligned}$$

$\hat{F}_2,\ i=1$

$k=1$

$$\begin{aligned}
D_1D_1\hat{F}_2 &= D_1^2\left(\hat{R}_3+F_1+\hat{F}_3\right)+D_1\hat{R}_3D_1\left(F_1+\hat{F}_3\right)+D_1\hat{F}_3D_1\left(\hat{R}_3+F_1\right)+D_1F_1D_1\left(\hat{R}_3+\hat{F}_3\right)\\
&= D_1^2\hat{R}_3+D_1^2F_1+D_1^2\hat{F}_3+D_1\hat{R}_3D_1F_1+D_1\hat{R}_3D_1\hat{F}_3+D_1\hat{F}_3D_1\hat{R}_3+D_1\hat{F}_3D_1F_1+D_1F_1D_1\hat{R}_3+D_1F_1D_1\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1^2+\hat{r}_1\tilde{P}_2^{(2)}+D_1^2F_1+D_1^2\hat{F}_3+D_1F_1\hat{r}_1\tilde{\mu}_1\\
&+ \hat{r}_1\tilde{\mu}_1\hat{f}_1\left(1\right)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1\hat{f}_1\left(1\right)+D_1F_1\hat{f}_1\left(1\right)+D_1F_1\hat{r}_1\tilde{\mu}_1+D_1F_1\hat{f}_1\left(1\right)
\end{aligned}$$

$k=2$

$$\begin{aligned}
D_2D_1\hat{F}_2 &= D_2D_1\left(\hat{R}_3+F_1+\hat{F}_3\right)+D_1\hat{R}_3D_2\left(F_1+\hat{F}_3\right)+D_1\hat{F}_3D_2\left(\hat{R}_3+F_1\right)+D_1F_1D_2\left(\hat{R}_3+\hat{F}_3\right)\\
&= D_2D_1\hat{R}_3+D_2D_1F_1+D_2D_1\hat{F}_3+D_1\hat{R}_3D_2F_1+D_1\hat{R}_3D_2\hat{F}_3\\
&+ D_1\hat{F}_3D_2\hat{R}_3+D_1\hat{F}_3D_2F_1+D_1F_1D_2\hat{R}_3+D_1F_1D_2\hat{F}_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+D_2D_1F_1+D_2D_1\hat{F}_3+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1D_2F_1+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1\hat{f}_1\left(2\right)\\
&+ \hat{f}_1\left(1\right)\hat{r}_1\tilde{\mu}_2+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1D_2F_1+D_1F_1\hat{r}_1\tilde{\mu}_2+D_1F_1\hat{f}_1\left(2\right)
\end{aligned}$$

$k=3$

$$\begin{aligned}
D_3D_1\hat{F}_2 &= D_3D_1\left(\hat{R}_3+F_1+\hat{F}_3\right)+D_1\hat{R}_3D_3\hat{F}_3+D_1\hat{F}_3D_3\hat{R}_3+D_1F_1D_3\left(\hat{R}_3+\hat{F}_3\right)\\
&= D_3D_1\hat{R}_3+D_3D_1F_1+D_3D_1\hat{F}_3+D_1\hat{R}_3D_3\hat{F}_3+D_1\hat{F}_3D_3\hat{R}_3+D_1F_1D_3\hat{R}_3+D_1F_1D_3\hat{F}_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+D_3D_1F_1+D_3D_1\hat{F}_3+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1\hat{f}_1\left(3\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\hat{f}_1\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1D_1F_1+D_1F_1\hat{f}_1\left(3\right)
\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_1\hat{F}_2 &= D_4D_1\left(\hat{R}_3+F_1+\hat{F}_3\right)+D_1\hat{R}_3D_4\hat{F}_3+D_1\hat{F}_3D_4\hat{R}_3+D_1F_1D_4\left(\hat{R}_3+\hat{F}_3\right)\\
&= D_4D_1\hat{R}_3+D_4D_1F_1+D_4D_1\hat{F}_3+D_1\hat{R}_3D_4\hat{F}_3+D_1\hat{F}_3D_4\hat{R}_3+D_1F_1D_4\hat{R}_3+D_1F_1D_4\hat{F}_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+D_4D_1F_1+D_4D_1\hat{F}_3+\hat{f}_1\left(4\right)\hat{r}_1\tilde{\mu}_1+\hat{f}_1\left(3\right)\hat{r}_1\hat{\mu}_2+D_1F_1\hat{r}_1\hat{\mu}_2+D_1F_1\hat{f}_1\left(4\right)
\end{aligned}$$

$\hat{F}_2,\ i=2$

$k=2$

$$\begin{aligned}
D_2D_2\hat{F}_2 &= D_2D_2\left(\hat{R}_3+F_1+\hat{F}_3\right)+D_2\hat{R}_3D_2\left(F_1+\hat{F}_3\right)+D_2\hat{F}_3D_2\left(\hat{R}_3+F_1\right)+D_2F_1D_2\left(\hat{R}_3+\hat{F}_3\right)\\
&= D_2^2\hat{R}_3+D_2^2F_1+D_2^2\hat{F}_3+D_2\hat{R}_3D_2F_1+D_2\hat{R}_3D_2\hat{F}_3+D_2\hat{F}_3D_2\hat{R}_3+D_2\hat{F}_3D_2F_1+D_2F_1D_2\hat{R}_3+D_2F_1D_2\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2^2+\hat{r}_1\tilde{P}_2^{(2)}+D_2^2F_1+D_2^2\hat{F}_3+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2D_2F_1\\
&+ \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{f}_1\left(2\right)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{f}_1\left(2\right)+\hat{f}_1\left(1\right)D_2F_1+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2D_2F_1+\hat{f}_1\left(3\right)D_2F_1
\end{aligned}$$

$k=3$

$$\begin{aligned}
D_3D_2\hat{F}_2 &= D_3D_2\left(\hat{R}_3+F_1+\hat{F}_3\right)+D_2\hat{R}_3D_3\hat{F}_3+D_2\hat{F}_3D_3\hat{R}_3+D_2F_1D_3\left(\hat{R}_3+\hat{F}_3\right)\\
&= D_3D_2\hat{R}_3+D_3D_2F_1+D_3D_2\hat{F}_3+D_2\hat{R}_3D_3\hat{F}_3+D_2\hat{F}_3D_3\hat{R}_3+D_2F_1D_3\hat{R}_3+D_2F_1D_3\hat{F}_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+D_3D_2F_1+D_3D_2\hat{F}_3+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{f}_1\left(3\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\hat{f}_1\left(2\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1D_2F_1+\hat{f}_1\left(3\right)D_2F_1
\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_2\hat{F}_2 &= D_4D_2\left(\hat{R}_3+F_1+\hat{F}_3\right)+D_2\hat{R}_3D_4\hat{F}_3+D_2\hat{F}_3D_4\hat{R}_3+D_2F_1D_4\left(\hat{R}_3+\hat{F}_3\right)\\
&= D_4D_2\hat{R}_3+D_4D_2F_1+\hat{F}_3+D_2\hat{R}_3D_4\hat{F}_3+D_2\hat{F}_3D_4\hat{R}_3+D_2F_1D_4\hat{R}_3+D_2F_1D_4\hat{F}_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+D_4D_2F_1+D_4D_2\hat{F}_3+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{f}_1\left(4\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{f}_1\left(2\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2D_2F_1+\hat{f}_1\left(4\right)D_2F_1
\end{aligned}$$

$\hat{F}_2,\ i=3$

$k=3$

$$\begin{aligned}
D_3D_3\hat{F}_2 &= D_3D_3\left(\hat{R}_3+\hat{F}_3\right)+D_3\hat{R}_3D_3\hat{F}_3+D_3\hat{F}_3D_3\hat{R}_3=D_3^2\hat{R}_3+D_3^2\hat{F}_3+D_3\hat{R}_3D_3\hat{F}_3+D_3\hat{F}_3D_3\hat{R}_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\hat{\mu}_1^2+\hat{r}_1\hat{P}_1^{(2)}+D_3^2\hat{F}_3+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\hat{f}_1\left(3\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\hat{f}_1\left(3\right)
\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_3\hat{F}_2 &= D_4D_3\left(\hat{R}_3+\hat{F}_3\right)+D_3\hat{R}_3D_4\hat{F}_3+D_3\hat{F}_3D_4\hat{R}_3=D_4D_3\hat{R}_3+D_4D_3\hat{F}_3+D_3\hat{R}_3D_4\hat{F}_3+D_3\hat{F}_3D_4\hat{R}_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+D_4D_3\hat{F}_3+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\hat{f}_1\left(4\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{f}_1\left(3\right)
\end{aligned}$$

$i=4$
$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_4\hat{F}_2 &= D_4^2\left(\hat{R}_3+\hat{F}_3\right)+D_4\hat{R}_3D_4\hat{F}_3+D_4\hat{F}_3D_4\hat{R}_3=D_4^2\hat{R}_3+D_4^2\hat{F}_3+D_4\hat{R}_3D_4\hat{F}_3+D_4\hat{F}_3D_4\hat{R}_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\hat{\mu}_2^2+\hat{r}_1\hat{P}_2^{(2)}+D_4^2\hat{F}_3+\hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{f}_1\left(4\right)
\end{aligned}$$

33.20. Generalizaciones

33.20.1. RSVC con dos conexiones

Sus ecuaciones recursivas son de la forma

$$F_1(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_2\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2),$$

$$F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1),$$

$$\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1,w_2) = \hat{R}_2\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right),$$

$$\hat{F}_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = \hat{R}_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right),$$

33.20.2. First Moments of the Queue Lengths

The server's switchover times are given by the general equation

$$R_i(\mathbf{z},\mathbf{w}) = R_i\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.20.1}$$

with

$$D_iR_i = DR_iD_iP_i \tag{33.20.2}$$

the following notation is considered

$$D_1P_1 \equiv D_1\tilde{P}_1, \quad D_2P_2 \equiv D_2\tilde{P}_2, \quad D_3P_3 \equiv D_3\hat{P}_1, \quad D_4P_4 \equiv D_4\hat{P}_2,$$

also we need to remind $F_{1,2}(z_1;\zeta_2)F_{2,2}(z_2;\zeta_2) = F_2(z_1,z_2;\zeta_2)$*, therefore*

$$D_1F_2(z_1,z_2;\zeta_2) = D_1\left[F_{1,2}(z_1;\zeta_2)F_{2,2}(z_2;\zeta_2)\right] = F_{2,2}(z_2;\zeta_2)D_1F_{1,2}(z_1;\zeta_2) = F_{1,2}^{(1)}(1)$$

i.e., $D_1F_2 = F_{1,2}^{(1)}(1)$*;* $D_2F_2 = F_{2,2}^{(1)}(1)$*, whereas that* $D_3F_2 = D_4F_2 = 0$*, then*

$$D_iF_j = 1\!\!1_{i\leq 2}F_{i,j}^{(1)}(1), \quad \text{and} \quad D_i\hat{F}_j = 1\!\!1_{i\geq 2}F_{i,j}^{(1)}(1). \tag{33.20.3}$$

Now, we obtain the first moments equations for the queue lengths as before for the times the server arrives to the queue to start attending
Remember that

$$F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1),$$

where

$$F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$$

so

$$D_iF_1 \quad = \quad \mathbb{1}_{i\neq 1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=2}D_iF_1, \tag{33.20.4}$$

then

$$\begin{array}{ll} D_1F_1 = 0, & D_2F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2P_2 + D_2F_1 = f_1(1)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{\mu}_2 + f_1(2), \\ D_3F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3P_3 = f_1(1)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{\mu}_1, & D_4F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4P_4 = f_1(1)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{\mu}_2 \end{array}$$

$$D_iF_2 \quad = \quad \mathbb{1}_{i\neq 2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=1}D_iF_2 \tag{33.20.5}$$

$$\begin{array}{ll} D_1F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_1F_2 = f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_1, & D_2F_2 = 0 \\ D_3F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3P_3 = f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_1, & D_4F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4P_4 = f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_2 \end{array}$$

$$D_i\hat{F}_1 \quad = \quad \mathbb{1}_{i\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=4}D_i\hat{F}_1, \tag{33.20.6}$$

$$\begin{array}{ll} D_1\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1 = \hat{f}_1(3)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_1, & D_2\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2P_2 = \hat{f}_1(3)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_2 \\ D_3\hat{F}_1 = 0, & D_4\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_4P_4 + D_4\hat{F}_1 = \hat{f}_1(3)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(2), \end{array}$$

$$D_i\hat{F}_2 \quad = \quad \mathbb{1}_{i\neq 4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=3}D_i\hat{F}_2. \tag{33.20.7}$$

$$\begin{array}{ll} D_1\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1 = \hat{f}_2(4)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{\mu}_1, & D_2\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2P_2 = \hat{f}_2(4)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{\mu}_2, \\ D_3\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_3P_3 + D_3\hat{F}_2 = \hat{f}_2(4)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(4) & \\ D_4\hat{F}_2 = 0 & \end{array}$$

Then, now we can obtain the linear system of equations in order to obtain the first moments of the lengths of the queues:
For $\mathbf{F}_1 = R_2F_2\hat{F}_2$ *we get the general equations*

$$D_i\mathbf{F}_1 = D_i\left(R_2 + F_2 + \mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_2\right) \tag{33.20.8}$$

So

$$\begin{aligned} D_1\mathbf{F}_1 &= D_1R_2 + D_1F_2 = r_1\tilde{\mu}_1 + f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_1 \\ D_2\mathbf{F}_1 &= D_2(R_2 + F_2) = r_2\tilde{\mu}_1 \\ D_3\mathbf{F}_1 &= D_3\left(R_2 + F_2 + \hat{F}_2\right) = r_1\hat{\mu}_1 + f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{1,2}(1) \\ D_4\mathbf{F}_1 &= D_4\left(R_2 + F_2 + \hat{F}_2\right) = r_2\hat{\mu}_2 + f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1) \end{aligned}$$

it means

$$\begin{array}{ll} D_1\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_1 + f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + f_2(1), & D_2\mathbf{F}_1 = r_2\tilde{\mu}_2, \\ D_3\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_1 + f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{1,2}(1), & D_4\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_2 + f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1), \end{array}$$

$$\mathbf{F}_2 = R_1F_1\hat{F}_1, \quad D_i\mathbf{F}_2 = D_i\left(R_1 + F_1 + \mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_1\right) \tag{33.20.9}$$

equivalently

$$
\begin{array}{ll}
D_1\mathbf{F}_2 = r_1\tilde{\mu}_1, & D_2\mathbf{F}_2 = r_1\tilde{\mu}_2 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + f_1(2),\\
D_3\mathbf{F}_2 = r_1\hat{\mu}_1 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}_{1,1}^{(1)}(1), & D_4\mathbf{F}_2 = r_1\hat{\mu}_2 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1),
\end{array}
$$

$$
\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{R}_2\hat{F}_2F_2, \quad D_i\hat{\mathbf{F}}_1 = D_i\left(\hat{R}_2 + \hat{F}_2 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_2\right) \tag{33.20.10}
$$

equivalently

$$
\begin{array}{ll}
D_1\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\tilde{\mu}_1 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + F_{1,2}^{(1)}(1), & D_2\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F_{2,2}^{(1)}(1),\\
D_3\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(1), & D_4\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\hat{\mu}_2
\end{array}
$$

$$
\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{R}_1\hat{F}_1F_1, \quad D_i\hat{\mathbf{F}}_2 = D_i\left(\hat{R}_1 + \hat{F}_1 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_1\right) \tag{33.20.11}
$$

equivalently

$$
\begin{array}{ll}
D_1\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\tilde{\mu}_1 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_1 + F_{1,1}^{(1)}(1), & D_2\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\mu_2 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F_{2,1}^{(1)}(1),\\
D_3\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\hat{\mu}_1, & D_4\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(2),
\end{array}
$$

Then we have that if $\mu = \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2$, $r = r_1 + r_2$ and $\hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$ the system's solution is given by

$$
f_2(1) = r_1\tilde{\mu}_1, \quad f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2, \quad \hat{f}_1(4) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2, \quad \hat{f}_2(3) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1
$$

it's easy to verify that

$$
\begin{array}{ll}
f_1(1) = \tilde{\mu}_1\left(r + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right), & f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}_{1,2}^{(1)}(1)\\
f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}_{2,2}^{(1)}(1), & f_2(2) = \left(r + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2,\\
f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\tilde{\mu}_1}\right) + \hat{F}_{1,1}^{(1)}(1), & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1),\\
\hat{f}_1(1) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + F_{1,2}^{(1)}(1), & \hat{f}_1(2) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F_{2,2}^{(1)}(1),\\
\hat{f}_1(3) = \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1, & \hat{f}_2(1) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1 + F_{1,1}^{(1)}(1),\\
\hat{f}_2(2) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F_{2,1}^{(1)}(1), & \hat{f}_2(4) = \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2,
\end{array} \tag{33.20.12}
$$

with system's solutions given by

$$
\begin{array}{ll}
f_1(1) = r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}, & f_2(2) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu},\\
f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}_{1,2}^{(1)}(1), & f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}_{2,2}^{(1)}(1),\\
f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}_{1,1}^{(1)}(1), & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1),\\
\hat{f}_1(1) = \tilde{\mu}_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F_{1,2}^{(1)}(1), & \hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F_{2,2}^{(1)}(1),\\
\hat{f}_2(1) = \tilde{\mu}_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F_{1,1}^{(1)}(1), & \hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F_{2,1}^{(1)}(1)
\end{array} \tag{33.20.13}
$$

33.20.3. General Second Order Derivatives

Now, taking the second order derivative with respect to the equations given in (33.26.20) we obtain it in their general form

$$
\begin{aligned}
D_kD_iF_1 &= D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)+D_iR_2D_k\left(F_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)+D_iF_2D_k\left(R_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_4D_k\left(R_2+\right.\\
D_kD_iF_2 &= D_kD_i\left(R_1+F_1+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_3\right)+D_iR_1D_k\left(F_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right)+D_iF_1D_k\left(R_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_3D_k\left(R_1+\right.\\
D_kD_i\hat{F}_3 &= D_kD_i\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_2+\hat{F}_4\right)+D_i\hat{R}_4D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2+\hat{F}_4\right)+D_i\hat{F}_4D_k\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_k\left(\hat{R}_4+\right.\\
D_kD_i\hat{F}_4 &= D_kD_i\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{R}_3D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{F}_3D_k\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_k\left(\hat{R}_3+\right.
\end{aligned}
$$

for $i,k=1,\ldots,4$. *In order to have it in an specific way we need to compute the expressions* $D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)$

Second Order Derivatives: Serve's Switchover Times

Remind $R_i\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)=R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)$, *which we will write in his reduced form* $R_i=R_i\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right)$, *and according to the notation given in [24] we obtain*

$$
D_iD_iR_k=D^2R_k\left(D_iP_i\right)^2+DR_kD_iD_iP_i \tag{33.20.14}
$$

whereas for $i\neq j$

$$
D_iD_jR_k=D^2R_kD_iP_iD_jP_j+DR_kD_jP_jD_iP_i \tag{33.20.15}
$$

Second Order Derivatives: Queue Lengths

Just like before the expression $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)$, *will be denoted by* $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$, *then the mixed partial derivatives are:*

$$
\begin{aligned}
D_jD_iF_1 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1D_1F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i+\mathbb{1}_{i\neq j}D_iP\right.\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq 6}D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_jP_j+\mathbb{1}_{i>j}D_iP_i\right)+\mathbb{1}_{i=2}\left(D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_iP_i+D_i^2F_1\right)
\end{aligned}
$$

Recall the expression for $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)$, *which is denoted by* $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$, *then the mixed partial derivatives are given by*

$$
\begin{array}{llll}
D_1D_1F_1=0, & D_2D_1F_1=0, & D_3D_1F_1=0, & D_4D_1F_1=0,\\
D_1D_2F_1=0, & D_1D_3F_1=0, & D_1D_4F_1=0, &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_2\tilde{P}_2\right)^2+D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_2\tilde{P}_2\right)^2+D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2^2\tilde{P}_2+D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2\\
&+ D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2+D_2D_2F_1\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2+f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^(2)\tilde{\mu}_2^{(2)}+f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}+f_1\left(1,2\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1\left(1,2\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1\left(2,2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2+D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2+D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1+D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+f_1\left(1\right)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1\left(1,2\right)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + f_1(1)\,\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1(1,2)\,\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2 + D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1(1)\,\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1(1,2)\,\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3^2\hat{P}_1\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_1^2 + f_1(1)\,\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1(1)\,\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 + f_1(1)\,\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1(1,2)\,\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_1(1)\,\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4^2\hat{P}_2\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_2^2 + f_1(1)\,\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}
\end{aligned}
$$

Meanwhile for $F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\hat{P}_1\hat{P}_2\right)\right)$

$$
\begin{aligned}
D_jD_iF_2 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2D_2F_2\left(D\theta_2\right)^2 D_iP_iD_jP_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2F_2D^2\theta_2D_iP_iD_jP_j\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2F_2D\theta_2\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i + \mathbb{1}_{i\neq j}D_iP_iD_jP_j\right)\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq 6}D_2D_1F_2D\theta_2\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_jP_j + \mathbb{1}_{i>j}D_iP_i\right) + \mathbb{1}_{i=1}\left(D_2D_1F_2D\theta_2D_iP_i + D_i^2F_2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_2D_1F_2 = 0, \quad D_2D_3F_3 = 0, \quad D_2D_4F_2 = 0,\\
&D_1D_2F_2 = 0, \quad D_2D_2F_2 = 0, \quad D_3D_2F_2 = 0, \quad D_4D_2F_2 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_1F_2 &= \left(D_1P_1\right)^2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_2^2F_2 + \left(D_1P_1\right)^2 D^2\tilde{\theta}_2D_2F_2 + D_1^2P_1D\tilde{\theta}_2D_2F_2 + D_1P_1D\tilde{\theta}_2D_2D_1F_2\\
&+ D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_1^2F_2\\
&= f_2(2)\,\frac{\tilde{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2(2)\,\theta_2^{(2)}\tilde{\mu}_1^2 + f_2(2,1)\,\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} + \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2,1) + f_2(1,1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_1F_2 &= D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_3P_1D_1P_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1\\
&= f_2\left(2,1\right)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_1F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_4P_2D_1P_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2,1\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1 + D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2,1\right)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_2F_2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 D^2\tilde{\theta}_2 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3^2\hat{P}_1\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\hat{\mu}_1^2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1^2 + f_2\left(2\right)\frac{\hat{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_4F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1 + D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2,1\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_4F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_4F_2 &= D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4^2\hat{P}_2 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_2^2 + f_2\left(2\right)\frac{\hat{P}_2^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

For $\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_2\right), w_2\right)$

$$
\begin{aligned}
D_jD_i\hat{F}_1 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3D_3\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_iP_iD_jP_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_iP_iD_jP_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i + \mathbb{1}_{i\neq j}D_iP_i\right.\\
&+ \mathbb{1}_{i+j\geq 5}D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_iP_i + \mathbb{1}_{i>j}D_jP_j\right) + \mathbb{1}_{i=4}\left(D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i + D_i^2\hat{F}_1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_3D_1\hat{F}_1 = 0, \quad D_3D_2\hat{F}_1 = 0, \quad D_1D_3\hat{F}_1 = 0, \quad D_2D_3\hat{F}_1 = 0\\
&D_3D_3\hat{F}_1 = 0, \quad D_4D_3\hat{F}_1 = 0, \quad D_3D_4\hat{F}_1 = 0,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
D_1D_1\hat{F}_1 &= D_3^2\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2(D_1P_1)^2+D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1(D_1P_1)^2+D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1^2P_1\\
&= \hat{f}_1(3,3)\left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2+\hat{f}_1(3)\frac{P_1^{(2)}}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(3)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_1\hat{F}_1 &= D_3^2\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_1P_1D_2P_1+D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_1P_1D_2P_2+D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1D_2P_2\\
&= \hat{f}_1(3,3)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{f}_1(3)\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}+\hat{f}_1(3)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_1\hat{F}_1 &= D_3D_3\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_4\hat{P}_2D_1P_1+D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_1P_1D_4\hat{P}_2+D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1D_4\hat{P}_2+D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1\\
&= \hat{f}_1(3,3)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+\hat{f}_1(3)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{f}_1(3)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(3,4)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1D_2\hat{F}_1 &= D_3^2\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_1P_1D_2P_2+D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_1P_1D_2P_2+D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1D_2P_2\\
&= \hat{f}_1(3,3)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{f}_1(3)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{f}_1(3)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_2\hat{F}_1 &= D_3^2\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2(D_2P_2)^2+D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1(D_2P_2)^2+D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2^2P_2\\
&= \hat{f}_1(3,3)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2+\hat{f}_1(3)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2^2+\hat{f}_1(3)\tilde{P}_2^{(2)}\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_2\hat{F}_1 &= D_3^2\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_4\hat{P}_2D_2P_2+D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_2P_2D_4\hat{P}_2+D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2P_2D_4\hat{P}_2+D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2P_2\\
&= \hat{f}_1(3,3)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{f}_1(3)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{f}_1(3)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(3,4)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1D_4\hat{F}_1 &= D_3D_3\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_1P_1D_4\hat{P}_2+D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_1P_1D_4\hat{P}_2+D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1D_4\hat{P}_2+D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1\\
&= \hat{f}_1(3,3)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{f}_1(3)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{f}_1(3)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(3,4)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_4\hat{F}_1 &= D_3^2\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_2P_2D_4\hat{P}_2+D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_2P_2D_4\hat{P}_2+D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2P_2D_4\hat{P}_2+D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2P_2\\
&= \hat{f}_1(3,3)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{f}_1(3)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{f}_1(3)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(3,4)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_4\hat{F}_1 &= D_3^2\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2+D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1\left(D_4\hat{P}_2\right)^2+D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_4^2\hat{P}_2+D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_4\hat{P}_2\\
&+ D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_4\hat{P}_2+D_4D_4\hat{F}_1\\
&= \hat{f}_1(3,3)\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2+\hat{f}_1(3)\hat{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_2^2+\hat{f}_1(3)\frac{\hat{P}_2^{(2)}}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(3,4)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(3,4)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(4,4)
\end{aligned}$$

Finally for $\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_1\right)\right)$

$$\begin{aligned}
D_jD_i\hat{F}_2 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 4}D_4D_4\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 4}D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i+\mathbb{1}_{i\neq j}D_iP_i\right.\\
&+ (1-\mathbb{1}_{i=j=2})\,\mathbb{1}_{i+j\geq 4}D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_iP_i+\mathbb{1}_{i>j}D_jP_j\right)+\mathbb{1}_{i=3}\left(D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i+D_i^2\hat{F}_2\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{llll}
D_4D_1\hat{F}_2 = 0, & D_4D_2\hat{F}_2 = 0, & D_4D_3\hat{F}_2 = 0, & D_1D_4\hat{F}_2 = 0 \\
D_2D_4\hat{F}_2 = 0, & D_3D_4\hat{F}_2 = 0, & D_4D_4\hat{F}_2 = 0, &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_1\hat{F}_2 &= D_4^2\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2(D_1P_1)^2 + D_4\hat{F}_2\hat{\theta}_2(D_1P_1)^2D^2 + D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1^2P_1 \\
&= \hat{f}_2(4,4)\left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 + \hat{f}_2(4)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1^2 + \hat{f}_2(4)\frac{\tilde{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2D_1\hat{F}_2 &= D_4^2\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_1P_1D_2P_2 + D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_1P_1D_2P_2 + D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1D_2P_2 \\
&= \hat{f}_2(4,4)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2(4)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2(4)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_1\hat{F}_2 &= D_4^2\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1 \\
&= \hat{f}_2(4,4)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(4)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(4)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2(4,3)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_2\hat{F}_2 &= D_4D_4\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_1P_1D_2P_2 + D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_1P_1D_2P_2 + D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1D_2P_2 \\
&= \hat{f}_2(4,4)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2(4)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2(4)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2D_2\hat{F}_2 &= D_4^2\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2(D_2P_2)^2 + D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2(D_2P_2)^2 + D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2^2P_2 \\
&= \hat{f}_2(4,4)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 + \hat{f}_2(4)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2^2 + \hat{f}_2(4)\frac{\tilde{P}_2^{(2)}}{1-\hat{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_2\hat{F}_2 &= D_4^2\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2P_2D_3\hat{P}_1 + D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_2P_2D_3\hat{P}_1 + D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2P_2D_3\hat{P}_1 + D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2P_2 \\
&= \hat{f}_2(4,4)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(4)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(4)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2(4,3)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_3\hat{F}_2 &= D_4D_4\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1 \\
&= \hat{f}_2(4,4)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(4)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(4)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2(4,3)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2D_3\hat{F}_2 &= D_4^2\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2P_2D_3\hat{P}_1 + D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_2P_2D_3\hat{P}_1 + D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2P_2D_3\hat{P}_1 + D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2P_2 \\
&= \hat{f}_2(4,4)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(4)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(4)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2(4,3)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_3\hat{F}_2 &= D_4^2\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_3^2\hat{P}_1 + D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_3\hat{P}_1 \\
&+ D_4D_3\hat{f}_2D\hat{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_3^2\hat{F}_2 \\
&= \hat{f}_2(4,4)\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 + \hat{f}_2(4)\hat{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1^2 + \hat{f}_2(4)\frac{\hat{P}_1^{(2)}}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2(4,3)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2(4,3)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2(3,3)
\end{aligned}
$$

Second Grade Derivative Recursive Equations

Then according to the equations given at the beginning of this section, we have

$$\begin{aligned} D_kD_iF_1 &= D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)+D_iR_2D_k\left(F_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)\\ &+ D_iF_2D_k\left(R_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_4D_k\left(R_2+F_2\right) \end{aligned}$$

F_1 and $i=1$

for $i=1$, and $k=1$

$$\begin{aligned} D_1D_1F_1 &= D_1D_1\left(R_2+F_2\right)+D_1R_2D_1F_2+D_1F_2D_1R_2 = D_1^2R_2+D_1^2F_2+D_1R_2D_1F_2+D_1F_2D_1R_2\\ &= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1+r_2\tilde{P}_1^{(2)}+D_1^2F_2+2r_2\tilde{\mu}_1f_2\left(1\right) \end{aligned}$$

$k=2$

$$\begin{aligned} D_2D_iF_1 &= D_2D_1\left(R_2+F_2\right)+D_1R_2D_2F_2+D_1F_2D_2R_2 = D_2D_1R_2+D_2D_1F_2+D_1R_2D_2F_2+D_1F_2D_2R_2\\ &= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+r_2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+D_2D_1F_2+r_2\tilde{\mu}_1f_2\left(2\right)+r_2\tilde{\mu}_2f_2\left(1\right) \end{aligned}$$

$k=3$

$$\begin{aligned} D_3D_1F_1 &= D_3D_1\left(R_2+F_2\right)+D_1R_2D_3\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_1F_2D_3\left(R_2+\hat{F}_4\right)\\ &= D_3D_1R_2+D_3D_1F_2+D_1R_2D_3F_2+D_1R_2D_3\hat{F}_4+D_1F_2D_3R_2+D_1F_2D_3\hat{F}_4\\ &= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+r_2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+D_3D_1F_2+r_2\tilde{\mu}_1f_2\left(3\right)+r_2\tilde{\mu}_1D_3\hat{F}_4+r_2\hat{\mu}_1f_2\left(1\right)+D_3\hat{F}_4f_2\left(1\right) \end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned} D_4D_1F_1 &= D_4D_1\left(R_2+F_2\right)+D_1R_2D_4\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_1F_2D_4\left(R_2+\hat{F}_4\right)\\ &= D_4D_1R_2+D_4D_1F_2+D_1R_2D_4F_2+D_1R_2D_4\hat{F}_4+D_1F_2D_4R_2+D_1F_2D_4\hat{F}_4\\ &= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+r_2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+D_4D_1F_2+r_2\tilde{\mu}_1f_2\left(4\right)+r_2\tilde{\mu}_1D_4\hat{F}_4+r_2\hat{\mu}_2f_2\left(1\right)+f_2\left(1\right)D_4\hat{F}_4 \end{aligned}$$

F_1 and $i=2$

for $i=2$, and $k=1$

$$\begin{aligned} D_1D_2F_1 &= D_1D_2\left(R_2+F_2\right)+D_2R_2D_1F_2+D_2F_2D_1R_2 = D_1D_2R_2+D_1D_2F_2+D_2R_2D_1F_2+D_2F_2D_1R_2\\ &= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+r_2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+D_1D_2F_2+r_2\tilde{\mu}_2f_2\left(1\right)+r_2\tilde{\mu}_1f_2\left(2\right) \end{aligned}$$

$k=2$

$$\begin{aligned} D_2D_2F_1 &= D_2D_2\left(R_2+F_2\right)+D_2R_2D_2F_2+D_2F_2D_2R_2 = D_2D_2R_2+D_2D_2F_2+D_2R_2D_2F_2+D_2F_2D_2R_2\\ &= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2^2+r_2\tilde{P}_2^{(2)}+D_2D_2F_2+2r_2\tilde{\mu}_2f_2\left(2\right) \end{aligned}$$

$k=3$

$$\begin{aligned} D_3D_2F_1 &= D_3D_2\left(R_2+F_2\right)+D_2R_2D_3\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_2F_2D_3\left(R_2+\hat{F}_4\right)\\ &= D_3D_2R_2+D_3D_2F_2+D_2R_2D_3F_2+D_2R_2D_3\hat{F}_4+D_2F_2D_3R_2+D_2F_2D_3\hat{F}_4\\ &= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+D_3D_2F_2+r_2\tilde{\mu}_2f_2\left(3\right)+r_2\tilde{\mu}_2D_3\hat{F}_4+r_2\hat{\mu}_1f_2\left(2\right)+f_2\left(2\right)D_3\hat{F}_4 \end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned} D_4D_2F_1 &= D_4D_2\left(R_2+F_2\right)+D_2R_2D_4\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_2F_2D_4\left(R_2+\hat{F}_4\right)\\ &= D_4D_2R_2+D_4D_2F_2+D_2R_2D_4F_2+D_2R_2D_4\hat{F}_4+D_2F_2D_4R_2+D_2F_2D_4\hat{F}_4\\ &= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+D_4D_2F_2+r_2\tilde{\mu}_2f_2\left(4\right)+r_2\tilde{\mu}_2D_4\hat{F}_4+r_2\hat{\mu}_2f_2\left(2\right)+f_2\left(2\right)D_4\hat{F}_4 \end{aligned}$$

F_1 and $i = 3$

for $i = 3$, *and* $k = 1$

$$
\begin{aligned}
D_1D_3F_1 &= D_1D_3\left(R_2 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_3R_2D_1F_2 + D_3F_2D_1R_2 + D_3\hat{F}_4D_1\left(R_2 + F_2\right)\\
&= D_1D_3R_2 + D_1D_3F_2 + D_1D_3\hat{F}_4 + D_3R_2D_1F_2 + D_3F_2D_1R_2 + D_3\hat{F}_4D_1R_2 + D_3\hat{F}_4D_1F_2\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + r_2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + D_1D_3F_2 + D_1D_3\hat{F}_4 + r_2\hat{\mu}_1f_2\left(1\right) + r_2\tilde{\mu}_1f_2\left(3\right) + r_2\tilde{\mu}_1D_3\hat{F}_4 + D_3\hat{F}_4f_2\left(1\right)
\end{aligned}
$$

$k = 2$

$$
\begin{aligned}
D_2D_3F_1 &= D_2D_3\left(R_2 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_3R_2D_2F_2 + D_3F_2D_2R_2 + D_3\hat{F}_4D_2\left(R_2 + F_2\right)\\
&= D_2D_3R_2 + D_2D_3F_2 + D_2D_3\hat{F}_4 + D_3R_2D_2F_2 + D_3F_2D_2R_2 + D_3\hat{F}_4D_2R_2 + D_3\hat{F}_4D_2F_2\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + D_2D_3F_2 + D_2D_3\hat{F}_4 + r_2\hat{\mu}_1f_2\left(2\right) + r_2\tilde{\mu}_2f_2\left(3\right) + r_2\tilde{\mu}_2D_3\hat{F}_4 + f_2\left(4\right)D_3\hat{F}_4
\end{aligned}
$$

$k = 3$

$$
\begin{aligned}
D_3D_3F_1 &= D_3D_3\left(R_2 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_3R_2D_3\left(F_2 + \hat{F}_4\right) + D_3F_2D_3\left(R_2 + \hat{F}_4\right) + D_3\hat{F}_4D_3\left(R_2 + F_2\right)\\
&= D_3D_3R_2 + D_3D_3F_2 + D_3D_3\hat{F}_4 + D_3R_2D_3F_2 + D_3R_2D_3\hat{F}_4\\
&+ D_3F_2D_3R_2 + D_3F_2D_3\hat{F}_4 + D_3\hat{F}_4D_3R_2 + D_3\hat{F}_4D_3F_2\\
&= R_2^{(2)}\hat{\mu}_1^2 + r_2\hat{P}_1^{(2)} + D_3D_3F_2 + D_3D_3\hat{F}_4 + r_2\hat{\mu}_1f_2\left(3\right) + r_2\hat{\mu}_1D_3\hat{F}_4\\
&+ r_2\hat{\mu}_1f_2\left(3\right) + f_2\left(3\right)D_3\hat{F}_4 + r_2\hat{\mu}_1D_3\hat{F}_4 + f_2\left(3\right)D_3\hat{F}_4
\end{aligned}
$$

$k = 4$

$$
\begin{aligned}
D_4D_3F_1 &= D_4D_3\left(R_2 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_3R_2D_4\left(F_2 + \hat{F}_4\right) + D_3F_2D_4\left(R_2 + \hat{F}_4\right) + D_3\hat{F}_4D_4\left(R_2 + F_2\right)\\
&= D_4D_3R_2 + D_4D_3F_2 + D_4D_3\hat{F}_4 + D_3R_2D_4F_2 + D_3R_2D_4\hat{F}_4\\
&+ D_3F_2D_4R_2 + D_3F_2D_4\hat{F}_4 + D_3\hat{F}_4D_4R_2 + D_3\hat{F}_4D_4F_2\\
&= R_2^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + r_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + D_4D_3F_2 + D_4D_3\hat{F}_4 + r_2\hat{\mu}_1f_2\left(4\right) + r_2\hat{\mu}_1D_4\hat{F}_4\\
&+ r_2\hat{\mu}_2f_2\left(3\right) + D_4\hat{F}_4f_2\left(3\right) + D_3\hat{F}_4r_2\hat{\mu}_2 + D_3\hat{F}_4f_2\left(4\right)
\end{aligned}
$$

F_1 and $i = 4$

for $i = 4$, *and* $k = 1$

$$
\begin{aligned}
D_1D_4F_1 &= D_1D_4\left(R_2 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_4R_2D_1F_2 + D_4F_2D_1R_2 + D_4\hat{F}_4D_1\left(R_2 + F_2\right)\\
&= D_1D_4R_2 + D_1D_4F_2 + D_1D_4\hat{F}_4 + D_4R_2D_1F_2 + D_4F_2D_1R_2 + D_4\hat{F}_4D_1R_2 + D_4\hat{F}_4D_1F_2
\end{aligned}
$$

$k = 2$

$$
\begin{aligned}
D_2D_4F_1 &= D_2D_4\left(R_2 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_4R_2D_2F_2 + D_4F_2D_2R_2 + D_4\hat{F}_4D_2\left(R_2 + F_2\right)\\
&= D_2D_4R_2 + D_2D_4F_2 + D_2D_4\hat{F}_4 + D_4R_2D_2F_2 + D_4F_2D_2R_2 + D_4\hat{F}_4D_2R_2 + D_4\hat{F}_4D_2F_2
\end{aligned}
$$

$k = 3$

$$
\begin{aligned}
D_3D_4F_1 &= D_3D_4\left(R_2 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_4R_2D_3\left(F_2 + \hat{F}_4\right) + D_4F_2D_3\left(R_2 + \hat{F}_4\right) + D_4\hat{F}_4D_3\left(R_2 + F_2\right)\\
&= D_3D_4R_2 + D_3D_4F_2 + D_3D_4\hat{F}_4 + D_4R_2D_3F_2 + D_4R_2D_3\hat{F}_4\\
&+ D_4F_2D_3R_2 + D_4F_2D_3\hat{F}_4 + D_4\hat{F}_4D_3R_2 + D_4\hat{F}_4D_3F_2
\end{aligned}
$$

$k = 4$

$$
\begin{aligned}
D_4D_4F_1 &= D_4D_4\left(R_2 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_4R_2D_4\left(F_2 + \hat{F}_4\right) + D_4F_2D_4\left(R_2 + \hat{F}_4\right) + D_4\hat{F}_4D_4\left(R_2 + F_2\right)\\
&= D_4D_4R_2 + D_4D_4F_2 + D_4D_4\hat{F}_4 + D_4R_2D_4F_2 + D_4R_2D_4\hat{F}_4\\
&+ D_4F_2D_4R_2 + D_4F_2D_4\hat{F}_4 + D_4\hat{F}_4D_4R_2 + D_4\hat{F}_4D_4F_2
\end{aligned}
$$

$$D_kD_iF_2 = D_kD_i\left(R_1+F_1+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_3\right)+D_iR_1D_k\left(F_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right)+D_iF_1D_k\left(R_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_3D_k\left(R_1 \right. \qquad (33.20.$$

$i=1$ $k=1$

$$D_1D_1F_2 = D_1D_1\left(R_1+F_1\right)+D_1R_1D_1F_1+D_1F_1D_1R_1=D_1^2R_1+D_1^2F_1+D_1R_1D_1F_1+D_1F_1D_1R_1$$

$k=2$

$$D_2D_1F_2 = D_2D_1\left(R_1+F_1\right)+D_1R_1D_2F_1+D_1F_1D_2R_1=D_2D_1R_1+D_2D_1F_1+D_1R_1D_2F_1+D_1F_1D_2R_1$$

$k=3$

$$\begin{aligned}D_3D_1F_2 &= D_3D_1\left(R_1+F_1\right)+D_1R_1D_3\left(F_1+\hat{F}_3\right)+D_1F_1D_3\left(R_1+\hat{F}_3\right)\\ &= D_3D_1R_1+D_3D_1F_1+D_1R_1D_3F_1+D_1R_1D_3\hat{F}_3+D_1F_1D_3R_1+D_1F_1D_3\hat{F}_3\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}D_4D_1F_2 &= D_4D_1\left(R_1+F_1\right)+D_1R_1D_4\left(F_1+\hat{F}_3\right)+D_1F_1D_4\left(R_1+\hat{F}_3\right)\\ &= D_4D_1R_1+D_4D_1F_1+D_1R_1D_4F_1+D_1R_1D_4\hat{F}_3+D_1F_1D_4R_1+D_1F_1D_4\hat{F}_3\end{aligned}$$

$i=2$ $k=1$

$$D_1D_2F_2 = D_1D_2\left(R_1+F_1\right)+D_2R_1D_1F_1+D_2F_1D_1R_1=D_1D_2R_1+D_1D_2F_1+D_2R_1D_1F_1+D_2F_1D_1R_1$$

$k=2$

$$D_3D_2F_2 = D_3D_2\left(R_1+F_1\right)+D_2R_1D_2F_1+D_2F_1D_2R_1=D_3D_2R_1+D_3D_2F_1+D_2R_1D_2F_1+D_2F_1D_2R_1$$

$k=3$

$$\begin{aligned}D_3D_2F_2 &= D_3D_2\left(R_1+F_1\right)+D_2R_1D_3\left(F_1+\hat{F}_3\right)+D_2F_1D_3\left(R_1+\hat{F}_3\right)\\ &= D_3D_2R_1+D_3D_2F_1+D_2R_1D_3F_1+D_2R_1D_3\hat{F}_3+D_2F_1D_3R_1+D_2F_1D_3\hat{F}_3\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}D_4D_2F_2 &= D_4D_2\left(R_1+F_1+\hat{F}_3\right)+D_2R_1D_4\left(F_1+\hat{F}_3\right)+D_2F_1D_4\left(R_1+\hat{F}_3\right)\\ &= D_4D_2R_1+D_4D_2F_1+D_4D_2\hat{F}_3+D_2R_1D_4F_1+D_2R_1D_4\hat{F}_3+D_2F_1D_4R_1+D_2F_1D_4\hat{F}_3\end{aligned}$$

$i=3$ $k=1$

$$\begin{aligned}D_1D_3F_2 &= D_1D_3\left(R_1+F_1+\hat{F}_3\right)+D_3R_1D_1F_1+D_3F_1D_1R_1+D_3\hat{F}_3D_1\left(R_1+F_1\right)\\ &= D_1D_3R_1+D_1D_3F_1+D_1D_3\hat{F}_3+D_3R_1D_1F_1+D_3F_1D_1R_1+D_3\hat{F}_3D_1R_1+D_3\hat{F}_3D_1F_1\end{aligned}$$

$k=2$

$$\begin{aligned}D_2D_3F_2 &= D_2D_3\left(R_1+F_1+\hat{F}_3\right)+D_3R_1D_2F_1+D_3F_1D_2R_1+D_3\hat{F}_3D_2\left(R_1+F_1\right)\\ &= D_2D_3R_1+D_2D_3F_1+D_2D_3\hat{F}_3+D_3R_1D_2F_1+D_3F_1D_2R_1+D_3\hat{F}_3D_2R_1+D_3\hat{F}_3D_2F_1\end{aligned}$$

$k=3$

$$\begin{aligned}D_3D_3F_2 &= D_3D_3\left(R_1+F_1+\hat{F}_3\right)+D_3R_1D_3\left(F_1+\hat{F}_3\right)+D_3F_1D_3\left(R_1+\hat{F}_3\right)+D_3\hat{F}_3D_3\left(R_1+F_1\right)\\ &= D_3D_3R_1+D_3D_3F_1+D_3D_3\hat{F}_3+D_3R_1D_3F_1+D_3R_1D_3\hat{F}_3\\ &+ D_3F_1D_3R_1+D_3F_1D_3\hat{F}_3+D_3\hat{F}_3D_3R_1+D_3\hat{F}_3D_3F_1\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}D_4D_3F_2 &= D_4D_3\left(R_1+F_1+\hat{F}_3\right)+D_3R_1D_4\left(F_1+\hat{F}_3\right)+D_3F_1D_4\left(R_1+\hat{F}_3\right)+D_3\hat{F}_3D_4\left(R_1+F_1\right)\\ &= D_4D_3R_1+D_4D_3F_1+D_4D_3\hat{F}_3+D_3R_1D_4F_1+D_3R_1D_4\hat{F}_3\\ &+ D_3F_1D_4R_1+D_3F_1D_4\hat{F}_3+D_3\hat{F}_3D_4R_1+D_3\hat{F}_3D_4F_1\end{aligned}$$

$i = 4$ $k = 1$

$$\begin{aligned}
D_1D_4F_2 &= D_1D_4\left(R_1 + F_1 + \hat{F}_3\right) + D_4R_1D_1F_1 + D_4F_1D_1R_1 + D_4\hat{F}_3D_1\left(R_1 + F_1\right)\\
&= D_1D_4R_1 + D_1D_4F_1 + D_1D_4\hat{F}_3 + D_4R_1D_1F_1 + D_4F_1D_1R_1 + D_4\hat{F}_3D_1R_1 + D_4\hat{F}_3D_1F_1
\end{aligned}$$

$k = 2$

$$\begin{aligned}
D_2D_4F_2 &= D_2D_4\left(R_1 + F_1 + \hat{F}_3\right) + D_4R_1D_2F_1 + D_4F_1D_2R_1 + D_4\hat{F}_3D_2\left(R_1 + F_1\right)\\
&= D_2D_4R_1 + D_2D_4F_1 + D_2D_4\hat{F}_3 + D_4R_1D_2F_1 + D_4F_1D_2R_1 + D_4\hat{F}_3D_2R_1 + D_4\hat{F}_3D_2F_1
\end{aligned}$$

$k = 3$

$$\begin{aligned}
D_3D_4F_2 &= D_3D_4\left(R_1 + F_1 + \hat{F}_3\right) + D_4R_1D_3\left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_4F_1D_3\left(R_1 + \hat{F}_3\right) + D_4\hat{F}_3D_3\left(R_1 + F_1\right)\\
&= D_3D_4R_1 + D_3D_4F_1 + D_3D_4\hat{F}_3 + D_4R_1D_3F_1 + D_4R_1D_3\hat{F}_3\\
&+ D_4F_1D_3R_1 + D_4F_1D_3\hat{F}_3 + D_4\hat{F}_3D_3R_1 + D_4\hat{F}_3D_3F_1
\end{aligned}$$

$k = 4$

$$\begin{aligned}
D_4D_4F_2 &= D_4D_4\left(R_1 + F_1 + \hat{F}_3\right) + D_4R_1D_4\left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_4F_1D_4\left(R_1 + \hat{F}_3\right) + D_4\hat{F}_3D_4\left(R_1 + F_1\right)\\
&= D_4D_4R_1 + D_4D_4F_1 + D_4D_4\hat{F}_3 + D_4R_1D_4F_1 + D_4R_1D_4\hat{F}_3\\
&+ D_4F_1D_4R_1 + D_4F_1D_4\hat{F}_3 + D_4\hat{F}_3D_4R_1 + D_4\hat{F}_3D_4F_1
\end{aligned}$$

$$D_kD_i\hat{F}_1 = D_kD_i\left(\hat{R}_4 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_2 + \hat{F}_4\right) + D_i\hat{R}_4D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2 + \hat{F}_4\right) + D_i\hat{F}_4D_k\left(\hat{R}_4 + \mathbb{1}_{k\leq 2}F_2\right) + \mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_k\left(\hat{R}_4 \ldots\right. \quad (33.20$$

$i = 1$ $k = 1$

$$\begin{aligned}
D_1D_1\hat{F}_1 &= D_1D_1\left(\hat{R}_4 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_1\hat{R}_4D_1\left(F_2 + \hat{F}_4\right) + D_1\hat{F}_4D_1\left(\hat{R}_4 + F_2\right) + D_1F_2D_1\left(\hat{R}_4 + \hat{F}_4\right)\\
&= D_1^2\hat{R}_4 + D_1^2F_2 + D_1^2\hat{F}_4 + D_1\hat{R}_4D_1F_2 + D_1\hat{R}_4D_1\hat{F}_4 + D_1\hat{F}_4D_1\hat{R}_4 + D_1\hat{F}_4D_1F_2 + D_1F_2D_1\hat{R}_4 + D_1F_2D_1\hat{F}
\end{aligned}$$

$k = 2$

$$\begin{aligned}
D_2D_1\hat{F}_1 &= D_2D_1\left(\hat{R}_4 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_1\hat{R}_4D_2\left(F_2 + \hat{F}_4\right) + D_1\hat{F}_4D_2\left(\hat{R}_4 + F_2\right) + D_1F_2D_2\left(\hat{R}_4 + \hat{F}_4\right)\\
&= D_2D_1\hat{R}_4 + D_2D_1F_2 + D_2D_1\hat{F}_4 + D_1\hat{R}_4D_2F_2 + D_1\hat{R}_4D_2\hat{F}_4\\
&+ D_1\hat{F}_4D_2\hat{R}_4 + D_1\hat{F}_4D_2F_2 + D_1F_2D_2\hat{R}_4 + D_1F_2D_2\hat{F}_4
\end{aligned}$$

$k = 3$

$$\begin{aligned}
D_3D_1\hat{F}_1 &= D_3D_1\left(\hat{R}_4 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_1\hat{R}_4D_3\left(\hat{F}_4\right) + D_1\hat{F}_4D_3\hat{R}_4 + D_1F_2D_3\left(\hat{R}_4 + \hat{F}_4\right)\\
&= D_3D_1\hat{R}_4 + D_3D_1F_2 + D_3D_1\hat{F}_4 + D_1\hat{R}_4D_3\hat{F}_4 + D_1\hat{F}_4D_3\hat{R}_4 + D_1F_2D_3\hat{R}_4 + D_1F_2D_3\hat{F}_4
\end{aligned}$$

$k = 4$

$$\begin{aligned}
D_4D_1\hat{F}_1 &= D_4D_1\left(\hat{R}_4 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_1\hat{R}_4D_4\hat{F}_4 + D_1\hat{F}_4D_4\hat{R}_4 + D_1F_2D_4\left(\hat{R}_4 + \hat{F}_4\right)\\
&= D_4D_1\hat{R}_4 + D_4D_1F_2 + D_4D_1\hat{F}_4 + D_1\hat{R}_4D_4\hat{F}_4 + D_1\hat{F}_4D_4\hat{R}_4 + D_1F_2D_4\hat{R}_4 + D_1F_2D_4\hat{F}_4
\end{aligned}$$

$i = 2$ $k = 1$

$$\begin{aligned}
D_1D_2\hat{F}_1 &= D_1D_2\left(\hat{R}_4 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_2\hat{R}_4D_1\left(F_2 + \hat{F}_4\right) + D_2\hat{F}_4D_2\left(\hat{R}_4 + F_2\right) + D_2F_2D_1\left(\hat{R}_4 + \hat{F}_4\right)\\
&= D_1D_2\hat{R}_4 + D_1D_2F_2 + D_1D_2\hat{F}_4 + D_2\hat{R}_4D_1F_2 + D_2\hat{R}_4D_1\hat{F}_4\\
&+ D_2\hat{F}_4D_2\hat{R}_4 + D_2\hat{F}_4D_2F_2 + D_2F_2D_1\hat{R}_4 + D_2F_2D_1\hat{F}_4
\end{aligned}$$

$k = 2$

$$\begin{aligned}
D_2D_2\hat{F}_1 &= D_2D_2\left(\hat{R}_4 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_2\hat{R}_4D_2\left(F_2 + \hat{F}_4\right) + D_2\hat{F}_4D_2\left(\hat{R}_4 + F_2\right) + D_2F_2D_2\left(\hat{R}_4 + \hat{F}_4\right)\\
&= D_2D_2\left(\hat{R}_4 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_2\hat{R}_4D_2\left(F_2 + \hat{F}_4\right) + D_2\hat{F}_4D_2\left(\hat{R}_4 + F_2\right) + D_2F_2D_2\left(\hat{R}_4 + \hat{F}_4\right)
\end{aligned}$$

$k=3$

$$\begin{aligned}D_3D_2\hat{F}_1 &= D_3D_2\left(\hat{R}_4+F_2+\hat{F}_4\right)+D_2\hat{R}_4D_3\hat{F}_4+D_2\hat{F}_4D_3\hat{R}_4+D_2F_2D_3\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)\\ &= D_3D_2\hat{R}_4+D_3D_2F_2+D_3D_2\hat{F}_4+D_2\hat{R}_4D_3\hat{F}_4+D_2\hat{F}_4D_3\hat{R}_4+D_2F_2D_3\hat{R}_4+D_2F_2D_3\hat{F}_4\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}D_4D_2\hat{F}_1 &= D_4D_2\left(\hat{R}_4+F_2+\hat{F}_4\right)+D_2\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_2\hat{F}_4D_4\hat{R}_4+D_2F_2D_4\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)\\ &= D_4D_2\hat{R}_4+D_4D_2F_2+D_4D_2\hat{F}_4+D_2\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_2\hat{F}_4D_4\hat{R}_4+D_2F_2D_4\hat{R}_4+D_2F_2D_4\hat{F}_4\end{aligned}$$

$i=3\ k=1$

$$\begin{aligned}D_1D_3\hat{F}_1 &= D_1D_3\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)+D_3\hat{R}_4D_1\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_3\hat{F}_4D_1\left(\hat{R}_4+F_2\right)\\ &= D_1D_3\hat{R}_4+D_1D_3\hat{F}_4+D_3\hat{R}_4D_1F_2+D_3\hat{R}_4D_1\hat{F}_4+D_3\hat{F}_4D_1\hat{R}_4+D_3\hat{F}_4D_1F_2\end{aligned}$$

$k=2$

$$\begin{aligned}D_2D_3\hat{F}_1 &= D_2D_3\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)+D_3\hat{R}_4D_2\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_3\hat{F}_4D_2\left(\hat{R}_4+F_2\right)\\ &= D_2D_3\hat{R}_4+D_2D_3\hat{F}_4+D_3\hat{R}_4D_2F_2+D_3\hat{R}_4D_2\hat{F}_4+D_3\hat{F}_4D_2\hat{R}_4+D_3\hat{F}_4D_2F_2\end{aligned}$$

$k=3$

$$\begin{aligned}D_3D_3\hat{F}_1 &= D_3D_3\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)+D_3\hat{R}_4D_3\hat{F}_4+D_3\hat{F}_4D_3\hat{R}_4\\ &= D_3^2\hat{R}_4+D_3^2\hat{F}_4+D_3\hat{R}_4D_3\hat{F}_4+D_3\hat{F}_4D_3\hat{R}_4\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}D_4D_3\hat{F}_1 &= D_4D_3\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)+D_3\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_3\hat{F}_4D_4\hat{R}_4\\ &= D_4D_3\hat{R}_4+D_4D_3\hat{F}_4+D_3\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_3\hat{F}_4D_4\hat{R}_4\end{aligned}$$

$i=4\ k=1$

$$\begin{aligned}D_1D_4\hat{F}_1 &= D_1D_4\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)+D_4\hat{R}_4D_1\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_4\hat{F}_4D_1\left(\hat{R}_4+F_2\right)\\ &= D_1D_4\hat{R}_4+D_1D_4\hat{F}_4+D_4\hat{R}_4D_1F_2+D_4\hat{R}_4D_1\hat{F}_4+D_4\hat{F}_4D_1\hat{R}_4+D_4\hat{F}_4D_1F_2\end{aligned}$$

$k=2$

$$\begin{aligned}D_2D_4\hat{F}_1 &= D_2D_4\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)+D_4\hat{R}_4D_2\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_4\hat{F}_4D_2\left(\hat{R}_4+F_2\right)\\ &= D_2D_4\hat{R}_4+D_2D_4\hat{F}_4+D_4\hat{R}_4D_2F_2+D_4\hat{R}_4D_2\hat{F}_4+D_4\hat{F}_4D_2\hat{R}_4+D_4\hat{F}_4D_2F_2\end{aligned}$$

$k=3$

$$\begin{aligned}D_3D_4\hat{F}_1 &= D_3D_4\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)+D_4\hat{R}_4D_3\hat{F}_4+D_4\hat{F}_4D_3\hat{R}_4\\ &= D_3D_4\hat{R}_4+D_3D_4\hat{F}_4+D_4\hat{R}_4D_3\hat{F}_4+D_4\hat{F}_4D_3\hat{R}_4\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}D_4D_4\hat{F}_1 &= D_4D_4\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)+D_4\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_4\hat{F}_4D_4\hat{R}_4\\ &= D_4^2\hat{R}_4+D_4^2\hat{F}_4+D_4\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_4\hat{F}_4D_4\hat{R}_4\end{aligned}$$

for $\hat{F}_2$

$$\begin{aligned}D_kD_i\hat{F}_2 &= D_kD_i\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{R}_3D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{F}_3D_k\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_k\left(\hat{R}_3+\right.\cdots && (33.20\ldots)\\ &= && (33.20\ldots)\end{aligned}$$

$i=1\ k=1$

$$\begin{aligned}D_1D_1\hat{F}_2 &= D_1^2\left(\hat{R}_3+F_1+\hat{F}_3\right)+D_1\hat{R}_3D_1\left(F_1+\hat{F}_3\right)+D_1\hat{F}_3D_1\left(\hat{R}_3+F_1\right)+D_1F_1D_1\left(\hat{R}_3+\hat{F}_3\right)\\ &= D_1^2\hat{R}_3+D_1^2F_1+D_1^2\hat{F}_3+D_1\hat{R}_3D_1F_1+D_1\hat{R}_3D_1\hat{F}_3+D_1\hat{F}_3D_1\hat{R}_3+D_1\hat{F}_3D_1F_1+D_1F_1D_1\hat{R}_3+D_1F_1D_1\end{aligned}$$

$k = 2$

$$\begin{aligned}
D_2D_1\hat{F}_2 &= D_2D_1\left(\hat{R}_3 + F_1 + \hat{F}_3\right) + D_1\hat{R}_3D_2\left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_1\hat{F}_3D_2\left(\hat{R}_3 + F_1\right) + D_1F_1D_2\left(\hat{R}_3 + \hat{F}_3\right)\\
&= D_2D_1\hat{R}_3 + D_2D_1F_1 + D_2D_1\hat{F}_3 + D_1\hat{R}_3D_2F_1 + D_1\hat{R}_3D_2\hat{F}_3\\
&+ D_1\hat{F}_3D_2\hat{R}_3 + D_1\hat{F}_3D_2F_1 + D_1F_1D_2\hat{R}_3 + D_1F_1D_2\hat{F}_3
\end{aligned}$$

$k = 3$

$$\begin{aligned}
D_3D_1\hat{F}_2 &= D_3D_1\left(\hat{R}_3 + F_1 + \hat{F}_3\right) + D_1\hat{R}_3D_3\hat{F}_3 + D_1\hat{F}_3D_3\hat{R}_3 + D_1F_1D_3\left(\hat{R}_3 + \hat{F}_3\right)\\
&= D_3D_1\hat{R}_3 + D_3D_1F_1 + D_3D_1\hat{F}_3 + D_1\hat{R}_3D_3\hat{F}_3 + D_1\hat{F}_3D_3\hat{R}_3 + D_1F_1D_3\hat{R}_3 + D_1F_1D_3\hat{F}_3
\end{aligned}$$

$k = 4$

$$\begin{aligned}
D_4D_1\hat{F}_2 &= D_4D_1\left(\hat{R}_3 + F_1 + \hat{F}_3\right) + D_1\hat{R}_3D_4\hat{F}_3 + D_1\hat{F}_3D_4\hat{R}_3 + D_1F_1D_4\left(\hat{R}_3 + \hat{F}_3\right)\\
&= D_4D_1\hat{R}_3 + D_4D_1F_1 + D_4D_1\hat{F}_3 + D_1\hat{R}_3D_4\hat{F}_3 + D_1\hat{F}_3D_4\hat{R}_3 + D_1F_1D_4\hat{R}_3 + D_1F_1D_4\hat{F}_3
\end{aligned}$$

$i = 2$ $k = 1$

$$\begin{aligned}
D_1D_2\hat{F}_2 &= D_1D_2\left(\hat{R}_3 + F_1 + \hat{F}_3\right) + D_2\hat{R}_3D_1\left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_2\hat{F}_3D_1\left(\hat{R}_3 + F_1\right) + D_2F_1D_1\left(\hat{R}_3 + \hat{F}_3\right)\\
&= D_1D_2\hat{R}_3 + D_1D_2F_1 + D_1D_2\hat{F}_3 + D_2\hat{R}_3D_1F_1 + D_2\hat{R}_3D_1\hat{F}_3\\
&+ D_2\hat{F}_3D_1\hat{R}_3 + D_2\hat{F}_3D_1F_1 + D_2F_1D_1\hat{R}_3 + D_2F_1D_1\hat{F}_3
\end{aligned}$$

$k = 2$

$$\begin{aligned}
D_2D_2\hat{F}_2 &= D_2D_2\left(\hat{R}_3 + F_1 + \hat{F}_3\right) + D_2\hat{R}_3D_2\left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_2\hat{F}_3D_2\left(\hat{R}_3 + F_1\right) + D_2F_1D_2\left(\hat{R}_3 + \hat{F}_3\right)\\
&= D_2^2\hat{R}_3 + D_2^2F_1 + D_2^2\hat{F}_3 + D_2\hat{R}_3D_2F_1 + D_2\hat{R}_3D_2\hat{F}_3 + D_2\hat{F}_3D_2\hat{R}_3 + D_2\hat{F}_3D_2F_1 + D_2F_1D_2\hat{R}_3 + D_2F_1D_2
\end{aligned}$$

$k = 3$

$$\begin{aligned}
D_3D_2\hat{F}_2 &= D_3D_2\left(\hat{R}_3 + F_1 + \hat{F}_3\right) + D_2\hat{R}_3D_3\hat{F}_3 + D_2\hat{F}_3D_3\hat{R}_3 + D_2F_1D_3\left(\hat{R}_3 + \hat{F}_3\right)\\
&= D_3D_2\hat{R}_3 + D_3D_2F_1 + D_3D_2\hat{F}_3 + D_2\hat{R}_3D_3\hat{F}_3 + D_2\hat{F}_3D_3\hat{R}_3 + D_2F_1D_3\hat{R}_3 + D_2F_1D_3\hat{F}_3
\end{aligned}$$

$k = 4$

$$\begin{aligned}
D_4D_2\hat{F}_2 &= D_4D_2\left(\hat{R}_3 + F_1 + \hat{F}_3\right) + D_2\hat{R}_3D_4\hat{F}_3 + D_2\hat{F}_3D_4\hat{R}_3 + D_2F_1D_4\left(\hat{R}_3 + \hat{F}_3\right)\\
&= D_4D_2\hat{R}_3 + D_4D_2F_1 + \hat{F}_3 + D_2\hat{R}_3D_4\hat{F}_3 + D_2\hat{F}_3D_4\hat{R}_3 + D_2F_1D_4\hat{R}_3 + D_2F_1D_4\hat{F}_3
\end{aligned}$$

$i = 3$ $k = 1$

$$\begin{aligned}
D_1D_3\hat{F}_2 &= D_1D_3\left(\hat{R}_3 + \hat{F}_3\right) + D_3\hat{R}_3D_1\left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_3\hat{F}_3D_1\left(\hat{R}_3 + F_1\right)\\
&= D_1D_3\hat{R}_3 + D_1D_3\hat{F}_3 + D_3\hat{R}_3D_1F_1 + D_3\hat{R}_3D_1\hat{F}_3 + D_3\hat{F}_3D_1\hat{R}_3 + D_3\hat{F}_3D_1F_1
\end{aligned}$$

$k = 2$

$$\begin{aligned}
D_2D_3\hat{F}_2 &= D_2D_3\left(\hat{R}_3 + \hat{F}_3\right) + D_3\hat{R}_3D_2\left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_3\hat{F}_3D_2\left(\hat{R}_3 + F_1\right)\\
&= D_2D_3\hat{R}_3 + D_2D_3\hat{F}_3 + D_3\hat{R}_3D_2F_1 + D_3\hat{R}_3D_2\hat{F}_3 + D_3\hat{F}_3D_2\hat{R}_3 + D_3\hat{F}_3D_2F_1
\end{aligned}$$

$k = 3$

$$\begin{aligned}
D_3D_3\hat{F}_2 &= D_3D_3\left(\hat{R}_3 + \hat{F}_3\right) + D_3\hat{R}_3D_3\hat{F}_3 + D_3\hat{F}_3D_3\hat{R}_3\\
&= D_3^2\hat{R}_3 + D_3^2\hat{F}_3 + D_3\hat{R}_3D_3\hat{F}_3 + D_3\hat{F}_3D_3\hat{R}_3
\end{aligned}$$

$k = 4$

$$\begin{aligned}
D_4D_3\hat{F}_2 &= D_4D_3\left(\hat{R}_3 + \hat{F}_3\right) + D_3\hat{R}_3D_4\hat{F}_3 + D_3\hat{F}_3D_4\hat{R}_3\\
&= D_4D_3\hat{R}_3 + D_4D_3\hat{F}_3 + D_3\hat{R}_3D_4\hat{F}_3 + D_3\hat{F}_3D_4\hat{R}_3
\end{aligned}$$

$i = 4$ $k = 1$

$$\begin{aligned} D_1 D_4 \hat{F}_2 &= D_1 D_4 \left(\hat{R}_3 + \hat{F}_3\right) + D_4 \hat{R}_3 D_1 \left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_4 \hat{F}_3 D_4 \left(\hat{R}_3 + F_1\right) \\ &= D_1 D_4 \hat{R}_3 + D_1 D_4 \hat{F}_3 + D_4 \hat{R}_3 D_1 F_1 + D_4 \hat{R}_3 D_1 \hat{F}_3 + D_4 \hat{F}_3 D_4 \hat{R}_3 + D_4 \hat{F}_3 D_4 F_1 \end{aligned}$$

$k = 2$

$$\begin{aligned} D_2 D_4 \hat{F}_2 &= D_2 D_4 \left(\hat{R}_3 + \hat{F}_3\right) + D_4 \hat{R}_3 D_2 \left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_4 \hat{F}_3 D_2 \left(\hat{R}_3 + F_1\right) \\ &= D_2 D_4 \hat{R}_3 + D_2 D_4 \hat{F}_3 + D_4 \hat{R}_3 D_2 F_1 + D_4 \hat{R}_3 D_2 \hat{F}_3 + D_4 \hat{F}_3 D_2 \hat{R}_3 + D_4 \hat{F}_3 D_2 F_1 \end{aligned}$$

$k = 3$

$$\begin{aligned} D_3 D_4 \hat{F}_2 &= D_3 D_4 \left(\hat{R}_3 + \hat{F}_3\right) + D_4 \hat{R}_3 D_3 \hat{F}_3 + D_4 \hat{F}_3 D_3 \hat{R}_3 \\ &= D_3 D_4 \hat{R}_3 + D_3 D_4 \hat{F}_3 + D_4 \hat{R}_3 D_3 \hat{F}_3 + D_4 \hat{F}_3 D_3 \hat{R}_3 \end{aligned}$$

$k = 4$

$$\begin{aligned} D_4 D_4 \hat{F}_2 &= D_4^2 \left(\hat{R}_3 + \hat{F}_3\right) + D_4 \hat{R}_3 D_4 \hat{F}_3 + D_4 \hat{F}_3 D_4 \hat{R}_3 \\ &= D_4^2 \hat{R}_3 + D_4^2 \hat{F}_3 + D_4 \hat{R}_3 D_4 \hat{F}_3 + D_4 \hat{F}_3 D_4 \hat{R}_3 \end{aligned}$$

33.21. Generalizaciones

33.21.1. RSVC con dos conexiones

Sus ecuaciones recursivas son de la forma

$$
\begin{aligned}
F_1(z_1,z_2,w_1,w_2) &= R_2\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2),\\
F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) &= R_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1),\\
\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1,w_2) &= \hat{R}_2\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right),\\
\hat{F}_2(z_1,z_2,w_1,w_2) &= \hat{R}_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right),
\end{aligned}
$$

33.21.2. First Moments of the Queue Lengths

The server's switchover times are given by the general equation

$$
R_i(\mathbf{z},\mathbf{w}) = R_i\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.21.1}
$$

with

$$
D_iR_i = DR_iD_iP_i \tag{33.21.2}
$$

the following notation is considered

$$
D_1P_1 \equiv D_1\tilde{P}_1, \quad D_2P_2 \equiv D_2\tilde{P}_2, \quad D_3P_3 \equiv D_3\hat{P}_1, \quad D_4P_4 \equiv D_4\hat{P}_2,
$$

also we need to remind $F_{1,2}(z_1;\zeta_2)F_{2,2}(z_2;\zeta_2) = F_2(z_1,z_2;\zeta_2)$, *therefore*

$$
D_1F_2(z_1,z_2;\zeta_2) = D_1\left[F_{1,2}(z_1;\zeta_2)F_{2,2}(z_2;\zeta_2)\right] = F_{2,2}(z_2;\zeta_2)D_1F_{1,2}(z_1;\zeta_2) = F_{1,2}^{(1)}(1)
$$

i.e., $D_1F_2 = F_{1,2}^{(1)}(1)$; $D_2F_2 = F_{2,2}^{(1)}(1)$, *whereas that* $D_3F_2 = D_4F_2 = 0$, *then*

$$
D_iF_j = \mathbb{1}_{i\leq 2}F_{i,j}^{(1)}(1), \quad \text{and} \quad D_i\hat{F}_j = \mathbb{1}_{i\geq 2}F_{i,j}^{(1)}(1). \tag{33.21.3}
$$

Now, we obtain the first moments equations for the queue lengths as before for the times the server arrives to the queue to start attending
Remember that

$$
F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1),
$$

where

$$
F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)
$$

so

$$D_iF_1 \quad = \quad \mathbb{1}_{i\neq 1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=2}D_iF_1, \tag{33.21.4}$$

then

$$\begin{array}{ll} D_1F_1 = 0, & D_2F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2P_2 + D_2F_1 = f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{\mu}_2 + f_1\left(2\right), \\ D_3F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3P_3 = f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{\mu}_1, & D_4F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4P_4 = f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{\mu}_2 \end{array}$$

$$D_iF_2 \quad = \quad \mathbb{1}_{i\neq 2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=1}D_iF_2 \tag{33.21.5}$$

$$\begin{array}{ll} D_1F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_1F_2 = f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_1, & D_2F_2 = 0 \\ D_3F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3P_3 = f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_1, & D_4F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4P_4 = f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_2 \end{array}$$

$$D_i\hat{F}_1 \quad = \quad \mathbb{1}_{i\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=4}D_i\hat{F}_1, \tag{33.21.6}$$

$$\begin{array}{ll} D_1\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1 = \hat{f}_1\left(3\right)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_1, & D_2\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2P_2 = \hat{f}_1\left(3\right)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_2 \\ D_3\hat{F}_1 = 0, & D_4\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_4P_4 + D_4\hat{F}_1 = \hat{f}_1\left(3\right)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1\left(2\right), \end{array}$$

$$D_i\hat{F}_2 \quad = \quad \mathbb{1}_{i\neq 4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=3}D_i\hat{F}_2. \tag{33.21.7}$$

$$\begin{array}{ll} D_1\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1 = \hat{f}_2\left(4\right)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{\mu}_1, & D_2\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2P_2 = \hat{f}_2\left(4\right)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{\mu}_2, \\ D_3\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_3P_3 + D_3\hat{F}_2 = \hat{f}_2\left(4\right)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4\right) & \\ D_4\hat{F}_2 = 0 & \end{array}$$

Then, now we can obtain the linear system of equations in order to obtain the first moments of the lengths of the queues:
For $\mathbf{F}_1 = R_2F_2\hat{F}_2$ *we get the general equations*

$$D_i\mathbf{F}_1 = D_i\left(R_2 + F_2 + \mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_2\right) \tag{33.21.8}$$

So

$$\begin{aligned} D_1\mathbf{F}_1 &= D_1R_2 + D_1F_2 = r_1\tilde{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_1 \\ D_2\mathbf{F}_1 &= D_2\left(R_2 + F_2\right) = r_2\tilde{\mu}_1 \\ D_3\mathbf{F}_1 &= D_3\left(R_2 + F_2 + \hat{F}_2\right) = r_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_1 + \hat{F}_{1,2}^{(1)}\left(1\right) \\ D_4\mathbf{F}_1 &= D_4\left(R_2 + F_2 + \hat{F}_2\right) = r_2\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_2 + \hat{F}_{2,2}^{(1)}\left(1\right) \end{aligned}$$

it means

$$\begin{array}{ll} D_1\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + f_2\left(1\right), & D_2\mathbf{F}_1 = r_2\tilde{\mu}_2, \\ D_3\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}_{1,2}^{(1)}\left(1\right), & D_4\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}_{2,2}^{(1)}\left(1\right), \end{array}$$

$$\mathbf{F}_2 = R_1F_1\hat{F}_1, \quad D_i\mathbf{F}_2 = D_i\left(R_1 + F_1 + \mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_1\right) \tag{33.21.9}$$

equivalently

$$\begin{array}{ll} D_1\mathbf{F}_2 = r_1\tilde{\mu}_1, & D_2\mathbf{F}_2 = r_1\tilde{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + f_1\left(2\right), \\ D_3\mathbf{F}_2 = r_1\hat{\mu}_1 + f_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{1,1}\left(1\right), & D_4\mathbf{F}_2 = r_1\hat{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,1}\left(1\right), \end{array}$$

$$\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{R}_2\hat{F}_2F_2, \quad D_i\hat{\mathbf{F}}_1 = D_i\left(\hat{R}_2 + \hat{F}_2 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_2\right) \tag{33.21.10}$$

equivalently

$$\begin{array}{ll} D_1\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\tilde{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + F^{(1)}_{1,2}\left(1\right), & D_2\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,2}\left(1\right), \\ D_3\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(1\right), & D_4\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\hat{\mu}_2 \end{array}$$

$$\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{R}_1\hat{F}_1F_1, \quad D_i\hat{\mathbf{F}}_2 = D_i\left(\hat{R}_1 + \hat{F}_1 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_1\right) \tag{33.21.11}$$

equivalently

$$\begin{array}{ll} D_1\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\tilde{\mu}_1 + \hat{f}_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_1 + F^{(1)}_{1,1}\left(1\right), & D_2\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\mu_2 + \hat{f}_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,1}\left(1\right), \\ D_3\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\hat{\mu}_1, & D_4\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1\left(2\right), \end{array}$$

Then we have that if $\mu = \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2$, $r = r_1 + r_2$ and $\hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$ the system's solution is given by

$$f_2\left(1\right) = r_1\tilde{\mu}_1, \quad f_1\left(2\right) = r_2\tilde{\mu}_2, \quad \hat{f}_1\left(4\right) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2, \quad \hat{f}_2\left(3\right) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1$$

it's easy to verify that

$$\begin{array}{ll} f_1\left(1\right) = \tilde{\mu}_1\left(r + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right), & f_1\left(3\right) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,2}\left(1\right) \\ f_1\left(4\right) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,2}\left(1\right), & f_2\left(2\right) = \left(r + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2, \\ f_2\left(3\right) = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\tilde{\mu}_1}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,1}\left(1\right), & f_2\left(4\right) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}\left(1\right), \\ \hat{f}_1\left(1\right) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + F^{(1)}_{1,2}\left(1\right), & \hat{f}_1\left(2\right) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,2}\left(1\right), \\ \hat{f}_1\left(3\right) = \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1, & \hat{f}_2\left(1\right) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1 + F^{(1)}_{1,1}\left(1\right), \\ \hat{f}_2\left(2\right) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,1}\left(1\right), & \hat{f}_2\left(4\right) = \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2, \end{array} \tag{33.21.12}$$

with system's solutions given by

$$\begin{array}{ll} f_1\left(1\right) = r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}, & f_2\left(2\right) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}, \\ f_1\left(3\right) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,2}\left(1\right), & f_1\left(4\right) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,2}\left(1\right), \\ f_2\left(3\right) = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,1}\left(1\right), & f_2\left(4\right) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}\left(1\right), \\ \hat{f}_1\left(1\right) = \tilde{\mu}_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,2}\left(1\right), & \hat{f}_1\left(2\right) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,2}\left(1\right), \\ \hat{f}_2\left(1\right) = \tilde{\mu}_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,1}\left(1\right), & \hat{f}_2\left(2\right) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,1}\left(1\right) \end{array} \tag{33.21.13}$$

33.21.3. General Second Order Derivatives

Now, taking the second order derivative with respect to the equations given in (33.26.20) we obtain it in their general form

$$
\begin{aligned}
D_kD_iF_1 &= D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)+D_iR_2D_k\left(F_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)+D_iF_2D_k\left(R_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_4D_k\left(R_2+\right.\\
D_kD_iF_2 &= D_kD_i\left(R_1+F_1+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_3\right)+D_iR_1D_k\left(F_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right)+D_iF_1D_k\left(R_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_3D_k\left(R_1+\right.\\
D_kD_i\hat{F}_3 &= D_kD_i\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_2+\hat{F}_4\right)+D_i\hat{R}_4D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2+\hat{F}_4\right)+D_i\hat{F}_4D_k\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_k\left(\hat{R}_4+\right.\\
D_kD_i\hat{F}_4 &= D_kD_i\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{R}_3D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{F}_3D_k\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_k\left(\hat{R}_3+\right.
\end{aligned}
$$

for $i,k=1,\dots,4$. In order to have it in an specific way we need to compute the expressions $D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)$

Second Order Derivatives: Serve's Switchover Times

Remind $R_i\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)=R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)$, *which we will write in his reduced form* $R_i=R_i\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right)$, *and according to the notation given in [24] we obtain*

$$D_iD_iR_k=D^2R_k\left(D_iP_i\right)^2+DR_kD_iD_iP_i \qquad (33.21.14)$$

whereas for $i\neq j$

$$D_iD_jR_k=D^2R_kD_iP_iD_jP_j+DR_kD_jP_jD_iP_i \qquad (33.21.15)$$

Second Order Derivatives: Queue Lengths

Just like before the expression $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)$, *will be denoted by* $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$, *then the mixed partial derivatives are:*

$$
\begin{aligned}
D_jD_iF_1 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1D_1F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i+\mathbb{1}_{i\neq j}D_iP\right.\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq 6}D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_jP_j+\mathbb{1}_{i>j}D_iP_i\right)+\mathbb{1}_{i=2}\left(D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_iP_i+D_i^2F_1\right)
\end{aligned}
$$

Recall the expression for $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)$, *which is denoted by* $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$, *then the mixed partial derivatives are given by*

$$
\begin{array}{llll}
D_1D_1F_1=0, & D_2D_1F_1=0, & D_3D_1F_1=0, & D_4D_1F_1=0,\\
D_1D_2F_1=0, & D_1D_3F_1=0, & D_1D_4F_1=0, &
\end{array}
$$

33.22. Generalizaciones

33.22.1. RSVC con dos conexiones

Sus ecuaciones recursivas son de la forma

$$F_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = R_2\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i\left(z_i\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2;\tau_2\right),$$

$$F_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = R_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i\left(z_i\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2;\tau_1\right),$$

$$\hat{F}_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = \hat{R}_2\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i\left(z_i\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right),$$

$$\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = \hat{R}_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i\left(z_i\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_1\left(z_1,z_2;\zeta_1\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right),$$

33.22.2. First Moments of the Queue Lengths

The server's switchover times are given by the general equation

$$R_i\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right) = R_i\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right) \tag{33.22.1}$$

with

$$D_iR_i = DR_iD_iP_i \tag{33.22.2}$$

the following notation is considered

$$D_1P_1 \equiv D_1\tilde{P}_1, \quad D_2P_2 \equiv D_2\tilde{P}_2, \quad D_3P_3 \equiv D_3\hat{P}_1, \quad D_4P_4 \equiv D_4\hat{P}_2,$$

also we need to remind $F_{1,2}\left(z_1;\zeta_2\right)F_{2,2}\left(z_2;\zeta_2\right) = F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)$, *therefore*

$$D_1F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right) = D_1\left[F_{1,2}\left(z_1;\zeta_2\right)F_{2,2}\left(z_2;\zeta_2\right)\right] = F_{2,2}\left(z_2;\zeta_2\right)D_1F_{1,2}\left(z_1;\zeta_2\right) = F_{1,2}^{(1)}\left(1\right)$$

i.e., $D_1F_2 = F_{1,2}^{(1)}(1)$; $D_2F_2 = F_{2,2}^{(1)}\left(1\right)$, *whereas that* $D_3F_2 = D_4F_2 = 0$, *then*

$$D_iF_j = 1\!\!1_{i\leq 2}F_{i,j}^{(1)}\left(1\right), \quad \textit{and} \quad D_i\hat{F}_j = 1\!\!1_{i\geq 2}F_{i,j}^{(1)}\left(1\right). \tag{33.22.3}$$

Now, we obtain the first moments equations for the queue lengths as before for the times the server arrives to the queue to start attending
Remember that

$$F_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = R_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i\left(z_i\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2;\tau_1\right),$$

where

$$F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$$

so

$$D_iF_1 = \mathbb{1}_{i\neq 1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=2}D_iF_1, \tag{33.22.4}$$

then

$$D_1F_1 = 0, \qquad D_2F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2P_2 + D_2F_1 = f_1(1)\tfrac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{\mu}_2 + f_1(2),$$
$$D_3F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3P_3 = f_1(1)\tfrac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{\mu}_1, \quad D_4F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4P_4 = f_1(1)\tfrac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{\mu}_2$$

$$D_iF_2 = \mathbb{1}_{i\neq 2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=1}D_iF_2 \tag{33.22.5}$$

$$D_1F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_1F_2 = f_2(2)\tfrac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_1, \quad D_2F_2 = 0$$
$$D_3F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3P_3 = f_2(2)\tfrac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_1, \qquad D_4F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4P_4 = f_2(2)\tfrac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_2$$

$$D_i\hat{F}_1 = \mathbb{1}_{i\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=4}D_i\hat{F}_1, \tag{33.22.6}$$

$$D_1\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1 = \hat{f}_1(3)\tfrac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_1, \quad D_2\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2P_2 = \hat{f}_1(3)\tfrac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_2$$
$$D_3\hat{F}_1 = 0, \qquad D_4\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_4P_4 + D_4\hat{F}_1 = \hat{f}_1(3)\tfrac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(2),$$

$$D_i\hat{F}_2 = \mathbb{1}_{i\neq 4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=3}D_i\hat{F}_2. \tag{33.22.7}$$

$$D_1\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1 = \hat{f}_2(4)\tfrac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{\mu}_1, \qquad D_2\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2P_2 = \hat{f}_2(4)\tfrac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{\mu}_2,$$
$$D_3\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_3P_3 + D_3\hat{F}_2 = \hat{f}_2(4)\tfrac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(4)$$
$$D_4\hat{F}_2 = 0$$

Then, now we can obtain the linear system of equations in order to obtain the first moments of the lengths of the queues:
For $\mathbf{F}_1 = R_2F_2\hat{F}_2$ *we get the general equations*

$$D_i\mathbf{F}_1 = D_i\left(R_2 + F_2 + \mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_2\right) \tag{33.22.8}$$

So

$$\begin{aligned}
D_1\mathbf{F}_1 &= D_1R_2 + D_1F_2 = r_1\tilde{\mu}_1 + f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_1\\
D_2\mathbf{F}_1 &= D_2(R_2+F_2) = r_2\tilde{\mu}_1\\
D_3\mathbf{F}_1 &= D_3\left(R_2+F_2+\hat{F}_2\right) = r_1\hat{\mu}_1 + f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{1,2}(1)\\
D_4\mathbf{F}_1 &= D_4\left(R_2+F_2+\hat{F}_2\right) = r_2\hat{\mu}_2 + f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1)
\end{aligned}$$

it means

$$D_1\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_1 + f_2(2)\left(\tfrac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + f_2(1), \qquad D_2\mathbf{F}_1 = r_2\tilde{\mu}_2,$$
$$D_3\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_1 + f_2(2)\left(\tfrac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{1,2}(1), \quad D_4\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_2 + f_2(2)\left(\tfrac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1),$$

$$\mathbf{F}_2 = R_1F_1\hat{F}_1, \quad D_i\mathbf{F}_2 = D_i\left(R_1 + F_1 + \mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_1\right) \tag{33.22.9}$$

equivalently

$$\begin{array}{ll} D_1\mathbf{F}_2 = r_1\tilde{\mu}_1, & D_2\mathbf{F}_2 = r_1\tilde{\mu}_2 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + f_1(2), \\ D_3\mathbf{F}_2 = r_1\hat{\mu}_1 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{1,1}(1), & D_4\mathbf{F}_2 = r_1\hat{\mu}_2 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1), \end{array}$$

$$\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{R}_2\hat{F}_2F_2, \quad D_i\hat{\mathbf{F}}_1 = D_i\left(\hat{R}_2 + \hat{F}_2 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_2\right) \tag{33.22.10}$$

equivalently

$$\begin{array}{ll} D_1\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\tilde{\mu}_1 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + F^{(1)}_{1,2}(1), & D_2\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,2}(1), \\ D_3\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(1), & D_4\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\hat{\mu}_2 \end{array}$$

$$\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{R}_1\hat{F}_1F_1, \quad D_i\hat{\mathbf{F}}_2 = D_i\left(\hat{R}_1 + \hat{F}_1 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_1\right) \tag{33.22.11}$$

equivalently

$$\begin{array}{ll} D_1\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\tilde{\mu}_1 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_1 + F^{(1)}_{1,1}(1), & D_2\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\mu_2 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,1}(1), \\ D_3\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\hat{\mu}_1, & D_4\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(2), \end{array}$$

Then we have that if $\mu = \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2$, $r = r_1 + r_2$ and $\hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$ the system's solution is given by

$$f_2(1) = r_1\tilde{\mu}_1, \quad f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2, \quad \hat{f}_1(4) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2, \quad \hat{f}_2(3) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1$$

it's easy to verify that

$$\begin{array}{ll} f_1(1) = \tilde{\mu}_1\left(r + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right), & f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,2}(1) \\ f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1), & f_2(2) = \left(r + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2, \\ f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\tilde{\mu}_1}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,1}(1), & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1), \\ \hat{f}_1(1) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + F^{(1)}_{1,2}(1), & \hat{f}_1(2) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,2}(1), \\ \hat{f}_1(3) = \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1, & \hat{f}_2(1) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1 + F^{(1)}_{1,1}(1), \\ \hat{f}_2(2) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,1}(1), & \hat{f}_2(4) = \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2, \end{array} \tag{33.22.12}$$

with system's solutions given by

$$\begin{array}{ll} f_1(1) = r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}, & f_2(2) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}, \\ f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,2}(1), & f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1), \\ f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,1}(1), & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1), \\ \hat{f}_1(1) = \tilde{\mu}_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,2}(1), & \hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,2}(1), \\ \hat{f}_2(1) = \tilde{\mu}_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,1}(1), & \hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,1}(1) \end{array} \tag{33.22.13}$$

33.22.3. General Second Order Derivatives

Now, taking the second order derivative with respect to the equations given in (33.26.20) we obtain it in their general form

$$\begin{aligned}
D_kD_iF_1 &= D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)+D_iR_2D_k\left(F_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)+D_iF_2D_k\left(R_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_4D_k\left(R_2+\right.\\
D_kD_iF_2 &= D_kD_i\left(R_1+F_1+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_3\right)+D_iR_1D_k\left(F_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right)+D_iF_1D_k\left(R_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_3D_k\left(R_1+\right.\\
D_kD_i\hat{F}_3 &= D_kD_i\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_2+\hat{F}_4\right)+D_i\hat{R}_4D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2+\hat{F}_4\right)+D_i\hat{F}_4D_k\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_k\left(\hat{R}_4+\right.\\
D_kD_i\hat{F}_4 &= D_kD_i\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{R}_3D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{F}_3D_k\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_k\left(\hat{R}_3+\right.
\end{aligned}$$

for $i,k=1,\ldots,4$*. In order to have it in an specific way we need to compute the expressions* $D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)$

Second Order Derivatives: Serve's Switchover Times

Remind $R_i(z_1,z_2,w_1,w_2)=R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)$*, which we will write in his reduced form* $R_i=R_i\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right)$*, and according to the notation given in [24] we obtain*

$$D_iD_iR_k=D^2R_k\left(D_iP_i\right)^2+DR_kD_iD_iP_i \tag{33.22.14}$$

whereas for $i\neq j$

$$D_iD_jR_k=D^2R_kD_iP_iD_jP_j+DR_kD_jP_jD_iP_i \tag{33.22.15}$$

Second Order Derivatives: Queue Lengths

Just like before the expression $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)$*, will be denoted by* $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$*, then the mixed partial derivatives are:*

$$\begin{aligned}
D_jD_iF_1 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1D_1F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i+\mathbb{1}_{i\neq j}D_iP\right.\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq 6}D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_jP_j+\mathbb{1}_{i>j}D_iP_i\right)+\mathbb{1}_{i=2}\left(D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_iP_i+D_i^2F_1\right)
\end{aligned}$$

Recall the expression for $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)$*, which is denoted by* $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$*, then the mixed partial derivatives are given by*

$$\begin{array}{llll}
D_1D_1F_1=0, & D_2D_1F_1=0, & D_3D_1F_1=0, & D_4D_1F_1=0,\\
D_1D_2F_1=0, & D_1D_3F_1=0, & D_1D_4F_1=0, &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_2\tilde{P}_2\right)^2+D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_2\tilde{P}_2\right)^2+D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2^2\tilde{P}_2+D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2\\
&+ D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2+D_2D_2F_1\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2+f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^(2)\tilde{\mu}_2^{(2)}+f_1(1)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}+f_1(1,2)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1(1,2)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1(2,2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2+D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2+D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1+D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+f_1(1)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1(1,2)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1\left(1,2\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2 + D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1\left(1\right)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1\left(1,2\right)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3^2\hat{P}_1\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_1^2 + f_1\left(1\right)\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1\left(1\right)\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1\left(1,2\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4^2\hat{P}_2\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_2^2 + f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}
\end{aligned}$$

Meanwhile for $F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\hat{P}_1\hat{P}_2\right)\right)$

$$\begin{aligned}
D_jD_iF_2 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2D_2F_2\left(D\theta_2\right)^2 D_iP_iD_jP_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2F_2D^2\theta_2D_iP_iD_jP_j\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2F_2D\theta_2\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i + \mathbb{1}_{i\neq j}D_iP_iD_jP_j\right)\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq 6}D_2D_1F_2D\theta_2\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_jP_j + \mathbb{1}_{i>j}D_iP_i\right) + \mathbb{1}_{i=1}\left(D_2D_1F_2D\theta_2D_iP_i + D_i^2F_2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&D_2D_1F_2 = 0,\quad D_2D_3F_3 = 0,\quad D_2D_4F_2 = 0,\\
&D_1D_2F_2 = 0,\quad D_2D_2F_2 = 0,\quad D_3D_2F_2 = 0,\quad D_4D_2F_2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1D_1F_2 &= \left(D_1P_1\right)^2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_2^2F_2 + \left(D_1P_1\right)^2 D^2\tilde{\theta}_2D_2F_2 + D_1^2P_1D\tilde{\theta}_2D_2F_2 + D_1P_1D\tilde{\theta}_2D_2D_1F_2\\
&+ D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_1^2F_2\\
&= f_2\left(2\right)\frac{\tilde{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2\right)\theta_2^{(2)}\tilde{\mu}_1^2 + f_2\left(2,1\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} + \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right) + \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(2,1\right) + f_2\left(1,1\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_1F_2 &= D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_3P_1D_1P_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1\\
&= f_2\left(2,1\right)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_1F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_4P_2D_1P_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2,1\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1 + D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2,1\right)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_2F_2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2D^2\tilde{\theta}_2 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3^2\hat{P}_1\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\hat{\mu}_1^2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1^2 + f_2\left(2\right)\frac{\hat{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_4F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1 + D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2,1\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_4F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_4F_2 &= D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4^2\hat{P}_2 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_2^2 + f_2\left(2\right)\frac{\hat{P}_2^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

For $\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_2\right), w_2\right)$

$$
\begin{aligned}
D_jD_i\hat{F}_1 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3D_3\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_iP_iD_jP_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_iP_iD_jP_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i + \mathbb{1}_{i\neq j}D_iP\right.\\
&+ \mathbb{1}_{i+j\geq 5}D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_iP_i + \mathbb{1}_{i>j}D_jP_j\right) + \mathbb{1}_{i=4}\left(D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i + D_i^2\hat{F}_1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llll}
D_3D_1\hat{F}_1 = 0, & D_3D_2\hat{F}_1 = 0, & D_1D_3\hat{F}_1 = 0, & D_2D_3\hat{F}_1 = 0\\
D_3D_3\hat{F}_1 = 0, & D_4D_3\hat{F}_1 = 0, & D_3D_4\hat{F}_1 = 0, &
\end{array}
$$

$$\begin{aligned}
D_1 D_1 \hat{F}_1 &= D_3^2 \hat{F}_1 \left(D\hat{\theta}_1\right)^2 (D_1 P_1)^2 + D_3 \hat{F}_1 D^2 \hat{\theta}_1 (D_1 P_1)^2 + D_3 \hat{F}_1 D\hat{\theta}_1 D_1^2 P_1 \\
&= \hat{f}_1 (3,3) \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 + \hat{f}_1 (3) \frac{P_1^{(2)}}{1-\hat{\mu}_1} + \hat{f}_1 (3) \hat{\theta}_1^{(2)} \tilde{\mu}_1^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 D_1 \hat{F}_1 &= D_3^2 \hat{F}_1 \left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1 P_1 D_2 P_1 + D_3 \hat{F}_1 D^2 \hat{\theta}_1 D_1 P_1 D_2 P_2 + D_3 \hat{F}_1 D\hat{\theta}_1 D_1 P_1 D_2 P_2 \\
&= \hat{f}_1 (3,3) \left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2 \tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2 + \hat{f}_1 (3) \tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2 \hat{\theta}_1^{(2)} + \hat{f}_1 (3) \frac{\tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4 D_1 \hat{F}_1 &= D_3 D_3 \hat{F}_1 \left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_4 \hat{P}_2 D_1 P_1 + D_3 \hat{F}_1 D^2 \hat{\theta}_1 D_1 P_1 D_4 \hat{P}_2 + D_3 \hat{F}_1 D\hat{\theta}_1 D_1 P_1 D_4 \hat{P}_2 + D_3 D_4 \hat{F}_1 D\hat{\theta}_1 D_1 P_1 \\
&= \hat{f}_1 (3,3) \left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2 \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_1 + \hat{f}_1 (3) \hat{\theta}_1^{(2)} \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_2 + \hat{f}_1 (3) \frac{\tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1} + \hat{f}_1 (3,4) \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1 D_2 \hat{F}_1 &= D_3^2 \hat{F}_1 \left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1 P_1 D_2 P_2 + D_3 \hat{F}_1 D^2 \hat{\theta}_1 D_1 P_1 D_2 P_2 + D_3 \hat{F}_1 D\hat{\theta}_1 D_1 P_1 D_2 P_2 \\
&= \hat{f}_1 (3,3) \left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2 \tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2 + \hat{f}_1 (3) \hat{\theta}_1^{(2)} \tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2 + \hat{f}_1 (3) \frac{\tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 D_2 \hat{F}_1 &= D_3^2 \hat{F}_1 \left(D\hat{\theta}_1\right)^2 (D_2 P_2)^2 + D_3 \hat{F}_1 D^2 \hat{\theta}_1 (D_2 P_2)^2 + D_3 \hat{F}_1 D\hat{\theta}_1 D_2^2 P_2 \\
&= \hat{f}_1 (3,3) \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2 + \hat{f}_1 (3) \hat{\theta}_1^{(2)} \tilde{\mu}_2^2 + \hat{f}_1 (3) \tilde{P}_2^{(2)} \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4 D_2 \hat{F}_1 &= D_2 P_2 D_4 \hat{P}_2 D\hat{\theta}_1 D_3 \hat{F}_1 + D_2 P_2 D_4 \hat{P}_2 D^2 \hat{\theta}_1 D_3 \hat{F}_1 + D_2 P_2 D\hat{\theta}_1 D_4 D_3 \hat{F}_1 + D_2 P_2 \left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_4 \hat{P}_2 D_3^2 \hat{F}_1 \\
&= \hat{f}_1 (3) \frac{\tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1} + \hat{f}_1 (3) \hat{\theta}_1^{(2)} \tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_2 + \hat{f}_1 (4,3) \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1} + \hat{f}_1 (3,3) \left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2 \tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1 D_4 \hat{F}_1 &= D_1 P_1 D_4 \hat{P}_2 D\hat{\theta}_1 D_3 \hat{F}_1 + D_1 P_1 D_4 \hat{P}_2 D^2 \hat{\theta}_1 D_3 \hat{F}_1 + D_1 P_1 D\hat{\theta}_1 D_3 D_4 \hat{F}_1 + D_1 P_1 D_4 \hat{P}_2 \left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_3 D_3 \hat{F}_1 \\
&= \hat{f}_1 (3) \frac{\tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1} + \hat{f}_1 (3) \hat{\theta}_1^{(2)} \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_2 + \hat{f}_1 (3,4) \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1} + \hat{f}_1 (3,3) \left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2 \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 D_4 \hat{F}_1 &= D_2 P_2 D_4 \hat{P}_2 D\hat{\theta}_1 D_3 \hat{F}_1 + D_2 P_2 D_4 \hat{P}_2 D^2 \hat{\theta}_1 D_3 \hat{F}_1 + D_2 P_2 D\hat{\theta}_1 D_3 D_4 \hat{F}_1 + D_2 P_2 D_4 \hat{P}_2 \left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_3^2 \hat{F}_1 \\
&= \hat{f}_1 (3) \frac{\tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1} + \hat{f}_1 (3) \hat{\theta}_1^{(2)} \tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_2 + \hat{f}_1 (3,4) \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1} + \hat{f}_1 (3,3) \left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2 \tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4 D_4 \hat{F}_1 &= D_4 D_4 \hat{F}_1 + D\hat{\theta}_1 D_4^2 \hat{P}_2 D_3 \hat{F}_1 + \left(D_4 \hat{P}_2\right)^2 D^2 \hat{\theta}_1 D_3 \hat{F}_1 + D_4 \hat{P}_2 D\hat{\theta}_1 D_3 D_4 \hat{F}_1 \\
&+ \left(D_4 \hat{P}_2\right)^2 \left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_3^2 \hat{F}_1 + D_3 D_4 \hat{F}_1 D\hat{\theta}_1 D_4 \hat{P}_2 \\
&= \hat{f}_1 (4,4) + \hat{f}_1 (3) \frac{\hat{P}_2^{(2)}}{1-\hat{\mu}_1} + \hat{f}_1 (3) \hat{\theta}_1^{(2)} \hat{\mu}_2^2 + \hat{f}_1 (3,4) \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1} + \hat{f}_1 (3,3) \left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2 + \hat{f}_1 (3,4) \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

Finally for $\hat{F}_2 \left(w_1, \hat{\theta}_2 \left(P_1 \tilde{P}_2 \hat{P}_1\right)\right)$

$$\begin{aligned}
D_j D_i \hat{F}_2 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 4} D_4 D_4 \hat{F}_2 \left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_i P_i D_j P_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 4} D_4 \hat{F}_2 D^2 \hat{\theta}_2 D_i P_i D_j P_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 4} D_4 \hat{F}_2 D\hat{\theta}_2 \left(\mathbb{1}_{i=j} D_i^2 P_i + \mathbb{1}_{i\neq j} D_i P\right. \\
&+ (1-\mathbb{1}_{i=j=2}) \mathbb{1}_{i+j\geq 4} D_4 D_3 \hat{F}_2 D\hat{\theta}_2 \left(\mathbb{1}_{i\leq j} D_i P_i + \mathbb{1}_{i>j} D_j P_j\right) + \mathbb{1}_{i=3} \left(D_4 D_3 \hat{F}_2 D\hat{\theta}_2 D_i P_i + D_i^2 \hat{F}_2\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{llll}
D_4 D_1 \hat{F}_2 = 0, & D_4 D_2 \hat{F}_2 = 0, & D_4 D_3 \hat{F}_2 = 0, & D_1 D_4 \hat{F}_2 = 0 \\
D_2 D_4 \hat{F}_2 = 0, & D_3 D_4 \hat{F}_2 = 0, & D_4 D_4 \hat{F}_2 = 0, &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1 D_1 \hat{F}_2 &= D\hat{\theta}_2 D_1^2 P_1 D_4 \hat{F}_2 + \left(D_1 P_1\right)^2 D^2 \hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + \left(D_1 P_1\right)^2 \left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_4^2 \hat{F}_2 \\
&= \hat{f}_2\left(4\right) \frac{\tilde{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4\right) \hat{\theta}_2^{(2)} \tilde{\mu}_1^2 + \hat{f}_2\left(4,4\right) \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2 D_1 \hat{F}_2 &= D_1 P_1 D_2 P_2 D\hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_1 P_1 D_2 P_2 D^2 \hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_1 P_1 D_2 P_2 \left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_4^2 \hat{F}_2 \\
&= \hat{f}_2\left(4\right) \frac{\tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4\right) \hat{\theta}_2^{(2)} \tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2\left(4,4\right) \left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 \tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3 D_1 \hat{F}_2 &= D_1 P_1 D_3 \hat{P}_1 D\hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_1 P_1 D_3 \hat{P}_1 D^2 \hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_1 P_1 D_3 \hat{P}_1 \left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_4^2 \hat{F}_2 + D_1 P_1 D\hat{\theta}_2 D_4 D_3 \hat{F}_2 \\
&= \hat{f}_2\left(4\right) \frac{\tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4\right) \hat{\theta}_2^{(2)} \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4,4\right) \left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4,3\right) \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1 D_2 \hat{F}_2 &= D_1 P_1 D_2 P_2 D\hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_1 P_1 D_2 P_2 D^2 \hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_1 P_1 D_2 P_2 \left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_4 D_4 \hat{F}_2 \\
&= \hat{f}_2\left(4\right) \frac{\tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4\right) \hat{\theta}_2^{(2)} \tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2\left(4,4\right) \left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 \tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2 D_2 \hat{F}_2 &= D\hat{\theta}_2 D_2^2 P_2 D_4 \hat{F}_2 + \left(D_2 P_2\right)^2 D^2 \hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + \left(D_2 P_2\right)^2 \left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_4^2 \hat{F}_2 \\
&= \hat{f}_2\left(4\right) \frac{\tilde{P}_2^{(2)}}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4\right) \hat{\theta}_2^{(2)} \tilde{\mu}_2^2 + \hat{f}_2\left(4,4\right) \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3 D_2 \hat{F}_2 &= D_2 P_2 D_3 \hat{P}_1 D\hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_2 P_2 D_3 \hat{P}_1 D^2 \hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_2 P_2 D_3 \hat{P}_1 \left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_4^2 \hat{F}_2 + D_2 P_2 D\hat{\theta}_2 D_3 D_4 \hat{F}_2 \\
&= \hat{f}_2\left(4\right) \frac{\tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4\right) \hat{\theta}_2^{(2)} \tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4,4\right) \left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 \tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(3,4\right) \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1 D_3 \hat{F}_2 &= D_1 P_1 D_3 \hat{P}_1 D\hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_1 P_1 D_3 \hat{P}_1 D^2 \hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_1 P_1 D_3 \hat{P}_1 \left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_4 D_4 \hat{F}_2 + D_1 P_1 D\hat{\theta}_2 D_4 D_3 \hat{F}_2 \\
&= \hat{f}_2\left(4\right) \frac{\tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4\right) \hat{\theta}_2^{(2)} \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4,4\right) \left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4,3\right) \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2 D_3 \hat{F}_2 &= D_2 P_2 D_3 \hat{P}_1 D\hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_2 P_2 D_3 \hat{P}_1 D^2 \hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_2 P_2 D_3 \hat{P}_1 \left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_4^2 \hat{F}_2 + D_2 P_2 D\hat{\theta}_2 D_4 D_3 \hat{F}_2 \\
&= \hat{f}_2\left(4\right) \frac{\tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4\right) \hat{\theta}_2^{(2)} \tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4,4\right) \left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 \tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4,3\right) \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3 D_3 \hat{F}_2 &= D_3^2 \hat{P}_1 D\hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + \left(D_3 \hat{P}_1\right)^2 D^2 \hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_3 \hat{P}_1 D\hat{\theta}_2 D_4 D_3 \hat{F}_2 + \left(D_3 \hat{P}_1\right)^2 \left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_4^2 \hat{F}_2 + D_3^2 \hat{F}_2 + D_4 D_3 \hat{f}_2 \\
&= \hat{f}_2\left(4\right) \frac{\hat{P}_1^{(2)}}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4\right) \hat{\theta}_2^{(2)} \hat{\mu}_1^2 + \hat{f}_2\left(4,3\right) \frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4,4\right) \left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 + \hat{f}_2\left(3,3\right) + \hat{f}_2\left(4,3\right) \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

Then according to the equations given at the beginning of this section, we have

$$\begin{aligned}
D_kD_iF_1 &= D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq3}\hat{F}_4\right)+D_iR_2D_k\left(F_2+\mathbb{1}_{k\geq3}\hat{F}_4\right)\\
&+ D_iF_2D_k\left(R_2+\mathbb{1}_{k\geq3}\hat{F}_4\right)+\mathbb{1}_{i\geq3}D_i\hat{F}_4D_k\left(R_2+F_2\right)
\end{aligned}$$

for $i=1$, *and* $k=1$

$$D_1D_1F_1 = D_1D_1\left(R_2+F_2\right)+D_1R_2D_1F_2+D_1F_2D_1R_2 = D_1^2R_2+D_1^2F_2+D_1R_2D_1F_2+D_1F_2D_1R_2$$

$k=2$

$$D_2D_iF_1 = D_2D_1\left(R_2+F_2\right)+D_1R_2D_2F_2+D_1F_2D_2R_2 = D_2D_1R_2+D_2D_1F_2+D_1R_2D_2F_2+D_1F_2D_2R_2$$

$k=3$

$$\begin{aligned}
D_3D_1F_1 &= D_3D_1\left(R_2+F_2\right)+D_1R_2D_3\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_1F_2D_3\left(R_2+\hat{F}_4\right)\\
&= D_3D_1R_2+D_3D_1F_2+D_1R_2D_3F_2+D_1R_2D_3\hat{F}_4+D_1F_2D_3R_2+D_1F_2D_3\hat{F}_4
\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_1F_1 &= D_4D_1\left(R_2+F_2\right)+D_1R_2D_4\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_1F_2D_4\left(R_2+\hat{F}_4\right)\\
&= D_4D_1R_2+D_4D_1F_2+D_1R_2D_4F_2+D_1R_2D_4\hat{F}_4+D_1F_2D_4R_2+D_1F_2D_4\hat{F}_4
\end{aligned}$$

for $i=2$, *and* $k=1$

$$D_1D_2F_1 = D_1D_2\left(R_2+F_2\right)+D_2R_2D_1F_2+D_2F_2D_1R_2 = D_1D_2R_2+D_1D_2F_2+D_2R_2D_1F_2+D_2F_2D_1R_2$$

$k=2$

$$D_2D_2F_1 = D_2D_2\left(R_2+F_2\right)+D_2R_2D_2F_2+D_2F_2D_2R_2 = D_2D_2R_2+D_2D_2F_2+D_2R_2D_2F_2+D_2F_2D_2R_2$$

$k=3$

$$\begin{aligned}
D_3D_2F_1 &= D_3D_2\left(R_2+F_2\right)+D_2R_2D_3\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_2F_2D_3\left(R_2+\hat{F}_4\right)\\
&= D_3D_2R_2+D_3D_2F_2+D_2R_2D_3F_2+D_2R_2D_3\hat{F}_4+D_2F_2D_3R_2+D_2F_2D_3\hat{F}_4
\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_2F_1 &= D_4D_2\left(R_2+F_2\right)+D_2R_2D_4\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_2F_2D_4\left(R_2+\hat{F}_4\right)\\
&= D_4D_2R_2+D_4D_2F_2+D_2R_2D_4F_2+D_2R_2D_4\hat{F}_4+D_2F_2D_4R_2+D_2F_2D_4\hat{F}_4
\end{aligned}$$

for $i=3$, *and* $k=1$

$$\begin{aligned}
D_1D_3F_1 &= D_1D_3\left(R_2+F_2+\hat{F}_4\right)+D_3R_2D_1F_2+D_3F_2D_1R_2+D_3\hat{F}_4D_1\left(R_2+F_2\right)\\
&= D_1D_3R_2+D_1D_3F_2+D_1D_3\hat{F}_4+D_3R_2D_1F_2+D_3F_2D_1R_2+D_3\hat{F}_4D_1R_2+D_3\hat{F}_4D_1F_2
\end{aligned}$$

$k=2$

$$\begin{aligned}
D_2D_3F_1 &= D_2D_3\left(R_2+F_2+\hat{F}_4\right)+D_3R_2D_2F_2+D_3F_2D_2R_2+D_3\hat{F}_4D_2\left(R_2+F_2\right)\\
&= D_2D_3R_2+D_2D_3F_2+D_2D_3\hat{F}_4+D_3R_2D_2F_2+D_3F_2D_2R_2+D_3\hat{F}_4D_2R_2+D_3\hat{F}_4D_2F_2
\end{aligned}$$

$k=3$

$$\begin{aligned}
D_3D_3F_1 &= D_3D_3\left(R_2+F_2+\hat{F}_4\right)+D_3R_2D_3\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_3F_2D_3\left(R_2+\hat{F}_4\right)+D_3\hat{F}_4D_3\left(R_2+F_2\right)\\
&= D_3D_3R_2+D_3D_3F_2+D_3D_3\hat{F}_4+D_3R_2D_3F_2+D_3R_2D_3\hat{F}_4\\
&+ D_3F_2D_3R_2+D_3F_2D_3\hat{F}_4+D_3\hat{F}_4D_3R_2+D_3\hat{F}_4D_3F_2
\end{aligned}$$

$k = 4$

$$\begin{aligned}
D_4D_3F_1 &= D_4D_3\left(R_2 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_3R_2D_4\left(F_2 + \hat{F}_4\right) + D_3F_2D_4\left(R_2 + \hat{F}_4\right) + D_3\hat{F}_4D_4\left(R_2 + F_2\right)\\
&= D_4D_3R_2 + D_4D_3F_2 + D_4D_3\hat{F}_4 + D_3R_2D_4F_2 + D_3R_2D_4\hat{F}_4\\
&+ D_3F_2D_4R_2 + D_3F_2D_4\hat{F}_4 + D_3\hat{F}_4D_4R_2 + D_3\hat{F}_4D_4F_2
\end{aligned}$$

$for\ i = 4,\ and\ k = 1$

$$\begin{aligned}
D_1D_4F_1 &= D_1D_4\left(R_2 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_4R_2D_1F_2 + D_4F_2D_1R_2 + D_4\hat{F}_4D_1\left(R_2 + F_2\right)\\
&= D_1D_4R_2 + D_1D_4F_2 + D_1D_4\hat{F}_4 + D_4R_2D_1F_2 + D_4F_2D_1R_2 + D_4\hat{F}_4D_1R_2 + D_4\hat{F}_4D_1F_2
\end{aligned}$$

$k = 2$

$$\begin{aligned}
D_2D_4F_1 &= D_2D_4\left(R_2 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_4R_2D_2F_2 + D_4F_2D_2R_2 + D_4\hat{F}_4D_2\left(R_2 + F_2\right)\\
&= D_2D_4R_2 + D_2D_4F_2 + D_2D_4\hat{F}_4 + D_4R_2D_2F_2 + D_4F_2D_2R_2 + D_4\hat{F}_4D_2R_2 + D_4\hat{F}_4D_2F_2
\end{aligned}$$

$k = 3$

$$\begin{aligned}
D_3D_4F_1 &= D_3D_4\left(R_2 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_4R_2D_3\left(F_2 + \hat{F}_4\right) + D_4F_2D_3\left(R_2 + \hat{F}_4\right) + D_4\hat{F}_4D_3\left(R_2 + F_2\right)\\
&= D_3D_4R_2 + D_3D_4F_2 + D_3D_4\hat{F}_4 + D_4R_2D_3F_2 + D_4R_2D_3\hat{F}_4\\
&+ D_4F_2D_3R_2 + D_4F_2D_3\hat{F}_4 + D_4\hat{F}_4D_3R_2 + D_4\hat{F}_4D_3F_2
\end{aligned}$$

$k = 4$

$$\begin{aligned}
D_4D_4F_1 &= D_4D_4\left(R_2 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_4R_2D_4\left(F_2 + \hat{F}_4\right) + D_4F_2D_4\left(R_2 + \hat{F}_4\right) + D_4\hat{F}_4D_4\left(R_2 + F_2\right)\\
&= D_4D_4R_2 + D_4D_4F_2 + D_4D_4\hat{F}_4 + D_4R_2D_4F_2 + D_4R_2D_4\hat{F}_4\\
&+ D_4F_2D_4R_2 + D_4F_2D_4\hat{F}_4 + D_4\hat{F}_4D_4R_2 + D_4\hat{F}_4D_4F_2
\end{aligned}$$

33.23. Generalizaciones

33.23.1. RSVC con dos conexiones

Sus ecuaciones recursivas son de la forma

$$F_1(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_2\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2),$$

$$F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1),$$

$$\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1,w_2) = \hat{R}_2\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right),$$

$$\hat{F}_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = \hat{R}_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right),$$

33.23.2. First Moments of the Queue Lengths

The server's switchover times are given by the general equation

$$R_i(\mathbf{z},\mathbf{w}) = R_i\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.23.1}$$

with

$$D_iR_i = DR_iD_iP_i \tag{33.23.2}$$

the following notation is considered

$$D_1P_1 \equiv D_1\tilde{P}_1, \quad D_2P_2 \equiv D_2\tilde{P}_2, \quad D_3P_3 \equiv D_3\hat{P}_1, \quad D_4P_4 \equiv D_4\hat{P}_2,$$

also we need to remind $F_{1,2}(z_1;\zeta_2)F_{2,2}(z_2;\zeta_2) = F_2(z_1,z_2;\zeta_2)$, *therefore*

$$D_1F_2(z_1,z_2;\zeta_2) = D_1\left[F_{1,2}(z_1;\zeta_2)F_{2,2}(z_2;\zeta_2)\right] = F_{2,2}(z_2;\zeta_2)D_1F_{1,2}(z_1;\zeta_2) = F_{1,2}^{(1)}(1)$$

i.e., $D_1F_2 = F_{1,2}^{(1)}(1)$; $D_2F_2 = F_{2,2}^{(1)}(1)$, *whereas that* $D_3F_2 = D_4F_2 = 0$, *then*

$$D_iF_j = \mathbb{1}_{i\leq 2}F_{i,j}^{(1)}(1), \quad \text{and} \quad D_i\hat{F}_j = \mathbb{1}_{i\geq 2}F_{i,j}^{(1)}(1). \tag{33.23.3}$$

Now, we obtain the first moments equations for the queue lengths as before for the times the server arrives to the queue to start attending
Remember that

$$F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1),$$

where

$$F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$$

so

$$D_iF_1 \quad = \quad \mathbb{1}_{i\neq 1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=2}D_iF_1, \tag{33.23.4}$$

then

$$\begin{array}{ll} D_1F_1 = 0, & D_2F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2P_2 + D_2F_1 = f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{\mu}_2 + f_1\left(2\right), \\ D_3F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3P_3 = f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{\mu}_1, & D_4F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4P_4 = f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{\mu}_2 \end{array}$$

$$D_iF_2 \quad = \quad \mathbb{1}_{i\neq 2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=1}D_iF_2 \tag{33.23.5}$$

$$\begin{array}{ll} D_1F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_1F_2 = f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_1, & D_2F_2 = 0 \\ D_3F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3P_3 = f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_1, & D_4F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4P_4 = f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_2 \end{array}$$

$$D_i\hat{F}_1 \quad = \quad \mathbb{1}_{i\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=4}D_i\hat{F}_1, \tag{33.23.6}$$

$$\begin{array}{ll} D_1\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1 = \hat{f}_1\left(3\right)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_1, & D_2\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2P_2 = \hat{f}_1\left(3\right)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_2 \\ D_3\hat{F}_1 = 0, & D_4\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_4P_4 + D_4\hat{F}_1 = \hat{f}_1\left(3\right)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1\left(2\right), \end{array}$$

$$D_i\hat{F}_2 \quad = \quad \mathbb{1}_{i\neq 4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=3}D_i\hat{F}_2. \tag{33.23.7}$$

$$\begin{array}{ll} D_1\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1 = \hat{f}_2\left(4\right)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{\mu}_1, & D_2\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2P_2 = \hat{f}_2\left(4\right)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{\mu}_2, \\ D_3\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_3P_3 + D_3\hat{F}_2 = \hat{f}_2\left(4\right)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4\right) & \\ D_4\hat{F}_2 = 0 & \end{array}$$

Then, now we can obtain the linear system of equations in order to obtain the first moments of the lengths of the queues:
For $\mathbf{F}_1 = R_2F_2\hat{F}_2$ *we get the general equations*

$$D_i\mathbf{F}_1 = D_i\left(R_2 + F_2 + \mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_2\right) \tag{33.23.8}$$

So

$$\begin{aligned} D_1\mathbf{F}_1 &= D_1R_2 + D_1F_2 = r_1\tilde{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_1 \\ D_2\mathbf{F}_1 &= D_2\left(R_2 + F_2\right) = r_2\tilde{\mu}_1 \\ D_3\mathbf{F}_1 &= D_3\left(R_2 + F_2 + \hat{F}_2\right) = r_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_1 + \hat{F}_{1,2}^{(1)}\left(1\right) \\ D_4\mathbf{F}_1 &= D_4\left(R_2 + F_2 + \hat{F}_2\right) = r_2\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_2 + \hat{F}_{2,2}^{(1)}\left(1\right) \end{aligned}$$

it means

$$\begin{array}{ll} D_1\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + f_2\left(1\right), & D_2\mathbf{F}_1 = r_2\tilde{\mu}_2, \\ D_3\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}_{1,2}^{(1)}\left(1\right), & D_4\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}_{2,2}^{(1)}\left(1\right), \end{array}$$

$$\mathbf{F}_2 = R_1F_1\hat{F}_1, \quad D_i\mathbf{F}_2 = D_i\left(R_1 + F_1 + \mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_1\right) \tag{33.23.9}$$

equivalently

$$\begin{array}{ll}
D_1\mathbf{F}_2 = r_1\tilde{\mu}_1, & D_2\mathbf{F}_2 = r_1\tilde{\mu}_2 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + f_1(2),\\
D_3\mathbf{F}_2 = r_1\hat{\mu}_1 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{1,1}(1), & D_4\mathbf{F}_2 = r_1\hat{\mu}_2 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1),
\end{array}$$

$$\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{R}_2\hat{F}_2F_2, \quad D_i\hat{\mathbf{F}}_1 = D_i\left(\hat{R}_2 + \hat{F}_2 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_2\right) \tag{33.23.10}$$

equivalently

$$\begin{array}{ll}
D_1\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\tilde{\mu}_1 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + F^{(1)}_{1,2}(1), & D_2\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,2}(1),\\
D_3\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(1), & D_4\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\hat{\mu}_2
\end{array}$$

$$\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{R}_1\hat{F}_1F_1, \quad D_i\hat{\mathbf{F}}_2 = D_i\left(\hat{R}_1 + \hat{F}_1 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_1\right) \tag{33.23.11}$$

equivalently

$$\begin{array}{ll}
D_1\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\tilde{\mu}_1 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_1 + F^{(1)}_{1,1}(1), & D_2\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\mu_2 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,1}(1),\\
D_3\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\hat{\mu}_1, & D_4\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(2),
\end{array}$$

Then we have that if $\mu = \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2$, $r = r_1 + r_2$ and $\hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$ the system's solution is given by

$$f_2(1) = r_1\tilde{\mu}_1, \quad f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2, \quad \hat{f}_1(4) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2, \quad \hat{f}_2(3) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1$$

it's easy to verify that

$$\begin{array}{ll}
f_1(1) = \tilde{\mu}_1\left(r + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right), & f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,2}(1)\\
f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1), & f_2(2) = \left(r + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2,\\
f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\tilde{\mu}_1}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,1}(1), & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1),\\
\hat{f}_1(1) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + F^{(1)}_{1,2}(1), & \hat{f}_1(2) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,2}(1),\\
\hat{f}_1(3) = \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1, & \hat{f}_2(1) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1 + F^{(1)}_{1,1}(1),\\
\hat{f}_2(2) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,1}(1), & \hat{f}_2(4) = \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2,
\end{array} \tag{33.23.12}$$

with system's solutions given by

$$\begin{array}{ll}
f_1(1) = r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}, & f_2(2) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu},\\
f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,2}(1), & f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1),\\
f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,1}(1), & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1),\\
\hat{f}_1(1) = \tilde{\mu}_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,2}(1), & \hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,2}(1),\\
\hat{f}_2(1) = \tilde{\mu}_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,1}(1), & \hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,1}(1)
\end{array} \tag{33.23.13}$$

General Second Order Derivatives

Now, taking the second order derivative with respect to the equations given in (33.26.20) we obtain it in their general form

$$
\begin{aligned}
D_kD_iF_1 &= D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)+D_iR_2D_k\left(F_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)+D_iF_2D_k\left(R_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_4D_k\left(R+F\right.\\
D_kD_iF_2 &= D_kD_i\left(R_1+F_1+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_3\right)+D_iR_1D_k\left(F_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right)+D_iF_1D_k\left(R_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_3D_k\left(R_1+\right.\\
D_kD_i\hat{F}_3 &= D_kD_i\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_2+\hat{F}_4\right)+D_i\hat{R}_4D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2+\hat{F}_4\right)+D_i\hat{F}_4D_k\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_k\left(\hat{R}_4+\right.\\
D_kD_i\hat{F}_4 &= D_kD_i\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{R}_3D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{F}_3D_k\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_k\left(\hat{R}_3+\right.
\end{aligned}
$$

for $i,k=1,\ldots,4$. In order to have it in an specific way we need to compute the expressions $D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)$

Second Order Derivatives: Serve's Switchover Times

Remind $R_i\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)=R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)$, which we will write in his reduced form $R_i=R_i\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right)$, and according to the notation given in [24] we obtain

$$D_iD_iR_k=D^2R_k\left(D_iP_i\right)^2+DR_kD_iD_iP_i \tag{33.23.14}$$

whereas for $i\neq j$

$$D_iD_jR_k=D^2R_kD_iP_iD_jP_j+DR_kD_jP_jD_iP_i \tag{33.23.15}$$

Second Order Derivatives: Queue Lengths

Just like before the expression $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)$, will be denoted by $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$, then the mixed partial derivatives are:

$$
\begin{aligned}
D_jD_iF_1 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1D_1F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i+\mathbb{1}_{i\neq j}D_iP\right.\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq 6}D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i<j}D_jP_j+\mathbb{1}_{i>j}D_iP_i\right)+\mathbb{1}_{i=2}\left(D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_iP_i+D_i^2F_1\right)
\end{aligned}
$$

Recall the expression for $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)$, which is denoted by $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$, then the mixed partial derivatives are given by

$$
\begin{array}{llll}
D_1D_1F_1=0, & D_2D_1F_1=0, & D_3D_1F_1=0, & D_4D_1F_1=0,\\
D_1D_2F_1=0, & D_1D_3F_1=0, & D_1D_4F_1=0, &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_2\tilde{P}_2\right)^2+D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_2\tilde{P}_2\right)^2+D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2^2\tilde{P}_2+D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2\\
&+ D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2+D_2D_2F_1\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2+f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(}2)\tilde{\mu}_2^{(2)}+f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}+f_1\left(1,2\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1\left(1,2\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1\left(2,2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2+D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2+D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1+D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+f_1\left(1\right)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1\left(1,2\right)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + f_1(1)\,\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1(1,2)\,\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1(1)\,\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1(1,2)\,\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3^2\hat{P}_1\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_1^2 + f_1(1)\,\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1(1)\,\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 + f_1(1)\,\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1(1,2)\,\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_1(1)\,\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4^2\hat{P}_2\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_2^2 + f_1(1)\,\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}
\end{aligned}
$$

Meanwhile for $F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\hat{P}_1\hat{P}_2\right)\right)$

$$
\begin{aligned}
D_jD_iF_2 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2D_2F_2\left(D\theta_2\right)^2D_iP_iD_jP_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2F_2D^2\theta_2D_iP_iD_jP_j\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2F_2D\theta_2\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i + \mathbb{1}_{i\neq j}D_iP_iD_jP_j\right)\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i,j\leq 6}D_2D_1F_2D\theta_2\left(\mathbb{1}_{i<j}D_jP_j + \mathbb{1}_{i>j}D_iP_i\right) + \mathbb{1}_{i=1}\left(D_2D_1F_2D\theta_2D_iP_i + D_i^2F_2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llll}
D_2D_1F_2 = 0, & D_2D_3F_3 = 0, & D_2D_4F_2 = 0, & \\
D_1D_2F_2 = 0, & D_2D_2F_2 = 0, & D_3D_2F_2 = 0, & D_4D_2F_2 = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_1F_2 &= D_1^2P_1D\tilde{\theta}_2D_2F_2 + \left(D_1P_1\right)^2D^2\tilde{\theta}_2D_2F_2 + D_1P_1D\tilde{\theta}_2D_2D_1F_2 + \left(D_1P_1\right)^2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_2^2F_2\\
&+ D_1P_1D\tilde{\theta}_2D_2D_1F_2 + D_1^2F_2\\
&= f_2(2)\,\frac{\tilde{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2(2)\,\theta_2^{(2)}\tilde{\mu}_1^2 + f_2(2,1)\,\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} + \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2,1) + f_2(1,1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_1F_2 &= D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1+D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_3P_1D_1P_1+D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1+D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1\\
&= f_2\left(2,1\right)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}+f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_1F_2 &= D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2+D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_4P_2D_1P_1+D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1+D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_2\left(2,1\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}+f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_1P_1D_3\hat{P}_1+D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1+D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1+D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+f_2\left(2,1\right)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}+f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2+D_2F_2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2D^2\tilde{\theta}_2+D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3^2\hat{P}_1\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\hat{\mu}_1^2+f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1^2+f_2\left(2\right)\frac{\hat{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1+D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1+D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+f_2\left(2\right)\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_4F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_1P_1D_4\hat{P}_2+D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2+D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2+D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+f_2\left(2,1\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}+f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_4F_2 &= D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1+D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1+D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+f_2\left(2\right)\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_4F_2 &= D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4^2\hat{P}_2+D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2+D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2+f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_2^2+f_2\left(2\right)\frac{\hat{P}_2^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

For $\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_2\right),w_2\right)$

$$
\begin{aligned}
D_jD_i\hat{F}_1 &= \mathbb{1}_{i,j\neq3}D_3D_3\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq3}D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i+\mathbb{1}_{i\neq j}D_iP\right.\\
&+ \mathbb{1}_{i+j\geq5}D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i<j}D_iP_i+\mathbb{1}_{i>j}D_jP_j\right)+\mathbb{1}_{i=4}\left(D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i+D_i^2\hat{F}_1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llll}
D_3D_1\hat{F}_1=0, & D_3D_2\hat{F}_1=0, & D_1D_3\hat{F}_1=0, & D_2D_3\hat{F}_1=0\\
D_3D_3\hat{F}_1=0, & D_4D_3\hat{F}_1=0, & D_3D_4\hat{F}_1=0, &
\end{array}
$$

$$\begin{aligned}
D_1D_1\hat{F}_1 &= D\hat{\theta}_1D_1^2P_1D_3\hat{F}_1+\left(D_1P_1\right)^2D^2\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+\left(D_1P_1\right)^2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_3^2\hat{F}_1\\
&= \hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2+\hat{f}_1\left(3\right)\frac{P_1^{(2)}}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_1\hat{F}_1 &= D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_1P_1D_2P_2D^2\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_1P_1D_2P_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_3^2\hat{F}_1\\
&= \hat{f}_1\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3\right)\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}+\hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_1\hat{F}_1 &= D_1P_1D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_1P_1D_4\hat{P}_2D^2\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_1P_1D\hat{\theta}_1D_3D_4\hat{F}_1+D_4\hat{P}_2D_1P_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_3D_3\hat{F}_1\\
&= \hat{f}_1\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{f}_1\left(3,4\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1D_2\hat{F}_1 &= D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_1P_1D_2P_2D^2\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_1P_1D_2P_2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_3^2\hat{F}_1\\
&= \hat{f}_1\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_2\hat{F}_1 &= D\hat{\theta}_1D_2^2P_2D_3\hat{F}_1+\left(D_2P_2\right)^2D^2\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+\left(D_2P_2\right)^2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_3^2\hat{F}_1\\
&= \hat{f}_1\left(3\right)\tilde{P}_2^{(2)}\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2^2+\hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_2\hat{F}_1 &= D_2P_2D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_2P_2D_4\hat{P}_2D^2\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_2P_2D\hat{\theta}_1D_4D_3\hat{F}_1+D_2P_2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_4\hat{P}_2D_3^2\hat{F}_1\\
&= \hat{f}_1\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{f}_1\left(4,3\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1D_4\hat{F}_1 &= D_1P_1D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_1P_1D_4\hat{P}_2D^2\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_1P_1D\hat{\theta}_1D_3D_4\hat{F}_1+D_1P_1D_4\hat{P}_2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_3D_3\hat{F}_1\\
&= \hat{f}_1\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{f}_1\left(3,4\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_4\hat{F}_1 &= D_2P_2D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_2P_2D_4\hat{P}_2D^2\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_2P_2D\hat{\theta}_1D_3D_4\hat{F}_1+D_2P_2D_4\hat{P}_2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_3^2\hat{F}_1\\
&= \hat{f}_1\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{f}_1\left(3,4\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_4\hat{F}_1 &= D_4D_4\hat{F}_1+D\hat{\theta}_1D_4^2\hat{P}_2D_3\hat{F}_1+\left(D_4\hat{P}_2\right)^2D^2\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_3D_4\hat{F}_1\\
&+ \left(D_4\hat{P}_2\right)^2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_3^2\hat{F}_1+D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_4\hat{P}_2\\
&= \hat{f}_1\left(4,4\right)+\hat{f}_1\left(3\right)\frac{\hat{P}_2^{(2)}}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_2^2+\hat{f}_1\left(3,4\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2+\hat{f}_1\left(3,4\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

Finally for $\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_1\right)\right)$

$$\begin{aligned}
D_jD_i\hat{F}_2 &= \mathbb{1}_{i,j\neq4}D_4D_4\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq4}D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i+\mathbb{1}_{i\neq j}D_iP\right.\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=2}\right)\mathbb{1}_{i+j\geq4}D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_iP_i+\mathbb{1}_{i>j}D_jP_j\right)+\mathbb{1}_{i=3}\left(D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i+D_i^2\hat{F}_2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} D_4D_1\hat{F}_2=0, & D_4D_2\hat{F}_2=0, & D_4D_3\hat{F}_2=0, & D_1D_4\hat{F}_2=0 \\ D_2D_4\hat{F}_2=0, & D_3D_4\hat{F}_2=0, & D_4D_4\hat{F}_2=0, & \end{array}$$

$$\begin{aligned} D_1D_1\hat{F}_2 &= D\hat{\theta}_2D_1^2P_1D_4\hat{F}_2+\left(D_1P_1\right)^2D^2\hat{\theta}_2D_4\hat{F}_2+\left(D_1P_1\right)^2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_4^2\hat{F}_2 \\ &= \hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1^2+\hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2D_1\hat{F}_2 &= D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_2D_4\hat{F}_2+D_1P_1D_2P_2D^2\hat{\theta}_2D_4\hat{F}_2+D_1P_1D_2P_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_4^2\hat{F}_2 \\ &= \hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3D_1\hat{F}_2 &= D_1P_1D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_4\hat{F}_2+D_1P_1D_3\hat{P}_1D^2\hat{\theta}_2D_4\hat{F}_2+D_1P_1D_3\hat{P}_1\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_4^2\hat{F}_2+D_1P_1D\hat{\theta}_2D_4D_3\hat{F}_2 \\ &= \hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+\hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+\hat{f}_2\left(4,3\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1D_2\hat{F}_2 &= D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_2D_4\hat{F}_2+D_1P_1D_2P_2D^2\hat{\theta}_2D_4\hat{F}_2+D_1P_1D_2P_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_4D_4\hat{F}_2 \\ &= \hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2D_2\hat{F}_2 &= D\hat{\theta}_2D_2^2P_2D_4\hat{F}_2+\left(D_2P_2\right)^2D^2\hat{\theta}_2D_4\hat{F}_2+\left(D_2P_2\right)^2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_4^2\hat{F}_2 \\ &= \hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{P}_2^{(2)}}{1-\hat{\mu}_2}+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2^2+\hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3D_2\hat{F}_2 &= D_2P_2D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_4\hat{F}_2+D_2P_2D_3\hat{P}_1D^2\hat{\theta}_2D_4\hat{F}_2+D_2P_2D_3\hat{P}_1\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_4^2\hat{F}_2+D_2P_2D\hat{\theta}_2D_3D_4\hat{F}_2 \\ &= \hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{f}_2\left(3,4\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1D_3\hat{F}_2 &= D_1P_1D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_4\hat{F}_2+D_1P_1D_3\hat{P}_1D^2\hat{\theta}_2D_4\hat{F}_2+D_1P_1D_3\hat{P}_1\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_4D_4\hat{F}_2+D_1P_1D\hat{\theta}_2D_4D_3\hat{F}_2 \\ &= \hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+\hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+\hat{f}_2\left(4,3\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2D_3\hat{F}_2 &= D_2P_2D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_4\hat{F}_2+D_2P_2D_3\hat{P}_1D^2\hat{\theta}_2D_4\hat{F}_2+D_2P_2D_3\hat{P}_1\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_4^2\hat{F}_2+D_2P_2D\hat{\theta}_2D_4D_3\hat{F}_2 \\ &= \hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{f}_2\left(4,3\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3D_3\hat{F}_2 &= D_3^2\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_4\hat{F}_2+\left(D_3\hat{P}_1\right)^2D^2\hat{\theta}_2D_4\hat{F}_2+D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_4D_3\hat{F}_2+\left(D_3\hat{P}_1\right)^2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_4^2\hat{F}_2+D_3^2\hat{F}_2+D_4D_3\hat{f}_2 \\ &= \hat{f}_2\left(4\right)\frac{\hat{P}_1^{(2)}}{1-\hat{\mu}_2}+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1^2+\hat{f}_2\left(4,3\right)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}+\hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2+\hat{f}_2\left(3,3\right)+\hat{f}_2\left(4,3\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} \end{aligned}$$

33.24. Generalizaciones

33.24.1. RSVC con dos conexiones

Sus ecuaciones recursivas son de la forma

$$F_1(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_2\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2),$$

$$F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1),$$

$$\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1,w_2) = \hat{R}_2\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right),$$

$$\hat{F}_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = \hat{R}_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right),$$

33.24.2. First Moments of the Queue Lengths

The server's switchover times are given by the general equation

$$R_i(\mathbf{z},\mathbf{w}) = R_i\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.24.1}$$

with

$$D_iR_i = DR_iD_iP_i \tag{33.24.2}$$

the following notation is considered

$$D_1P_1 \equiv D_1\tilde{P}_1, \quad D_2P_2 \equiv D_2\tilde{P}_2, \quad D_3P_3 \equiv D_3\hat{P}_1, \quad D_4P_4 \equiv D_4\hat{P}_2,$$

also we need to remind $F_{1,2}(z_1;\zeta_2)F_{2,2}(z_2;\zeta_2) = F_2(z_1,z_2;\zeta_2)$, *therefore*

$$D_1F_2(z_1,z_2;\zeta_2) = D_1\left[F_{1,2}(z_1;\zeta_2)F_{2,2}(z_2;\zeta_2)\right] = F_{2,2}(z_2;\zeta_2)D_1F_{1,2}(z_1;\zeta_2) = F_{1,2}^{(1)}(1)$$

i.e., $D_1F_2 = F_{1,2}^{(1)}(1)$; $D_2F_2 = F_{2,2}^{(1)}(1)$, *whereas that* $D_3F_2 = D_4F_2 = 0$, *then*

$$D_iF_j = \mathbb{1}_{i\leq 2}F_{i,j}^{(1)}(1), \quad \textit{and} \quad D_i\hat{F}_j = \mathbb{1}_{i\geq 2}F_{i,j}^{(1)}(1). \tag{33.24.3}$$

Now, we obtain the first moments equations for the queue lengths as before for the times the server arrives to the queue to start attending
Remember that

$$F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1),$$

where

$$F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$$

so

$$D_iF_1 \quad = \quad \mathbb{1}_{i\neq 1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=2}D_iF_1, \tag{33.24.4}$$

then

$$\begin{array}{ll} D_1F_1 = 0, & D_2F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2P_2 + D_2F_1 = f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{\mu}_2 + f_1\left(2\right), \\ D_3F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3P_3 = f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{\mu}_1, & D_4F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4P_4 = f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{\mu}_2 \end{array}$$

$$D_iF_2 \quad = \quad \mathbb{1}_{i\neq 2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=1}D_iF_2 \tag{33.24.5}$$

$$\begin{array}{ll} D_1F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_1F_2 = f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_1, & D_2F_2 = 0 \\ D_3F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3P_3 = f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_1, & D_4F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4P_4 = f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_2 \end{array}$$

$$D_i\hat{F}_1 \quad = \quad \mathbb{1}_{i\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=4}D_i\hat{F}_1, \tag{33.24.6}$$

$$\begin{array}{ll} D_1\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1 = \hat{f}_1\left(3\right)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_1, & D_2\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2P_2 = \hat{f}_1\left(3\right)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_2 \\ D_3\hat{F}_1 = 0, & D_4\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_4P_4 + D_4\hat{F}_1 = \hat{f}_1\left(3\right)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1\left(2\right), \end{array}$$

$$D_i\hat{F}_2 \quad = \quad \mathbb{1}_{i\neq 4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=3}D_i\hat{F}_2. \tag{33.24.7}$$

$$\begin{array}{ll} D_1\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1 = \hat{f}_2\left(4\right)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{\mu}_1, & D_2\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2P_2 = \hat{f}_2\left(4\right)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{\mu}_2, \\ D_3\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_3P_3 + D_3\hat{F}_2 = \hat{f}_2\left(4\right)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4\right) & \\ D_4\hat{F}_2 = 0 & \end{array}$$

Then, now we can obtain the linear system of equations in order to obtain the first moments of the lengths of the queues:
For $\mathbf{F}_1 = R_2F_2\hat{F}_2$ *we get the general equations*

$$D_i\mathbf{F}_1 = D_i\left(R_2 + F_2 + \mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_2\right) \tag{33.24.8}$$

So

$$\begin{aligned} D_1\mathbf{F}_1 &= D_1R_2 + D_1F_2 = r_1\tilde{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_1 \\ D_2\mathbf{F}_1 &= D_2\left(R_2 + F_2\right) = r_2\tilde{\mu}_1 \\ D_3\mathbf{F}_1 &= D_3\left(R_2 + F_2 + \hat{F}_2\right) = r_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_1 + \hat{F}_{1,2}^{(1)}\left(1\right) \\ D_4\mathbf{F}_1 &= D_4\left(R_2 + F_2 + \hat{F}_2\right) = r_2\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_2 + \hat{F}_{2,2}^{(1)}\left(1\right) \end{aligned}$$

it means

$$\begin{array}{ll} D_1\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + f_2\left(1\right), & D_2\mathbf{F}_1 = r_2\tilde{\mu}_2, \\ D_3\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}_{1,2}^{(1)}\left(1\right), & D_4\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}_{2,2}^{(1)}\left(1\right), \end{array}$$

$$\mathbf{F}_2 = R_1F_1\hat{F}_1, \quad D_i\mathbf{F}_2 = D_i\left(R_1 + F_1 + \mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_1\right) \tag{33.24.9}$$

equivalently

$$\begin{array}{ll} D_1\mathbf{F}_2 = r_1\tilde{\mu}_1, & D_2\mathbf{F}_2 = r_1\tilde{\mu}_2 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + f_1(2), \\ D_3\mathbf{F}_2 = r_1\hat{\mu}_1 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}_{1,1}^{(1)}(1), & D_4\mathbf{F}_2 = r_1\hat{\mu}_2 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1), \end{array}$$

$$\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{R}_2\hat{F}_2F_2, \quad D_i\hat{\mathbf{F}}_1 = D_i\left(\hat{R}_2 + \hat{F}_2 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_2\right) \tag{33.24.10}$$

equivalently

$$\begin{array}{ll} D_1\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\tilde{\mu}_1 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + F_{1,2}^{(1)}(1), & D_2\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F_{2,2}^{(1)}(1), \\ D_3\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(1), & D_4\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\hat{\mu}_2 \end{array}$$

$$\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{R}_1\hat{F}_1F_1, \quad D_i\hat{\mathbf{F}}_2 = D_i\left(\hat{R}_1 + \hat{F}_1 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_1\right) \tag{33.24.11}$$

equivalently

$$\begin{array}{ll} D_1\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\tilde{\mu}_1 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_1 + F_{1,1}^{(1)}(1), & D_2\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\mu_2 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F_{2,1}^{(1)}(1), \\ D_3\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\hat{\mu}_1, & D_4\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(2), \end{array}$$

Then we have that if $\mu = \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2$, $r = r_1 + r_2$ and $\hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$ the system's solution is given by

$$f_2(1) = r_1\tilde{\mu}_1, \quad f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2, \quad \hat{f}_1(4) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2, \quad \hat{f}_2(3) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1$$

it's easy to verify that

$$\begin{array}{ll} f_1(1) = \tilde{\mu}_1\left(r + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right), & f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}_{1,2}^{(1)}(1) \\ f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}_{2,2}^{(1)}(1), & f_2(2) = \left(r + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2, \\ f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\tilde{\mu}_1}\right) + \hat{F}_{1,1}^{(1)}(1), & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1), \\ \hat{f}_1(1) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + F_{1,2}^{(1)}(1), & \hat{f}_1(2) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F_{2,2}^{(1)}(1), \\ \hat{f}_1(3) = \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1, & \hat{f}_2(1) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1 + F_{1,1}^{(1)}(1), \\ \hat{f}_2(2) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F_{2,1}^{(1)}(1), & \hat{f}_2(4) = \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2, \end{array} \tag{33.24.12}$$

with system's solutions given by

$$\begin{array}{ll} f_1(1) = r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}, & f_2(2) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}, \\ f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}_{1,2}^{(1)}(1), & f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}_{2,2}^{(1)}(1), \\ f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}_{1,1}^{(1)}(1), & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1), \\ \hat{f}_1(1) = \tilde{\mu}_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F_{1,2}^{(1)}(1), & \hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F_{2,2}^{(1)}(1), \\ \hat{f}_2(1) = \tilde{\mu}_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F_{1,1}^{(1)}(1), & \hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F_{2,1}^{(1)}(1) \end{array} \tag{33.24.13}$$

General Second Order Derivatives

Now, taking the second order derivative with respect to the equations given in (33.26.20) we obtain it in their general form

$$
\begin{aligned}
D_kD_iF_1 &= D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)+D_iR_2D_k\left(F_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)+D_iF_2D_k\left(R_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_4D_k\left(R+F\right.\\
D_kD_iF_2 &= D_kD_i\left(R_1+F_1+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_3\right)+D_iR_1D_k\left(F_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right)+D_iF_1D_k\left(R_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_3D_k\left(R_1+\right.\\
D_kD_i\hat{F}_3 &= D_kD_i\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_2+\hat{F}_4\right)+D_i\hat{R}_4D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2+\hat{F}_4\right)+D_i\hat{F}_4D_k\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_k\left(\hat{R}_4+\right.\\
D_kD_i\hat{F}_4 &= D_kD_i\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{R}_3D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{F}_3D_k\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_k\left(\hat{R}_3+\right.
\end{aligned}
$$

for $i,k=1,\ldots,4$. In order to have it in an specific way we need to compute the expressions $D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)$

Second Order Derivatives: Serve's Switchover Times

Remind $R_i\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)=R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)$, *which we will write in his reduced form* $R_i=R_i\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right)$, *and according to the notation given in [24] we obtain*

$$D_iD_iR_k=D^2R_k\left(D_iP_i\right)^2+DR_kD_iD_iP_i \tag{33.24.14}$$

whereas for $i\neq j$

$$D_iD_jR_k=D^2R_kD_iP_iD_jP_j+DR_kD_jP_jD_iP_i \tag{33.24.15}$$

Second Order Derivatives: Queue Lengths

Just like before the expression $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)$, *will be denoted by* $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$, *then the mixed partial derivatives are:*

$$
\begin{aligned}
D_jD_iF_1 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1D_1F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i+\mathbb{1}_{i\neq j}D_iP\right.\\
&+ \mathbb{1}_{i+j\leq 6}D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_iP_i+\mathbb{1}_{i=2}\left(D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_iP_i+D_i^2F_1\right)
\end{aligned}
$$

Recall the expression for $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)$, *which is denoted by* $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$, *then the mixed partial derivatives are given by*

$$
\begin{array}{llll}
D_1D_1F_1=0, & D_2D_1F_1=0, & D_3D_1F_1=0, & D_4D_1F_1=0,\\
D_1D_2F_1=0, & D_1D_3F_1=0, & D_1D_4F_1=0, &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_2\tilde{P}_2\right)^2+D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_2\tilde{P}_2\right)^2+D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2^2\tilde{P}_2+D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2\\
&+ D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2+D_2D_2F_1\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2+f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2^{(2)}+f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}+f_1\left(1,2\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1\left(1,2\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1\left(2,2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2+D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2+D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1+D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+f_1\left(1\right)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1\left(1,2\right)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
D_4D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1\left(1,2\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1\left(1\right)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1\left(1,2\right)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3^2\hat{P}_1\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_1^2 + f_1\left(1\right)\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\left(\tilde{\theta}_1\right)^2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1\left(1\right)\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_2D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1\left(1,2\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4^2\hat{P}_2\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\left(\hat{\mu}_2\right)^2 + f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}
\end{aligned}$$

Meanwhile for $F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\hat{P}_1\hat{P}_2\right)\right)$

$$\begin{aligned}
D_jD_iF_2 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2D_2F_2\left(D\theta_2\right)^2D_iP_iD_jP_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2F_2D^2\theta_2D_iP_iD_jP_j\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2F_2D\theta_2\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i + \mathbb{1}_{i\neq j}D_iP_iD_jP_j\right)\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\leq 6}D_2D_1F_2D\theta_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=1}\left(D_2D_1F_2D\theta_2D_iP_i + D_i^2F_2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll}
D_2D_1F_2=0, & D_2D_3F_3=0, & D_2D_4F_2=0, & \\
D_1D_2F_2=0, & D_2D_2F_2=0, & D_3D_2F_2=0, & D_4D_2F_2=0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
D_1D_1F_2 &= D_1^2P_1D\tilde{\theta}_2D_2F_2 + \left(D_1P_1\right)^2D^2\tilde{\theta}_2D_2F_2 + D_1P_1D\tilde{\theta}_2D_1D_2F_2 + \left(D_1P_1\right)^2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_2^2F_2\\
&+ D_1P_1D\tilde{\theta}_2D_2D_1F_2 + D_1^2F_2\\
&= f_2\left(2\right)\frac{\tilde{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2\right)\theta_2^{(2)}\tilde{\mu}_1^2 + f_2\left(2,1\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} + \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2f_2\left(2,2\right) + \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right) + f_2\left(1,1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_1F_2 &= D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_3P_1D_1P_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1\\
&= f_2\left(1,2\right)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_1F_2 &= D_1D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_4P_2D_1P_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_2\left(1,2\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2,1\right)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_2F_2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 D^2\tilde{\theta}_2 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3^2\hat{P}_1\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\hat{\mu}_1^2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1^2 + f_2\left(2\right)\frac{\hat{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1D_4F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_1D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(1,2\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_4F_2 &= D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_4F_2 &= D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4^2\hat{P}_2 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2\\
&= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\hat{\mu}_2^2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_2^2 + f_2\left(2\right)\frac{\hat{P}_2^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}$$

For $\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_2\right),w_2\right)$

$$\begin{aligned}
D_jD_i\hat{F}_1 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3D_3\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_iP_iD_jP_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_iP_iD_jP_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i + \mathbb{1}_{i\neq j}D_iP\right.\\
&+ \mathbb{1}_{i+j\geq 5}D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=4}\left(D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i + D_i^2\hat{F}_1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll}
D_3D_1\hat{F}_1=0, & D_3D_2\hat{F}_1=0, & D_1D_3\hat{F}_1=0, & D_2D_3\hat{F}_1=0\\
D_3D_3\hat{F}_1=0, & D_4D_3\hat{F}_1=0, & D_3D_4\hat{F}_1=0, &
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_1\hat{F}_1 &= D\hat{\theta}_1 D_1^2P_1D_3\hat{F}_1+(D_1P_1)^2D^2\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+(D_1P_1)^2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_3^2\hat{F}_1\\
&= \hat{f}_1(3,3)\left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2+\hat{f}_1(3)\frac{P_1^{(2)}}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(3)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2D_1\hat{F}_1 &= D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_1P_1D_2P_2D^2\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_1P_1D_2P_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_3^2\hat{f}_1\\
&= \hat{f}_1(3)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(3)\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}+\hat{f}_1(3,3)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_1\hat{F}_1 &= D_1P_1D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_1P_1D_4\hat{P}_2D^2\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_1P_1D\hat{\theta}_1D_2D_1\hat{F}_1+D_4\hat{P}_2D_1P_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_3D_3\hat{F}_1\\
&= \hat{f}_1(3)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(3)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{f}_1(3,4)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(3,3)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_2\hat{F}_1 &= D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_1P_1D_2P_2D^2\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_1P_1D_2P_2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_3^2\hat{F}_1\\
&= \hat{f}_1(3)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(3)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{f}_1(3,3)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2D_2\hat{F}_1 &= D\hat{\theta}_1D_2^2P_2D_3\hat{F}_1+(D_2P_2)^2D^2\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+(D_2P_2)^2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_3^2\hat{F}_1\\
&= \hat{f}_1(3)\tilde{P}_2^{(2)}\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(3)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2^2+\hat{f}_1(3,3)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_2\hat{F}_1 &= D_2P_2D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_2P_2D_4\hat{P}_2D^2\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_2P_2D\hat{\theta}_1D_4D_3\hat{F}_1+D_2P_2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_4\hat{P}_2D_3^2\hat{F}_1\\
&= \hat{f}_1(3)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(3)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{f}_1(3,4)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(3,3)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_4\hat{F}_1 &= D_1P_1D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1+D_1P_1D_4\hat{P}_2D^2\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1+D_1P_1D\hat{\theta}_1D_2D_1\hat{F}_1+D_1P_1D_4\hat{P}_2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_1D_1\hat{F}_1\\
&= \hat{f}_1(1)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(1)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{f}_1(1,2)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2D_4\hat{F}_1 &= D_2P_2D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_2P_2D_4\hat{P}_2D^2\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_2P_2D\hat{\theta}_1D_3D_4\hat{F}_1+D_2P_2D_4\hat{P}_2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_3^2\hat{F}_1\\
&= \hat{f}_1(3)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(3)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{f}_1(3,4)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(3,3)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4D_4\hat{F}_1 &= D_4D_4\hat{F}_1+D\hat{\theta}_1D_4^2\hat{P}_2D_3\hat{F}_1+\left(D_4\hat{P}_2\right)^2D^2\hat{\theta}_1D_3\hat{F}_1+D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_3D_4\hat{F}_1\\
&+ \left(D_4\hat{P}_2\right)^2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_3^2\hat{F}_1+D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_4\hat{P}_2\\
&= \hat{f}_1(4,4)+\hat{f}_1(3)\frac{\hat{P}_2^{(2)}}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(3)\hat{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_2^2+\hat{f}_1(3,4)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1(1,1)\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2+\hat{f}_1(3,4)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}
$$

Finally for $\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_1\right)\right)$

$$
\begin{aligned}
D_jD_i\hat{F}_2 &= \mathbb{1}_{i,j\neq4}D_4D_4\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq4}D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i+\mathbb{1}_{i\neq j}D_iP\right.\\
&+ \mathbb{1}_{i+j\geq5}D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i+\mathbb{1}_{i=3}\left(D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i+D_i^2\hat{F}_2\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{array}{llll} D_4 D_1 \hat{F}_2 = 0, & D_4 D_2 \hat{F}_2 = 0, & D_4 D_3 \hat{F}_2 = 0, & D_1 D_4 \hat{F}_2 = 0 \\ D_2 D_4 \hat{F}_2 = 0, & D_3 D_4 \hat{F}_2 = 0, & D_4 D_4 \hat{F}_2 = 0, & \end{array}$$

$$\begin{aligned} D_1 D_1 \hat{F}_2 &= D\hat{\theta}_2 D_1^2 P_1 D_4 \hat{F}_2 + \left(D_1 P_1\right)^2 D^2 \hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + \left(D_1 P_1\right)^2 \left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_4^2 \hat{F}_2 \\ &= \hat{f}_2\left(4\right) \frac{\tilde{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\theta}_2} + \hat{f}_2\left(4\right) \hat{\theta}_2^{(2)} \tilde{\mu}_1^2 + \hat{f}_2\left(4,4\right) \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 D_1 \hat{F}_2 &= D_1 P_1 D_2 P_2 D\hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_1 P_1 D_2 P_2 D^2 \hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_1 P_1 D_2 P_2 \left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_4^2 \hat{F}_2 \\ &= \hat{f}_2\left(4\right) \frac{\tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4\right) \hat{\theta}_2^{(2)} \tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2\left(4,4\right) \left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 \tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 D_1 \hat{F}_2 &= D_1 P_1 D_3 \hat{P}_1 D\hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_1 P_1 D_3 \hat{P}_1 D^2 \hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_1 P_1 D_3 \hat{P}_1 \left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_4^2 \hat{F}_2 + D_1 P_1 D\hat{\theta}_2 D_4 D_3 \hat{F}_2 \\ &= \hat{f}_2\left(4\right) \frac{\tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4\right) \hat{\theta}_2^{(2)} \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4,4\right) \left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4,3\right) \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 D_2 \hat{F}_2 &= D_1 P_1 D_2 P_2 D\hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_1 P_1 D_2 P_2 D^2 \hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_1 P_1 D_2 P_2 \left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_4 D_4 \hat{F}_2 \\ &= \hat{f}_2\left(4\right) \frac{\tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\theta}_2} + \hat{f}_2\left(4\right) \hat{\theta}_2^{(2)} \tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2\left(4,4\right) \left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 \tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 D_2 \hat{F}_2 &= D\hat{\theta}_2 D_2^2 P_2 D_4 \hat{F}_2 + \left(D_2 P_2\right)^2 D^2 \hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + \left(D_2 P_2\right)^2 \left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_4^2 \hat{F}_2 \\ &= \hat{f}_2\left(4\right) \frac{\tilde{P}_2^{(2)}}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4\right) \hat{\theta}_2^{(2)} \tilde{\mu}_2^2 + \hat{f}_2\left(4,4\right) \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 D_2 \hat{F}_2 &= D_2 P_2 D_3 \hat{P}_1 D\hat{\theta}_2 D_2 \hat{F}_2 + D_2 P_2 D_3 \hat{P}_1 D^2 \hat{\theta}_2 D_2 \hat{F}_2 + D_2 P_2 D_3 \hat{P}_1 \left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_2^2 \hat{F}_2 + D_2 P_2 D\hat{\theta}_2 D_1 D_2 \hat{F}_2 \\ &= \hat{f}_2\left(2\right) \frac{\tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(2\right) \hat{\theta}_2^{(2)} \tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(2,2\right) \left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 \tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(1,2\right) \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 D_3 \hat{F}_2 &= D_1 P_1 D_3 \hat{P}_1 D\hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_1 P_1 D_3 \hat{P}_1 D^2 \hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_1 P_1 D_3 \hat{P}_1 \left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_4 D_4 \hat{F}_2 + D_1 P_1 D\hat{\theta}_2 D_4 D_3 \hat{F}_2 \\ &= \hat{f}_2\left(4\right) \frac{\tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4\right) \hat{\theta}_2^{(2)} \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4,4\right) \left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4,3\right) \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 D_3 \hat{F}_2 &= D_2 P_2 D_3 \hat{P}_1 D\hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_2 P_2 D_3 \hat{P}_1 D^2 \hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_2 P_2 D_3 \hat{P}_1 \left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_4^2 \hat{F}_2 + D_2 P_2 D\hat{\theta}_2 D_4 D_3 \hat{F}_2 \\ &= \hat{f}_2\left(4\right) \frac{\tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4\right) \hat{\theta}_2^{(2)} \tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4,4\right) \left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 \tilde{\mu}_2 \hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(4,3\right) \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 D_3 \hat{F}_2 &= D_3^2 \hat{P}_1 D\hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + \left(D_3 \hat{P}_1\right)^2 D^2 \hat{\theta}_2 D_4 \hat{F}_2 + D_3 \hat{P}_1 D\hat{\theta}_2 D_4 D_3 \hat{F}_2 + \left(D_3 \hat{P}_1\right)^2 \left(D\hat{\theta}_2\right)^2 D_4^2 \hat{F}_2 + D_3^2 \hat{F}_2 + D_4 D_3 \hat{f}_2 \\ &= \hat{f}_2\left(4\right) \frac{\hat{P}_1^{(2)}}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4\right) \hat{\theta}_2^{(2)} \hat{\mu}_1^2 + \hat{f}_2\left(4,3\right) \frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} + \hat{f}_2\left(4,4\right) \left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 + \hat{f}_2\left(3,3\right) + \hat{f}_2\left(4,3\right) \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} \end{aligned}$$

33.25. Generalizaciones

33.25.1. RSVC con dos conexiones

Sus ecuaciones recursivas son de la forma

$$
\begin{aligned}
F_1(z_1,z_2,w_1,w_2) &= R_2\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2),\\
F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) &= R_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1),\\
\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1,w_2) &= \hat{R}_2\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right),\\
\hat{F}_2(z_1,z_2,w_1,w_2) &= \hat{R}_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right),
\end{aligned}
$$

33.25.2. First Moments of the Queue Lengths

The server's switchover times are given by the general equation

$$
R_i(\mathbf{z},\mathbf{w}) = R_i\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.25.1}
$$

with

$$
D_iR_i = DR_iD_iP_i \tag{33.25.2}
$$

the following notation is considered

$$
D_1P_1\equiv D_1\tilde{P}_1,\quad D_2P_2\equiv D_2\tilde{P}_2,\quad D_3P_3\equiv D_3\hat{P}_1,\quad D_4P_4\equiv D_4\hat{P}_2,
$$

also we need to remind $F_{1,2}(z_1;\zeta_2)F_{2,2}(z_2;\zeta_2)=F_2(z_1,z_2;\zeta_2)$, *therefore*

$$
D_1F_2(z_1,z_2;\zeta_2) = D_1\left[F_{1,2}(z_1;\zeta_2)F_{2,2}(z_2;\zeta_2)\right]=F_{2,2}(z_2;\zeta_2)D_1F_{1,2}(z_1;\zeta_2)=F_{1,2}^{(1)}(1)
$$

i.e., $D_1F_2=F_{1,2}^{(1)}(1)$; $D_2F_2=F_{2,2}^{(1)}(1)$, *whereas that* $D_3F_2=D_4F_2=0$, *then*

$$
D_iF_j = \mathbb{1}_{i\leq 2}F_{i,j}^{(1)}(1),\quad \text{and}\quad D_i\hat{F}_j=\mathbb{1}_{i\geq 2}F_{i,j}^{(1)}(1). \tag{33.25.3}
$$

Now, we obtain the first moments equations for the queue lengths as before for the times the server arrives to the queue to start attending
Remember that

$$
F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1),
$$

where

$$
F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)
$$

so

$$D_iF_1 \quad = \quad \mathbb{1}_{i\neq 1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=2}D_iF_1, \tag{33.25.4}$$

then

$$\begin{array}{ll} D_1F_1 = 0, & D_2F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2P_2 + D_2F_1 = f_1(1)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{\mu}_2 + f_1(2), \\ D_3F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3P_3 = f_1(1)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{\mu}_1, & D_4F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4P_4 = f_1(1)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{\mu}_2 \end{array}$$

$$D_iF_2 \quad = \quad \mathbb{1}_{i\neq 2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=1}D_iF_2 \tag{33.25.5}$$

$$\begin{array}{ll} D_1F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_1F_2 = f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_1, & D_2F_2 = 0 \\ D_3F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3P_3 = f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_1, & D_4F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4P_4 = f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_2 \end{array}$$

$$D_i\hat{F}_1 \quad = \quad \mathbb{1}_{i\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=4}D_i\hat{F}_1, \tag{33.25.6}$$

$$\begin{array}{ll} D_1\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1 = \hat{f}_1(3)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_1, & D_2\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2P_2 = \hat{f}_1(3)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_2 \\ D_3\hat{F}_1 = 0, & D_4\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_4P_4 + D_4\hat{F}_1 = \hat{f}_1(3)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(2), \end{array}$$

$$D_i\hat{F}_2 \quad = \quad \mathbb{1}_{i\neq 4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=3}D_i\hat{F}_2. \tag{33.25.7}$$

$$\begin{array}{ll} D_1\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1 = \hat{f}_2(4)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{\mu}_1, & D_2\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2P_2 = \hat{f}_2(4)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{\mu}_2, \\ D_3\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_3P_3 + D_3\hat{F}_2 = \hat{f}_2(4)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(4) & \\ D_4\hat{F}_2 = 0 & \end{array}$$

Then, now we can obtain the linear system of equations in order to obtain the first moments of the lengths of the queues:
For $\mathbf{F}_1 = R_2F_2\hat{F}_2$ *we get the general equations*

$$D_i\mathbf{F}_1 = D_i\left(R_2 + F_2 + \mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_2\right) \tag{33.25.8}$$

So

$$\begin{aligned} D_1\mathbf{F}_1 &= D_1R_2 + D_1F_2 = r_1\tilde{\mu}_1 + f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_1 \\ D_2\mathbf{F}_1 &= D_2(R_2+F_2) = r_2\tilde{\mu}_1 \\ D_3\mathbf{F}_1 &= D_3\left(R_2+F_2+\hat{F}_2\right) = r_1\hat{\mu}_1 + f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{1,2}(1) \\ D_4\mathbf{F}_1 &= D_4\left(R_2+F_2+\hat{F}_2\right) = r_2\hat{\mu}_2 + f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1) \end{aligned}$$

it means

$$\begin{array}{ll} D_1\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_1 + f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + f_2(1), & D_2\mathbf{F}_1 = r_2\tilde{\mu}_2, \\ D_3\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_1 + f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{1,2}(1), & D_4\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_2 + f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1), \end{array}$$

$$\mathbf{F}_2 = R_1F_1\hat{F}_1, \quad D_i\mathbf{F}_2 = D_i\left(R_1 + F_1 + \mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_1\right) \tag{33.25.9}$$

equivalently

$$\begin{array}{ll} D_1\mathbf{F}_2 = r_1\tilde{\mu}_1, & D_2\mathbf{F}_2 = r_1\tilde{\mu}_2 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + f_1(2), \\ D_3\mathbf{F}_2 = r_1\hat{\mu}_1 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}_{1,1}^{(1)}(1), & D_4\mathbf{F}_2 = r_1\hat{\mu}_2 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1), \end{array}$$

$$\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{R}_2\hat{F}_2F_2, \quad D_i\hat{\mathbf{F}}_1 = D_i\left(\hat{R}_2 + \hat{F}_2 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_2\right) \tag{33.25.10}$$

equivalently

$$\begin{array}{ll} D_1\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\tilde{\mu}_1 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + F_{1,2}^{(1)}(1), & D_2\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F_{2,2}^{(1)}(1), \\ D_3\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(1), & D_4\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\hat{\mu}_2 \end{array}$$

$$\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{R}_1\hat{F}_1F_1, \quad D_i\hat{\mathbf{F}}_2 = D_i\left(\hat{R}_1 + \hat{F}_1 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_1\right) \tag{33.25.11}$$

equivalently

$$\begin{array}{ll} D_1\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\tilde{\mu}_1 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_1 + F_{1,1}^{(1)}(1), & D_2\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\mu_2 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F_{2,1}^{(1)}(1), \\ D_3\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\hat{\mu}_1, & D_4\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(2), \end{array}$$

Then we have that if $\mu = \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2$, $r = r_1 + r_2$ and $\hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$ the system's solution is given by

$$f_2(1) = r_1\tilde{\mu}_1, \quad f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2, \quad \hat{f}_1(4) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2, \quad \hat{f}_2(3) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1$$

it's easy to verify that

$$\begin{array}{ll} f_1(1) = \tilde{\mu}_1\left(r + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right), & f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}_{1,2}^{(1)}(1) \\ f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}_{2,2}^{(1)}(1), & f_2(2) = \left(r + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2, \\ f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\tilde{\mu}_1}\right) + \hat{F}_{1,1}^{(1)}(1), & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1), \\ \hat{f}_1(1) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + F_{1,2}^{(1)}(1), & \hat{f}_1(2) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F_{2,2}^{(1)}(1), \\ \hat{f}_1(3) = \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1, & \hat{f}_2(1) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1 + F_{1,1}^{(1)}(1), \\ \hat{f}_2(2) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F_{2,1}^{(1)}(1), & \hat{f}_2(4) = \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2, \end{array} \tag{33.25.12}$$

with system's solutions given by

$$\begin{array}{ll} f_1(1) = r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}, & f_2(2) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}, \\ f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}_{1,2}^{(1)}(1), & f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}_{2,2}^{(1)}(1), \\ f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}_{1,1}^{(1)}(1), & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1), \\ \hat{f}_1(1) = \tilde{\mu}_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F_{1,2}^{(1)}(1), & \hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F_{2,2}^{(1)}(1), \\ \hat{f}_2(1) = \tilde{\mu}_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F_{1,1}^{(1)}(1), & \hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F_{2,1}^{(1)}(1) \end{array} \tag{33.25.13}$$

33.25.3. General Second Order Derivatives

Now, taking the second order derivative with respect to the equations given in (33.26.20) we obtain it in their general form

$$\begin{aligned}
D_kD_iF_1 &= D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)+D_iR_2D_k\left(F_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)+D_iF_2D_k\left(R_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_4D_k\left(R_2+\right.\\
D_kD_iF_2 &= D_kD_i\left(R_1+F_1+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_3\right)+D_iR_1D_k\left(F_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right)+D_iF_1D_k\left(R_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_3D_k\left(R_1+\right.\\
D_kD_i\hat{F}_3 &= D_kD_i\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_2+\hat{F}_4\right)+D_i\hat{R}_4D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2+\hat{F}_4\right)+D_i\hat{F}_4D_k\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_k\left(\hat{R}_4+\right.\\
D_kD_i\hat{F}_4 &= D_kD_i\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{R}_3D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{F}_3D_k\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_k\left(\hat{R}_3+\right.
\end{aligned}$$

for $i,k=1,\ldots,4$. In order to have it in an specific way we need to compute the expressions $D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)$

Second Order Derivatives: Serve's Switchover Times

Remind $R_i(z_1,z_2,w_1,w_2)=R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)$, which we will write in his reduced form $R_i=R_i\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right)$, and according to the notation given in [24] we obtain

$$D_iD_iR_k=D^2R_k\left(D_iP_i\right)^2+DR_kD_iD_iP_i \tag{33.25.14}$$

whereas for $i\neq j$

$$D_iD_jR_k=D^2R_kD_iP_iD_jP_j+DR_kD_jP_jD_iP_i \tag{33.25.15}$$

Second Order Derivatives: Queue Lengths

Just like before the expression $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)$, will be denoted by $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$, then the mixed partial derivatives are:

$$\begin{aligned}
D_jD_iF_1 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1D_1F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i+\mathbb{1}_{i\neq j}D_iP\right.\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq 6}D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_jP_j+\mathbb{1}_{i>j}D_iP_i\right)+\mathbb{1}_{i=2}\left(D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_iP_i+D_i^2F_1\right)
\end{aligned}$$

Recall the expression for $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)$, which is denoted by $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$, then the mixed partial derivatives are given by

$$\begin{array}{llll}
D_1D_1F_1=0, & D_2D_1F_1=0, & D_3D_1F_1=0, & D_4D_1F_1=0,\\
D_1D_2F_1=0, & D_1D_3F_1=0, & D_1D_4F_1=0, &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_2\tilde{P}_2\right)^2+D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_2\tilde{P}_2\right)^2+D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2^2\tilde{P}_2+D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2\\
&+ D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2+D_2D_2F_1\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2+f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^(2)\tilde{\mu}_2^{(2)}+f_1(1)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}+f_1(1,2)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1(1,2)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1(2,2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2+D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2+D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1+D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+f_1(1)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1(1,2)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1\left(1,2\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2 + D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1\left(1\right)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1\left(1,2\right)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3^2\hat{P}_1\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_1^2 + f_1\left(1\right)\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1\left(1\right)\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1\left(1,2\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4^2\hat{P}_2\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 + f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_2^2 + f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}
\end{aligned}$$

Meanwhile for $F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\hat{P}_1\hat{P}_2\right)\right)$

$$\begin{aligned}
D_jD_iF_2 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2D_2F_2\left(D\theta_2\right)^2D_iP_iD_jP_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2F_2D^2\theta_2D_iP_iD_jP_j\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2F_2D\theta_2\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i + \mathbb{1}_{i\neq j}D_iP_iD_jP_j\right)\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq 6}D_2D_1F_2D\theta_2\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_jP_j + \mathbb{1}_{i>j}D_iP_i\right) + \mathbb{1}_{i=1}\left(D_2D_1F_2D\theta_2D_iP_i + D_i^2F_2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll}
D_2D_1F_2 = 0, & D_2D_3F_3 = 0, & D_2D_4F_2 = 0, & \\
D_1D_2F_2 = 0, & D_2D_2F_2 = 0, & D_3D_2F_2 = 0, & D_4D_2F_2 = 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
D_1D_1F_2 &= \left(D_1P_1\right)^2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_2^2F_2 + \left(D_1P_1\right)^2D^2\tilde{\theta}_2D_2F_2 + D_1^2P_1D\tilde{\theta}_2D_2F_2 + D_1P_1D\tilde{\theta}_2D_2D_1F_2\\
&+ D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_1^2F_2\\
&= f_2\left(2\right)\frac{\tilde{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2\right)\theta_2^{(2)}\tilde{\mu}_1^2 + f_2\left(2,1\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} + \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2f_2\left(2,2\right) + \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(2,1\right) + f_2\left(1,1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_3D_1F_2 &= D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_3P_1D_1P_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1\\ &= f_2\left(2,1\right)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_4D_1F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_4P_2D_1P_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2\\ &= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2,1\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_1D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1 + D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1\\ &= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2,1\right)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_3D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_2F_2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 D^2\tilde{\theta}_2 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3^2\hat{P}_1\\ &= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\hat{\mu}_1^2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1^2 + f_2\left(2\right)\frac{\hat{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_4D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2\\ &= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_1D_4F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1 + D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2\\ &= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2\left(2,1\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_3D_4F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1\\ &= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_4D_4F_2 &= D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4^2\hat{P}_2 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2\\ &= f_2\left(2,2\right)\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 + f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_2^2 + f_2\left(2\right)\frac{\hat{P}_2^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}\end{aligned}$$

For $\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_2\right), w_2\right)$

$$\begin{aligned}D_jD_i\hat{F}_1 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3D_3\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_iP_iD_jP_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_iP_iD_jP_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i + \mathbb{1}_{i\neq j}D_iP\right.\\ &+ \mathbb{1}_{i+j\geq 5}D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_iP_i + \mathbb{1}_{i>j}D_jP_j\right) + \mathbb{1}_{i=4}\left(D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i + D_i^2\hat{F}_1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&D_3D_1\hat{F}_1 = 0, \quad D_3D_2\hat{F}_1 = 0, \quad D_1D_3\hat{F}_1 = 0, \quad D_2D_3\hat{F}_1 = 0\\ &D_3D_3\hat{F}_1 = 0, \quad D_4D_3\hat{F}_1 = 0, \quad D_3D_4\hat{F}_1 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1D_1\hat{F}_1 &= D_3^2\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2\left(D_1P_1\right)^2+D_3\hat{F}_1D^2\theta_1\left(D_1P_1\right)^2+D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1^2P_1\\
&= \hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2+\hat{f}_1\left(3\right)\frac{P_1^{(2)}}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_1\hat{F}_1 &= D_3^2\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_1P_1D_2P_1+D_3\hat{F}_1D^2\theta_1D_1P_1D_2P_2+D_3\hat{F}_1D\theta_1D_1P_1D_2P_2\\
&= \hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{f}_1\left(3\right)\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}+\hat{f}_1\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_1\hat{F}_1 &= D_3D_3\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_4\hat{P}_2D_1P_1+D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_1P_1D_4\hat{P}_2+D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1D_4\hat{P}_2+D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1\\
&= \hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+\hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{f}_1\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3,4\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1D_2\hat{F}_1 &= D_3^2\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_1P_1D_2P_2+D_3\hat{F}_1D^2\theta_1D_1P_1D_2P_2+D_3\hat{F}_1D\theta_1D_1P_1D_2P_2\\
&= \hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{f}_1\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_2\hat{F}_1 &= D_3^2\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2\left(D_2P_2\right)^2+D_3\hat{F}_1D^2\theta_1\left(D_2P_2\right)^2+D_3\hat{F}_1D\theta_1D_2^2P_2\\
&= \hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2+\hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2^2+\hat{f}_1\left(3\right)\tilde{P}_2^{(2)}\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_2\hat{F}_1 &= D_3^2\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_4\hat{P}_2D_2P_2+D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_2P_2D_4\hat{P}_2+D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2P_2D_4\hat{P}_2+D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2P_2\\
&= \hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{f}_1\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3,4\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1D_4\hat{F}_1 &= D_3D_3\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_1P_1D_4\hat{P}_2+D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_1P_1D_4\hat{P}_2+D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1D_4\hat{P}_2+D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1\\
&= \hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{f}_1\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3,4\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_4\hat{F}_1 &= D_3^2\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2D_2P_2D_4\hat{P}_2+D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1D_2P_2D_4\hat{P}_2+D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2P_2D_4\hat{P}_2+D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2P_2\\
&= \hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{f}_1\left(3\right)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3,4\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_4\hat{F}_1 &= D_3^2\hat{F}_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2+D_3\hat{F}_1D^2\hat{\theta}_1\left(D_4\hat{P}_2\right)^2+D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_4^2\hat{P}_2+D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_4\hat{P}_2\\
&+ D_3D_4\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_4\hat{P}_2+D_4D_4\hat{F}_1\\
&= \hat{f}_1\left(3,3\right)\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2+\hat{f}_1\left(3\right)\hat{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_2^2+\hat{f}_1\left(3\right)\frac{\hat{P}_2^{(2)}}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3,4\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(3,4\right)\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}+\hat{f}_1\left(4,4\right)
\end{aligned}$$

Finally for $\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_1\right)\right)$

$$\begin{aligned}
D_jD_i\hat{F}_2 &= \mathbb{1}_{i,j\neq4}D_4D_4\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq4}D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i+\mathbb{1}_{i\neq j}D_iP\right.\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=2}\right)\mathbb{1}_{i+j\geq4}D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_iP_i+\mathbb{1}_{i>j}D_jP_j\right)+\mathbb{1}_{i=3}\left(D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i+D_i^2\hat{F}_2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} D_4D_1\hat{F}_2=0, & D_4D_2\hat{F}_2=0, & D_4D_3\hat{F}_2=0, & D_1D_4\hat{F}_2=0\\ D_2D_4\hat{F}_2=0, & D_3D_4\hat{F}_2=0, & D_4D_4\hat{F}_2=0, & \end{array}$$

$$\begin{aligned} D_1D_1\hat{F}_2 &= D_4^2\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2\left(D_1P_1\right)^2+D_4\hat{F}_2\hat{\theta}_2\left(D_1P_1\right)^2D^2+D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1^2P_1\\ &= \hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1^2+\hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2D_1\hat{F}_2 &= D_4^2\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_1P_1D_2P_2+D_4\hat{F}_2D^2\theta_2D_1P_1D_2P_2+D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1D_2P_2\\ &= \hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3D_1\hat{F}_2 &= D_4^2\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_1P_1D_3\hat{P}_1+D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1+D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1+D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1\\ &= \hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+\hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}+\hat{f}_2\left(4,3\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1D_2\hat{F}_2 &= D_4D_4\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_1P_1D_2P_2+D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_1P_1D_2P_2+D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1D_2P_2\\ &= \hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2D_2\hat{F}_2 &= D_4^2\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2\left(D_2P_2\right)^2+D_4\hat{F}_2D^2\theta_2\left(D_2P_2\right)^2+D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2^2P_2\\ &= \hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2^2+\hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{P}_2^{(2)}}{1-\hat{\mu}_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3D_2\hat{F}_2 &= D_4^2\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2P_2D_3\hat{P}_1+D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_2P_2D_3\hat{P}_1+D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2P_2D_3\hat{P}_1+D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2P_2\\ &= \hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}+\hat{f}_2\left(4,3\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1D_3\hat{F}_2 &= D_4D_4\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_1P_1D_3\hat{P}_1+D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1+D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1+D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1\\ &= \hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+\hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}+\hat{f}_2\left(4,3\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2D_3\hat{F}_2 &= D_4^2\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2P_2D_3\hat{P}_1+D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2D_2P_2D_3\hat{P}_1+D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2P_2D_3\hat{P}_1+D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2P_2\\ &= \hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{f}_2\left(4\right)\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}+\hat{f}_2\left(4,3\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3D_3\hat{F}_2 &= D_4^2\hat{F}_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2+D_4\hat{F}_2D^2\hat{\theta}_2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2+D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_3^2\hat{P}_1+D_4D_3\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_3\hat{P}_1\\ &+ D_4D_3\hat{f}_2D\hat{\theta}_2D_3\hat{P}_1+D_3^2\hat{F}_2\\ &= \hat{f}_2\left(4,4\right)\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{\theta}_2^{(2)}\hat{\mu}_1^2+\hat{f}_2\left(4\right)\frac{\hat{P}_1^{(2)}}{1-\hat{\mu}_2}+\hat{f}_2\left(4,3\right)\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}+\hat{f}_2\left(4,3\right)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}+\hat{f}_2\left(3,3\right) \end{aligned}$$

33.25.4. Second Grade Derivative Recursive Equations

Then according to the equations given at the beginning of this section, we have

$$\begin{aligned}D_kD_iF_1 &= D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)+D_iR_2D_k\left(F_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)\\&+ D_iF_2D_k\left(R_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_4D_k\left(R_2+F_2\right)\end{aligned}$$

F_1

F_1 and $i=1$

for $i=1$, *and* $k=1$

$$\begin{aligned}D_1D_1F_1 &= D_1D_1\left(R_2+F_2\right)+D_1R_2D_1F_2+D_1F_2D_1R_2=D_1^2R_2+D_1^2F_2+D_1R_2D_1F_2+D_1F_2D_1R_2\\&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1+r_2\tilde{P}_1^{(2)}+D_1^2F_2+2r_2\tilde{\mu}_1f_2\left(1\right)\end{aligned}$$

$k=2$

$$\begin{aligned}D_2D_iF_1 &= D_2D_1\left(R_2+F_2\right)+D_1R_2D_2F_2+D_1F_2D_2R_2=D_2D_1R_2+D_2D_1F_2+D_1R_2D_2F_2+D_1F_2D_2R_2\\&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+r_2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+D_2D_1F_2+r_2\tilde{\mu}_1f_2\left(2\right)+r_2\tilde{\mu}_2f_2\left(1\right)\end{aligned}$$

$k=3$

$$\begin{aligned}D_3D_1F_1 &= D_3D_1\left(R_2+F_2\right)+D_1R_2D_3\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_1F_2D_3\left(R_2+\hat{F}_4\right)\\&= D_3D_1R_2+D_3D_1F_2+D_1R_2D_3F_2+D_1R_2D_3\hat{F}_4+D_1F_2D_3R_2+D_1F_2D_3\hat{F}_4\\&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+r_2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+D_3D_1F_2+r_2\tilde{\mu}_1f_2\left(3\right)+r_2\tilde{\mu}_1D_3\hat{F}_4+r_2\hat{\mu}_1f_2\left(1\right)+D_3\hat{F}_4f_2\left(1\right)\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}D_4D_1F_1 &= D_4D_1\left(R_2+F_2\right)+D_1R_2D_4\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_1F_2D_4\left(R_2+\hat{F}_4\right)\\&= D_4D_1R_2+D_4D_1F_2+D_1R_2D_4F_2+D_1R_2D_4\hat{F}_4+D_1F_2D_4R_2+D_1F_2D_4\hat{F}_4\\&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+r_2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+D_4D_1F_2+r_2\tilde{\mu}_1f_2\left(4\right)+r_2\tilde{\mu}_1D_4\hat{F}_4+r_2\hat{\mu}_2f_2\left(1\right)+f_2\left(1\right)D_4\hat{F}_4\end{aligned}$$

F_1 and $i=2$

for $i=2$,
$k=2$

$$\begin{aligned}D_2D_2F_1 &= D_2D_2\left(R_2+F_2\right)+D_2R_2D_2F_2+D_2F_2D_2R_2=D_2D_2R_2+D_2D_2F_2+D_2R_2D_2F_2+D_2F_2D_2R_2\\&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2^2+r_2\tilde{P}_2^{(2)}+D_2D_2F_2+2r_2\tilde{\mu}_2f_2\left(2\right)\end{aligned}$$

$k=3$

$$\begin{aligned}D_3D_2F_1 &= D_3D_2\left(R_2+F_2\right)+D_2R_2D_3\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_2F_2D_3\left(R_2+\hat{F}_4\right)\\&= D_3D_2R_2+D_3D_2F_2+D_2R_2D_3F_2+D_2R_2D_3\hat{F}_4+D_2F_2D_3R_2+D_2F_2D_3\hat{F}_4\\&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+D_3D_2F_2+r_2\tilde{\mu}_2f_2\left(3\right)+r_2\tilde{\mu}_2D_3\hat{F}_4+r_2\hat{\mu}_1f_2\left(2\right)+f_2\left(2\right)D_3\hat{F}_4\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}D_4D_2F_1 &= D_4D_2\left(R_2+F_2\right)+D_2R_2D_4\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_2F_2D_4\left(R_2+\hat{F}_4\right)\\&= D_4D_2R_2+D_4D_2F_2+D_2R_2D_4F_2+D_2R_2D_4\hat{F}_4+D_2F_2D_4R_2+D_2F_2D_4\hat{F}_4\\&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+D_4D_2F_2+r_2\tilde{\mu}_2f_2\left(4\right)+r_2\tilde{\mu}_2D_4\hat{F}_4+r_2\hat{\mu}_2f_2\left(2\right)+f_2\left(2\right)D_4\hat{F}_4\end{aligned}$$

F_1 and $i = 3$

for $i = 3$, and $k = 3$

$$\begin{aligned}
D_3 D_3 F_1 &= D_3 D_3 \left(R_2 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_3 R_2 D_3 \left(F_2 + \hat{F}_4\right) + D_3 F_2 D_3 \left(R_2 + \hat{F}_4\right) + D_3 \hat{F}_4 D_3 \left(R_2 + F_2\right) \\
&= D_3 D_3 R_2 + D_3 D_3 F_2 + D_3 D_3 \hat{F}_4 + D_3 R_2 D_3 F_2 + D_3 R_2 D_3 \hat{F}_4 \\
&+ D_3 F_2 D_3 R_2 + D_3 F_2 D_3 \hat{F}_4 + D_3 \hat{F}_4 D_3 R_2 + D_3 \hat{F}_4 D_3 F_2 \\
&= R_2^{(2)} \hat{\mu}_1^2 + r_2 \hat{P}_1^{(2)} + D_3 D_3 F_2 + D_3 D_3 \hat{F}_4 + r_2 \hat{\mu}_1 f_2 (3) + r_2 \hat{\mu}_1 D_3 \hat{F}_4 \\
&+ r_2 \hat{\mu}_1 f_2 (3) + f_2 (3) D_3 \hat{F}_4 + r_2 \hat{\mu}_1 D_3 \hat{F}_4 + f_2 (3) D_3 \hat{F}_4
\end{aligned}$$

$k = 4$

$$\begin{aligned}
D_4 D_3 F_1 &= D_4 D_3 \left(R_2 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_3 R_2 D_4 \left(F_2 + \hat{F}_4\right) + D_3 F_2 D_4 \left(R_2 + \hat{F}_4\right) + D_3 \hat{F}_4 D_4 \left(R_2 + F_2\right) \\
&= D_4 D_3 R_2 + D_4 D_3 F_2 + D_4 D_3 \hat{F}_4 + D_3 R_2 D_4 F_2 + D_3 R_2 D_4 \hat{F}_4 \\
&+ D_3 F_2 D_4 R_2 + D_3 F_2 D_4 \hat{F}_4 + D_3 \hat{F}_4 D_4 R_2 + D_3 \hat{F}_4 D_4 F_2 \\
&= R_2^{(2)} \hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2 + r_2 \hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2 + D_4 D_3 F_2 + D_4 D_3 \hat{F}_4 + r_2 \hat{\mu}_1 f_2 (4) + r_2 \hat{\mu}_1 D_4 \hat{F}_4 \\
&+ r_2 \hat{\mu}_2 f_2 (3) + D_4 \hat{F}_4 f_2 (3) + D_3 \hat{F}_4 r_2 \hat{\mu}_2 + D_3 \hat{F}_4 f_2 (4)
\end{aligned}$$

F_1 and $i = 4$

for $i = 4$, $k = 4$

$$\begin{aligned}
D_4 D_4 F_1 &= D_4 D_4 \left(R_2 + F_2 + \hat{F}_4\right) + D_4 R_2 D_4 \left(F_2 + \hat{F}_4\right) + D_4 F_2 D_4 \left(R_2 + \hat{F}_4\right) + D_4 \hat{F}_4 D_4 \left(R_2 + F_2\right) \\
&= D_4 D_4 R_2 + D_4 D_4 F_2 + D_4 D_4 \hat{F}_4 + D_4 R_2 D_4 F_2 + D_4 R_2 D_4 \hat{F}_4 \\
&+ D_4 F_2 D_4 R_2 + D_4 F_2 D_4 \hat{F}_4 + D_4 \hat{F}_4 D_4 R_2 + D_4 \hat{F}_4 D_4 F_2 \\
&= R_2^{(2)} \hat{\mu}_2^2 + r_2 \hat{P}_2^{(2)} + D_4 D_4 F_2 + D_4 D_4 \hat{F}_4 + r_2 \hat{\mu}_2 f_2 (4) + r_2 \hat{\mu}_2 D_4 \hat{F}_4 \\
&+ r_2 \hat{\mu}_2 f_2 (4) + D_4 \hat{F}_4 f_2 (4) + D_4 \hat{F}_4 r_2 \hat{\mu}_2 + D_4 \hat{F}_4 f_2 (4)
\end{aligned}$$

F_2

$$D_k D_i F_2 = D_k D_i \left(R_1 + F_1 + \mathbb{1}_{i \geq 3} \hat{F}_3\right) + D_i R_1 D_k \left(F_1 + \mathbb{1}_{k \geq 3} \hat{F}_3\right) + D_i F_1 D_k \left(R_1 + \mathbb{1}_{k \geq 3} \hat{F}_3\right) + \mathbb{1}_{i \geq 3} D_i \hat{F}_3 D_k \left(R_1 \ldots\right. \quad (33.25.$$

F_2 and $i = 1$

$i = 1$, $k = 1$

$$\begin{aligned}
D_1 D_1 F_2 &= D_1 D_1 \left(R_1 + F_1\right) + D_1 R_1 D_1 F_1 + D_1 F_1 D_1 R_1 = D_1^2 R_1 + D_1^2 F_1 + D_1 R_1 D_1 F_1 + D_1 F_1 D_1 R_1 \\
&= R_1^2 \tilde{\mu}_1^2 + r_1 \tilde{P}_1^{(2)} + D_1^2 F_1 + 2 r_1 \tilde{\mu}_1 f_1 (1)
\end{aligned}$$

$k = 2$

$$\begin{aligned}
D_2 D_1 F_2 &= D_2 D_1 \left(R_1 + F_1\right) + D_1 R_1 D_2 F_1 + D_1 F_1 D_2 R_1 = D_2 D_1 R_1 + D_2 D_1 F_1 + D_1 R_1 D_2 F_1 + D_1 F_1 D_2 R_1 \\
&= R_1^{(2)} \tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2 + r_1 \tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2 + D_2 D_1 F_1 + r_1 \tilde{\mu}_1 f_1 (2) + r_1 \tilde{\mu}_2 f_1 (1)
\end{aligned}$$

$k = 3$

$$\begin{aligned}
D_3 D_1 F_2 &= D_3 D_1 \left(R_1 + F_1\right) + D_1 R_1 D_3 \left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_1 F_1 D_3 \left(R_1 + \hat{F}_3\right) \\
&= D_3 D_1 R_1 + D_3 D_1 F_1 + D_1 R_1 D_3 F_1 + D_1 R_1 D_3 \hat{F}_3 + D_1 F_1 D_3 R_1 + D_1 F_1 D_3 \hat{F}_3 \\
&= R_1^{(2)} \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_1 + r_1 \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_1 + D_3 D_1 F_1 + r_1 \tilde{\mu}_1 f_1 (3) + r_1 \tilde{\mu}_1 D_3 \hat{F}_3 + r_1 \hat{\mu}_1 f_1 (1) + D_3 \hat{F}_3 f_1 (1)
\end{aligned}$$

$k = 4$

$$\begin{aligned}
D_4 D_1 F_2 &= D_4 D_1 \left(R_1 + F_1\right) + D_1 R_1 D_4 \left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_1 F_1 D_4 \left(R_1 + \hat{F}_3\right) \\
&= D_4 D_1 R_1 + D_4 D_1 F_1 + D_1 R_1 D_4 F_1 + D_1 R_1 D_4 \hat{F}_3 + D_1 F_1 D_4 R_1 + D_1 F_1 D_4 \hat{F}_3 \\
&= R_1^{(2)} \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_2 + r_1 \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_2 + D_4 D_1 F_1 + r_1 \tilde{\mu}_1 f_1 (4) + \tilde{\mu}_1 D_4 f_3 (4) + \tilde{\mu}_1 \hat{\mu}_2 f_1 (1) + f_1 (1) D_4 F_4
\end{aligned}$$

F_2 **and** $i = 2$

$i = 2\ k = 2$

$$
\begin{aligned}
D_2D_2F_2 &= D_2D_2\left(R_1 + F_1\right) + D_2R_1D_2F_1 + D_2F_1D_2R_1 = D_2D_2R_1 + D_2D_2F_1 + D_2R_1D_2F_1 + D_2F_1D_2R_1\\
&= R_1^{(2)}\tilde{\mu}_2^2 + r_1\tilde{P}_2^{(2)} + D_2D_2F_1 2r_1\tilde{\mu}_2 f_1\left(2\right)
\end{aligned}
$$

$k = 3$

$$
\begin{aligned}
D_3D_2F_2 &= D_3D_2\left(R_1 + F_1\right) + D_2R_1D_3\left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_2F_1D_3\left(R_1 + \hat{F}_3\right)\\
&= D_3D_2R_1 + D_3D_2F_1 + D_2R_1D_3F_1 + D_2R_1D_3\hat{F}_3 + D_2F_1D_3R_1 + D_2F_1D_3\hat{F}_3\\
&= R_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + r_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + D_3D_2F_1 + r_1\tilde{\mu}_2 f_1\left(3\right) + r_1\tilde{\mu}_2D_3\hat{F}_3 + r_1\hat{\mu}_1 f_1\left(2\right) + D_3\hat{F}_3 f_1\left(2\right)
\end{aligned}
$$

$k = 4$

$$
\begin{aligned}
D_4D_2F_2 &= D_4D_2\left(R_1 + F_1\right) + D_2R_1D_4\left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_2F_1D_4\left(R_1 + \hat{F}_3\right)\\
&= D_4D_2R_1 + D_4D_2F_1 + D_2R_1D_4F_1 + D_2R_1D_4\hat{F}_3 + D_2F_1D_4R_1 + D_2F_1D_4\hat{F}_3\\
&= R_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + r_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + D_4D_2F_1 + r_1\tilde{\mu}_2 f_1\left(4\right) + r_1\tilde{\mu}_2D_4\hat{F}_3 + r_1\hat{\mu}_2 f_1\left(2\right) + D_4\hat{F}_3 f_1\left(2\right)
\end{aligned}
$$

F_2 **and** $i = 3$

$i = 3\ k = 3$

$$
\begin{aligned}
D_3D_3F_2 &= D_3D_3\left(R_1 + F_1 + \hat{F}_3\right) + D_3R_1D_3\left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_3F_1D_3\left(R_1 + \hat{F}_3\right) + D_3\hat{F}_3D_3\left(R_1 + F_1\right)\\
&= D_3D_3R_1 + D_3D_3F_1 + D_3D_3\hat{F}_3 + D_3R_1D_3F_1 + D_3R_1D_3\hat{F}_3\\
&+ D_3F_1D_3R_1 + D_3F_1D_3\hat{F}_3 + D_3\hat{F}_3D_3R_1 + D_3\hat{F}_3D_3F_1\\
&= R_1^{(2)}\hat{\mu}_1^2 + r_1\hat{P}_1^{(2)} + D_3D_3F_1 + D_3D_3\hat{F}_3 + r_1\hat{\mu}_1 f_1\left(3\right) + r_1\hat{\mu}_1 f_3\left(3\right)\\
&+ r_1\hat{\mu}_1 f_1\left(3\right) + D_3\hat{F}_3 f_1\left(3\right) + D_3\hat{F}_3 r_1\hat{\mu}_1 + D_3\hat{F}_3 f_1\left(3\right)
\end{aligned}
$$

$k = 4$

$$
\begin{aligned}
D_4D_3F_2 &= D_4D_3\left(R_1 + F_1 + \hat{F}_3\right) + D_3R_1D_4\left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_3F_1D_4\left(R_1 + \hat{F}_3\right) + D_3\hat{F}_3D_4\left(R_1 + F_1\right)\\
&= D_4D_3R_1 + D_4D_3F_1 + D_4D_3\hat{F}_3 + D_3R_1D_4F_1 + D_3R_1D_4\hat{F}_3\\
&+ D_3F_1D_4R_1 + D_3F_1D_4\hat{F}_3 + D_3\hat{F}_3D_4R_1 + D_3\hat{F}_3D_4F_1\\
&= R_1^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + D_4D_3F_1 + D_4D_3\hat{F}_3 + r_1\hat{\mu}_1 f_1\left(4\right) + r_1\hat{\mu}_1D_4\hat{F}_3\\
&+ r_1\hat{\mu}_2 f_1\left(3\right) + D_4\hat{F}_3 f_1\left(3\right) + r_1\hat{\mu}_2D_3\hat{F}_3 + D_3\hat{F}_3 f_1\left(4\right)
\end{aligned}
$$

F_2 **and** $i = 4$

$i = 4\ and\ k = 4$

$$
\begin{aligned}
D_4D_4F_2 &= D_4D_4\left(R_1 + F_1 + \hat{F}_3\right) + D_4R_1D_4\left(F_1 + \hat{F}_3\right) + D_4F_1D_4\left(R_1 + \hat{F}_3\right) + D_4\hat{F}_3D_4\left(R_1 + F_1\right)\\
&= D_4D_4R_1 + D_4D_4F_1 + D_4D_4\hat{F}_3 + D_4R_1D_4F_1 + D_4R_1D_4\hat{F}_3\\
&+ D_4F_1D_4R_1 + D_4F_1D_4\hat{F}_3 + D_4\hat{F}_3D_4R_1 + D_4\hat{F}_3D_4F_1\\
&= R_1^{(2)}\hat{\mu}_2^2 + r_1\hat{P}_2^{(2)} + D_4D_4F_1 + D_4D_4\hat{F}_3 + f_1\left(4\right)r_1\hat{\mu}_2 + r_1\hat{\mu}_2D_4\hat{F}_3\\
&+ r_1\hat{\mu}_2 f_1\left(4\right) + D_4\hat{F}_3 f_1\left(4\right) + D_4\hat{F}_3 r_1\hat{\mu}_2 + D_4\hat{F}_3 f_1\left(4\right)
\end{aligned}
$$

$\hat{F}_1$

$$
D_kD_i\hat{F}_1 = D_kD_i\left(\hat{R}_4 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_2 + \hat{F}_4\right) + D_i\hat{R}_4D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2 + \hat{F}_4\right) + D_i\hat{F}_4D_k\left(\hat{R}_4 + \mathbb{1}_{k\leq 2}F_2\right) + \mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_k\left(\hat{R}_4\right. \qquad (33.25
$$

$\hat{F}_1,\ i=1$

$i=1$ *and* $k=1$

$$\begin{aligned}
D_1D_1\hat{F}_1 &= D_1D_1\left(\hat{R}_4+F_2+\hat{F}_4\right)+D_1\hat{R}_4D_1\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_1\hat{F}_4D_1\left(\hat{R}_4+F_2\right)+D_1F_2D_1\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)\\
&= D_1^2\hat{R}_4+D_1^2F_2+D_1^2\hat{F}_4+D_1\hat{R}_4D_1F_2+D_1\hat{R}_4D_1\hat{F}_4+D_1\hat{F}_4D_1\hat{R}_4+D_1\hat{F}_4D_1F_2+D_1F_2D_1\hat{R}_4+D_1F_2D_1\hat{F}\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1^2+\hat{r}_2\tilde{P}_1^{(2)}+D_1^2F_2+D_1^2\hat{F}_4+\hat{r}_2\tilde{\mu}_1D_1F_2\\
&+ \hat{r}_2\tilde{\mu}_1\hat{f}_2\left(1\right)+\hat{f}_2\left(1\right)\hat{r}_2\tilde{\mu}_1+\hat{f}_2\left(1\right)D_1F_2+D_1F_2\hat{r}_2\tilde{\mu}_1+D_1F_2\hat{f}_2\left(1\right)
\end{aligned}$$

$k=2$

$$\begin{aligned}
D_2D_1\hat{F}_1 &= D_2D_1\left(\hat{R}_4+F_2+\hat{F}_4\right)+D_1\hat{R}_4D_2\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_1\hat{F}_4D_2\left(\hat{R}_4+F_2\right)+D_1F_2D_2\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)\\
&= D_2D_1\hat{R}_4+D_2D_1F_2+D_2D_1\hat{F}_4+D_1\hat{R}_4D_2F_2+D_1\hat{R}_4D_2\hat{F}_4\\
&+ D_1\hat{F}_4D_2\hat{R}_4+D_1\hat{F}_4D_2F_2+D_1F_2D_2\hat{R}_4+D_1F_2D_2\hat{F}_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{r}_2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+D_2D_1F_2+D_2D_1\hat{F}_4+\hat{r}_2\tilde{\mu}_1D_2F_2+\hat{r}_2\tilde{\mu}_1\hat{f}_2\left(2\right)\\
&+ \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2\left(1\right)+\hat{f}_2\left(1\right)D_2F_2+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2D_1F_2+D_1F_2\hat{f}_2\left(2\right)
\end{aligned}$$

$k=3$

$$\begin{aligned}
D_3D_1\hat{F}_1 &= D_3D_1\left(\hat{R}_4+F_2+\hat{F}_4\right)+D_1\hat{R}_4D_3\left(\hat{F}_4\right)+D_1\hat{F}_4D_3\hat{R}_4+D_1F_2D_3\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)\\
&= D_3D_1\hat{R}_4+D_3D_1F_2+D_3D_1\hat{F}_4+D_1\hat{R}_4D_3\hat{F}_4+D_1\hat{F}_4D_3\hat{R}_4+D_1F_2D_3\hat{R}_4+D_1F_2D_3\hat{F}_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+\hat{r}_2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+D_3D_1F_2+D_3D_1\hat{F}_4+\hat{r}_2\tilde{\mu}_1\hat{f}_2\left(3\right)+\hat{f}_2\left(1\right)\hat{r}_2\hat{\mu}_1+D_1F_2\hat{r}_2\hat{\mu}_1+D_1F_2\hat{f}_2\left(3\right)
\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_1\hat{F}_1 &= D_4D_1\left(\hat{R}_4+F_2+\hat{F}_4\right)+D_1\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_1\hat{F}_4D_4\hat{R}_4+D_1F_2D_4\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)\\
&= D_4D_1\hat{R}_4+D_4D_1F_2+D_4D_1\hat{F}_4+D_1\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_1\hat{F}_4D_4\hat{R}_4+D_1F_2D_4\hat{R}_4+D_1F_2D_4\hat{F}_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{r}_2\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+D_4D_1F_2+D_4D_1\hat{F}_4+\hat{r}_2\tilde{\mu}_1\hat{f}_2\left(4\right)+\hat{f}_2\left(1\right)\hat{r}_2\hat{\mu}_2+D_1F_2\hat{r}_2\hat{\mu}_2+D_1F_2\hat{f}_2\left(4\right)
\end{aligned}$$

$\hat{F}_1,\ i=2$

$i=2$ *and* $k=2$

$$\begin{aligned}
D_2D_2\hat{F}_1 &= D_2D_2\left(\hat{R}_4+F_2+\hat{F}_4\right)+D_2\hat{R}_4D_2\left(F_2+\hat{F}_4\right)+D_2\hat{F}_4D_2\left(\hat{R}_4+F_2\right)+D_2F_2D_2\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)\\
&= D_2D_2\hat{R}_4+D_2D_2F_2+D_2D_2\hat{F}_4+D_2\hat{R}_4D_2F_2+D_2\hat{R}_4D_2\hat{F}_4\\
&+ D_2\hat{F}_4D_2\hat{R}_4+D_2\hat{F}_4D_2F_2+D_2F_2D_2\hat{R}_4+D_2F_2D_2\hat{F}_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2^2+\hat{r}_2\tilde{P}_1^{(2)}+D_2D_2F_2+D_2D_2\hat{F}_4+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2D_2F_2+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2\left(4\right)\\
&+ \hat{f}_2\left(4\right)\hat{r}_2\tilde{\mu}_2+\hat{f}_2\left(4\right)D_2F_2+D_2F_2\hat{r}_2\tilde{\mu}_2+D_2F_2\hat{f}_2\left(4\right)
\end{aligned}$$

$k=3$

$$\begin{aligned}
D_3D_2\hat{F}_1 &= D_3D_2\left(\hat{R}_4+F_2+\hat{F}_4\right)+D_2\hat{R}_4D_3\hat{F}_4+D_2\hat{F}_4D_3\hat{R}_4+D_2F_2D_3\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)\\
&= D_3D_2\hat{R}_4+D_3D_2F_2+D_3D_2\hat{F}_4+D_2\hat{R}_4D_3\hat{F}_4+D_2\hat{F}_4D_3\hat{R}_4+D_2F_2D_3\hat{R}_4+D_2F_2D_3\hat{F}_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+D_3D_2F_2+D_3D_2\hat{F}_4+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2\left(3\right)+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{r}_2\hat{\mu}_1+\hat{r}_2\hat{\mu}_1D_2F_2+D_2F_2\hat{f}_2\left(3\right)
\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_2\hat{F}_1 &= D_4D_2\left(\hat{R}_4+F_2+\hat{F}_4\right)+D_2\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_2\hat{F}_4D_4\hat{R}_4+D_2F_2D_4\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)\\
&= D_4D_2\hat{R}_4+D_4D_2F_2+D_4D_2\hat{F}_4+D_2\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_2\hat{F}_4D_4\hat{R}_4+D_2F_2D_4\hat{R}_4+D_2F_2D_4\hat{F}_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+D_4D_2F_2+D_4D_2\hat{F}_4+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2\left(4\right)+\hat{f}_2\left(4\right)\hat{r}_2\hat{\mu}_2+D_2F_2\hat{r}_2\hat{\mu}_2+D_2F_2\hat{f}_2\left(4\right)
\end{aligned}$$

$\hat{F}_1,\ i=3$

$k=3$

$$\begin{aligned}
D_3D_3\hat{F}_1 &= D_3D_3\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)+D_3\hat{R}_4D_3\hat{F}_4+D_3\hat{F}_4D_3\hat{R}_4=D_3^2\hat{R}_4+D_3^2\hat{F}_4+D_3\hat{R}_4D_3\hat{F}_4+D_3\hat{F}_4D_3\hat{R}_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\hat{\mu}_1^2+\hat{r}_2\hat{P}_1^{(2)}+D_3^2\hat{F}_4+\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{f}_2\left(4\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{f}_2\left(3\right)
\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_3\hat{F}_1 &= D_4D_3\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)+D_3\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_3\hat{F}_4D_4\hat{R}_4=D_4D_3\hat{R}_4+D_4D_3\hat{F}_4+D_3\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_3\hat{F}_4D_4\hat{R}_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+D_4D_3\hat{F}_4+\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{f}_2\left(4\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{f}_2\left(3\right)
\end{aligned}$$

$\hat{F}_1,\ i=4$

$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_4\hat{F}_1 &= D_4D_4\left(\hat{R}_4+\hat{F}_4\right)+D_4\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_4\hat{F}_4D_4\hat{R}_4=D_4^2\hat{R}_4+D_4^2\hat{F}_4+D_4\hat{R}_4D_4\hat{F}_4+D_4\hat{F}_4D_4\hat{R}_4\\
&= \hat{R}_2^{(2)}\hat{\mu}_2^2+\hat{r}_2\hat{P}_2^{(2)}+D_4^2\hat{F}_4+2\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{f}_2\left(4\right)
\end{aligned}$$

$\hat{F}_2$

for $\hat{F}_2$

$$\begin{aligned}
D_kD_i\hat{F}_2 &= D_kD_i\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{R}_3D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{F}_3D_k\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_k\left(\hat{R}_3 +\right.\\
&=
\end{aligned}$$
(33.25
(33.25

$\hat{F}_2,\ i=1$

$k=1$

$$\begin{aligned}
D_1D_1\hat{F}_2 &= D_1^2\left(\hat{R}_3+F_1+\hat{F}_3\right)+D_1\hat{R}_3D_1\left(F_1+\hat{F}_3\right)+D_1\hat{F}_3D_1\left(\hat{R}_3+F_1\right)+D_1F_1D_1\left(\hat{R}_3+\hat{F}_3\right)\\
&= D_1^2\hat{R}_3+D_1^2F_1+D_1^2\hat{F}_3+D_1\hat{R}_3D_1F_1+D_1\hat{R}_3D_1\hat{F}_3+D_1\hat{F}_3D_1\hat{R}_3+D_1\hat{F}_3D_1F_1+D_1F_1D_1\hat{R}_3+D_1F_1D_1\hat{F}\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1^2+\hat{r}_1\tilde{P}_2^{(2)}+D_1^2F_1+D_1^2\hat{F}_3+D_1F_1\hat{r}_1\tilde{\mu}_1\\
&+ \hat{r}_1\tilde{\mu}_1\hat{f}_1\left(1\right)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1\hat{f}_1\left(1\right)+D_1F_1\hat{f}_1\left(1\right)+D_1F_1\hat{r}_1\tilde{\mu}_1+D_1F_1\hat{f}_1\left(1\right)
\end{aligned}$$

$k=2$

$$\begin{aligned}
D_2D_1\hat{F}_2 &= D_2D_1\left(\hat{R}_3+F_1+\hat{F}_3\right)+D_1\hat{R}_3D_2\left(F_1+\hat{F}_3\right)+D_1\hat{F}_3D_2\left(\hat{R}_3+F_1\right)+D_1F_1D_2\left(\hat{R}_3+\hat{F}_3\right)\\
&= D_2D_1\hat{R}_3+D_2D_1F_1+D_2D_1\hat{F}_3+D_1\hat{R}_3D_2F_1+D_1\hat{R}_3D_2\hat{F}_3\\
&+ D_1\hat{F}_3D_2\hat{R}_3+D_1\hat{F}_3D_2F_1+D_1F_1D_2\hat{R}_3+D_1F_1D_2\hat{F}_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2+D_2D_1F_1+D_2D_1\hat{F}_3+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1D_2F_1+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1\hat{f}_1\left(2\right)\\
&+ \hat{f}_1\left(1\right)\hat{r}_1\tilde{\mu}_2+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1D_2F_1+D_1F_1\hat{r}_1\tilde{\mu}_2+D_1F_1\hat{f}_1\left(2\right)
\end{aligned}$$

$k=3$

$$\begin{aligned}
D_3D_1\hat{F}_2 &= D_3D_1\left(\hat{R}_3+F_1+\hat{F}_3\right)+D_1\hat{R}_3D_3\hat{F}_3+D_1\hat{F}_3D_3\hat{R}_3+D_1F_1D_3\left(\hat{R}_3+\hat{F}_3\right)\\
&= D_3D_1\hat{R}_3+D_3D_1F_1+D_3D_1\hat{F}_3+D_1\hat{R}_3D_3\hat{F}_3+D_1\hat{F}_3D_3\hat{R}_3+D_1F_1D_3\hat{R}_3+D_1F_1D_3\hat{F}_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_1+D_3D_1F_1+D_3D_1\hat{F}_3+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1\hat{f}_1\left(3\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\hat{f}_1\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1D_1F_1+D_1F_1\hat{f}_1\left(3\right)
\end{aligned}$$

$k=4$

$$\begin{aligned}
D_4D_1\hat{F}_2 &= D_4D_1\left(\hat{R}_3+F_1+\hat{F}_3\right)+D_1\hat{R}_3D_4\hat{F}_3+D_1\hat{F}_3D_4\hat{R}_3+D_1F_1D_4\left(\hat{R}_3+\hat{F}_3\right)\\
&= D_4D_1\hat{R}_3+D_4D_1F_1+D_4D_1\hat{F}_3+D_1\hat{R}_3D_4\hat{F}_3+D_1\hat{F}_3D_4\hat{R}_3+D_1F_1D_4\hat{R}_3+D_1F_1D_4\hat{F}_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{r}_1\tilde{\mu}_1\hat{\mu}_2+D_4D_1F_1+D_4D_1\hat{F}_3+\hat{f}_1\left(4\right)\hat{r}_1\tilde{\mu}_1+\hat{f}_1\left(3\right)\hat{r}_1\hat{\mu}_2+D_1F_1\hat{r}_1\hat{\mu}_2+D_1F_1\hat{f}_1\left(4\right)
\end{aligned}$$

$\hat{F}_2,\ i=2$

$k=2$

$$
\begin{aligned}
D_2D_2\hat{F}_2 &= D_2D_2\left(\hat{R}_3+F_1+\hat{F}_3\right)+D_2\hat{R}_3D_2\left(F_1+\hat{F}_3\right)+D_2\hat{F}_3D_2\left(\hat{R}_3+F_1\right)+D_2F_1D_2\left(\hat{R}_3+\hat{F}_3\right)\\
&= D_2^2\hat{R}_3+D_2^2F_1+D_2^2\hat{F}_3+D_2\hat{R}_3D_2F_1+D_2\hat{R}_3D_2\hat{F}_3+D_2\hat{F}_3D_2\hat{R}_3+D_2\hat{F}_3D_2F_1+D_2F_1D_2\hat{R}_3+D_2F_1D_2\hat{F}_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2^2+\hat{r}_1\tilde{P}_2^{(2)}+D_2^2F_1+D_2^2\hat{F}_3+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2D_2F_1\\
&+ \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{f}_1\left(2\right)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{f}_1\left(2\right)+\hat{f}_1\left(1\right)D_2F_1+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2D_2F_1+\hat{f}_1\left(3\right)D_2F_1
\end{aligned}
$$

$k=3$

$$
\begin{aligned}
D_3D_2\hat{F}_2 &= D_3D_2\left(\hat{R}_3+F_1+\hat{F}_3\right)+D_2\hat{R}_3D_3\hat{F}_3+D_2\hat{F}_3D_3\hat{R}_3+D_2F_1D_3\left(\hat{R}_3+\hat{F}_3\right)\\
&= D_3D_2\hat{R}_3+D_3D_2F_1+D_3D_2\hat{F}_3+D_2\hat{R}_3D_3\hat{F}_3+D_2\hat{F}_3D_3\hat{R}_3+D_2F_1D_3\hat{R}_3+D_2F_1D_3\hat{F}_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+D_3D_2F_1+D_3D_2\hat{F}_3+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{f}_1\left(3\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\hat{f}_1\left(2\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1D_2F_1+\hat{f}_1\left(3\right)D_2F_1
\end{aligned}
$$

$k=4$

$$
\begin{aligned}
D_4D_2\hat{F}_2 &= D_4D_2\left(\hat{R}_3+F_1+\hat{F}_3\right)+D_2\hat{R}_3D_4\hat{F}_3+D_2\hat{F}_3D_4\hat{R}_3+D_2F_1D_4\left(\hat{R}_3+\hat{F}_3\right)\\
&= D_4D_2\hat{R}_3+D_4D_2F_1+\hat{F}_3+D_2\hat{R}_3D_4\hat{F}_3+D_2\hat{F}_3D_4\hat{R}_3+D_2F_1D_4\hat{R}_3+D_2F_1D_4\hat{F}_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+D_4D_2F_1+D_4D_2\hat{F}_3+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{f}_1\left(4\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{f}_1\left(2\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2D_2F_1+\hat{f}_1\left(4\right)D_2F_1
\end{aligned}
$$

$\hat{F}_2,\ i=3$

$k=3$

$$
\begin{aligned}
D_3D_3\hat{F}_2 &= D_3D_3\left(\hat{R}_3+\hat{F}_3\right)+D_3\hat{R}_3D_3\hat{F}_3+D_3\hat{F}_3D_3\hat{R}_3=D_3^2\hat{R}_3+D_3^2\hat{F}_3+D_3\hat{R}_3D_3\hat{F}_3+D_3\hat{F}_3D_3\hat{R}_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\hat{\mu}_1^2+\hat{r}_1\hat{P}_1^{(2)}+D_3^2\hat{F}_3+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\hat{f}_1\left(3\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\hat{f}_1\left(3\right)
\end{aligned}
$$

$k=4$

$$
\begin{aligned}
D_4D_3\hat{F}_2 &= D_4D_3\left(\hat{R}_3+\hat{F}_3\right)+D_3\hat{R}_3D_4\hat{F}_3+D_3\hat{F}_3D_4\hat{R}_3=D_4D_3\hat{R}_3+D_4D_3\hat{F}_3+D_3\hat{R}_3D_4\hat{F}_3+D_3\hat{F}_3D_4\hat{R}_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+D_4D_3\hat{F}_3+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\hat{f}_1\left(4\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{f}_1\left(3\right)
\end{aligned}
$$

$i=4$
$k=4$

$$
\begin{aligned}
D_4D_4\hat{F}_2 &= D_4^2\left(\hat{R}_3+\hat{F}_3\right)+D_4\hat{R}_3D_4\hat{F}_3+D_4\hat{F}_3D_4\hat{R}_3=D_4^2\hat{R}_3+D_4^2\hat{F}_3+D_4\hat{R}_3D_4\hat{F}_3+D_4\hat{F}_3D_4\hat{R}_3\\
&= \hat{R}_1^{(2)}\hat{\mu}_2^2+\hat{r}_1\hat{P}_2^{(2)}+D_4^2\hat{F}_3+\hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{f}_1\left(4\right)
\end{aligned}
$$

33.26. Generalizaciones

33.26.1. RSVC con dos conexiones

Sus ecuaciones recursivas son de la forma

$$F_1(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_2\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2),$$

$$F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1),$$

$$\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1,w_2) = \hat{R}_2\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right),$$

$$\hat{F}_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = \hat{R}_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right),$$

33.26.2. First Moments of the Queue Lengths

The server's switchover times are given by the general equation

$$R_i(\mathbf{z},\mathbf{w}) = R_i\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.26.1}$$

with

$$D_iR_i = DR_iD_iP_i \tag{33.26.2}$$

the following notation is considered

$$D_1P_1 \equiv D_1\tilde{P}_1, \quad D_2P_2 \equiv D_2\tilde{P}_2, \quad D_3P_3 \equiv D_3\hat{P}_1, \quad D_4P_4 \equiv D_4\hat{P}_2,$$

also we need to remind $F_{1,2}(z_1;\zeta_2)F_{2,2}(z_2;\zeta_2) = F_2(z_1,z_2;\zeta_2)$, *therefore*

$$D_1F_2(z_1,z_2;\zeta_2) = D_1\left[F_{1,2}(z_1;\zeta_2)F_{2,2}(z_2;\zeta_2)\right] = F_{2,2}(z_2;\zeta_2)D_1F_{1,2}(z_1;\zeta_2) = F_{1,2}^{(1)}(1)$$

i.e., $D_1F_2 = F_{1,2}^{(1)}(1)$; $D_2F_2 = F_{2,2}^{(1)}(1)$, *whereas that* $D_3F_2 = D_4F_2 = 0$, *then*

$$D_iF_j = \mathbb{1}_{i\leq 2}F_{i,j}^{(1)}(1), \quad y \quad D_i\hat{F}_j = \mathbb{1}_{i\geq 2}F_{i,j}^{(1)}(1).$$

Now, we obtain the first moments equations for the queue lengths as before for the times the server arrives to the queue to start attending
Remember that

$$F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1),$$

where

$$F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$$

so

$$D_iF_1 = \mathbb{1}_{i\neq 1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=2}D_iF_1,$$

then

$$\begin{aligned}
D_1F_1 &= 0, && (33.26.3)\\
D_2F_1 &= D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2P_2 + D_2F_1 = f_1(1)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{\mu}_2 + f_1(2), && (33.26.4)\\
D_3F_1 &= D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3P_3 = f_1(1)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{\mu}_1 && (33.26.5)\\
D_4F_1 &= D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4P_4 = f_1(1)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{\mu}_2 && (33.26.6)
\end{aligned}$$

$$D_iF_2 = \mathbb{1}_{i\neq 2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=1}D_iF_2$$

$$\begin{aligned}
D_1F_2 &= D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_1F_2 = f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_1 && (33.26.7)\\
D_2F_2 &= 0 && (33.26.8)\\
D_3F_2 &= D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3P_3 = f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_1 && (33.26.9)\\
D_4F_2 &= D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4P_4 = f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_2 && (33.26.10)
\end{aligned}$$

$$D_i\hat{F}_1 = \mathbb{1}_{i\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=4}D_i\hat{F}_1,$$

$$\begin{aligned}
D_1\hat{F}_1 &= D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1 = \hat{f}_1(3)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_1 = && (33.26.11)\\
D_2\hat{F}_1 &= D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2P_2 = \hat{f}_1(3)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_2 && (33.26.12)\\
D_3\hat{F}_1 &= 0 && (33.26.13)\\
D_4\hat{F}_1 &= D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_4P_4 + D_4\hat{F}_1 = \hat{f}_1(3)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(2), && (33.26.14)
\end{aligned}$$

$$D_i\hat{F}_2 = \mathbb{1}_{i\neq 4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=3}D_i\hat{F}_2.$$

$$\begin{aligned}
D_1\hat{F}_2 &= D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1 = \hat{f}_2(4)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{\mu}_1 && (33.26.15)\\
D_2\hat{F}_2 &= D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2P_2 = \hat{f}_2(4)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{\mu}_2 && (33.26.16)\\
D_3\hat{F}_2 &= D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_3P_3 + D_3\hat{F}_2 = \hat{f}_2(4)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(4) && (33.26.17)\\
D_4\hat{F}_2 &= 0 && (33.26.18)
\end{aligned}$$

Then, now we can obtain the linear system of equations in order to obtain the first moments of the lengths of the queues:
For $\mathbf{F}_1 = R_2F_2\hat{F}_2$ *we get the general equations*

$$D_i\mathbf{F}_1 = D_i\left(R_2 + F_2 + \mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_2\right)$$

So

$$\begin{aligned} D_1\mathbf{F}_1 &= D_1R_2 + D_1F_2 = r_1\tilde{\mu}_1 + f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_1 \\ D_2\mathbf{F}_1 &= D_2(R_2+F_2) = r_2\tilde{\mu}_1 \end{aligned}$$

$$D_3\mathbf{F}_1 = D_3\left(R_2+F_2+\hat{F}_2\right) = r_1\hat{\mu}_1 + f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{1,2}(1)$$

$$D_4\mathbf{F}_1 = D_4\left(R_2+F_2+\hat{F}_2\right)$$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{F}_2 = R_1F_1\hat{F}_1, & D_i\mathbf{F}_2 = D_i\left(R_1+F_1+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_1\right) \\ \hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{R}_2\hat{F}_2F_2, & D_i\hat{\mathbf{F}}_1 = D_i\left(\hat{R}_2+\hat{F}_2+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_2\right) \\ \hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{R}_1\hat{F}_1F_1, & D_i\hat{\mathbf{F}}_2 = D_i\left(\hat{R}_1+\hat{F}_1+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_1\right) \end{array} \tag{33.26.19}$$

equivalently

$$\begin{array}{ll} D_1\mathbf{F}_2 = r_1\tilde{\mu}_1, & D_2\mathbf{F}_2 = r_1\tilde{\mu}_2 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + f_1(2), \\ D_3\mathbf{F}_2 = r_1\hat{\mu}_1 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{1,1}(1), & D_4\mathbf{F}_2 = r_1\hat{\mu}_2 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1), \\ D_1\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_1 + f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + f_2(1), & D_2\mathbf{F}_1 = r_2\tilde{\mu}_2, \\ D_3\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_1 + f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{1,2}(1), & D_4\mathbf{F}_1 = r_2\hat{\mu}_2 + f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1), \\ D_1\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\tilde{\mu}_1 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_1 + F^{(1)}_{1,1}(1), & D_2\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\mu_2 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,1}(1), \\ D_3\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\hat{\mu}_1, & D_4\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{r}_1\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(2), \\ D_1\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\tilde{\mu}_1 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + F^{(1)}_{1,2}(1), & D_2\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,2}(1), \\ D_3\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(1), & D_4\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{r}_2\hat{\mu}_2 \end{array}$$

Then we have that if $\mu = \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2$, $r = r_1 + r_2$ *and* $\hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$ *the system's solution is given by*

$$f_2(1) = r_1\tilde{\mu}_1, \quad f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2, \quad \hat{f}_1(4) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2, \quad \hat{f}_2(3) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1$$

it's easy to verify that

$$\begin{array}{ll} f_1(1) = \tilde{\mu}_1\left(r + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right), & f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,2}(1) \\ f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1), & f_2(2) = \left(r + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2, \\ f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\tilde{\mu}_1}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,1}(1), & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1), \\ \hat{f}_1(1) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_1 + F^{(1)}_{1,2}(1), & \hat{f}_1(2) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,2}(1), \\ \hat{f}_1(3) = \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1, & \hat{f}_2(1) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1 + F^{(1)}_{1,1}(1), \\ \hat{f}_2(2) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,1}(1), & \hat{f}_2(4) = \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2, \end{array}$$

with system's solutions given by

$$\begin{array}{ll} f_1(1) = r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}, & f_2(2) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}, \\ f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,2}(1), & f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1), \\ f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,1}(1), & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1), \\ \hat{f}_1(1) = \tilde{\mu}_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,2}(1), & \hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,2}(1), \\ \hat{f}_2(1) = \tilde{\mu}_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,1}(1), & \hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,1}(1) \end{array}$$

General Second Order Derivatives

Now, taking the second order derivative with respect to the equations given in (33.26.20) we obtain it in their general form

$$\begin{aligned}
D_kD_iF_1 &= D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)+D_iR_2D_k\left(F_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)+D_iF_2D_k\left(R_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_4D_k\left(R+F\right.\\
D_kD_iF_2 &= D_kD_i\left(R_1+F_1+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_3\right)+D_iR_1D_k\left(F_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right)+D_iF_1D_k\left(R_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_3D_k\left(R_1+\right.\\
D_kD_i\hat{F}_3 &= D_kD_i\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_2+\hat{F}_4\right)+D_i\hat{R}_4D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2+\hat{F}_4\right)+D_i\hat{F}_4D_k\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_k\left(\hat{R}_4+\right.\\
D_kD_i\hat{F}_4 &= D_kD_i\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{R}_3D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{F}_3D_k\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_k\left(\hat{R}_3+\right.
\end{aligned}$$

for $i,k=1,\ldots,4$. *In order to have it in an specific way we need to compute the expressions* $D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)$

Second Order Derivatives: Serve's Switchover Times

Remind $R_i\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)=R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)$, *which we will write in his reduced form* $R_i=R_i\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right)$, *and according to the notation given in [24] we obtain*

$$D_iD_iR_k=D^2R_k\left(D_iP_i\right)^2+DR_kD_iD_iP_i \tag{33.26.20}$$

whereas for $i\neq j$

$$D_iD_jR_k=D^2R_kD_iP_iD_jP_j+DR_kD_jP_jD_iP_i \tag{33.26.21}$$

Second Order Derivatives: Queue Lengths

Just like before the expression $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)$, *will be denoted by* $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$, *then the mixed partial derivatives are:*

$$D_iF_1=\mathbb{1}_{i\geq 2}D_iF_1D\tilde{\theta}_1D_iP_i+\mathbb{1}_{i=2}D_iF_1,$$

then for $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$

$$\begin{aligned}
D_jD_iF_1 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1D_1F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_iP_iD_jP_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i+\mathbb{1}_{i\neq j}D_iP\right.\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_iP_i+\mathbb{1}_{i=2}\left(D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_iP_i+D_i^2F_1\right)
\end{aligned}$$

Recall the expression for $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)$, *which is denoted by* $F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$, *then the mixed partial derivatives are given by*

$$\begin{array}{llll}
D_1D_1F_1=0, & D_2D_1F_1=0, & D_3D_1F_1=0, & D_4D_1F_1=0,\\
D_1D_2F_1=0, & D_1D_3F_1=0, & D_1D_4F_1=0, &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_2\tilde{P}_2\right)^2+D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_2^2\tilde{P}_2+D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2^2\tilde{P}_2+D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2\\
&+ D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2+D_2D_2F_1\\
&= f_1\left(1,1\right)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2+f_1\left(1\right)\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{P}_2^{(2)}+f_1\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}+f_1\left(1,2\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1\left(1,2\right)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}+f_1\left(2,2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1(1)\,\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1(1,2)\,\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_2F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + f_1(1)\,\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1(1,2)\,\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_2\tilde{P}_2\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1(1)\,\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1(1,2)\,\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3^2\hat{P}_1\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_1^2 + f_1(1)\,\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_3F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_1(1)\left(\tilde{\theta}_1\right)^2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1 + f_1(1)\,\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_2\tilde{P}_2D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_2\tilde{P}_2 + D_2D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 + f_1(1,1)\,\tilde{\mu}_1^{(2)}\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 + f_1(1)\,\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\theta}_1} + f_1(1,2)\,\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2 D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + f_1(1)\,\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4D_4F_1 &= D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4^2\hat{P}_2\\
&= f_1(1,1)\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\left(\hat{\mu}_2\right)^2 + f_1(1)\,\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}
\end{aligned}$$

Para $F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\hat{P}_1\hat{P}_2\right)\right)$

$$\begin{aligned}
D_jD_iF_2 &= \mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2D_{21}F_2\left(D\theta_2\right)^2D_iP_iD_jP_j + \mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2F_2D^2\theta_2D_iP_iD_jP_j\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2F_2D\theta_2\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i + \mathbb{1}_{i\neq j}D_iP_iD_jP_j\right)\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2D_1F_2D\theta_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=2}\left(D_2D_1F_2D\theta_2D_iP_i + D_i^2F_2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&D_2D_1F_2=0,\quad D_2D_3F_3=0,\quad D_2D_4F_2=0,\\
&D_1D_2F_2=0,\quad D_2D_2F_2=0,\quad D_3D_2F_2=0,\quad D_4D_2F_2=0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_1F_2 &= D_1^2P_1D\tilde{\theta}_2D_2F_2 + (D_1P_1)^2 D^2\tilde{\theta}_2D_2F_2 + D_1P_1D\tilde{\theta}_2D_1D_2F_2 + (D_1P_1)^2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_2^2F_2 + D_1P_1D\tilde{\theta}_2D_1D_2F_2\\
D_3D_1F_2 &= D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_3P_1D_1P_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1\\
D_4D_1F_2 &= D_1D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_4P_2D_1P_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2\\
D_1D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1\\
D_3D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_2F_2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 D^2\tilde{\theta}_2 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3^2\hat{P}_1\\
D_4D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2\\
D_1D_4F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_1D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1\\
D_3D_4F_2 &= D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2 D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1\\
D_4D_4F_2 &= D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4^2\hat{P}_2 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2
\end{aligned}
$$

para $\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_2\right), w_2\right)$

$$
D_i\hat{F}_1 = \mathbb{1}_{i\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=4}D_i\hat{F}_1,
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_1\hat{F}_1 &= D\hat{\theta}_1D_1^2P_1D_1\hat{F}_1 + (D_1P_1)^2 D^2\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + (D_1P_1)^2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1^2\hat{F}_1\\
D_2D_1\hat{F}_1 &= D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_2P_2D^2\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_2P_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1^2\hat{\theta}_1\\
D_3D_1\hat{F}_1 &= 0\\
D_4D_1\hat{F}_1 &= D_1P_1D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_4\hat{P}_2D^2\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D\hat{\theta}_1D_2D1\hat{F}_1 + D_1P_1D\hat{\theta}_1D_1D_1\hat{F}_1\\
D_1D_2\hat{F}_1 &= D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_2P_2D^2\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_2P_2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1^2\hat{F}_1\\
D_2D_2\hat{F}_1 &= D\hat{\theta}_1D_2^2P_2D_1\hat{F}_1 + (D_2P_2)^2 D^2\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + (D_2P_2)^2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1^2\hat{F}_1\\
D_3D_2\hat{F}_1 &= 0\\
D_4D_2\hat{F}_1 &= D_2P_2D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D\hat{F}_1 + D_2P_2D_4\hat{P}_2D^2\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D\hat{\theta}_1D_2D_1\hat{F}_1 + D_2P_2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_4\hat{P}_2D_1^2\hat{F}_1\\
D_1D_3\hat{F}_1 &= 0\\
D_2D_3\hat{F}_1 &= 0\\
D_3D_3\hat{F}_1 &= 0\\
D_4D_3\hat{F}_1 &= 0\\
D_1D_4\hat{F}_1 &= D_1P_1D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_4\hat{P}_2D^2\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D\hat{\theta}_1D_2D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_4\hat{P}_2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1D_1\hat{F}_1\\
D_2D_4\hat{F}_1 &= D_2P_2D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D_4\hat{P}_2D^2\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D\hat{\theta}_1D_2D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D_4\hat{P}_2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1^2\hat{F}_1\\
D_3D_4\hat{F}_1 &= 0\\
D_4D_4\hat{F}_1 &= D_2D_2\hat{F}_1 + D\hat{\theta}_1D_4^2\hat{P}_2D_1\hat{F}_1 + \left(D_4\hat{P}_2\right)^2 D^2\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_2D_1\hat{F}_1\\
&+ D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_2D_1\hat{F}_1 + \left(D_4\hat{P}_2\right)^2 D\hat{\theta}_1D\hat{\theta}_1D_1^2\hat{F}_1
\end{aligned}
$$

finalmente, para $\hat{F}_2\left(w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_1\right)\right)$

$$
D_i\hat{F}_2 = \mathbb{1}_{i\neq 4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=3}D_i\hat{F}_2,
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_1\hat{F}_2 &= D_1\hat{\theta}_2D_2^2P_1D_2\hat{F}_2+(D_1P_1)^2D_1^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+(D_1P_1)^2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_1^2\hat{F}_2\\
D_2D_1\hat{F}_2 &= D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_2P_2D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_2P_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2^2\hat{F}_2\\
D_3D_1\hat{F}_2 &= D_1P_1D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_3\hat{P}_1D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_3\hat{P}_1\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2^2\hat{F}_2+D_1P_1D\hat{\theta}_2D_1D_2\hat{F}_2\\
D_4D_1\hat{F}_2 &= 0\\
D_1D_2\hat{F}_2 &= D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_2P_2D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_2P_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2D_2\hat{F}_2\\
D_2D_2\hat{F}_2 &= D\hat{\theta}_2D_2^2P_2D_2\hat{F}_2+(D_2P_2)^2D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+(D_2P_2)^2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2^2\hat{F}_2\\
D_3D_2\hat{F}_2 &= D_2P_2D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_2P_2D_3\hat{P}_1D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_2P_2D_3\hat{P}_1\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2^2\hat{F}_2+D_2P_2D\hat{\theta}_2D_1D_2\hat{F}_2\\
D_4D_2\hat{F}_2 &= 0\\
D_1D_3\hat{F}_2 &= D_1P_1D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_3\hat{P}_1D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_3\hat{P}_1\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D\hat{\theta}_2D_2D_1\hat{F}_2\\
D_2D_3\hat{F}_2 &= D_2P_2D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_2P_2D_3\hat{P}_1D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_2P_2D_3\hat{P}_1\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2^2\hat{F}_2+D_2P_2D\hat{\theta}_2D_1D_2\hat{F}_2\\
D_3D_3\hat{F}_2 &= D_3^2\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+\left(D_3\hat{P}_1\right)^2D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_1D_2\hat{F}_2+\left(D_3\hat{P}_1\right)^2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2^2\hat{F}_2\\
&+ D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_1D_2\hat{F}_2+D_1^2\hat{F}_2\\
D_4D_3\hat{F}_2 &= 0\\
D_1D_4\hat{F}_2 &= 0\\
D_2D_4\hat{F}_2 &= 0\\
D_3D_4\hat{F}_2 &= 0\\
D_4D_4\hat{F}_2 &= 0
\end{aligned}
$$

33.27. Generalizaciones

33.27.1. RSVC con dos conexiones

Sus ecuaciones recursivas son de la forma

$$F_1(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_2\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2),$$

$$F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1),$$

$$\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1,w_2) = \hat{R}_2\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right),$$

$$\hat{F}_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = \hat{R}_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right),$$

the server's switchover times are given by the general equation

$$R_i(\mathbf{z},\mathbf{w}) = R_i\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.27.1}$$

with

$$D_iR_i = DR_iD_iP_i \tag{33.27.2}$$

the following notation is considered

$$D_1P_1 \equiv D_1\tilde{P}_1, \quad D_2P_2 \equiv D_2\tilde{P}_2, \quad D_3P_3 \equiv D_3\hat{P}_1, \quad D_4P_4 \equiv D_4\hat{P}_2,$$

also we need to remind $F_{1,2}(z_1;\zeta_2)F_{2,2}(z_2;\zeta_2) = F_2(z_1,z_2;\zeta_2)$, *therefore*

$$D_1F_2(z_1,z_2;\zeta_2) = D_1\left[F_{1,2}(z_1;\zeta_2)F_{2,2}(z_2;\zeta_2)\right] = F_{2,2}(z_2;\zeta_2)D_1F_{1,2}(z_1;\zeta_2) = F_{1,2}^{(1)}(1)$$

i.e., $D_1F_2 = F_{1,2}^{(1)}(1)$; $D_2F_2 = F_{2,2}^{(1)}(1)$, *whereas that* $D_3F_2 = D_4F_2 = 0$, *then*

$$D_iF_j = \mathbb{1}_{i\leq 2}F_{i,j}^{(1)}(1), \quad y \quad D_i\hat{F}_j = \mathbb{1}_{i\geq 2}F_{i,j}^{(1)}(1).$$

Now, we obtain the first moments equations for the queue lengths as before for the times the server arrives to the queue to start attending
Remember that

$$F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_1\left(\prod_{i=1}^{2}\tilde{P}_i(z_i)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1),$$

where

$$F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$$

so

$$D_iF_1 = \mathbb{1}_{i\neq 1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=2}D_iF_1,$$

then

$$D_1F_1 = 0, \quad (33.27.3)$$
$$D_2F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_2P_2 + D_2F_1 = f_1(1)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{\mu}_2 + f_1(2), \quad (33.27.4)$$
$$D_3F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_3P_3 = f_1(1)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{\mu}_1 \quad (33.27.5)$$
$$D_4F_1 = D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_4P_4 = f_1(1)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{\mu}_2 \quad (33.27.6)$$

$$D_iF_2 = \mathbb{1}_{i\neq 2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=1}D_iF_2$$

$$D_1F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1 + D_1F_2 = f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_1 \quad (33.27.7)$$
$$D_2F_2 = 0 \quad (33.27.8)$$
$$D_3F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3P_3 = f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_1 \quad (33.27.9)$$
$$D_4F_2 = D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4P_4 = f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_2 \quad (33.27.10)$$

$$D_i\hat{F}_1 = \mathbb{1}_{i\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=4}D_i\hat{F}_1,$$

$$D_1\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_1P_1 = \hat{f}_1(3)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_1 = \quad (33.27.11)$$
$$D_2\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_2P_2 = \hat{f}_1(3)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_2 \quad (33.27.12)$$
$$D_3\hat{F}_1 = 0 \quad (33.27.13)$$
$$D_4\hat{F}_1 = D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_4P_4 + D_4\hat{F}_1 = \hat{f}_1(3)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(2), \quad (33.27.14)$$

$$D_i\hat{F}_2 = \mathbb{1}_{i\neq 4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=3}D_i\hat{F}_2.$$

$$D_1\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_1P_1 = \hat{f}_2(4)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{\mu}_1 \quad (33.27.15)$$
$$D_2\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_2P_2 = \hat{f}_2(4)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{\mu}_2 \quad (33.27.16)$$
$$D_3\hat{F}_2 = D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_3P_3 + D_3\hat{F}_2 = \hat{f}_2(4)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(4) \quad (33.27.17)$$
$$D_4\hat{F}_2 = 0 \quad (33.27.18)$$

Then, now we can obtain the linear system of equations in order to obtain the first moments of the lengths of the queues:
For $\mathbf{F}_1 = R_2F_2\hat{F}_2$ *we get the general equations*

$$D_i\mathbf{F}_1 = D_i\left(R_2 + F_2 + \mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_2\right)$$

So

$$\begin{aligned}
D_1\mathbf{F}_1 &= D_1R_2 + D_1F_2 = r_1\tilde{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_1\\
D_2\mathbf{F}_1 &= D_2\left(R_2+F_2\right) = r_2\tilde{\mu}_1
\end{aligned}$$

$$D_3\mathbf{F}_1 = D_3\left(R_2+F_2+\hat{F}_2\right) = r_1\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{1,2}\left(1\right)$$

$$D_4\mathbf{F}_1 = D_4\left(R_2+F_2+\hat{F}_2\right)$$

$$\begin{array}{l}
\mathbf{F}_2 = R_1F_1\hat{F}_1, \quad D_i\mathbf{F}_2 = D_i\left(R_1+F_1+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_1\right)\\
\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{R}_2\hat{F}_2F_2, \quad D_i\hat{\mathbf{F}}_1 = D_i\left(\hat{R}_2+\hat{F}_2+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_2\right)\\
\hat{\mathbf{F}}_2 = \hat{R}_1\hat{F}_1F_1, \quad D_i\hat{\mathbf{F}}_2 = D_i\left(\hat{R}_1+\hat{F}_1+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_1\right)
\end{array} \tag{33.27.19}$$

33.27.2. Derivadas de Orden Superior

$$\begin{aligned}
D_kD_iF_1 &= D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right) + D_iR_2D_k\left(F_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right) + D_iF_2D_k\left(R_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_4\right) + \mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_4D_k\,(R + F\\
D_kD_iF_2 &= D_kD_i\left(R_1+F_1+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_3\right) + D_iR_1D_k\left(F_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right) + D_iF_1D_k\left(R_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\hat{F}_3\right) + \mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\hat{F}_3D_k\,(R_1 +\\
D_kD_i\hat{F}_3 &= D_kD_i\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_2+\hat{F}_4\right) + D_i\hat{R}_4D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2+\hat{F}_4\right) + D_i\hat{F}_4D_k\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2\right) + \mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_k\,(\hat{R}_4 +\\
D_kD_i\hat{F}_4 &= D_kD_i\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right) + D_i\hat{R}_3D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1+\hat{F}_3\right) + D_i\hat{F}_3D_k\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1\right) + \mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_k\,(\hat{R}_3 +
\end{aligned}$$

para $i,k = 1,\ldots,4$. Es necesario determinar las derivadas de segundo orden para las expresiones de la forma $D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\hat{F}_4\right)$

A saber, $R_i\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)$, la denotaremos por la expresión $R_i = R_i\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right)$, donde al igual que antes, utilizando la notación dada en [24] se tiene que

$$D_iD_iR_k = D^2R_k\left(D_iP_i\right)^2 + DR_kD_iD_iP_i \tag{33.27.20}$$

mientras que para $i \neq j$

$$D_iD_jR_k = D^2R_kD_iP_iD_jP_j + DR_kD_jP_jD_iP_i \tag{33.27.21}$$

Recordemos la expresión $F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)$, que denotaremos por $F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$, entonces las derivadas parciales mixtas son:

$$D_iF_1 = \mathbb{1}_{i\geq 2}D_iF_1D\theta_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=2}D_iF_1,$$

entonces para $F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right),z_2\right)$

$$D_2F_1 = D_1F_1D_1\theta_1D_2\tilde{P}_2\left\{\hat{P}_1\hat{P}_2\right\} + D_2F_1$$

$$\begin{aligned}
D_jD_iF_1 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1D_1F_1\left(D\theta_1\right)^2D_iP_iD_jP_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D^2\theta_1D_iP_iD_jP_j\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D\theta_1\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i + \mathbb{1}_{i\neq j}D_iP_iD_jP_j\right)\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1D_2F_1D\theta_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=2}\left(D_1D_2F_1D\theta_1D_iP_i + D_i^2F_1\right)
\end{aligned}$$

Para $F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1\hat{P}_1\hat{P}_2\right)\right)$

$$D_iF_2 = \mathbb{1}_{i\neq 2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=1}D_iF_2,$$

$$\begin{aligned}
D_jD_iF_2 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2D_{21}F_2\left(D\theta_2\right)^2D_iP_iD_jP_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2F_2D^2\theta_2D_iP_iD_jP_j\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2F_2D\theta_2\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i + \mathbb{1}_{i\neq j}D_iP_iD_jP_j\right)\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2D_1F_2D\theta_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=2}\left(D_2D_1F_2D\theta_2D_iP_i + D_i^2F_2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1D_1F_2 &= D_1^2P_1D\tilde{\theta}_2D_2F_2 + \left(D_1P_1\right)^2D^2\tilde{\theta}_2D_2F_2 + D_1P_1D\tilde{\theta}_2D_1D_2F_2 + \left(D_1P_1\right)^2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_2^2F_2 + D_1P_1D\tilde{\theta}_2D_1D_2F_2\\
D_2D_1F_2 &= 0\\
D_3D_1F_2 &= D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_3P_1D_1P_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1\\
D_4D_1F_2 &= D_1D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_4P_2D_1P_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2\\
D_1D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1\\
D_2D_3F_3 &= 0\\
D_3D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_2F_2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2D^2\tilde{\theta}_2 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3^2\hat{P}_1\\
D_4D_3F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2\\
D_1D_4F_2 &= D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_1D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1\\
D_2D_4F_2 &= 0\\
D_3D_4F_2 &= D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1\\
D_4D_4F_2 &= D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4^2\hat{P}_2 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2
\end{aligned}$$

para $\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_2\right), w_2\right)$

$$D_i\hat{F}_1 = \mathbb{1}_{i\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=4}D_i\hat{F}_1,$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_1\hat{F}_1 &= D\hat{\theta}_1 D_1^2 P_1 D_1\hat{F}_1 + (D_1P_1)^2 D^2\hat{\theta}_1 D_1\hat{F}_1 + (D_1P_1)^2 \left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1^2\hat{F}_1 \\
D_2D_1\hat{F}_1 &= D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_2P_2D^2\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_2P_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1^2\hat{\theta}_1 \\
D_3D_1\hat{F}_1 &= 0 \\
D_4D_1\hat{F}_1 &= D_1P_1D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_4\hat{P}_2D^2\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D\hat{\theta}_1D_2D1\hat{F}_1 + D_1P_1D\hat{\theta}_1D_1D_1\hat{F}_1 \\
D_1D_2\hat{F}_1 &= D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_2P_2D^2\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_2P_2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1^2\hat{F}_1 \\
D_2D_2\hat{F}_1 &= D\hat{\theta}_1 D_2^2 P_2 D_1\hat{F}_1 + (D_2P_2)^2 D^2\hat{\theta}_1 D_1\hat{F}_1 + (D_2P_2)^2 \left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1^2\hat{F}_1 \\
D_3D_2\hat{F}_1 &= 0 \\
D_4D_2\hat{F}_1 &= D_2P_2D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D\hat{F}_1 + D_2P_2D_4\hat{P}_2D^2\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D\hat{\theta}_1D_2D_1\hat{F}_1 + D_2P_2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_4\hat{P}_2D_1^2\hat{F}_1 \\
D_1D_3\hat{F}_1 &= 0 \\
D_2D_3\hat{F}_1 &= 0 \\
D_3D_3\hat{F}_1 &= 0 \\
D_4D_3\hat{F}_1 &= 0 \\
D_1D_4\hat{F}_1 &= D_1P_1D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_4\hat{P}_2D^2\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D\hat{\theta}_1D_2D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_4\hat{P}_2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1D_1\hat{F}_1 \\
D_2D_4\hat{F}_1 &= D_2P_2D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D_4\hat{P}_2D^2\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D\hat{\theta}_1D_2D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D_4\hat{P}_2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1^2\hat{F}_1 \\
D_3D_4\hat{F}_1 &= 0 \\
D_4D_4\hat{F}_1 &= D_2D_2\hat{F}_1 + D\hat{\theta}_1D_4^2\hat{P}_2D_1\hat{F}_1 + \left(D_4\hat{P}_2\right)^2 D^2\hat{\theta}_1D_1\hat{F}_1 + D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_2D_1\hat{F}_1 \\
&+ D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1D_2D_1\hat{F}_1 + \left(D_4\hat{P}_2\right)^2 D\hat{\theta}_1D\hat{\theta}_1D_1^2\hat{F}_1
\end{aligned}
$$

finalmente, para $\hat{F}_2\left(w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_1\right)\right)$

$$D_i\hat{F}_2 = 1\!\!1_{i\neq 4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i + 1\!\!1_{i=3}D_i\hat{F}_2,$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_1\hat{F}_2 &= D_1\hat{\theta}_2D_2^2P_1D_2\hat{F}_2+(D_1P_1)^2D_1^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+(D_1P_1)^2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_1^2\hat{F}_2\\
D_2D_1\hat{F}_2 &= D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_2P_2D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_2P_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2^2\hat{F}_2\\
D_3D_1\hat{F}_2 &= D_1P_1D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_3\hat{P}_1D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_3\hat{P}_1\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2^2\hat{F}_2+D_1P_1D\hat{\theta}_2D_1D_2\hat{F}_2\\
D_4D_1\hat{F}_2 &= 0\\
D_1D_2\hat{F}_2 &= D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_2P_2D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_2P_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2D_2\hat{F}_2\\
D_2D_2\hat{F}_2 &= D\hat{\theta}_2D_2^2P_2D_2\hat{F}_2+(D_2P_2)^2D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+(D_2P_2)^2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2^2\hat{F}_2\\
D_3D_2\hat{F}_2 &= D_2P_2D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_2P_2D_3\hat{P}_1D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_2P_2D_3\hat{P}_1\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2^2\hat{F}_2+D_2P_2D\hat{\theta}_2D_1D_2\hat{F}_2\\
D_4D_2\hat{F}_2 &= 0\\
D_1D_3\hat{F}_2 &= D_1P_1D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_3\hat{P}_1D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_3\hat{P}_1\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D\hat{\theta}_2D_2D_1\hat{F}_2\\
D_2D_3\hat{F}_2 &= D_2P_2D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_2P_2D_3\hat{P}_1D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_2P_2D_3\hat{P}_1\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2^2\hat{F}_2+D_2P_2D\hat{\theta}_2D_1D_2\hat{F}_2\\
D_3D_3\hat{F}_2 &= D_3^2\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+\left(D_3\hat{P}_1\right)^2D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_1D_2\hat{F}_2+\left(D_3\hat{P}_1\right)^2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2^2\hat{F}_2\\
&+ D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_1D_2\hat{F}_2+D_1^2\hat{F}_2\\
D_4D_3\hat{F}_2 &= 0\\
D_1D_4\hat{F}_2 &= 0\\
D_2D_4\hat{F}_2 &= 0\\
D_3D_4\hat{F}_2 &= 0\\
D_4D_4\hat{F}_2 &= 0
\end{aligned}
$$

33.28. Teoría General

33.28.1. Ecuaciones Recursivas para la RSVC

Recordemos las ecuaciones recursivas que modelan la RSVC:

$$
\begin{aligned}
F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) &= R_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1),\\
F_1(z_1,z_2,w_1,w_2) &= R_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2),\\
\hat{F}_2(z_1,z_2,w_1,w_2) &= \hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right),\\
\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1,w_2) &= \hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right),
\end{aligned}
$$

donde :

$$
R_i(\mathbf{z},\mathbf{w})=R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.28.1}
$$

con

$$D_iR_i = DR_iD_iP_i \tag{33.28.2}$$

y convenciones:

$$D_2P_2 \equiv D_2\tilde{P}_2, \quad D_3P_3 \equiv D_3\hat{P}_1, \quad D_4P_4 \equiv D_4\hat{P}_2,$$

También recordemos que $F_{1,2}(z_1;\zeta_2)\,F_{2,2}(z_2;\zeta_2) = F_2(z_1,z_2;\zeta_2)$*, entonces*

$$D_1F_2(z_1,z_2;\zeta_2) = D_1\left[F_{1,2}(z_1;\zeta_2)\,F_{2,2}(z_2;\zeta_2)\right] = F_{2,2}(z_2;\zeta_2)\,D_1F_{1,2}(z_1;\zeta_2) = F_{1,2}^{(1)}(1)$$

es decir, $D_1F_2 = F_{1,2}^{(1)}(1)$*;* $D_2F_2 = F_{2,2}^{(1)}(1)$*, mientras que* $D_3F_2 = D_4F_2 = 0$*, es decir,*

$$D_iF_j = \mathbb{1}_{i\leq 2}F_{i,j}^{(1)}(1), \quad y \quad D_i\hat{F}_j = \mathbb{1}_{i\geq 2}F_{i,j}^{(1)}(1)$$

$D_4F_1 = D_1F_1D\theta_1D_4\hat{P}_2 + D_4\hat{F}_1$*, en términos generales:*

$$\begin{array}{ll} D_iF_1 = \mathbb{1}_{i\neq 1}D_1F_1D\theta_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=2}D_iF_1, & D_iF_2 = \mathbb{1}_{i\neq 2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=1}D_iF_2 \\ D_i\hat{F}_1 = \mathbb{1}_{i\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=4}D_i\hat{F}_1, & D_i\hat{F}_2 = \mathbb{1}_{i\neq 4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=3}D_i\hat{F}_2. \end{array}$$

$$D_iF_1 = \mathbb{1}_{i\neq 1}D_1F_1D\theta_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=2}D_iF_1, \tag{33.28.3}$$
$$D_iF_2 = \mathbb{1}_{i\neq 2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=1}D_iF_2 \tag{33.28.4}$$
$$D_i\hat{F}_1 = \mathbb{1}_{i\neq 3}D_3\hat{F}_1D\hat{\theta}_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=4}D_i\hat{F}_1, \tag{33.28.5}$$
$$D_i\hat{F}_2 = \mathbb{1}_{i\neq 4}D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=3}D_i\hat{F}_2. \tag{33.28.6}$$

Hagamos lo correspondiente para las longitudes de las colas de la RSVC utilizando las expresiones obtenidas en las secciones anteriores, recordemos que

$$\mathbf{F}_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right) = F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right), z_2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1)$$

entonces

$$\begin{aligned} D_1\mathbf{F}_1 &= 0 \\ D_2\mathbf{F}_1 &= f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2 + f_1(2) \\ D_3\mathbf{F}_1 &= f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}_{1,1}^{(1)}(1) \\ D_4\mathbf{F}_1 &= f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) \end{aligned}$$

para τ_2*:*

$$\mathbf{F}_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right), w_1, w_2\right) = F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} D_1\mathbf{F}_2 &= f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\mu_1 + f_2(1) \\ D_2\mathbf{F}_2 &= 0 \\ D_3\mathbf{F}_2 &= f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) \\ D_4\mathbf{F}_2 &= f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) \end{aligned}$$

Ahora para el segundo sistema

$$\hat{\mathbf{F}}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)=F_1\left(z_1,z_2;\zeta_1\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)$$

entonces

$$\begin{aligned}
D_1\hat{\mathbf{F}}_1 &= \hat{f}_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1+F_{1,1}^{(1)}\left(1\right)\\
D_2\hat{\mathbf{F}}_1 &= \hat{f}_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2+F_{2,1}^{(1)}\left(1\right)\\
D_3\hat{\mathbf{F}}_1 &= 0\\
D_4\hat{\mathbf{F}}_1 &= \hat{f}_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2+\hat{f}_1\left(2\right)
\end{aligned}$$

Finalmente para ζ_2

$$\hat{\mathbf{F}}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right) \quad = \quad F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right]$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
D_1\hat{\mathbf{F}}_2 &= \hat{f}_2\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1+F_{1,2}^{(1)}\left(1\right)\\
D_2\hat{\mathbf{F}}_2 &= \hat{f}_2\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2+F_{2,2}^{(1)}\left(1\right)\\
D_3\hat{\mathbf{F}}_2 &= \hat{f}_2\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1+\hat{f}_2\left(1\right)\\
D_4\hat{\mathbf{F}}_2 &= 0
\end{aligned}$$

Entonces, de todo lo desarrollado hasta ahora se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{F}_1=R_2F_2\hat{F}_2, & D_i\mathbf{F}_1=D_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq3}\hat{F}_2\right)\\
\mathbf{F}_2=R_1F_1\hat{F}_1, & D_i\mathbf{F}_2=D_i\left(R_1+F_1+\mathbb{1}_{i\geq3}\hat{F}_1\right)\\
\hat{\mathbf{F}}_1=\hat{R}_2\hat{F}_2F_2, & D_i\hat{\mathbf{F}}_1=D_i\left(\hat{R}_2+\hat{F}_2+\mathbb{1}_{i\leq2}F_2\right)\\
\hat{\mathbf{F}}_2=\hat{R}_1\hat{F}_1F_1, & D_i\hat{\mathbf{F}}_2=D_i\left(\hat{R}_1+\hat{F}_1+\mathbb{1}_{i\leq2}F_1\right)
\end{array} \tag{33.28.7}$$

33.28.2. Derivadas de Orden Superior

$$\begin{aligned}
D_kD_iF_1 &= D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq3}\hat{F}_4\right)+D_iR_2D_k\left(F_2+\mathbb{1}_{k\geq3}\hat{F}_4\right)+D_iF_2D_k\left(R_2+\mathbb{1}_{k\geq3}\hat{F}_4\right)+\mathbb{1}_{i\geq3}D_i\hat{F}_4D_k\left(R+F\right.\\
D_kD_iF_2 &= D_kD_i\left(R_1+F_1+\mathbb{1}_{i\geq3}\hat{F}_3\right)+D_iR_1D_k\left(F_1+\mathbb{1}_{k\geq3}\hat{F}_3\right)+D_iF_1D_k\left(R_1+\mathbb{1}_{k\geq3}\hat{F}_3\right)+\mathbb{1}_{i\geq3}D_i\hat{F}_3D_k\left(R_1+\right.\\
D_kD_i\hat{F}_3 &= D_kD_i\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{i\leq2}F_2+\hat{F}_4\right)+D_i\hat{R}_4D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq2}F_2+\hat{F}_4\right)+D_i\hat{F}_4D_k\left(\hat{R}_4+\mathbb{1}_{k\leq2}F_2\right)+\mathbb{1}_{i\leq2}D_iF_2D_k\left(\hat{R}_4+\right.\\
D_kD_i\hat{F}_4 &= D_kD_i\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{i\leq2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{R}_3D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq2}F_1+\hat{F}_3\right)+D_i\hat{F}_3D_k\left(\hat{R}_3+\mathbb{1}_{k\leq2}F_1\right)+\mathbb{1}_{i\leq2}D_iF_1D_k\left(\hat{R}_3+\right.
\end{aligned}$$

para $i,k=1,\ldots,4$. *Es necesario determinar las derivadas de segundo orden para las expresiones de la forma* $D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq3}\hat{F}_4\right)$

A saber, $R_i\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)=R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)$, *la denotaremos por la expresión* $R_i=R_i\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right)$, *donde al igual que antes, utilizando la notación dada en [24] se tiene que*

$$D_iD_iR_k = D^2R_k\left(D_iP_i\right)^2 + DR_kD_iD_iP_i \tag{33.28.8}$$

mientras que para $i \neq j$

$$D_iD_jR_k = D^2R_kD_iP_iD_jP_j + DR_kD_jP_jD_iP_i \tag{33.28.9}$$

Recordemos la expresión $F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right), z_2\right)$, que denotaremos por $F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right), z_2\right)$, entonces las derivadas parciales mixtas son:

$$D_iF_1 = \mathbb{1}_{i\geq 2}D_iF_1D\theta_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=2}D_iF_1,$$

entonces para $F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\hat{P}_1\hat{P}_2\right), z_2\right)$

$$D_2F_1 = D_1F_1D_1\theta_1D_2\tilde{P}_2\left\{\hat{P}_1\hat{P}_2\right\} + D_2F_1$$

$$\begin{array}{rcl}
D_jD_iF_1 & = & \mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1D_1F_1\left(D\theta_1\right)^2D_iP_iD_jP_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D^2\theta_1D_iP_iD_jP_j \\
 & + & \mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D\theta_1\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i + \mathbb{1}_{i\neq j}D_iP_iD_jP_j\right) \\
 & + & \mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1D_2F_1D\theta_1D_iP_i + \mathbb{1}_{i=2}\left(D_1D_2F_1D\theta_1D_iP_i + D_i^2F_1\right)
\end{array}$$

Para $F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1\hat{P}_1\hat{P}_2\right)\right)$

$$D_iF_2 = \mathbb{1}_{i\neq 2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=1}D_iF_2,$$

$$\begin{array}{rcl}
D_jD_iF_2 & = & \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2D_{21}F_2\left(D\theta_2\right)^2D_iP_iD_jP_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2F_2D^2\theta_2D_iP_iD_jP_j \\
 & + & \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2F_2D\theta_2\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2P_i + \mathbb{1}_{i\neq j}D_iP_iD_jP_j\right) \\
 & + & \mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2D_1F_2D\theta_2D_iP_i + \mathbb{1}_{i=2}\left(D_2D_1F_2D\theta_2D_iP_i + D_i^2F_2\right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
D_1D_1F_2 & = & D_1^2P_1D\tilde{\theta}_2D_2F_2 + \left(D_1P_1\right)^2D^2\tilde{\theta}_2D_2F_2 + D_1P_1D\tilde{\theta}_2D_1D_2F_2 + \left(D_1P_1\right)^2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_2^2F_2 + D_1P_1D\tilde{\theta}_2D_1D_2F_2 \\
D_2D_1F_2 & = & 0 \\
D_3D_1F_2 & = & D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_3P_1D_1P_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1 \\
D_4D_1F_2 & = & D_1D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_4P_2D_1P_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2 \\
D_1D_3F_2 & = & D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_1P_1 \\
D_2D_3F_3 & = & 0 \\
D_3D_3F_2 & = & D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2 + D_2F_2\left(D_3\hat{P}_1\right)^2D^2\tilde{\theta}_2 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3^2\hat{P}_1 \\
D_4D_3F_2 & = & D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_3\hat{P}_1D_4\hat{P}_2 \\
D_1D_4F_2 & = & D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_1D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_1P_1D_4\hat{P}_2 + D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_1P_1 \\
D_2D_4F_2 & = & 0 \\
D_3D_4F_2 & = & D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_4\hat{P}_2D_3\hat{P}_1 \\
D_4D_4F_2 & = & D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_4^2\hat{P}_2 + D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2 + D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2\left(D_4\hat{P}_2\right)^2
\end{array}$$

para $\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_2\right), w_2\right)$

$$D_i\hat{F}_1 = 1\!\!1_{i\neq 3}D_3\hat{F}_1 D\hat{\theta}_1 D_i P_i + 1\!\!1_{i=4}D_i\hat{F}_1,$$

$$\begin{aligned}
D_1D_1\hat{F}_1 &= D\hat{\theta}_1 D_1^2 P_1 D_1\hat{F}_1 + (D_1P_1)^2 D^2\hat{\theta}_1 D_1\hat{F}_1 + (D_1P_1)^2 \left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1^2\hat{F}_1\\
D_2D_1\hat{F}_1 &= D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_1 D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_2P_2D^2\hat{\theta}_1 D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_2P_1\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1^2\hat{\theta}_1\\
D_3D_1\hat{F}_1 &= 0\\
D_4D_1\hat{F}_1 &= D_1P_1D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1 D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_4\hat{P}_2D^2\hat{\theta}_1 D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D\hat{\theta}_1 D_2D1\hat{F}_1 + D_1P_1D\hat{\theta}_1 D_1D_1\hat{F}_1\\
D_1D_2\hat{F}_1 &= D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_1 D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_2P_2D^2\hat{\theta}_1 D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_2P_2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1^2\hat{F}_1\\
D_2D_2\hat{F}_1 &= D\hat{\theta}_1 D_2^2 P_2 D_1\hat{F}_1 + (D_2P_2)^2 D^2\hat{\theta}_1 D_1\hat{F}_1 + (D_2P_2)^2 \left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1^2\hat{F}_1\\
D_3D_2\hat{F}_1 &= 0\\
D_4D_2\hat{F}_1 &= D_2P_2D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1 D\hat{F}_1 + D_2P_2D_4\hat{P}_2D^2\hat{\theta}_1 D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D\hat{\theta}_1 D_2D_1\hat{F}_1 + D_2P_2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_4\hat{P}_2D_1^2\hat{F}_1\\
D_1D_3\hat{F}_1 &= 0\\
D_2D_3\hat{F}_1 &= 0\\
D_3D_3\hat{F}_1 &= 0\\
D_4D_3\hat{F}_1 &= 0\\
D_1D_4\hat{F}_1 &= D_1P_1D_4\hat{F}_2D\hat{\theta}_1 D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_4\hat{P}_2D^2\hat{\theta}_1 D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D\hat{\theta}_1 D_2D_1\hat{F}_1 + D_1P_1D_4\hat{P}_2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1D_1\hat{F}_1\\
D_2D_4\hat{F}_1 &= D_2P_2D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1 D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D_4\hat{P}_2D^2\hat{\theta}_1 D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D\hat{\theta}_1 D_2D_1\hat{F}_1 + D_2P_2D_4\hat{P}_2\left(D\hat{\theta}_1\right)^2 D_1^2\hat{F}_1\\
D_3D_4\hat{F}_1 &= 0\\
D_4D_4\hat{F}_1 &= D_2D_2\hat{F}_1 + D\hat{\theta}_1 D_4^2\hat{P}_2 D_1\hat{F}_1 + \left(D_4\hat{P}_2\right)^2 D^2\hat{\theta}_1 D_1\hat{F}_1 + D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1 D_2D_1\hat{F}_1\\
&+ D_4\hat{P}_2D\hat{\theta}_1 D_2D_1\hat{F}_1 + \left(D_4\hat{P}_2\right)^2 D\hat{\theta}_1 D\hat{\theta}_1 D_1^2\hat{F}_1
\end{aligned}$$

finalmente, para $\hat{F}_2\left(w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1\tilde{P}_2\hat{P}_1\right)\right)$

$$D_i\hat{F}_2 = 1\!\!1_{i\neq 4}D_4\hat{F}_2 D\hat{\theta}_2 D_i P_i + 1\!\!1_{i=3}D_i\hat{F}_2,$$

$$\begin{aligned}
D_1D_1\hat{F}_2 &= D_1\hat{\theta}_2D_2^2P_1D_2\hat{F}_2+\left(D_1P_1\right)^2D_1^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+\left(D_1P_1\right)^2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_1^2\hat{F}_2\\
D_2D_1\hat{F}_2 &= D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_2P_2D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_2P_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2^2\hat{F}_2\\
D_3D_1\hat{F}_2 &= D_1P_1D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_3\hat{P}_1D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_3\hat{P}_1\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2^2\hat{F}_2+D_1P_1D\hat{\theta}_2D_1D_2\hat{F}_2\\
D_4D_1\hat{F}_2 &= 0\\
D_1D_2\hat{F}_2 &= D_1P_1D_2P_2D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_2P_2D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_2P_2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2D_2\hat{F}_2\\
D_2D_2\hat{F}_2 &= D\hat{\theta}_2D_2^2P_2D_2\hat{F}_2+\left(D_2P_2\right)^2D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+\left(D_2P_2\right)^2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2^2\hat{F}_2\\
D_3D_2\hat{F}_2 &= D_2P_2D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_2P_2D_3\hat{P}_1D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_2P_2D_3\hat{P}_1\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2^2\hat{F}_2+D_2P_2D\hat{\theta}_2D_1D_2\hat{F}_2\\
D_4D_2\hat{F}_2 &= 0\\
D_1D_3\hat{F}_2 &= D_1P_1D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_3\hat{P}_1D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D_3\hat{P}_1\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2D_2\hat{F}_2+D_1P_1D\hat{\theta}_2D_2D_1\hat{F}_2\\
D_2D_3\hat{F}_2 &= D_2P_2D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_2P_2D_3\hat{P}_1D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_2P_2D_3\hat{P}_1\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2^2\hat{F}_2+D_2P_2D\hat{\theta}_2D_1D_2\hat{F}_2\\
D_3D_3\hat{F}_2 &= D_3^2\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+\left(D_3\hat{P}_1\right)^2D^2\hat{\theta}_2D_2\hat{F}_2+D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_1D_2\hat{F}_2+\left(D_3\hat{P}_1\right)^2\left(D\hat{\theta}_2\right)^2D_2^2\hat{F}_2\\
&+ D_3\hat{P}_1D\hat{\theta}_2D_1D_2\hat{F}_2+D_1^2\hat{F}_2\\
D_4D_3\hat{F}_2 &= 0\\
D_1D_4\hat{F}_2 &= 0\\
D_2D_4\hat{F}_2 &= 0\\
D_3D_4\hat{F}_2 &= 0\\
D_4D_4\hat{F}_2 &= 0
\end{aligned}$$

33.29. Ejemplos Particulares

33.29.1. Automatización en dos líneas de trabajo

Las ecuaciones recursivas son

$$\begin{aligned}
F_1\left(z_1,w_1,w_2\right) &= R_1\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F\left(\tilde{\theta}_2\left(\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2;\tau\right),\\
\hat{F}_1\left(z_1,w_1,w_2\right) &= \hat{R}_2\left(\tilde{P}_1\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F\left(z_1;\zeta_2\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right),\\
\hat{F}_2\left(z_1,w_1,w_2\right) &= \hat{R}_1\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F\left(z_1;\zeta_1\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right),
\end{aligned}$$

De la primera ecuación

$$F_1\left(z_1,w_1,w_2\right) = R\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F\left(\tilde{\theta}_2\left(\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2;\tau\right),$$

se desprende
$D_1R_1=r_1\tilde{\mu}_1$
Entonces

$$f_1(1) = r_1\mu_1, \qquad f_1(3) = r_1\hat{\mu}_1 + f_1(1)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1)$$
$$f_1(4) = r_1\hat{\mu}_2 + f_1(1)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1), \qquad \hat{f}_1(1) = \hat{r}_2\mu_1 + \hat{F}^{(1)}_{1,2}(1) + \hat{f}_2(1)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\mu_1$$
$$\hat{f}_1(3) = \hat{r}_2\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(2)\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(1), \qquad \hat{f}_1(4) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2$$
$$\hat{f}_2(1) = \hat{r}_1\mu_1 + \hat{F}^{(1)}_{1,1}(1) + \hat{f}_1(1)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\mu_1, \qquad \hat{f}_1(3) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1$$
$$\hat{f}_1(4) = \hat{r}_1\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(1)\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{\mu}_1 + \hat{f}_1(2)$$

33.29.2. Sistema de Salud Pública

Las ecuaciones recursivas son de la forma

$$F_1(z_1,z_2,w_1) = R_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)\hat{F}_2(w_1;\tau_2),$$

$$F_2(z_1,z_2,w_1) = R_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)F_1\left(\theta_1\left(\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1;\tau_1),$$

$$\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1) = \hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right),$$

33.29.3. RSVC con dos conexiones

Cuyas ecuaciones recursivas son de la forma

$$F_1(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2),$$

$$F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_1\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1),$$

$$\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1,w_2) = \hat{R}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right),$$

$$\hat{F}_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = \hat{R}_1\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right),$$

33.30. Preliminaries:

Consider a Network consisting in two cyclic polling systems with two queues each other, Q_1, Q_2 for the first system and $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ for the second one, each with infinite-sized buffer. In each system a single server visits the queues in cyclic order, where he applies the exhaustive policy, i.e., when the server polls a queue, he serves all the customers present until the queue becomes empty.

At the second system the customers at queue 2 moves to the first system's queue 2, we assume that the network is open; that is, all customers eventually leave the network. As usually in Polling Systems Theory we assume the arrivals in each queue the arrival processes are Poisson whit i.i.d. interarrival times, their service times are also i.i.d. and finally upon completion of a visit at any queue, the servers incurs in a random switchover time according to an arbitray distribution. We define a cycle to be the time interval between two consecutive polling instants, the time period in a cycle during which the server is serving a queue is called a service period. The queues are attended in cyclic order.

Time is slotted with slot size equal to the service time of a fixed costumer, we call the time interval $[t, t+1]$ the t-th slot. The arrival processes are denoted by $X_1(t), X_2(t)$ for the first system and

$\hat{X}_1(t)$,$\hat{X}_2(t)$ for the second, the arrival rate at Q_i and $\hat{Q}_i$ is denoted by μ_i and $\hat{\mu}_i$ respectively, with the condition $\mu_i < 1$ and $\hat{\mu}_i < 1$. The users arrives in a independent form at each of the queues. We define the process Y_2 to consider the costumers who pass from system 2, to system 1, with arrival rate $\check{\mu}_2$. The service time customers of queue i is a random variable τ_i with process defined by S_i. In similar manner the switchover period following the service of queue i is an independent random variable R_i with general distribution. To determine the length of the queues, i.e., the number of users in the queue at the moment the server arrives we define the process L_i and $\hat{L}_i$ for the first and second system respectively. In the sequel, we use the buffer occupancy method to obtain the generating function, first and second moments of queue size distributions at polling instants. At each of the queues in the network the number of users is the number of users at the time the server arrives plus the numbers of arrivals during the service time. In order to obtain the joint probability generating function (PGF) for the number or users residing in queue i when the queue is polled in the NCPS, we define for each of the arrival processes $X_i, \hat{X}_i$, $i = 1, 2$, Y_2 and $\tilde{X}_2$ with $\tilde{X}_2 = X_2 + Y_2$, their PGF $P_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_i^{X_i(t)}\right], \hat{P}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\hat{X}_i(t)}\right]$, for $i = 1, 2$, and $\check{P}_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{Y_2(t)}\right], \tilde{P}_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{\tilde{X}_2(t)}\right]$, with first moment given by $\mu_i = \mathbb{E}[X_i(t)] = P_i^{(1)}(1), \hat{\mu}_i = \mathbb{E}\left[\hat{X}_i(t)\right] = \hat{P}_i^{(1)}(1)$, for $i = 1, 2$, while $\check{\mu}_2 = \mathbb{E}[Y_2(t)] = \check{P}_2^{(1)}(1), \tilde{\mu}_2 = \mathbb{E}\left[\tilde{X}_2(t)\right] = \tilde{P}_2^{(1)}(1)$. The PGF For the service time is defined by: $S_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_i^{\overline{\tau}_i - \tau_i}\right]$ y $\hat{S}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\overline{\zeta}_i - \zeta_i}\right]$, with first moment $s_i = \mathbb{E}[\overline{\tau}_i - \tau_i]$ y $\hat{s}_i = \mathbb{E}\left[\overline{\zeta}_i - \zeta_i\right]$, for $i = 1, 2$. In a similar manner the PGF for the switchover time of the server from the moment it ends to attend a queue to the time of arrival to the next queue are given by $R_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_1^{\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i}\right]$ and $\hat{R}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i}\right]$ with first moment $r_i = R_i^{(1)}(1) = \mathbb{E}[\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i]$ and $\hat{r}_i = \hat{R}_i^{(1)}(1) = \mathbb{E}\left[\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i\right]$ with $i = 1, 2$. The number of users in the queue at time $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$, it's zero, i.e., $L_i(\overline{\tau_i}) = 0$, and $\hat{L}_i(\overline{\zeta_i}) = 0$ for $i = 1, 2$. Then the number of users in the queue of the second system at the moment the server ends attending in the queue is given by the number of users present at the moment it arrives plus the number of arrivals during the service time, i.e., $\hat{L}_i(\overline{\tau}_j) = \hat{L}_i(\tau_j) + \hat{X}_i(\overline{\tau}_j - \tau_j)$, for $i, j = 1, 2$, meanwhile for the first system : $L_1(\overline{\tau}_j) = L_1(\tau_j) + X_1(\overline{\tau}_j - \tau_j)$. Specifically for the second queue of the first system we need to consider the users of transfer becoming from the second queue in the second system while the server it's in the other queue attending, it means that this users have been aready attended by the server before they can go to the first system:

$$L_2(\overline{\tau}_1) = L_2(\tau_1) + X_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1) + Y_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1). \tag{33.30.1}$$

As is know the gambler's ruin problem can be used to model the server's busy period in a Cyclic Polling System, so let $\tilde{L}_0 \geq 0$ the number of users present at the moment the server arrives to start serving, also let T be the time the server need to attend the users in the queue starting with $\tilde{L}_0$ users. Suppose the gambler has two simultaneous, independent and simultaneous moves, such events are independent and identical to each other for each realization. The gain on the n-th game is $\tilde{X}_n = X_n + Y_n$ units from which is substracted a playing fee of 1 unit for each move. His PGF is given by $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{L}_0}\right]$, futhermore

$$\tilde{P}(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{X}_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n + Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n} z^{Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right]\mathbb{E}\left[z^{Y_n}\right] = P(z)\check{P}(z),$$

with $\tilde{\mu} = \mathbb{E}\left[\tilde{X}_n\right] = \tilde{P}[z] < 1$. If $\tilde{L}_n$ denotes the capital remaining after the n-th game, then

$$\tilde{L}_n = \tilde{L}_0 + \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \cdots + \tilde{X}_n - 2n.$$

The result that relates the gambler's ruin problem with the busy period of the serverit's a generalization of the result given in Takagi [42] chapter 3.

***Proposition** 33.31 Let's $G_n(z)$ and $G(z, w)$ defined as in (33.33.2), then*

$$G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z).$$

Futhermore

$$G(z, w) = \frac{zF(z) - wP(z)G(0, w)}{z - wR(z)},$$

with a unique pole in the unit circle, also the pole is of the form $z = \theta(w)$ and satisfies

i) $\tilde{\theta}(1) = 1$,

ii) $\tilde{\theta}^{(1)}(1) = \frac{1}{1-\tilde{\mu}}$,

iii) $\tilde{\theta}^{(2)}(1) = \frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2} + \frac{\tilde{\sigma}}{(1-\tilde{\mu})^3}$.

Finally the following satisfies $\mathbb{E}\left[w^T\right] = G(0,w) = F\left[\tilde{\theta}(w)\right]$.

Corollary *33.7 The first and second moments for the gambler's ruin are*

$$\mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{1-\tilde{\mu}}, \quad Var[T] = \frac{Var\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^3}.$$

In order to model the network of cyclic polling system it's necessary to define the arrival processes for the queues belonging to the system that the server doesn't correspond. In the case of the first system and the server arrive to a queue in the second one:$F_{i,j}(z_i;\zeta_j) = \mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\zeta_j)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[L_i(\zeta_j) = k\right] z_i^k$*for* $i,j = 1,2$. *For the second system and the server arrives to a queue in the first system* $\hat{F}_{i,j}(w_i;\tau_j) = \mathbb{E}\left[w_i^{\hat{L}_i(\tau_j)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\hat{L}_i(\tau_j) = k\right] w_i^k$ *for* $i,j = 1,2$. *With the developed we can define the joint PGF for the second system:*

$$\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_j)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_j)}\right] = \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_j)}\right]\mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2(\tau_j)}\right] = \hat{F}_{1,j}(w_1;\tau_j)\,\hat{F}_{2,j}(w_2;\tau_j) = \hat{F}_j(w_1,w_2;\tau_j).$$

In a similar manner we defin the joint PGF for the first system, and the second system's server

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_j)} z_2^{L_2(\zeta_j)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_j)}\right]\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\zeta_j)}\right] = F_{1,j}(z_1;\zeta_j)\,F_{2,j}(z_2;\zeta_j) = F_j(z_1,z_2;\zeta_j).$$

Now we proceed to determine the joint PGF for the times that the server visit each queue in each system, i.e., $t = \{\tau_1,\tau_2,\zeta_1,\zeta_2\}$*:*

$$F_j(z_1,z_2,w_1,w_2) = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{2} z_i^{L_i(\tau_j)} \prod_{i=1}^{2} w_i^{\hat{L}_i(\tau_j)}\right], \quad \hat{F}_j(z_1,z_2,w_1,w_2) = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{2} z_i^{L_i(\zeta_j)} \prod_{i=1}^{2} w_i^{\hat{L}_i(\zeta_j)}\right] \tag{33.30.2}$$

for $j = 1,2$. *Then with the purpose of find the number of users present in the netwotk when the server ends attending one of the queues in any of the systems*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right] &= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)+X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)+Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)} w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)+\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)+\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]
\end{aligned}$$

using the equation (34.4.1) we have

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)} z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)} z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)} w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)} w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)} w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right\}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)} z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)} w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)} w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]
\end{aligned}$$

applying the fact that the arrivals processes in the queues in each systems are independent:

$$= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)} z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)} w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)} w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]$$

given that the arrival processes in the queues are independent, it's possible to separate the expectation for the arrival processes in Q_1 *and* Q_2 *at time* τ_1*, which is the time the server visits* Q_1. *Considering* $\tilde{X}_2(z_2) = X_2(z_2) + Y_2(z_2)$ *we have*

$$
\begin{aligned}
= \quad & \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]=\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{\tilde{P}_2\left(z_2\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\hat{P}_1\left(w_1\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right.\right.\\
& \left.\left.\hat{P}_2\left(w_2\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]=\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right\}^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
= \quad & \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)^{L_1(\tau_1)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]=F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z2\right)\\
& \cdot\hat{F}_1\left(w_1,w_2;\tau_1\right)\equiv F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2,w_1,w_2\right).
\end{aligned}
$$

The last equalities are true because the number of arrivals to $\hat{Q}_2$ during the time interval $[\tau_1,\overline{\tau}_1]$ still haven't been attended by the server in the system 2, then the users can't pass to the first system through the queue Q_2. Therefore the number of users switching from $\hat{Q}_2$ to Q_2 during the time interval $[\tau_1,\overline{\tau}_1]$ depends on the policy of transfer between the two systems, according to the last section

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]=F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2,w_1,w_2\right)\\
& =F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2;\tau_1\right)
\end{aligned}
$$

Using reasoning similar for the rest of the server's arrival times we have that

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right] &= F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2;\tau_2\right)\\
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1\left(\overline{\zeta}_1\right)}z_2^{L_2\left(\overline{\zeta}_1\right)}w_1^{\hat{L}_1\left(\overline{\zeta}_1\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\overline{\zeta}_1\right)}\right] &= F_1\left(z_1,z_2;\zeta_1\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right),\\
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1\left(\overline{\zeta}_2\right)}z_2^{L_2\left(\overline{\zeta}_2\right)}w_1^{\hat{L}_1\left(\overline{\zeta}_2\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\overline{\zeta}_2\right)}\right] &= F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right).
\end{aligned}
$$

Now we are in conditions to obtain the recursive equations that model the NCPS we need to consider the switchover times that the server ocuppies to translate from one queue to another and, the number or user presents in the system at the time the server leaves to queue to start attending the next. Thus far developed, we can find that for the NCPS:

$$
\begin{aligned}
F_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) &= R_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^2\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2;\tau_1\right),\\
F_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) &= R_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^2\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2;\tau_2\right),\\
\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) &= \hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^2\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_1\left(z_1,z_2;\zeta_1\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right),\\
\hat{F}_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) &= \hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^2\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right).
\end{aligned}
\tag{33.30.3}
$$

33.31. Main Result and An Example

It's necessary to give an step ahead, considering the case illustrated in `Figure 1`*, where just like before, the server's switchover times are given by the generals equations $R_i\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)=R_i\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\tilde{P}_3\left(z_3\right)\tilde{P}_4\left(z_4\right)\right)$, with first order derivatives given by $D_iR_i=r_i\tilde{\mu}_i$, and second order partial derivatives $D_jD_iR_k=R_k^{(2)}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j+\mathbb{1}_{i=j}r_kP_i^{(2)}+\mathbb{1}_{i\neq j}r_k\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j$ for any i,j,k. According to the equations given before, the queue lengths for the other sytem's server times, we can obtain general expressions, so for $F_1\left(z_1,z_2;\tau_3\right)$, $F_2\left(z_1,z_2;\tau_4\right)$, $F_3\left(z_3,z_4;\tau_1\right)$ and $F_4\left(z_3,z_4;\tau_2\right)$, we can obtain general expressions,*

$$
D_jF_i\left(z_1,z_2;\tau_{i+2}\right)=\mathbb{1}_{j\leq 2}F_{j,i+2}^{(1)},\quad D_jF_i\left(z_3,z_4;\tau_{i-2}\right)=\mathbb{1}_{j\geq 3}F_{j,i-2}^{(1)},\tag{33.31.1}
$$

for $i=1,2,3,4$ and $j=1,2,3,4$. With second order derivatives given by

$$
\begin{aligned}
D_jD_iF_k\left(z_1,z_2;\tau_{k+2}\right) &= \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,k+2}^{(2)}+\mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,k-2}^{(1)}F_{i,k+2}^{(1)},\\
D_jD_iF_k\left(z_3,z_4;\tau_{k-2}\right) &= \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,k-2}^{(2)}+\mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,k-2}^{(1)}F_{i,k-2}^{(1)}.
\end{aligned}
\tag{33.31.2}
$$

According with the developed at the moment, we can get the recursive equations which are of the following form

$$\begin{aligned}
F_1(z_1,z_2,z_3,z_4) &= R_2\left(\prod_{i=1}^4 \tilde{P}_i(z_i)\right) F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_3(z_3)\tilde{P}_4(z_4)\right)\right) F_4(z_3,z_4;\tau_2),\\
F_2(z_1,z_2,z_3,z_4) &= R_1\left(\prod_{i=1}^4 \tilde{P}_i(z_i)\right) F_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\tilde{P}_3(z_3)\tilde{P}_4(z_4)\right), z_2\right) F_3(z_3,z_4;\tau_1),\\
F_3(z_1,z_2,z_3,z_4) &= R_4\left(\prod_{i=1}^4 \tilde{P}_i(z_i)\right) F_4\left(z_3, \tilde{\theta}_4\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\tilde{P}_3(z_3)\right)\right) F_2(z_1,z_2;\tau_4),\\
F_4(z_1,z_2,z_3,z_4) &= R_3\left(\prod_{i=1}^4 \tilde{P}_i(z_i)\right) F_3\left(\tilde{\theta}_3\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\tilde{P}_4(z_4)\right), z_4\right) F_1(z_1,z_2;\tau_3).
\end{aligned}\tag{33.31.3}$$

So we have the first theorem

Teorema 33.64 *Suppose $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2 < 1$, $\hat{\mu} = \tilde{\mu}_3 + \tilde{\mu}_4 < 1$, then the number of users en the queues conforming the network of cyclic polling system, (34.4.6), when the server visit a queue can be found solving the linear system given by equations (34.4.7) and (34.4.8),*

$$f_j(i) = r_{j+1}\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i\neq j+1} f_{j+1}(j+1)\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_{j+1}} + \mathbb{1}_{i=j} f_{j+1}(i) + \mathbb{1}_{j=1}\mathbb{1}_{i\geq 3}F^{(1)}_{i,j+1} + \mathbb{1}_{j=3}\mathbb{1}_{i\leq 2}F^{(1)}_{i,j+1} \tag{33.31.4}$$

$j = 1,3$ *and* $i = 1,2,3,4$.

$$f_j(i) = r_{j-1}\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i\neq j-1} f_{j-1}(j-1)\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_{j-1}} + \mathbb{1}_{i=j} f_{j-1}(i) + \mathbb{1}_{j=2}\mathbb{1}_{i\geq 3}F^{(1)}_{i,j-1} + \mathbb{1}_{j=4}\mathbb{1}_{i\leq 2}F^{(1)}_{i,j-1} \tag{33.31.5}$$

$j = 2,4$ *and* $i = 1,2,3,4$, *whose solutions are:*

$$\begin{aligned}
f_i(j) &= \left(\mathbb{1}_{j=i-1} + \mathbb{1}_{j=i+1}\right) r_j\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{i=j}\left(\mathbb{1}_{i\leq 2}\frac{r\tilde{\mu}_i(1-\tilde{\mu}_i)}{1-\tilde{\mu}} + \mathbb{1}_{i\geq 2}\frac{\hat{r}\tilde{\mu}_i(1-\tilde{\mu}_i)}{1-\hat{\mu}}\right) + \mathbb{1}_{i=1}\mathbb{1}_{j\geq 3}\left(\tilde{\mu}_j\left(r_{i+1} + \frac{r\tilde{\mu}_{i+1}}{1-\tilde{\mu}}\right)\right.\\
&\left. + F^{(1)}_{j,i+1}\right) + \mathbb{1}_{i=3}\mathbb{1}_{j\geq 3}\left(\tilde{\mu}_j\left(r_{i+1} + \frac{\hat{r}\tilde{\mu}_{i+1}}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{j,i+1}\right) + \mathbb{1}_{i=2}\mathbb{1}_{j\leq 2}\left(\tilde{\mu}_j\left(r_{i-1} + \frac{r\tilde{\mu}_{i-1}}{1-\tilde{\mu}}\right) + F^{(1)}_{j,i-1}\right)\\
&+ \mathbb{1}_{i=4}\mathbb{1}_{j\leq 2}\left(\tilde{\mu}_j\left(r_{i-1} + \frac{\hat{r}\tilde{\mu}_{i-1}}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{j,i-1}\right)
\end{aligned}\tag{33.31.6}$$

Teorema 33.65 *For the system given by (34.4.6) we have that the second moments are in their general form*

$$\begin{aligned}
f_1(i,k) &= D_kD_i\left(R_2 + F_2 + \mathbb{1}_{i\geq 3}F_4\right) + D_iR_2D_k\left(F_2 + \mathbb{1}_{k\geq 3}F_4\right) + D_iF_2D_k\left(R_2 + \mathbb{1}_{k\geq 3}F_4\right) + \mathbb{1}_{i\geq 3}D_iF_4D_k\left(R_2 + F_2\right)\\
f_2(i,k) &= D_kD_i\left(R_1 + F_1 + \mathbb{1}_{i\geq 3}F_3\right) + D_iR_1D_k\left(F_1 + \mathbb{1}_{k\geq 3}F_3\right) + D_iF_1D_k\left(R_1 + \mathbb{1}_{k\geq 3}F_3\right) + \mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\tilde{F}_3D_k\left(R_1 + F_1\right)\\
f_3(i,k) &= D_kD_i\left(\tilde{R}_4 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_2 + F_4\right) + D_i\tilde{R}_4D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2 + F_4\right) + D_iF_4D_k\left(R_4 + \mathbb{1}_{k\leq 2}F_2\right) + \mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_k\left(R_4 + F_4\right)\\
f_4(i,k) &= D_kD_i\left(R_3 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_1 + F_3\right) + D_iR_3D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1 + F_3\right) + D_iF_3D_k\left(R_3 + \mathbb{1}_{k\leq 2}F_1\right) + \mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_k\left(R_3 + F_3\right)
\end{aligned}\tag{33.3}$$

Corolario 33.5 *Conforming the equations given in (34.4.10) the second order moments are obtained solving the linear systems given by (34.5.2) and (33.34.4). These solutions are*

$$\begin{array}{lll}
f_1(1,1) = b_3, & f_2(2,2) = \frac{b_2}{1-b_1}, & f_1(1,3) = a_4\left(\frac{b_2}{1-b_1}\right) + a_5K_{12} + K_3,\\
f_1(1,4) = a_6\left(\frac{b_2}{1-b_1}\right) + a_7K_{12} + K_4, & f_1(3,3) = a_8\left(\frac{b_2}{1-b_1}\right) + K_8, & f_1(3,4) = a_9\left(\frac{b_2}{1-b_1}\right) + K_9\\
f_1(4,4) = a_{10}\left(\frac{b_2}{1-b_1}\right) + a_5K_{12} + K_{10}, & f_2(2,3) = a_{14}b_3 + a_{15}K_2 + K_{16}, & f_2(2,4) = a_{16}b_3 + a_{17}K_2 + K_{17},\\
f_2(3,3) = a_{18}b_3 + K_{18}, & f_2(3,4) = a_{19}b_3 + K_{19}, & f_2(4,4) = a_{20}b_3 + K_{20}\\
f_3(3,3) = \frac{b_5}{1-b_4}, & f_4(2,2) = b_6, & f_3(1,1) = a_{21}b_6 + K_{21},\\
f_3(1,2) = a_{22}b_6 + K_{22}, & f_3(1,3) = a_{23}b_6 + a_{24}K_{39} + K_{23}, & f_3(2,2) = a_{25}b_6 + K_{25}\\
f_3(2,3) = a_{26}b_6 + a_{27}K_{39} + K_{26}, & f_4(1,1) = a_{31}\left(\frac{b_5}{1-b_4}\right) + K_{31}, & f_4(1,2) = a_{32}\left(\frac{b_5}{1-b_4}\right) + K_{32},\\
f_4(1,4) = a_{33}\left(\frac{b_5}{1-b_4}\right) + a_{34}K_{29} + K_{31}, & f_4(2,2) = a_{35}\left(\frac{b_5}{1-b_4}\right) + K_{35}, & f_4(2,4) = a_{36}\left(\frac{b_5}{1-b_4}\right) + a_{37}K_{29} + K_{37}
\end{array}\tag{33.3}$$

where

$$\begin{array}{lll}
N_1 = a_2K_{12} + a_3K_{11} + K_1, & N_2 = a_{12}K_2 + a_{13}K_5 + K_{15}, & b_1 = a_1a_{11}\\
b_2 = a_{11}N_1 + N_2, & b_3 = a_1\left(\frac{b_2}{1-b_1}\right) + N_1, & N_3 = a_{29}K_{39} + a_{30}K_{38} + K_{28}\\
N_4 = a_{39}K_{29} + a_{40}K_{30} + K_{40}, & b_4 = a_{28}a_{38}, & b_5 = a_{28}N_4 + N_3\\
 & b_6 = a_{38}\left(\frac{b_5}{1-b_4}\right) + N_4 &
\end{array}$$

the values for the a_i's and K_i can be found in Appendix B in equations (33.34.5, 34.5.4, 33.34.7, 33.34.8) and (33.34.9).

33.32. Concluding Remarks

Using a similar reasoning it's possible to find de first and second moments for the queue lengths of the CPSN. We have the following theorem

Teorema 33.66 *Given a CPSN attended by a single server who attends conforming to the gated policy and suppose $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2 < 1$, $\hat{\mu} = \tilde{\mu}_3 + \tilde{\mu}_4 < 1$, then the number of users en the queues conforming the network of cyclic polling system, when the server visit a queue can be found solving the linear system given by equations (33.32.1) and (33.32.2),*

$$f_j(i) = r_{j+1}\tilde{\mu}_i + f_{j+1}(j+1)\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i=j} f_{j+1}(i) + \mathbb{1}_{j=1}\mathbb{1}_{i\geq 3} F^{(1)}_{i,j+1} + \mathbb{1}_{j=3}\mathbb{1}_{i\leq 2} F^{(1)}_{i,j+1} \quad (33.32.1)$$

for $j = 1, 3$ and $i = 1, 2, 3, 4$.

$$f_j(i) = r_{j-1}\tilde{\mu}_i + f_{j-1}(j-1)\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i=j} f_{j-1}(i) + \mathbb{1}_{j=2}\mathbb{1}_{i\geq 3} F^{(1)}_{i,j-1} + \mathbb{1}_{j=4}\mathbb{1}_{i\leq 2} F^{(1)}_{i,j-1} \quad (33.32.2)$$

for $j = 2, 4$ and $i = 1, 2, 3, 4$, whose solutions are of he form

$$\begin{aligned} f_i(j) = {} & \mathbb{1}_{i=j}\left(\mathbb{1}_{i\leq 2}\frac{r\tilde{\mu}_i(1-\tilde{\mu}_i)}{1-\tilde{\mu}} + \mathbb{1}_{i\geq 3}\frac{\hat{r}\tilde{\mu}_i(1-\tilde{\mu}_i)}{1-\hat{\mu}}\right) + \mathbb{1}_{i=1,3}\left(\tilde{\mu}_j \frac{r_{i+1}(1-\tilde{\mu}_i)+r_i\tilde{\mu}_{i+1}}{1-\mathbb{1}_{i=1}\tilde{\mu}-\mathbb{1}_{i=3}\hat{\mu}} + \mathbb{1}_{i=1}\mathbb{1}_{j\geq 3}F^{(1)}_{j,i+1}\right. \\ & \left. + \mathbb{1}_{i=3}\mathbb{1}_{j\leq 2}F^{(1)}_{j,i+1}\right) + \mathbb{1}_{i=2,4}\left(\tilde{\mu}_j \frac{r_{i-1}(1-\tilde{\mu}_i)+r_i\tilde{\mu}_{i-1}}{1-\mathbb{1}_{i=2}\tilde{\mu}-\mathbb{1}_{i=4}\hat{\mu}} + \mathbb{1}_{i=2}\mathbb{1}_{j\geq 3}F^{(1)}_{j,i-1} + \mathbb{1}_{i=4}\mathbb{1}_{j\leq 2}F^{(1)}_{j,i-1}\right). \end{aligned} \quad (33.32.3)$$

The second order moments can be obtained by direct operations according to theorem (34.4.10)

Corolario 33.6 *Conforming the equations given in (33.35.3) the second order moments are obtained solving the system*

33.33. Appendix A: Gambler's ruin problem Proof

Let's define the probability of the event no ruin before the n-th period begining with $\tilde{L}_0$ users, $g_{n,k}$ considering a capital equal to k units after $n-1$ events, i.e., given $n \in \{1, 2, \dots\}$ y $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ $g_{n,k} := P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1, \dots, n, \tilde{L}_n = k\right\}$, which can be written as:

$$\begin{aligned} g_{n,k} &= P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1, \dots, n, \tilde{L}_n = k\right\} = \sum_{j=1}^{k+1} g_{n-1,j} P\left\{\tilde{X}_n = k - j + 1\right\} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} g_{n-1,j} P\{X_n + Y_n = k - j + 1\} = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\{X_n + Y_n = k - j + 1, Y_n = l\} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\{X_n + Y_n = k - j + 1 | Y_n = l\} P\{Y_n = l\} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\{X_n = k - j - l + 1\} P\{Y_n = l\} \end{aligned}$$

so we have the following

$$g_{n,k} = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\{X_n = k - j - l + 1\} P\{Y_n = l\}. \quad (33.33.1)$$

so

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k} z^k, \ \textit{para } n = 0, 1, \dots, \ \textit{and} \quad G(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z) w^n. \quad (33.33.2)$$

where we have that

$$g_{0,k} = P\left\{\tilde{L}_0 = k\right\}. \quad (33.33.3)$$

In particular for $k = 0$*,* $g_{n,0} = G_n(0) = P\left\{\tilde{L}_j > 0, \tilde{L}_n = 0\right\} = P\{T = n\}$*, for* $j < n$*. Futhermore* $G(0,w) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(0)\, w^n = \sum_{n=0}^{\infty} P\{T = n\}\, w^n = \mathbb{E}\left[w^T\right]$ *which becomes the PGF for the ruin time* T*. The gambler's ruin occurs after the n-th game, i.e., the queue empty after* n *steps starting with* $\tilde{L}_0$ *users.*

Proposición 33.31 *Let's* $G_n(z)$ *and* $G(z,w)$ *defined as in (33.33.2), then* $G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z)$*. Futhermore* $G(z,w) = \frac{zF(z) - wP(z)G(0,w)}{z - wR(z)}$*, with a unique pole in the unit circle, also the pole is of the form* $z = \theta(w)$ *and satisfies*

i) $\tilde{\theta}(1) = 1$,

ii) $\tilde{\theta}^{(1)}(1) = \frac{1}{1-\tilde{\mu}}$,

iii) $\tilde{\theta}^{(2)}(1) = \frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2} + \frac{\tilde{\sigma}}{(1-\tilde{\mu})^3}$.

Finally the following satisfies $\mathbb{E}\left[w^T\right] = G(0,w) = F\left[\tilde{\theta}(w)\right]$.

Demostración 33.5 *Multiplying equations (33.33.1) and (33.33.3) by* z^k *we have that* $g_{n,k}z^k = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-j-l+1\}P\{Y_n = l\}z^k$*,* $g_{0,k}z^k = P\left\{\tilde{L}_0 = k\right\}z^k$*, summing over* k

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k}z^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-j-l+1\}P\{Y_n = l\}z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-(j+l-1)\}P\{Y_n = l\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+(j+l-1)-(j+l-1)} \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-(j+l-1)\}P\{Y_n = l\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}z^{j-1}P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}P\{Y_n = l\}z^l \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{k=j+l-1}^{\infty} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}P\{Y_n = l\}z^l
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{l=1}^{j}\sum_{k=j+l-1}^{\infty} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}P\{Y_n = l\}z^l \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}P\{Y_n = l\}z^l \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}\sum_{l=1}^{j} P\{Y_n = l\}z^l \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{l=1}^{\infty} P\{Y_n = l\}z^l \sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)} \\
&= \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z)\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)} \\
&= \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z)P(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z),
\end{aligned}
$$

so (33.33.2) can be rewritten as

$$
G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z). \tag{33.33.4}
$$

then $\frac{G_n(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} g_{n,k}z^{k-1}$*, therefore using (33.80.9):*

$$
\begin{aligned}
G(z,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z)\, w^n = G_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(z)\, w^n = F(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[G_n(z) - G_n(0)\right] w^n \frac{\tilde{P}(z)}{z}\\
&= F(z) + \frac{w}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \left[G_n(z) - G_n(0)\right] w^{n-1} \tilde{P}(z),
\end{aligned}
$$

it means that $G(z,w) = F(z) + \frac{w}{z}\left[G(z,w) - G(0,w)\right]\tilde{P}(z)$, *then* $G(z,w) = F(z) + \frac{w}{z}\left[G(z,w) - G(0,w)\right]\tilde{P}(z) = F(z) + \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\, G(z,w) - \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\, G(0,w)$ *which is equivalent to* $G(z,w)\left\{1 - \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\right\} = F(z) - \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\, G(0,w)$, *therfore,* $G(z,w) = \frac{zF(z) - w\tilde{P}(z)G(0,w)}{1 - w\tilde{P}(z)}$. $G(z,w)$ *is analytic in* $|z| = 1$, *let's* z, w *such that* $|z| = 1$ *and* $|w| \leq 1$, *given that* $\tilde{P}(z)$*is a PGF* $|z - \left(z - w\tilde{P}(z)\right)| < |z| \Leftrightarrow |w\tilde{P}(z)| < |z|$, *it means that Rouche's Theorem conditios are satisfied, the* z *and* $z - w\tilde{P}(z)$ *has the same number of zeros in* $|z| = 1$. *Let* $z = \tilde{\theta}(w)$ *be the unique solution of* $z - w\tilde{P}(z)$, *it means*

$$
\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) = 0, \tag{33.33.5}
$$

with $|\tilde{\theta}(w)| < 1$. *It's important to mention that* $\tilde{\theta}(w)$ *is the PGF for the gambler's ruin time when* $\tilde{L}_0 = 1$. *Considering the equation (33.80.11)*

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)|_{w=1} - \frac{\partial}{\partial w}\left\{w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}|_{w=1} = \tilde{\theta}^{(1)}(w)|_{w=1} - \frac{\partial}{\partial w}w\left\{\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}|_{w=1} - w\frac{\partial}{\partial w}\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)|_{w=1}\\
&= \tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) - w\left\{\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial\tilde{\theta}(w)}\cdot\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}|_{w=1}\right\} = \tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\cdot\tilde{\theta}^{(1)}(1),
\end{aligned}
$$

therefore, $\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) = \tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\cdot\tilde{\theta}^{(1)}(1) = \tilde{\theta}^{(1)}(1)\left(1 - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\right)$ *then* $\tilde{\theta}^{(1)}(1) = \frac{\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{\left(1 - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\right)} = \frac{1}{1-\tilde{\mu}}$. *Now let's determine the second order moment for* $\tilde{\theta}(w)$, *consider again the equation (33.80.11):*

$$
\begin{aligned}
0 &= \tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) = \frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\} = \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w) - \frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w) - \frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w} - \left[\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) + w\frac{\partial}{\partial w}R\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w} - \left[\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) + w\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial w}\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}\right]\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}^{(1)}(w) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right\} = \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w) - \frac{\partial}{\partial w}\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\\
&- \frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right] = \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w) - \frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial\tilde{\theta}(w)}\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w} - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\\
&- w\frac{\partial\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w) - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\frac{\partial\tilde{\theta}^{(1)}(w)}{\partial w} = \tilde{\theta}^{(2)}(w) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\\
&- \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w) - w\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\left(\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right)^2 - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(2)}(w) = \tilde{\theta}^{(2)}(w)\\
&- 2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w) - w\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\left(\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right)^2 - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(2)}(w)\\
&= \tilde{\theta}^{(2)}(w)\left[1 - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right] - \tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right) + 2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right],
\end{aligned}
$$

therefore $0 = \tilde{\theta}^{(2)}(w)\left[1 - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right] - \tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right) + 2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]$,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(2)}(w) &= \frac{\tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2R^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)} = \frac{\tilde{\theta}^{(1)}(w)\,w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\,\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}\\
&+ \frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(w)\,\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}
\end{aligned}
$$

evaluating the last expression in $w=1$*:*

$$
\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(2)}(1) &= \frac{\left(\tilde{\theta}^{(1)}(1)\right)^2\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)} + \frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(1)\,\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)} = \frac{\left(\tilde{\theta}^{(1)}(1)\right)^2\tilde{P}^{(2)}(1)}{1-\tilde{P}^{(1)}(1)} + \frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(1)\,\tilde{P}^{(1)}(1)}{1-\tilde{P}^{(1)}(1)}\\
&= \frac{\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}}\right)^2\tilde{P}^{(2)}(1)}{1-\tilde{\mu}} + \frac{2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}}\right)\tilde{\mu}}{1-\tilde{\mu}} = \frac{\tilde{P}^{(2)}(1)}{(1-\tilde{\mu})^3} + \frac{2\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2} = \frac{\sigma^2-\tilde{\mu}+\tilde{\mu}^2}{(1-\tilde{\mu})^3} + \frac{2\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}\\
&= \frac{\sigma^2-\tilde{\mu}+\tilde{\mu}^2+2\tilde{\mu}(1-\tilde{\mu})}{(1-\tilde{\mu})^3} = \frac{\sigma^2+\tilde{\mu}-\tilde{\mu}^2}{(1-\tilde{\mu})^3} = \frac{\sigma^2}{(1-\tilde{\mu})^3} + \frac{\tilde{\mu}(1-\tilde{\mu})}{(1-\tilde{\mu})^3} = \frac{\sigma^2}{(1-\tilde{\mu})^3} + \frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}.
\end{aligned}
$$

Corolario 33.7 *The first and second moments for the gambler's ruin are*

$$
\mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{1-\tilde{\mu}}, \quad Var[T] = \frac{Var\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^3}. \tag{33.33.6}
$$

33.34. Appendix B: General Case Calculations Exhaustive Policy

Remember the equations given in equations (34.4.4) and (34.4.5) for the first and second order partial derivatives respectively. The first moments equations for the queue lengths as before for the times the server arrives to the queue to start attending are

$$
\begin{array}{ll}
D_iF_1 = \mathbb{1}_{i\neq 1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1D_i\tilde{P}_i + \mathbb{1}_{i=2}D_2F_1, & D_iF_2 = \mathbb{1}_{i\neq 2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2D_i\tilde{P}_i + \mathbb{1}_{i=1}D_1F_2\\
D_iF_3 = \mathbb{1}_{i\neq 3}D_3F_3D\tilde{\theta}_3D_i\tilde{P}_i + \mathbb{1}_{i=4}D_4F_3, & D_iF_4 = \mathbb{1}_{i\neq 4}D_4F_4D\tilde{\theta}_4D_i\tilde{P}_i + \mathbb{1}_{i=3}D_3F_4.
\end{array} \tag{33.34.1}
$$

We can obtain the linear system of equations: $f_1(i) = D_iR_2 + D_iF_2 + \mathbb{1}_{i\geq 3}D_iF_4$*, so*

$$
\begin{array}{ll}
f_1(1) = r_2\tilde{\mu}_1 + \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1), & f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2,\\
f_1(3) = r_2\tilde{\mu}_3 + \frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + F^{(1)}_{3,2}(1), & f_1(4) = r_2\tilde{\mu}_4 + \frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + F^{(1)}_{4,2}(1),
\end{array}
$$

for the rest of the queues we have that $f_2(i) = D_i(R_1 + F_1 + \mathbb{1}_{i\geq 3}F_3)$*,* $f_3(i) = D_i(R_4 + F_4 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_2)$ *and* $f_4(i) = D_i(R_3 + F_3 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_1)$*, equivalently*

$$
\begin{array}{ll}
f_2(1) = r_1\tilde{\mu}_1, & f_2(2) = r_1\tilde{\mu}_2 + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}f_1(1) + f_1(2),\\
f_2(3) = r_1\tilde{\mu}_3 + \frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_1}f_1(1) + F^{(1)}_{3,1}(1), & f_2(4) = r_1\tilde{\mu}_4 + \frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_1}f_1(1) + F^{(1)}_{4,1}(1),\\
f_3(1) = \tilde{r}_4\tilde{\mu}_1 + \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_4}f_4(4) + F^{(1)}_{1,4}(1), & f_3(2) = \tilde{r}_4\tilde{\mu}_2 + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_4}f_4(4) + F^{(1)}_{2,4}(1),\\
f_3(3) = \tilde{r}_4\tilde{\mu}_3 + \frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4}f_4(4) + f_4(3), & f_3(4) = \tilde{r}_4\tilde{\mu}_4\\
f_4(1) = \tilde{r}_3\tilde{\mu}_1 + \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_3}f_3(3) + F^{(1)}_{1,3}(1), & f_4(2) = \tilde{r}_3\mu_2 + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_3}f_3(3) + F^{(1)}_{2,3}(1),\\
f_4(3) = \tilde{r}_3\tilde{\mu}_3, & f_4(4) = \tilde{r}_3\tilde{\mu}_4 + \frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_3}f_3(3) + f_3(4),
\end{array}
$$

Then we have that if $\mu = \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2 < 1$*,* $\hat{\mu} = \tilde{\mu}_3 + \tilde{\mu}_4 < 1$*,* $r = r_1 + r_2$ *and* $\hat{r} = \tilde{r}_3 + \tilde{r}_4$ *the system's solution is given by*

$$
\begin{array}{lll}
f_2(1) = r_1\tilde{\mu}_1, & f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2, & f_3(4) = r_4\tilde{\mu}_4, \\
f_4(3) = r_3\tilde{\mu}_3, & f_1(1) = r\frac{\tilde{\mu}_1(1-\tilde{\mu}_1)}{1-\mu}, & f_2(2) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}, \\
f_1(3) = \tilde{\mu}_3\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + F^{(1)}_{3,2}(1), & f_1(4) = \tilde{\mu}_4\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + F^{(1)}_{4,2}(1), & f_2(3) = \tilde{\mu}_3\left(r_1 + \frac{r\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}}\right) + F^{(1)}_{3,1}(1), \\
f_2(4) = \tilde{\mu}_4\left(r_1 + \frac{r\tilde{\mu}_1}{1-\mu}\right) + F^{(1)}_{4,,1}(1), & f_3(1) = \tilde{\mu}_1\left(r_4 + \frac{\hat{r}\tilde{\mu}_4}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,4}(1), & f_3(2) = \tilde{\mu}_2\left(r_4 + \frac{\hat{r}\tilde{\mu}_4}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,4}(1), \\
f_3(3) = \hat{r}\frac{\tilde{\mu}_3(1-\tilde{\mu}_3)}{1-\hat{\mu}}, & f_4(1) = \tilde{\mu}_1\left(r_3 + \frac{\hat{r}\tilde{\mu}_3}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,3}(1), & f_4(2) = \tilde{\mu}_2\left(r_3 + \frac{\hat{r}\tilde{\mu}_3}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,3}(1), \\
 & f_4(4) = \hat{r}\frac{\tilde{\mu}_4(1-\tilde{\mu}_4)}{1-\hat{\mu}}. &
\end{array}
$$

Now, developing the equations given in (34.4.10)we obtain for instance $f_1(1,1) = \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + 2\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2,1) + f_2(1,1) + \tilde{\mu}_1^2\left(R_2^{(2)} + f_2(2)\,\theta_2^{(2)}\right) + \tilde{P}_1^{(2)}\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2} + r_2\right) + 2r_2\tilde{\mu}_2 f_2(1)$, *proceeding in a similar manner, we have the following general expressions*

$$
\begin{aligned}
f_1(i,j) &= \mathbb{1}_{i=1} f_2(1,1) + \left[(1-\mathbb{1}_{i=j=3})\,\mathbb{1}_{i+j\leq 6}\mathbb{1}_{i\leq j}\frac{\mu_j}{1-\tilde{\mu}_2} + (1-\mathbb{1}_{i=j=3})\,\mathbb{1}_{i+j\leq 6}\mathbb{1}_{i>j}\frac{\mu_i}{1-\tilde{\mu}_2} + \mathbb{1}_{i=1}\frac{\mu_i}{1-\tilde{\mu}_2}\right] f_2(1,2) \\
&+\mathbb{1}_{i,j\neq 2}\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 \mu_i\mu_j f_2(2,2) + \left[\mathbb{1}_{i,j\neq 2}\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 2}\mathbb{1}_{i=j}\frac{\tilde{P}_i^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2} + \mathbb{1}_{i,j\neq 2}\mathbb{1}_{i\neq j}\frac{\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_2}\right] f_2(2) \\
&+\left[r_2\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i\geq 3}F^{(1)}_{i,2}\right] f_2(j) + \left[r_2\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{j\geq 3}F^{(1)}_{j,2}\right] f_2(i) + \left[R_2^{(2)} + \mathbb{1}_{i=j}r_2\right]\tilde{\mu}_i\mu_j \\
&+\mathbb{1}_{j\geq 3}F^{(1)}_{j,2}\left[\mathbb{1}_{j\neq i}F^{(1)}_{i,2} + r_2\tilde{\mu}_i\right] + r_2\left[\mathbb{1}_{i=j}P_i^{(2)} + \mathbb{1}_{i\geq 3}F^{(1)}_{i,2}\tilde{\mu}_j\right] + \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F^{(2)}_{i,2} \\
f_2(i,j) &= \mathbb{1}_{i,j\neq 1}\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j f_1(1,1) + \left[(1-\mathbb{1}_{i=j=3})\,\mathbb{1}_{i+j\leq 6}\mathbb{1}_{i\leq j}\frac{\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_1} + (1-\mathbb{1}_{i=j=3})\,\mathbb{1}_{i+j\leq 6}\mathbb{1}_{i>j}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_1}\right. \\
&\left.+\,\mathbb{1}_{i=2}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_1}\right] f_1(1,2) + \mathbb{1}_{i=2}f_1(2,2) + \left[\mathbb{1}_{i,j\neq 1}\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 1}\mathbb{1}_{i\neq j}\frac{\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_1} + \mathbb{1}_{i,j\neq 1}\mathbb{1}_{i=j}\frac{\tilde{P}_i^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_1}\right] f_1(1) \\
&+\left[r_1\mu_i + \mathbb{1}_{i\geq 3}F^{(1)}_{i,1}\right] f_1(j) + \left[\mathbb{1}_{j\geq 3}F^{(1)}_{j,1} + r_1\mu_j\right] f_1(i) + \left[R_1^{(2)} + \mathbb{1}_{i=j}\right]\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{i\geq 3}F^{(1)}_{i,1}\left[r_1\mu_j + \mathbb{1}_{j\neq i}F^{(1)}_{j,1}\right] \\
&+r_1\left[\mathbb{1}_{j\geq 3}\mu_i F^{(1)}_{j,1} + \mathbb{1}_{i=j}P_i^{(2)}\right] + \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F^{(2)}_{i,1} \\
f_3(i,j) &= \mathbb{1}_{i=3}f_4(3,3) + \left[(1-\mathbb{1}_{i=j=2})\,\mathbb{1}_{i+j\geq 4}\mathbb{1}_{i\leq j}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_4} + (1-\mathbb{1}_{i=j=2})\,\mathbb{1}_{i+j\geq 4}\mathbb{1}_{i>j}\frac{\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_4} + \mathbb{1}_{i=3}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_4}\right] f_4(3,4) \\
&+\mathbb{1}_{i,j\neq 4}f_4(4,4)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j + \left[\mathbb{1}_{i,j\neq 4}\tilde{\theta}_4^{(2)}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 4}\mathbb{1}_{i=j}\frac{\tilde{P}_i^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_4} + \mathbb{1}_{i,j\neq 4}\mathbb{1}_{i\neq j}\frac{\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_4}\right] f_4(4) \\
&+\left[r_4\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i\leq 2}F^{(1)}_{i,4}\right] f_4(j) + \left[r_4\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{j\leq 2}F^{(1)}_{j,4}\right] f_4(i) + \left[R_4^{(2)} + \mathbb{1}_{i=j}r_4\right]\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j \\
&+\mathbb{1}_{i\leq 2}F^{(1)}_{i,4}\left[r_4\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{j\neq i}F^{(1)}_{j,4}\right] + r_4\left[\mathbb{1}_{i=j}P_i^{(2)} + \mathbb{1}_{j\leq 2}\tilde{\mu}_i F^{(1)}_{j,4}\right] + \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j=i}F^{(2)}_{i,4} \\
f_4(i,j) &= \mathbb{1}_{i,j\neq 3}f_3(3,3)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j + \left[(1-\mathbb{1}_{i=j=2})\,\mathbb{1}_{i+j\geq 5}\mathbb{1}_{i\leq j}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_3} + (1-\mathbb{1}_{i=j=2})\,\mathbb{1}_{i+j\geq 5}\mathbb{1}_{i>j}\frac{\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_3}\right. \\
&\left.+\,\mathbb{1}_{i=4}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_3}\right] f_3(3,4) + \mathbb{1}_{i=4}f_3(4,4) + \left[\mathbb{1}_{i,j\neq 3}\tilde{\theta}_3^{(2)}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 3}\mathbb{1}_{i=j}\frac{\tilde{P}_i^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_3} + \mathbb{1}_{i,j\neq 3}\mathbb{1}_{i\neq j}\frac{\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_3}\right] f_3(3) \\
&+\left[r_3\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i\leq 2}F^{(1)}_{i,3}\right] f_3(j) + \left[r_3\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{j\leq 2}F^{(1)}_{j,3}\right] f_3(i) + \left[R_3^{(2)} + \mathbb{1}_{i=j}r_3\right]\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j \\
&+\mathbb{1}_{i\leq 2}F^{(1)}_{i,3}\left[r_3\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{j\neq i}F^{(1)}_{j,3}\right] + r_3\left[\mathbb{1}_{i=j}P_i^{(2)} + \mathbb{1}_{j\leq 2}\tilde{\mu}_i F^{(1)}_{j,3}\right] + \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j=i}F^{(2)}_{i,3}
\end{aligned} \tag{33.34.2}
$$

from which we obtain the linear equations systems

$$
\begin{array}{ll}
f_1(1,1) = a_1 f_2(2,2) + a_2 f_2(2,1) + a_3 f_2(1,1) + K_1, & f_1(1,2) = K_2 \\
f_1(1,3) = a_4 f_2(2,2) + a_5 f(2,1) + K_3, & f_1(1,4) = a_6 f_2(2,2) + a_7 f_2(2,1) + K_4 \\
f_1(2,2) = K_5, & f_1(2,3) = K_6 \\
f_1(2,4) = K_7, & f_1(3,3) = a_8 f_2(2,2) + K_8 \\
f_1(3,4) = a_9 f_2(2,2) + K_9, & f_1(4,4) = a_{10} f_2(2,2) + K_{10} \\
f_2(1,1) = K_{11}, & f_2(1,2) = K_{12} \\
f_2(1,3) = K_{13}, & f_2(1,4) = K_{14} \\
f_2(2,2) = a_{11} f_1(1,1) + a_{12} f_1(1,2) + a_{13} f_1(2,2) + K_{15}, & f_2(2,3) = a_{14} f_1(1,1) + a_{15} f_1(1,2) + K_{16} \\
f_2(2,4) = a_{16} f_1(1,1) + a_{17} f_1(1,2) + K_{17}, & f_2(3,3) = a_{18} f_1(1,1) + K_{18} \\
f_2(3,4) = a_{19} f_1(1,1) + K_{19}, & f_2(4,4) = a_{20} f_1(1,1) + K_{20}
\end{array} \tag{33.34.3}
$$

$$
\begin{array}{ll}
f_3(1,1) = a_{21} f_4(4,4) + K_{21}, & f_3(1,2) = a_{22} f_4(4,4) + K_{22} \\
f_3(1,3) = a_{23} f_4(4,4) + a_{24} f_4(4,3) + K_{23}, & f_3(1,4) = K_{24} \\
f_3(2,2) = a_{25} f_4(4,4) + K_{25}, & f_3(2,3) = a_{26} f_4(4,4) + a_{27} f_4(4,3) + K_{26} \\
f_3(2,4) = K_{27}, & f_3(3,3) = a_{28} f_4(4,4) + a_{29} f_4(4,3) + a_{30} f_4(3,3) + K_{28} \\
f_3(3,4) = K_{29}, & f_3(4,4) = K_{30} \\
f_4(1,1) = a_{31} f_3(3,3) + K_{31}, & f_4(1,2) = a_{32} f_3(3,3) + K_{32} \\
F_4(1,3) = K_{33}, & f_4(1,4) = a_{33} f_3(3,3) + a_{34} f_3(3,4) + K_{34} \\
f_4(2,2) = a_{35} f_3(3,3) + K_{35}, & f_4(2,3) = K_{36} \\
f_4(2,4) = a_{36} f_3(3,3) + a_{37} f_3(3,4) + K_{37}, & f_4(3,3) = K_{38} \\
f_4(3,4) = K_{39}, & f_4(4,4) = a_{38} f_3(3,3) + a_{39} f_3(3,4) + a_{40} f_3(4,4) + K_{40}
\end{array}
\tag{33.34.4}
$$

with values for a_i and K_i

$$
\begin{array}{llll}
a_1 = \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2, & a_2 = 2\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}, & a_3 = 1, & a_4 = \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3, \\
a_5 = \frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_2}, & a_6 = \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4, & a_7 = \frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2}, & a_8 = \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 \tilde{\mu}_3^2, \\
a_9 = \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 \tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4, & a_{10} = \left(\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 & a_{11} = \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 & a_{12} = 2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1} \\
a_{13} = 1 & a_{14} = \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3 & a_{15} = \frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_1}, & a_{16} = \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4, \\
a_{17} = \frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_1} & a_{18} = \left(\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2, & a_{19} = \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 \tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4 & a_{20} = \left(\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 \\
a_{21} = \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2, & a_{22} = \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2 \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 & a_{23} = \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2 \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3 & a_{24} = \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_4} f_4(4,3) \\
a_{25} = \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2 & a_{26} = \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2 \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3 & a_{27} = \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_4}, & a_{28} = \left(\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2 \\
a_{29} = 2\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4} & a_{30} = 1 & a_{31} = \left(\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2 & a_{32} = \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2 \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 \\
a_{33} = \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2 \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3 & a_{34} = \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_3} & a_{35} = \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2 & a_{36} = \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2 \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 \\
a_{37} = \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_3} & a_{38} = \left(\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2 & a_{39} = 2\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_3}, & a_{40} = 1
\end{array}
\tag{33.34.5}
$$

$$
\begin{array}{l}
K_1 = \tilde{\mu}_1^2 \left(R_2^{(2)} + f_2(2)\,\theta_2^{(2)}\right) + \tilde{P}_1^{(2)} \left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2} + r_2\right) + 2r_2\tilde{\mu}_2 f_2(1) \\
K_2 = \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 \left[R_2^{(2)} + r_2\right] + r_2\left[\tilde{\mu}_1 f_2(2) + \tilde{\mu}_2 f_2(1)\right], \\
K_3 = \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3 \left[R_2^{(2)} + r_2 + f_2(2)\left(\tilde{\theta}_2^{(2)} + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\right] + r_2\tilde{\mu}_1 \left[F_{3,2}^{(1)} + f_2(1)\right] + \left[r_2\tilde{\mu}_3 + F_{3,2}^{(1)}\right] f_2(1) \\
K_4 = \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4 \left[R_2^{(2)} + r_2 + f_2(2)\left(\tilde{\theta}_2^{(2)} + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\right] + r_2\tilde{\mu}_1 \left[f_2(4) + F_{4,2}^{(1)}\right] + f_2(1)\left[r_2\tilde{\mu}_4 + F_{4,2}^{(1)}\right] \\
K_5 = \tilde{\mu}_2^2 \left[R_2^{(2)} + 2r_2\frac{r(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}\right] + r_2\tilde{P}_2^{(2)} \\
K_6 = \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3 \left[R_2^{(2)} + r_2\right] + r_2\tilde{\mu}_2 \left[f_2(3) + F_{3,2}^{(1)}\right] + f_2(2)\left[r_2\tilde{\mu}_3 + F_{3,2}^{(1)}\right] \\
K_7 = \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 \left[R_2^{(2)} + r_2\right] + r_2\tilde{\mu}_2 \left[f_2(4) + F_{4,2}^{(1)}\right] + f_2(2)\left[r_2\tilde{\mu}_4 + F_{4,2}^{(1)}\right] \\
K_8 = \tilde{\mu}_3^2 \left[R_2^{(2)} + +f_2(2)\,\tilde{\theta}_2^{(2)}\right] + \tilde{P}_3^{(2)} \left[\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2} + r_2\right] + 2r_2\tilde{\mu}_3 \left[f_2(3) + F_{3,2}^{(1)}\right] + 2f_2(3)\,F_{3,2}^{(1)} + F_{3,2}^{(2)} \\
K_9 = \tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4 \left[R_2^{(2)} + r_2 + \left(\tilde{\theta}_2^{(2)} + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right) f_2(2)\right] + r_2\tilde{\mu}_3 \left(f_2(4) + F_{4,2}^{(1)}\right) + r_2\tilde{\mu}_4 \left(f_2(3) + F_{3,2}^{(1)}\right) \\
+F_{4,2}^{(1)} \left(f_2(3) + F_{3,2}^{(1)}\right) + F_{3,2}^{(1)} f_2(4) \\
K_{10} = \tilde{\mu}_4^2 \left[R_2^{(2)} + f_2(2)\,\tilde{\theta}_2^{(2)}\right] + \tilde{P}_4^{(2)} \left[r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right] + 2r_2\tilde{\mu}_4 \left[f_2(4) + F_{4,2}^{(1)}\right] + 2F_{4,2}^{(1)} f_2(4)
\end{array}
\tag{33.34.6}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{11} &= R_1^2\tilde{\mu}_1^2 + r_1\tilde{P}_1^{(2)} + 2r_1\tilde{\mu}_1 f_1(1)\\
K_{12} &= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\left[R_1^{(2)} + r_1\right] + r_1\left[\tilde{\mu}_1 f_1(2) + \tilde{\mu}_2 f_1(1)\right]\\
K_{13} &= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3\left[R_1^{(2)} + r_1\right] + r_1\tilde{\mu}_1\left[f_1(3) + F_{3,1}^{(1)}\right] + f_1(1)\left[r_1\tilde{\mu}_3 + F_{3,1}^{(1)}\right]\\
K_{14} &= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4\left[R_1^{(2)} + r_1\right] + r_1\tilde{\mu}_1\left[f_1(4) + F_{4,1}^{(1)}\right] + f_1(1)\left[r_1\tilde{\mu}_4 + F_{4,1}^{(1)}\right]\\
K_{15} &= \tilde{\mu}_2^2\left[R_1^{(2)} + f_1(1)\tilde{\theta}_1^{(2)}\right] + \tilde{P}_2^{(2)}\left[r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\tilde{\mu}_1}\right] + 2r_1\tilde{\mu}_2 f_1(2)\\
K_{16} &= \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3\left[R_1^{(2)} + r_1 + f_1(1)\left(\tilde{\theta}_1^{(2)} + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\right] + r_1\tilde{\mu}_2\left[f_1(3) + F_{3,1}^{(1)}\right] + f_1(2)\left[r_1\tilde{\mu}_3 + F_{3,1}^{(1)}\right]\\
K_{17} &= \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4\left[R_1^{(2)} + r_1 + f_1(1)\left(\tilde{\theta}_1^{(2)} + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\right] + r_1\tilde{\mu}_2\left[f_1(4) + \tilde{\mu}_2 F_{4,1}^{(1)}\right] + f_1(2)\left[r_1\tilde{\mu}_4 + F_{4,1}^{(1)}\right]\\
K_{18} &= \tilde{\mu}_3^2\left[R_1^{(2)} + f_1(1)\tilde{\theta}_1^{(2)}\right] + \tilde{P}_3^{(2)}\left[r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\tilde{\mu}_1}\right] + 2r_1\tilde{\mu}_3\left[f_1(3) + F_{3,1}^{(1)}\right] + F_{3,1}^{(2)} + 2F_{3,1}^{(1)} f_1(3)\\
K_{19} &= \tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4\left[R_1^{(2)} + r_1 + f_1(1)\left(\tilde{\theta}_1^{2} + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\right] + r_1\tilde{\mu}_3\left[f_1(4) + F_{4,1}^{(1)}\right] + f_1(3)\left[r_1\tilde{\mu}_4 + F_{4,1}^{(1)}\right]\\
&+F_{3,1}^{(1)}\left[r_1\tilde{\mu}_4 + F_{4,1}^{(1)} + f_1(4)\right]\\
K_{20} &= \tilde{\mu}_4^2\left[R_1^{(2)} + f_1(1)\tilde{\theta}_1^{(2)}\right] + \tilde{P}_4^{(2)}\left[r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\tilde{\mu}_1}\right] + f_1(4)\left[2r_1\tilde{\mu}_4 + 2F_{4,1}^{(1)}\right] + F_{4,1}^{(2)} + 2F_{4,1}^{(1)} r_1\tilde{\mu}_4
\end{aligned} \tag{33.34.7}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{21} &= \tilde{\mu}_1^2\left[R_2^{(2)} + f_4(4)\tilde{\theta}_4^{(2)}\right] + 2r_4\tilde{\mu}_1\left[F_{1,4}^{(1)} + f_4(1)\right] + \tilde{P}_1^{(2)}\left[r_4 + + \frac{f_4(4)}{1-\tilde{\mu}_2}\right] + \left[F_{1,4}^{(2)} + 2f_4(1)F_{1,4}^{(1)}\right]\\
K_{22} &= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\left[R_4^{(2)} + r_4 + f_4(4)\left(\tilde{\theta}_4^{(2)} + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\right] + r_4\tilde{\mu}_1\left(F_{2,4}^{(1)} + f_4(2)\right) + r_4\tilde{\mu}_2\left(f_4(1) + F_{1,4}^{(1)}\right)\\
&+\left[f_4(2)F_{1,4}^{(1)} + f_4(1)F_{2,4}^{(1)} + F_{2,4}^{(1)}F_{1,4}^{(1)}\right]\\
K_{23} &= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3\left[R_4^{(2)} + r_4 + f_4(4)\left(\tilde{\theta}_4^{(2)} + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)\right] + \tilde{\mu}_3\left[r_4\left(f_4(1) + F_{1,4}^{(1)}\right) + r_3F_{1,4}^{(1)}\right] + r_4\tilde{\mu}_1 f_4(3)\\
K_{24} &= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4\left(R_4^{(2)} + r_4\right) + r_4\left[\tilde{\mu}_1 f_4(4) + \tilde{\mu}_4\left(f_4(1) + F_{1,4}^{(1)}\right)\right] + f_4(4)F_{1,4}^{(1)}\\
K_{25} &= \tilde{\mu}_2^2\left[R_4^{(2)} + f_4(4)\tilde{\theta}_4^{(2)}\right] + 2r_4\tilde{\mu}_2\left[F_{2,4}^{(1)} + f_4(2)\right] + \tilde{P}_2^{(2)}\left[\frac{f_4(4)}{1-\tilde{\mu}_4} + r_4\right] + \left[2f_4(2)F_{2,4}^{(1)} + F_{2,4}^{(2)}\right]\\
K_{26} &= \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3\left[R_4^{(2)} + r_4 + f_4(4)\left(\tilde{\theta}_4^{(2)} + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)\right] + r_4\tilde{\mu}_3\left[F_{2,4}^{(1)} + f_4(2)\right] + \left[r_4\tilde{\mu}_2 + F_{2,4}^{(1)}\right] f_4(3)\\
K_{27} &= \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4\left[R_4^{(2)} + r_4\right] + r_4\tilde{\mu}_4\left[f_4(4) + F_{2,4}^{(2)}\right] + \left[r_4\tilde{\mu}_2 + F_{2,4}^{(2)}\right] f_4(4)\\
K_{28} &= \tilde{\mu}_3^2\left[R_4^{(2)} + f_4(4)\tilde{\theta}_4^{(2)}\right] + \tilde{P}_3^{(2)}\left[r_4 + \frac{f_4(4)}{1-\tilde{\mu}_4}\right] + 2r_4\tilde{\mu}_3 f_4(4)\\
K_{29} &= \tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4\left[R_4^{(2)} + r_4\right] + r_4\left[\tilde{\mu}_3 f_4(4) + \tilde{\mu}_4 f_4(3)\right]\\
K_{30} &= R_4^{(2)}\tilde{\mu}_4^2 + r_4\tilde{P}_4^{(2)} + 2r_4\tilde{\mu}_4 f_4(4)
\end{aligned} \tag{33.34.8}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{31} &= \tilde{\mu}_1^2\left[R_3^{(2)} + \tilde{\theta}_3^{(2)} f_3(3)\right] + \tilde{P}_2^{(2)}\left[r_3 + \frac{f_3(3)}{1-\tilde{\mu}_3}\right] + 2r_3\tilde{\mu}_1\left[F_{1,3}^{(1)} + f_3(1)\right] + \left[2F_{1,3}^{(1)} f_3(1) + F_{1,3}^{(2)}\right]\\
K_{32} &= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\left[R_3^{(2)} + r_3 + \tilde{\theta}_3^{(2)} f_3(3) + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_3} f_3(3)\right] + r_3\tilde{\mu}_1\left[f_3(2) + F_{2,3}^{(1)}\right] + f_3(1)\left[F_{2,3}^{(1)} + r_3\tilde{\mu}_2\right]\\
&+F_{1,3}^{(1)}\left[r_3\tilde{\mu}_2 + f_3(2)\right] + F_{2,3}^{(1)}F_{1,3}^{(1)}\\
K_{33} &= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3\left[R_3^{(2)} + r_3\right] + r_3\tilde{\mu}_3\left[f_3(1) + F_{1,3}^{(1)}\right] + f_3(3)\left[r_3\tilde{\mu}_1 + F_{1,3}^{(1)}\right]\\
K_{34} &= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4\left[f_3(3)\left(\tilde{\theta}_3^{(2)} + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right) + r_3 + R_3^{(2)}\right] + r_3\tilde{\mu}_4\left[f_3(3) + F_{1,3}^{(1)}\right] + f_3(4)\left[r_3\tilde{\mu}_1 + F_{1,3}^{(1)}\right]\\
K_{35} &= \tilde{\mu}_2^2\left[R_3^{(2)} + f_3(3)\tilde{\theta}_3^{(2)}\right] + 2r_3\tilde{\mu}_2\left[f_3(2) + F_{2,3}^{(1)}\right] + \tilde{P}_2^{(2)}\left[f_3(3)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3} + r_3\right] + \left[F_{2,3}^{(2)} + 2f_3(2)F_{2,3}^{(1)}\right]\\
K_{36} &= \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3\left[R_3^{(2)} + r_3\right] + r_3\tilde{\mu}_3\left[f_3(2) + F_{2,3}^{(1)}\right] + \left[r_3\tilde{\mu}_2 + F_{2,3}^{(1)}\right] f_3(3)\\
K_{37} &= \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4\left[R_3^{(2)} + r_3 + f_3(3)\left(\tilde{\theta}_3^{(2)} + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)\right] + r_3\tilde{\mu}_4\left[f_3(2) + F_{2,3}^{(1)}\right] + \left[r_3\tilde{\mu}_2 + F_{2,3}^{(1)}\right] f_3(4)\\
K_{38} &= R_3^{(2)}\tilde{\mu}_3^2 + r_3\tilde{P}_3^{(2)} + 2r_3\tilde{\mu}_3 f_3(3)\\
K_{39} &= \tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4\left[R_3^{(2)} + r_3\right] + r_3\left[\tilde{\mu}_3 f_3(4) + \tilde{\mu}_4 f_3(3)\right]\\
K_{40} &= \tilde{\mu}_4^2\left[R_3^{(2)} + f_3(3)\tilde{\theta}_3^{(2)}\right] + \tilde{P}_4^{(2)}\left[f_3(3)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3} + r_3\right] + 2r_3\tilde{\mu}_4 f_3(4)
\end{aligned} \tag{33.34.9}
$$

33.35. Appendix C: General Case Calculations Gated Policy

De acuerdo a la política de servicio Cerrada, el número de usuarios presentes en la cola al momento en que el servidor termina de atender a todos los que estaban presentes cuando este llega para dar servicio, está dada de la siguiente manera

Para cada una de las colas en cada sistema, el número de usuarios al tiempo en que llega el servidor a dar servicio está dado por el número de usuarios presentes en la cola al tiempo $t = \tau_i, \zeta_i$, *más el número de usuarios que llegaron a la cola en el intervalo de tiempo* $[\tau_i, \overline{\tau}_i], [\zeta_i, \overline{\zeta}_i]$, *es decir*

Just like before we have that

$$L_i(\overline{\tau}_1) = L_i(\tau_1) + X_i(\overline{\tau}_1 - \tau_1) + Y_i(\overline{\tau}_1 - \tau_1) \tag{33.35.1}$$

Then at the moment the server ends attending the users in the queue at the moment the server arrives, so the number of users at the queue during the service time $\overline{\tau}_1 - \tau_1$, so we have that

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)} z_3^{L_3(\overline{\tau}_1)} z_4^{L_4(\overline{\tau}_1)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{X_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)} z_2^{L_2(\tau_1)+X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)+Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)} z_3^{L_3(\tau_1)+X_3(\overline{\tau}_1-\tau_1)} z_4^{L_4(\tau_1)+X_4(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]\\
= &\mathbb{E}\left[z_1^{X_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)} z_2^{L_2(\tau_1)} z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)+Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)} z_3^{\hat{L}_1(\tau_1)} z_3^{X_3(\overline{\tau}_1-\tau_1)} z_4^{L_4(\tau_1)} z_4^{X_4(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]\\
= &\mathbb{E}\left[z_1^{X_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)} z_2^{L_2(\tau_1)} z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)} z_3^{L_3(\tau_1)} z_3^{X_3(\overline{\tau}_1-\tau_1)} z_4^{L_4(\tau_1)} z_4^{X_4(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]\\
= &\mathbb{E}\left[\left\{z_2^{L_2(\tau_1)} z_3^{L_3(\tau_1)} z_4^{L_4(\tau_1)}\right\}\left\{z_1^{\tilde{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)} z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)} z_3^{\tilde{X}_3(\overline{\tau}_1-\tau_1)} z_4^{\tilde{X}_4(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\\
= &\mathbb{E}\left[\left\{z_2^{L_2(\tau_1)} z_3^{L_3(\tau_1)} z_4^{L_4(\tau_1)}\right\}\left\{\left\{\tilde{P}_1(z_1)\right\}^{\overline{\tau}_1-\tau_1} \tilde{P}_2(z_2\}^{\overline{\tau}_1-\tau_1} \tilde{P}_3(z_3\}^{\overline{\tau}_1-\tau_1} \tilde{P}_4(z_4\}^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right\}\right]\\
= &\mathbb{E}\left[\left\{z_2^{L_2(\tau_1)} z_3^{L_3(\tau_1)} z_4^{L_4(\tau_1)}\right\}\left\{\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\tilde{P}_3(z_3)\tilde{P}_4(z_4)\right\}^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right]\\
= &\mathbb{E}\left[\left\{z_2^{L_2(\tau_1)} z_3^{L_3(\tau_1)} z_4^{L_4(\tau_1)}\right\}\left\{\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\tilde{P}_3(z_3)\tilde{P}_4(z_4)\right\}^{L_1(\tau_1)}\right]\\
= &F_1\left(\tilde{P}_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\tilde{P}_3(z_3)\tilde{P}_4(z_4), z_2, z_3, z_4\right]\\
= &F_1\left(\prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i(z_i), z_2, z_3, z_4\right)
\end{aligned}$$

In an analogous manner we have for the rest of the queues that conform the NCPS:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)} z_3^{L_3(\overline{\tau}_2)} z_4^{L_4(\overline{\tau}_2)}\right] &= F_2\left(z_1, \prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i(z_i), z_3, z_4\right)\\
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_3)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_3)} z_3^{L_3(\overline{\tau}_3)} z_4^{L_4(\overline{\tau}_3)}\right] &= F_3\left(z_1, z_2, \prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i(z_i), z_4\right)\\
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_4)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_4)} z_3^{L_3(\overline{\tau}_4)} z_4^{L_4(\overline{\tau}_4)}\right] &= F_4\left(z_1, z_2, z_3, \prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i(z_i)\right)
\end{aligned}$$

therefore, the recursive equations are of the form

$$\begin{aligned}
F_1(z_1,z_2,z_3,z_4) = R_2\left(\prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i(z_i)\right) F_2\left(z_1, \prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i(z_i), z_3, z_4\right)\\
F_2(z_1,z_2,z_3,z_4) = R_1\left(\prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i(z_i)\right) F_1\left(\prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i(z_i), z_2, z_3, z_4\right)\\
F_3(z_1,z_2,z_3,z_4) = R_4\left(\prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i(z_i)\right) F_4\left(z_1, z_2, z_3, \prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i(z_i)\right)\\
F_4(z_1,z_2,z_3,z_4) = R_3\left(\prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i(z_i)\right) F_3\left(z_1, z_2, \prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i(z_i), z_4\right)
\end{aligned} \tag{33.35.2}$$

So conforming with the developed and proceeding in a similar manner for the rest of the queues, we can see that the following can be obtained

$$\begin{array}{lll}
f_1(1) = r_2\tilde{\mu}_1 + f_2(2)\tilde{\mu}_1 + f_2(1), & f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2 + f_2(2)\tilde{\mu}_2, & f_1(3) = r_2\tilde{\mu}_3 + f_2(2)\tilde{\mu}_3,\\
f_1(4) = r_2\tilde{\mu}_4 + f_2(2)\tilde{\mu}_4, & f_2(1) = r_1\tilde{\mu}_1 + f_1(1)\tilde{\mu}_1, & f_2(2) = r_1\tilde{\mu}_2 + f_1(1)\tilde{\mu}_2 + f_1(2)\\
f_2(3) = r_1\tilde{\mu}_3 + f_1(1)\tilde{\mu}_3, & f_2(4) = r_1\tilde{\mu}_4 + f_1(1)\tilde{\mu}_4, & f_3(1) = r_4\tilde{\mu}_1 + f_4(4)\tilde{\mu}_1,\\
f_3(2) = r_4\tilde{\mu}_2 + f_4(4)\tilde{\mu}_2, & f_3(3) = r_4\tilde{\mu}_3 + f_4(4)\tilde{\mu}_3 + f_4(3), & f_3(4) = r_4\tilde{\mu}_4 + f_4(4)\tilde{\mu}_4,\\
f_4(1) = r_3\tilde{\mu}_1 + f_3(3)\tilde{\mu}_1, & f_4(2) = r_3\tilde{\mu}_2 + f_3(3)\tilde{\mu}_2, & f_4(3) = r_3\tilde{\mu}_3 + f_3(3)\tilde{\mu}_3,\\
& f_4(4) = r_3\tilde{\mu}_4 + f_3(3)\tilde{\mu}_4 + f_3(4). &
\end{array}$$

whose solutions are

$$\begin{array}{llll}
f_1(1)=\frac{r\mu_1}{1-\mu}, & f_1(2)=\frac{\tilde{\mu}_2(r_2(1-\mu_1)+r_1\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}, & f_1(3)=\frac{\mu_3(r_2(1-\mu_1)+r_1\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}, & f_1(4)=\frac{\mu_4(r_2(1-\mu_1)+r_1\tilde{\mu}_2)}{1-\mu},\\
f_2(1)=\frac{\mu_1(r_1(1-\tilde{\mu}_2)+r_2\mu_1)}{1-\mu}, & f_2(2)=\frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}, & f_2(3)=\frac{\mu_3(r_1(1-\tilde{\mu}_2)+r_2\mu_1)}{1-\mu}, & f_2(4)=\frac{\mu_4(r_1(1-\tilde{\mu}_2)+r_2\mu_1)}{1-\mu},\\
f_3(1)=\frac{\mu_1(r_4(1-\mu_3)+r_3\mu_4)}{1-\hat{\mu}}, & f_3(2)=\frac{\tilde{\mu}_2(r_4(1-\mu_3)+r_3\mu_4)}{1-\hat{\mu}}, & f_3(3)=\frac{\hat{r}\mu_3}{1-\hat{\mu}}, & f_3(4)=\frac{\mu_4(r_4(1-\mu_3)+r_3\mu_4)}{1-\hat{\mu}},\\
f_4(1)=\frac{\mu_1(r_3(1-\mu_4)+r_4\mu_3)}{1-\hat{\mu}}, & f_4(2)=\frac{\tilde{\mu}_2(r_3(1-\mu_4)+r_4\mu_3)}{1-\hat{\mu}}, & f_4(3)=\frac{\hat{r}\mu_4}{1-\hat{\mu}}, & f_4(4)=\frac{\mu_3(r_3(1-\mu_4)+r_4\mu_3)}{1-\hat{\mu}},
\end{array}$$

Also, according with the theorem (34.4.10) we have that for the gated policy $f_1(1,1)=f_2(1,1)+2\tilde{\mu}_1 f_2(1,2)+\tilde{\mu}_1^2 f_2(2,2)+P_1^{(2)}\left[r_2+f_2(2)\right]+2r_2\tilde{\mu}_1 f_2(1)R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1$, *in general*

$$\begin{aligned}
f_1(i,k) &= \mathbb{1}_{k=1}\mathbb{1}_{i=k}\tilde{\mu}_i f_2(1,1)+\left[\mathbb{1}_{k=1}\tilde{\mu}_1+\mathbb{1}_{i=1}\tilde{\mu}_k\right]f_2(1,2)+\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k f_2(2,2)+\left[\mathbb{1}_{i=k}\tilde{P}_i^{(2)}+\mathbb{1}_{i\neq k}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k\right]f_2(2)\\
&+\left[r_2\tilde{\mu}_i+\mathbb{1}_{i\geq 3}F_{i,2}^{(1)}\right]f_2(k)+\left[r_2\tilde{\mu}_k+\mathbb{1}_{k\geq 3}F_{k,2}^{(1)}\right]f_2(i)+\left[R_2^{(2)}+\mathbb{1}_{i=k}r_2\right]\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k\\
&+\left[\mathbb{1}_{k\geq 3}\tilde{\mu}_i F_{k,2}^{(1)}+\mathbb{1}_{i=k}P_i^{(2)}\right]r_2+\left[\mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{k\neq i}F_{k,2}^{(1)}+\mathbb{1}_{i\geq 3}r_2\tilde{\mu}_k\right]F_{i,2}^{(1)}+\mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{k=i}F_{i,2}^{(2)}\\
f_2(i,k) &= \tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k f_1(1,1)+\left[\mathbb{1}_{k=2}\tilde{\mu}_i+\mathbb{1}_{i=2}\tilde{\mu}_k\right]f_1(1,2)+\mathbb{1}_{k=2}\mathbb{1}_{i=k}\tilde{\mu}_i f_1(2,2)+\left[\mathbb{1}_{i=k}\tilde{P}_i^{(2)}+\mathbb{1}_{i\neq k}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k\right]f_1(1)\\
&+\left[r_1\tilde{\mu}_i+\mathbb{1}_{i\geq 3}F_{i,1}^{(1)}\right]f_1(k)+\left[r_1\tilde{\mu}_k+\mathbb{1}_{k\geq 3}F_{k,1}^{(1)}\right]f_1(i)+\left[R_1^{(2)}+\mathbb{1}_{i=k}r_1\right]\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k\\
&+\left[\mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{k\neq i}F_{i,1}^{(1)}+\mathbb{1}_{k\geq 3}r_1\tilde{\mu}_i\right]F_{k,1}^{(1)}+\left[\mathbb{1}_{i=k}P_i^{(2)}+\mathbb{1}_{i\geq 3}F_{i,1}^{(1)}\tilde{\mu}_k\right]r_1+\mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{k=i}F_{i,1}^{(2)}\\
f_3(i,k) &= \mathbb{1}_{k=3}\mathbb{1}_{i=k}\tilde{\mu}_i f_4(3,3)+\left[\mathbb{1}_{k=3}\tilde{\mu}_i+\mathbb{1}_{i=3}\tilde{\mu}_k\right]f_4(3,4)+\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k f_4(4,4)+\left[\mathbb{1}_{i=k}\tilde{P}_i^{(2)}+\mathbb{1}_{i\neq k}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k\right]f_4(4)\\
&+\left[r_4\tilde{\mu}_i+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_{i,4}^{(1)}\right]f_4(k)+\left[r_4\tilde{\mu}_k+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_{k,4}^{(1)}\right]f_4(i)+\left[R_4^{(2)}+\mathbb{1}_{i=k}r_4\right]\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k\\
&+\left[\mathbb{1}_{i=k}P_i^{(2)}+\mathbb{1}_{k\leq 2}\tilde{\mu}_i F_{k,4}^{(1)}\right]r_4+\left[\mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{k\neq i}F_{k,4}^{(1)}+\mathbb{1}_{i\leq 2}r_4\tilde{\mu}_k\right]F_{i,4}^{(1)}+\mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{k=i}F_{i,4}^{(2)}\\
f_4(i,k) &= \tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k f_3(3,3)+\left[\mathbb{1}_{k=4}\tilde{\mu}_i+\mathbb{1}_{i=4}\tilde{\mu}_k\right]f_3(3,4)+\mathbb{1}_{k=4}\mathbb{1}_{i=k}\tilde{\mu}_i f_3(4,4)+\left[\mathbb{1}_{i=k}\tilde{P}_i^{(2)}+\mathbb{1}_{i\neq k}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k\right]f_3(3)\\
&+\left[r_3\tilde{\mu}_i+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_{i,3}^{(1)}\right]f_3(k)+\left[r_3\tilde{\mu}_k+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_{k,3}^{(1)}\right]f_3(i)+\left[R_3^{(2)}+\mathbb{1}_{i=k}r_3\right]\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_k\\
&+\left[\mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{k\neq i}F_{k,3}^{(1)}+\mathbb{1}_{i\leq 2}r_3\tilde{\mu}_k\right]F_{i,3}^{(1)}+\left[\mathbb{1}_{k\leq 2}\tilde{\mu}_i F_{k,3}^{(1)}+\mathbb{1}_{i=k}P_i^{(2)}\right]r_3+\mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{k=i}F_{i,3}^{(2)}
\end{aligned}\tag{33.35.3}$$

So, the linear system equatiosn is given by

$$\begin{array}{ll}
f_1(1,1)=a_1f_2(1,1)+a_2f_2(1,2)+a_3f_2(2,2)+K_1, & f_1(1,2)=a_4f_2(1,2)+a_5f_1(2,2)+K_2,\\
f_1(1,3)=a_6f_2(2,1)+a_7f_2(2,2)+K_3, & f_1(1,4)=a_8f_2(2,1)+a_9f_2(2,2)+K_4,\\
f_1(2,2)=a_{10}f_2(2,2)+K_5, & f_1(2,3)=a_{11}f_2(2,2)+K_6,\\
f_2(2,4)=a_{12}f_2(2,2)+K_7, & f_1(3,3)=a_{13}f_2(2,2)+K_8,\\
f_1(3,4)=a_{14}f_2(2,2)+K_9, & f_1(4,4)=a_{15}f_2(2,2)+K_{10}\\
f_2(1,1)=a_{16}f_1(1,1)+K_{11}, & f_2(1,2)=a_{17}f_1(1,1)+a_{18}f_1(1,2)+K_{12},\\
f_2(1,3)=a_{19}f_1(1,1)+K_{13}, & f_2(1,4)=a_{20}f_1(1,1)+K_{14},\\
f_2(2,2)=a_{21}f_1(1,1)+a_{22}f_1(1,2)+a_{23}f_1(2,2)+K_{15}, & f_2(2,3)=a_{24}f_1(1,1)+a_{25}f_1(1,2)+K_{16},\\
f_2(2,4)=a_{26}f_1(1,1)+a_{27}f_1(1,2)+K_{17}, & f_2(3,3)=a_{28}f_1(1,1)+K_{18},\\
f_2(3,4)=a_{29}f_1(1,1)+K_{19}, & f_2(4,4)=a_{30}f_1(1,1)+K_{20}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
f_3(1,1)=a_{31}f_4(4,4)+K_{21}, & f_3(1,2)=a_{32}f_4(4,4)+K_{22},\\
f_3(1,3)=a_{33}f_4(4,4)+a_{34}f_4(3,4)+K_{23}, & f_3(1,4)=a_{35}f_4(4,4)+K_{24},\\
f_3(2,2)=a_{36}f_4(4,4)+K_{25}, & f_3(2,3)=a_{37}f_4(3,4)+a_{38}f_4(4,4)+K_{26},\\
f_3(2,4)=a_{39}f_4(4,4)+K_{27}, & f_3(3,3)=a_{39}f_4(3,3)+a_{40}f_4(3,4)+a_{41}f_4(4,4)+K_{28},\\
f_3(3,4)=a_{42}f_4(3,4)+a_{43}f_4(4,4)+K_{29}, & f_3(4,4)=a_{44}f_4(4,4)+K_{30}\\
f_4(1,1)=a_{45}f_3(3,3)+K_{31}, & f_4(1,2)=a_{46}f_3(3,3)+K_{32},\\
f_4(1,3)=a_{47}f_3(3,3)+K_{33}, & f_4(1,4)=a_{48}f_3(3,3)+a_{49}f_3(3,4)+K_{34},\\
f_4(2,2)=a_{50}f_3(3,3)+K_{35}, & f_4(2,3)=a_{51}f_3(3,3)+K_{36},\\
f_4(2,4)=a_{52}f_3(3,3)+a_{53}f_3(3,4)+K_{37}, & f_4(3,3)=a_{54}f_3(3,3)+K_{38},\\
f_4(3,4)=a_{55}f_3(3,3)+a_{56}f_3(3,4)+K_{39}, & f_4(4,4)=a_{57}f_3(3,3)+a_{58}f_3(3,4)+a_{59}f_3(4,4)+K_{40}
\end{array}$$

with constants

$$
\begin{array}{llllll}
a_1 = 1, & a_2 = 2\mu_1, & a_3 = \mu_1^2, & a_4 = \tilde{\mu}_2, & a_5 = \mu_1\tilde{\mu}_2, & a_6 = \mu_3, \\
a_7 = \mu_1\mu_3, & a_8 = \mu_4, & a_9 = \mu_1\mu_4, & a_{10} = \tilde{\mu}_2^2, & a_{11} = \tilde{\mu}_2\mu_3, & a_{12} = \tilde{\mu}_2\mu_4, \\
a_{13} = \mu_3^2, & a_{14} = \mu_3\mu_4, & a_{15} = \mu_4^2, & a_{16} = \mu_1^2, & a_{17} = \mu_1\tilde{\mu}_2, & a_{18} = \mu_1, \\
a_{19} = \mu_1\mu_3, & a_{20} = \mu_1\mu_4, & a_{21} = \tilde{\mu}_2^2, & a_{22} = 2\tilde{\mu}_2, & a_{23} = 1, & a_{24} = \tilde{\mu}_2\mu_3, \\
a_{25} = \mu_3, & a_{26} = \tilde{\mu}_2\mu_4, & a_{27} = \mu_4, & a_{28} = \mu_3^2, & a_{29} = \mu_3\mu_4, & a_{30} = \mu_4^2, \\
a_{31} = \mu_1^2, & a_{32} = \mu_1\tilde{\mu}_2, & a_{33} = \mu_1, & a_{34} = \mu_1\mu_3, & a_{35} = \mu_1\mu_4, & a_{36} = \tilde{\mu}_2^2, \\
a_{37} = \tilde{\mu}_2, & a_{38} = \tilde{\mu}_2\mu_3, & a_{39} = \tilde{\mu}_2\mu_4, & a_{40} = 1, & a_{41} = 2\mu_3, & a_{42} = \mu_3^2, \\
a_{43} = \mu_4, & a_{44} = \mu_3\mu_4, & a_{45} = \mu_4^2, & a_{46} = \mu_1^2, & a_{47} = \mu_1\tilde{\mu}_2, & a_{48} = \mu_1\mu_3, \\
a_{49} = \mu_1\mu_4, & a_{50} = \mu_1, & a_{51} = \tilde{\mu}_2^2, & a_{52} = \mu_3\tilde{\mu}_2, & a_{53} = \mu_4\tilde{\mu}_2, & a_{54} = \tilde{\mu}_2, \\
a_{55} = \mu_3^2, & a_{56} = \mu_3\mu_4, & a_{57} = \mu_3, & a_{58} = \mu_4^2, & a_{59} = 2\mu_4, & a_{60} = 1.
\end{array}
\tag{33.35.4}
$$

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \tilde{P}_1^{(2)}\left[r_2 + f_2(2)\right] + 2r_2\tilde{\mu}_1 f_2(1) R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\\
K_2 &= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + r_2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + f_2(2)\tilde{\mu}_2\mu_1 + r_2\tilde{\mu}_1 f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2 f_2(1)\\
K_3 &= \mu_1\mu_3\left[R_2^{(2)} + r_2 + f_2(2)\right] + r_2\mu_1\left[f_2(3) + F_{3,2}^{(1)}\right] + f_2(1)\left[r_2\mu_3 + F_{3,2}^{(1)}\right]\\
K_4 &= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4\left[R_2^{(2)} + r_2 + f_2(2)\right] + r_2\tilde{\mu}_1\left[f_2(4) + F_{4,2}^{(1)}\right] + f_2(1)\left[r_2\tilde{\mu}_4 + F_{4,2}^{(1)}\right]\\
K_5 &= \tilde{P}_2^{(2)}\left[r_2 + f_2(2)\right] + \tilde{\mu}_2\left[R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2 + 2r_2 f_2(2)\right]\\
K_6 &= \tilde{\mu}_2\mu_3\left[R_2^{(2)} + r_2 + f_2(2)\right] + r_2\tilde{\mu}_2\left[f_2(3) + F_{3,1}^{(1)}(1)\right] + f_2(2)\left[r_2\mu_3 + F_{3,1}^{(1)}(1)\right]\\
K_7 &= \tilde{\mu}_2\mu_4\left[R_2^{(2)} + r_2 + f_2(2)\right] + r_2\tilde{\mu}_2\left[f_2(4) + F_{4,2}^{(1)}\right] + f_2(2)\left[r_2\tilde{\mu}_4 + F_{4,2}^{(1)}\right]\\
K_8 &= \tilde{P}_3^{(2)}\left[r_2 + f_2(2)\right] + r_2\tilde{\mu}_3\left[f_2(3) + F_{3,2}^{(1)} + f_2(3)\right] + F_{3,2}^{(1)}\left[2f_2(3) + r_2\tilde{\mu}_3\right] + F_{3,2}^{(2)} + R_2^{(2)}\tilde{\mu}_3^2\\
K_9 &= \mu_3\mu_4\left[R_2^{(2)} + r_2 + f_2(2)\right] + r_2\tilde{\mu}_3\left[f_2(4) + F_{4,2}^{(1)}\right] + r_2\tilde{\mu}_4\left[f_2(3) + F_{3,2}^{(1)}\right] + F_{4,2}^{(1)}\left[f_2(3) + F_{3,2}^{(1)}\right] + F_{3,2}^{(1)} f_2(4)\\
K_{10} &= P_4^{(2)}\left[r_2 + f_2(2)\right] + 2F_{4,2}^{(1)}\left[r_2\tilde{\mu}_4 + f_2(4)\right] + \tilde{\mu}_4\left[\tilde{\mu}_4 R_2^{(2)} + 2r_2 f_2(4)\right] + F_{4,2}^{(2)}
\end{aligned}
\tag{33.35.5}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{11} &= f_1(1)\left[P_1^{(2)} + 2r_1\tilde{\mu}_1\right] + R_1^2\tilde{\mu}_1^2 + r_1\tilde{P}_1^{(2)}\\
K_{12} &= \mu_1\tilde{\mu}_2\left[R_1^{(2)} + r_1 + f_1(1)\right] + r_1\left[\tilde{\mu}_1 f_1(2) + \tilde{\mu}_2 f_1(1)\right]\\
K_{13} &= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3\left[R_1^{(2)} + r_1 + f_1(1)\right] + r_1\tilde{\mu}_1\left[f_1(3) + F_{3,1}^{(1)}\right] + f_1(1)\left[r_1\tilde{\mu}_3 + F_{3,1}^{(1)}\right]\\
K_{14} &= \mu_1\mu_4\left[R_1^{(2)} + r_1 + f_1(1)\right] + r_1\mu_1\left[f_1(4) + F_{4,1}^{(1)}\right] + f_1(1)\left[r_1\mu_4 + F_{4,1}^{(1)}\right]\\
K_{15} &= \tilde{P}_2^{(2)}\left[r_1 + f_1(1)\right] + \tilde{\mu}_2\left[\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)} + 2r_1 f_1(2)\right]\\
K_{16} &= \tilde{\mu}_2\mu_3\left[R_1^{(2)} + r_1 + f_1(1)\right] + r_1\tilde{\mu}_2\left[f_1(3) + F_{3,1}^{(1)}\right] + f_1(2)\left[r_1\tilde{\mu}_3 + F_{3,1}^{(1)}\right]\\
K_{17} &= \tilde{\mu}_2\mu_4\left[+R_1^{(2)} + r_1 + f_1(1)\right] + r_1\tilde{\mu}_2\left[f_1(4) + F_{4,1}^{(1)}\right] + f_1(2)\left[r_1\tilde{\mu}_4 + F_{4,1}^{(1)}\right]\\
K_{18} &= P_3^{(2)}\left[r_1 + f_1(1)\right] + 2r_1\tilde{\mu}_3\left[f_1(3) + F_{3,1}^{(1)}\right] + \left[R_1^{(2)}\tilde{\mu}_3^2 + F_{3,1}^{(2)} + 2F_{3,1}^{(1)} f_1(3)\right]\\
K_{19} &= \mu_3\mu_4\left[R_1^{(2)} + r_1 + f_1(1)\right] + r_1\mu_3\left[f_1(4) + F_{4,1}^{(1)}\right] + f_1(3)\left[r_1\tilde{\mu}_4 + F_{4,1}^{(1)}\right] + F_{3,1}^{(1)}\left[r_1\tilde{\mu}_4 + f_1(4)\right] + F_{4,2}^{(1)} F_{3,2}^{(1)}\\
K_{20} &= P_4^{(2)}\left[r_1 + f_1(1)\right] + \tilde{\mu}_4\left[2r_1 f_1(4) + R_1^{(2)}\tilde{\mu}_4\right] + 2F_{4,1}^{(1)}\left[f_1(4) + r_1\tilde{\mu}_4\right] + F_{4,1}^{(2)}
\end{aligned}
\tag{33.35.6}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{21} &= P_1^{(2)}\left[r_4 + f_4(4)\right] + 2r_4\tilde{\mu}_1\left[F_{1,4}^{(1)} + f_4(1)\right] + \left[2f_4(1) F_{1,4}^{(1)} + F_{1,4}^{(2)} + R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1^2\right]\\
K_{22} &= \mu_1\tilde{\mu}_2\left[R_4^{(2)} + r_4 + f_4(4)\right] + r_4\tilde{\mu}_1\left[F_{2,4}^{(1)} + f_4(2)\right] + f_4(1)\left[r_4\tilde{\mu}_2 + F_{2,4}^{(1)}\right] + F_{1,4}^{(1)}\left[r_4\tilde{\mu}_2 + f_4(2) + F_{2,4}^{(1)}\right]\\
K_{23} &= \mu_1\mu_3\left[R_4^{(2)} + r_4 + f_4(4)\right] + r_4\tilde{\mu}_3\left[F_{1,4}^{(1)} + f_4(1)\right] + f_4(3)\left[F_{1,4}^{(1)} + r_4\tilde{\mu}_1\right]\\
K_{24} &= \mu_1\mu_4\left[R_4^{(2)} + r_4 + f_4(4)\right] + f_4(4)\left[r_4\tilde{\mu}_1 + F_{1,4}^{(1)}\right] + r_4\tilde{\mu}_4\left[f_4(1) + F_{1,4}^{(1)}\right]\\
K_{25} &= R_4^{(2)}\tilde{\mu}_2^2 + \tilde{P}_2^{(2)}\left[r_4 + f_4(4)\right] + 2r_4\tilde{\mu}_2\left[F_{2,4}^{(1)} + f_4(2)\right] + \left[2f_4(2) F_{2,4}^{(1)} + F_{2,4}^{(2)}\right]\\
K_{26} &= \tilde{\mu}_2\mu_3\left[R_4^{(2)} + r_4 + f_4(4)\right] + r_4\tilde{\mu}_3\left[f_4(2) + F_{2,4}^{(1)}\right] + f_4(3)\left[r_4\tilde{\mu}_2 + F_{2,4}^{(1)}\right]\\
K_{27} &= \tilde{\mu}_2\mu_4\left[R_4^{(2)} + r_4 + f_4(4)\right] + r_4\tilde{\mu}_4\left[f_4(4) + F_{2,4}^{(1)}\right] + f_4(4)\left[r_4\tilde{\mu}_2 + F_{2,4}^{(1)}\right]\\
K_{28} &= P_3^{(2)}\left[r_4 + f_4(4)\right] + \tilde{\mu}_3\left[R_4^{(2)}\tilde{\mu}_3 + 2r_4 f_4(4)\right]\\
K_{29} &= \mu_3\mu_4\left[R_4^{(2)} + r_4 + f_4(4)\right] + r_4\left[\tilde{\mu}_3 f_4(4) + \tilde{\mu}_4 f_4(3)\right]\\
K_{30} &= P_4^{(2)}\left[r_4 + f_4(4)\right] + \tilde{\mu}_4\left[R_4^{(2)}\tilde{\mu}_4 + 2r_4 f_4(4)\right]
\end{aligned}
\tag{33.35.7}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{31} &= P_1^{(2)}\left[r_3+f_3\left(3\right)\right]+2f_3\left(1\right)\left[r_3\tilde{\mu}_1+F_{1,3}^{(1)}\right]+\tilde{\mu}_1\left[R_3^{(2)}\tilde{\mu}_1+2F_{1,3}^{(1)}r_3\right]+F_{1,3}^{(2)}\\
K_{32} &= \mu_1\tilde{\mu}_2\left[R_3^{(2)}+r_3+f_3\left(3\right)\right]+r_3\tilde{\mu}_1\left[F_{2,3}^{(1)}+f_3\left(2\right)\right]+f_3\left(1\right)\left[r_3\tilde{\mu}_2+F_{2,3}^{(1)}\right]+F_{1,3}^{(1)}\left[r_3\tilde{\mu}_2+f_3\left(2\right)+F_{2,3}^{(1)}\right]\\
K_{33} &= \mu_1\mu_3\left[R_3^{(2)}+r_3+f_3\left(3\right)\right]+r_3\tilde{\mu}_3\left[f_3\left(1\right)+F_{1,3}^{(1)}\right]+f_3\left(3\right)\left[F_{1,3}^{(1)}+r_3\tilde{\mu}_1\right]\\
K_{34} &= \mu_1\mu_4\left[R_3^{(2)}+r_3+f_3\left(3\right)\right]+r_3\tilde{\mu}_4\left[f_3\left(1\right)+F_{1,3}^{(1)}\right]+f_3\left(4\right)\left[r_3\tilde{\mu}_1+F_{1,3}^{(1)}\right]\\
K_{35} &= P_2^{(2)}\left[r_3+f_3\left(3\right)\right]+2r_3\tilde{\mu}_2\left[F_{2,3}^{(1)}+f_3\left(2\right)\right]+\left[R_3^{(2)}\tilde{\mu}_2^2+F_{2,3}^{(2)}+2f_3\left(2\right)F_{2,3}^{(1)}\right]\\
K_{36} &= \mu_3\tilde{\mu}_2\left[R_3^{(2)}+r_3+f_3\left(3\right)\right]+r_3\tilde{\mu}_3\left[f_3\left(2\right)+F_{2,3}^{(1)}\right]+f_3\left(3\right)\left[r_3\tilde{\mu}_2+F_{2,3}^{(1)}\right]\\
K_{37} &= \mu_4\tilde{\mu}_2\left[R_3^{(2)}+r_3+f_3\left(3\right)\right]+f_3\left(4\right)\left[r_3\tilde{\mu}_2+F_{2,3}^{(1)}\right]+r_3\tilde{\mu}_4\left[f_3\left(2\right)+F_{2,3}^{(1)}\right]\\
K_{38} &= P_3^{(2)}\left[r_3+f_3\left(3\right)\right]+\tilde{\mu}_3\left[R_3^{(2)}\tilde{\mu}_3+2r_3f_3\left(3\right)\right]\\
K_{39} &= \mu_4\mu_3\left[R_3^{(2)}+r_3+f_3\left(3\right)\right]+r_3\left[\tilde{\mu}_3f_3\left(4\right)+\tilde{\mu}_4f_3\left(3\right)\right]\\
K_{40} &= \tilde{\mu}_4\left[2r_3f_3\left(4\right)+R_3^{(2)}\tilde{\mu}_4\right]+P_4^{(2)}\left[r_3+f_3\left(3\right)\right]
\end{aligned}
\tag{33.35.8}
$$

Let's define the probability of the event no ruin before the n-th period begining with $\tilde{L}_0$ users, $g_{n,k}$ considering a capital equal to k units after $n-1$ events, i.e., given $n\in\{1,2,\dots\}$ y $k\in\{0,1,2,\dots\}$ $g_{n,k}:=P\left\{\tilde{L}_j>0, j=1,\dots,n, \tilde{L}_n=k\right\}$, which can be written as:

Supuestos 33.9 *a) c is lower semicontinuous, and inf-compact on $\mathbb{K}$ (i.e. for every $x\in X$ and $r\in\mathbb{R}$ the set $\{a\in A(x): c(x,a)\leq r\}$ is compact).*

b) The transition law Q is strongly continuous, i.e. $u(x,a)=\int u(y)Q(dy|x,a)$, $(x,a)\in\mathbb{K}$ is continuous and bounded on $\mathbb{K}$, for every measurable bounded function u on X.

c) There exists a policy π such that $V(\pi,x)<\infty$, for each $x\in X$.

Observación 33.7 *The following consequences of Assumption 33.9 are well-known (see Theorem 4.2.3 and Lemma 4.2.8 in [?]):*

a) The optimal value function V^* is the solution of the Optimality Equation (OE), i.e. for all $x\in X$,

$$V^*(x)=\min_{a\in A(x)}\left\{c(x,a)+\alpha\int V^*(y)Q(dy|x,a)\right\}.$$

There is also $f^*\in\mathbb{F}$ such that:

$$V^*(x)=c(x,f^*(x))+\alpha\int V^*(y)Q(dy|x,f^*(x)), \tag{33.35.9}$$

$x\in X$, and f^* is optimal.

b) For every $x\in X$, $v_n(x)\uparrow V^*$, with v_n defined as

$$v_n(x)=\min_{a\in A(x)}\left\{c(x,a)+\alpha\int v_{n-1}(y)Q(dy|x,a)\right\},$$

$x\in X, n=1,2,\cdots$, and $v_0(x)=0$. Moreover, for each n, there is $f_n\in\mathbb{F}$ such that, for each $x\in X$,

$$\min_{a\in A(x)}\left\{c(x,a)+\alpha\int v_{n-1}(y)Q(dy|x,a)\right\}=c(x,f_n(x))+\alpha\int v_{n-1}(y)Q(dy|x,f_n(x)). \tag{33.35.10}$$

Let $(X,A,\{A(x):x\in X\},Q,c)$ be a fixed Markov control model. Take M as the MDP with the Markov control model $(X,A,\{A(x):x\in X\},Q,c)$. The optimal value function, the optimal policy which comes from (33.35.9), and the minimizers in (33.35.10) will be denoted for M by V^*, f^*, and f_n , $n=1,2,\cdots$, respectively. Also let v_n, $n=1,2,\cdots$, be the value iteration functions for M. Let $G(x,a):=c(x,a)+\alpha\int V^*(y)Q(dy|x,a)$, $(x,a)\in\mathbb{K}$.
It will be also supposed that the MDPs taken into account satisfy one of the following Assumptions 33.10 or 33.11.

Supuestos 33.10 *a) X and A are convex;*

b) $(1-\lambda)a+a'\in A((1-\lambda)x+x')$ for all x, $x'\in X$, $a\in A(x)$, $a'\in A(x')$ and $\lambda\in[0,1]$. Besides it is assumed that: if x and $y\in X$, $x<y$, then $A(y)\subseteq A(x)$, and $A(x)$ are convex for each $x\in X$;

c) *Q is induced by a difference equation* $x_{t+1} = F(x_t, a_t, \xi_t)$, *with* $t = 0, 1, \cdots$, *where* $F : X \times A \times S \to X$ *is a measurable function and* $\{\xi_t\}$ *is a sequence of independent and identically distributed (i.i.d.) random variables with values in* $S \subseteq \mathbb{R}$, *and with a common density* Δ. *In addition, we suppose that* $F(\cdot, \cdot, s)$ *is a convex function on* $\mathbb{K}$, *for each* $s \in S$; *and if* x *and* $y \in X$, $x < y$, *then* $F(x, a, s) \leq F(y, a, s)$ *for each* $a \in A(y)$ *and* $s \in S$;

d) *c is convex on* $\mathbb{K}$, *and if* x *and* $y \in X$, $x < y$, *then* $c(x, a) \leq c(y, a)$, *for each* $a \in A(y)$.

Supuestos 33.11 *a) Same as Assumption 33.10 (a);*

b) $(1 - \lambda)a + a' \in A((1 - \lambda)x + x')$ *for all* x, $x' \in X$, $a \in A(x)$, $a' \in A(x')$ *and* $\lambda \in [0, 1]$. *Besides* $A(x)$ *is assumed to be convex for each* $x \in X$;

c) *Q is given by the relation* $x_{t+1} = \gamma x_t + \delta a_t + \xi_t$, $t = 0, 1, \cdots$, *where* $\{\xi_t\}$ *are i.i.d. random variables taking values in* $S \subseteq \mathbb{R}$ *with the density* Δ, γ *and* δ *are real numbers;*

d) *c is convex on* $\mathbb{K}$.

Observación 33.8 *Assumptions 33.10 and 33.11 are essentially presented in Conditions C1 and C2 in [**?**], but changing a strictly convex* $c(\cdot, \cdot)$ *by a convex* $c(\cdot, \cdot)$. *(In fact, in [**?**], Conditions C1 and C2 take into account the more general situation in which both X and A are subsets of Euclidean spaces of the dimension greater than one.) Also note that it is possible to obtain that each of Assumptions 33.10 and 33.11 implies that, for each* $x \in X$, $G(x, \cdot)$ *is convex but not necessarily strictly convex (hence, M does not necessarily have a unique optimal policy). The proof of this fact is a direct consequence of the convexity of the cost function c, and of the proof of Lemma 6.2 in [**?**].*

$$
\begin{array}{llll}
D_1F_1(z_1,z_2;\tau_3) = F^{(1)}_{1,3}(1), & D_2F_1(z_1,z_2;\tau_3) = F^{(1)}_{2,3}(1), & D_1F_2(z_1,z_2;\tau_4) = F^{(1)}_{1,4}(1), & D_2F_2(z_1,z_2;\tau_4) = F^{(1)}_{2,4}(1)\\
D_3F_3(z_3,z_4;\tau_1) = F^{(1)}_{3,1}(1), & D_4F_3(z_3,z_4;\tau_1) = F^{(1)}_{4,1}(1), & D_3F_4(z_3,z_4;\tau_2) = F^{(1)}_{3,2}(1), & D_4F_4(z_3,z_4;\tau_2) = F^{(1)}_{4,2}(1)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
D_1^2F_1(z_1,z_2;\tau_3) = F^{(2)}_{1,3}, & D_2D_1F_1(z_1,z_2;\tau_3) = F^{(1)}_{2,3}(1)F^{(1)}_{1,3}, & D_2^2F_1(z_1,z_2;\tau_3) = F^{(2)}_{2,3}\\
D_1^2F_2(z_1,z_2;\tau_4) = F^{(2)}_{1,4}, & D_2D_1F_2(z_1,z_2;\tau_4) = F^{(1)}_{2,4}(1)F^{(1)}_{1,4}, & D_2^2F_2(z_1,z_2;\tau_4) = F^{(2)}_{2,4}\\
D_3^2F_3(z_3,z_4;\tau_1) = F^{(2)}_{3,1}, & D_4D_3F_3(z_3,z_4;\tau_1) = F^{(1)}_{3,1}(1)F^{(1)}_{4,1}, & D_4^2F_3(z_3,z_4;\tau_1) = F^{(2)}_{4,1}\\
D_3^2F_4(z_3,z_4;\tau_2) = F^{(2)}_{3,2}, & D_4D_3F_4(z_3,z_4;\tau_2) = F^{(1)}_{3,2}(1)F^{(1)}_{4,2}, & D_4^2F_4(z_3,z_4;\tau_2) = F^{(2)}_{4,2}
\end{array}
$$

The second order partial derivatives can be obtained in the following

$$
\begin{array}{ll}
D_i^2F_k(z_1,z_2;\tau_{2k+1}) = F^{(2)}_{i,2k+1}, & D_i^2F_k(z_3,z_4;\tau_{2k+1}) = F^{(2)}_{i,2k+1}\\
D_jD_iF_k(z_1,z_2;\tau_{2k+1}) = F^{(1)}_{j,2k+1}F^{(1)}_{i,2k+1}, & D_jD_iF_k(z_3,z_4;\tau_{2k+1}) = F^{(1)}_{j,2k+1}F^{(1)}_{i,2k+1}.
\end{array}
\tag{33.35.11}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
D_jD_iF_k(z_1,z_2;\tau_{k-2}) &=& \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F^{(2)}_{i,k-2} + \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j\neq i}F^{(1)}_{j,k-2}F^{(1)}_{i,k+2}\\
D_jD_iF_k(z_3,z_4;\tau_{k+2}) &=& \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F^{(2)}_{i,k+2} + \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j\neq i}F^{(1)}_{j,k+2}F^{(1)}_{i,k+2}\\
D_jD_iF_3(z_1,z_2;\tau_1) &=& \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F^{(2)}_{i,1} + \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j\neq i}F^{(1)}_{j,1}F^{(1)}_{i,1}\\
D_jD_iF_4(z_1,z_2;\tau_2) &=& \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F^{(2)}_{i,2} + \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j\neq i}F^{(1)}_{j,2}F^{(1)}_{i,1}\\
D_jD_iF_1(z_3,z_4;\tau_3) &=& \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j=i}F^{(2)}_{i,3} + \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j\neq i}F^{(1)}_{j,3}F^{(1)}_{i,3}\\
D_jD_iF_2(z_3,z_4;\tau_4) &=& \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j=i}F^{(2)}_{i,4} + \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j\neq i}F^{(1)}_{j,4}F^{(1)}_{i,4}
\end{array}
$$

with second order partial derivatives

$$
\begin{array}{ll}
D_i^2F_k(z_1,z_2;\tau_{2k+1}) = F^{(2)}_{i,2k+1}, & D_i^2F_k(z_3,z_4;\tau_{2k+1}) = F^{(2)}_{i,2k+1}\\
D_jD_iF_k(z_1,z_2;\tau_{2k+1}) = F^{(1)}_{j,2k+1}F^{(1)}_{i,2k+1}, & D_jD_iF_k(z_3,z_4;\tau_{2k+1}) = F^{(1)}_{j,2k+1}F^{(1)}_{i,2k+1}.
\end{array}
\tag{33.35.12}
$$

for $i, j, k = 1, 2, 3, 4$.

Supuestos 33.12 *There is a policy* ϕ *such that* $E_x^{\phi}\left[\sum_{t=0}^{\infty}\alpha^t c^*(x_t, a_t)\right] < \infty$, *for each* $x \in X$.

Observación 33.9 *Suppose that, for M, Assumption 2.1 holds. Then, it is direct to verify that if* M_ϵ *satisfies Assumption 33.12, then it also satisfies Assumption 33.9.*

Condición 33.3 *There exists a measurable function $Z : X \to \mathbb{R}$, which may depend on α, such that $c^*(x,a) - c(x,a) = \epsilon a^2 \leq \epsilon Z(x)$, and $\int Z(y)Q(dy|x,a) \leq Z(x)$ for each $x \in X$ and $a \in B(x)$.*

Teorema 33.3 *Suppose that Assumptions 33.9 and 33.12 hold, and that, for M, one of Assumptions 33.10 or 33.11 holds. Let ϵ be a positive number. Then,*

a) If A is compact, $|W^*(x) - V^*(x)| \leq \epsilon K^2/(1-\alpha)$, $x \in X$, where K is the diameter of a compact set D such that $0 \in D$ and $A \subseteq D$.

b) Under Condition 33.3, $|W^*(x) - V^*(x)| \leq \epsilon Z(x)/(1-\alpha)$, $x \in X$.

Demostración 33.6 *The proof of case (a) follows from the proof of case (b) given that $Z(x) = K^2$, $x \in X$. (Observe that in this case, if $a \in A$, then $a^2 = (a-0)^2 \leq K^2$.)*
(b) *Assume that M satisfies Assumption 33.10. (The proof for the case in which M satisfies Assumption 33.11 is similar.)*

The following Corollary is immediate.

Corolario 33.3 *Suppose that Assumptions 33.9 and 33.12 hold. Suppose that for M one of Assumptions 33.10 or 33.11 holds (hence M does not necessarily have a unique optimal policy). Let ϵ be a positive number. If A is compact or Condition 33.3 holds, then there exists an MDP M_ϵ with a unique optimal policy g^*, such that inequalities in Theorem 3.7 (a) or (b) hold, respectively.*

Ejemplo 33.3 *Ejemplo1*

Lema 33.5 *Lema1*

Demostración 33.7 *Assumption 33.9 (a) trivially holds. The proof of the strong continuity of Q*

The second order partial derivatives are According to the notation given in [24] we obtain

$$D_iD_iR_k = D^2R_k\left(D_i\tilde{P}_i\right)^2 + DR_kD_i^2\tilde{P}_i \tag{33.35.13}$$

whereas for $i \neq j$

$$D_iD_jR_k = D^2R_kD_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j + DR_kD_j\tilde{P}_jD_i\tilde{P}_i \tag{33.35.14}$$

while the mixed partial derivatives are:

$$\begin{array}{ll} D_iD_iR_k = D^2R_k\left(D_iP_i\right)^2 + DR_kD_iD_iP_i, & i = j \\ D_iD_jR_k = D^2R_kD_iP_iD_jP_j + DR_kD_jP_jD_iP_i, & i \neq j \end{array} \tag{33.35.15}$$

$$D_jD_iR_k = R_k^{(2)}\mu_i\mu_j + \mathbb{1}_{i=j}r_kP_i^{(2)} + \mathbb{1}_{i=j}r_k\mu_i\mu_j \tag{33.35.16}$$

for any i, j, k.

$$\begin{array}{llll} D_1F_1\left(z_1,z_2;\tau_3\right) = F_{1,3}^{(1)}\left(1\right), & D_2F_1\left(z_1,z_2;\tau_3\right) = F_{2,3}^{(1)}\left(1\right), & D_1F_2\left(z_1,z_2;\tau_4\right) = F_{1,4}^{(1)}\left(1\right), & D_2F_2\left(z_1,z_2;\tau_4\right) = F_{2,4}^{(1)}\left(1\right) \\ D_3F_3\left(z_3,z_4;\tau_1\right) = F_{3,1}^{(1)}\left(1\right), & D_4F_3\left(z_3,z_4;\tau_1\right) = F_{4,1}^{(1)}\left(1\right), & D_3F_4\left(z_3,z_4;\tau_2\right) = F_{3,2}^{(1)}\left(1\right), & D_4F_4\left(z_3,z_4;\tau_2\right) = F_{4,2}^{(1)}\left(1\right) \end{array}$$

with second order derivatives given by

$$\begin{array}{lll} D_1^2F_1\left(z_1,z_2;\tau_3\right) = F_{1,3}^{(2)}\left(1\right), & D_2D_1F_1\left(z_1,z_2;\tau_3\right) = F_{2,3}^{(1)}\left(1\right)F_{1,3}^{(1)}\left(1\right), & D_2^2F_1\left(z_1,z_2;\tau_3\right) = F_{2,3}^{(2)}\left(1\right) \\ D_1^2F_2\left(z_1,z_2;\tau_4\right) = F_{1,4}^{(2)}\left(1\right), & D_2D_1F_2\left(z_1,z_2;\tau_4\right) = F_{2,4}^{(1)}\left(1\right)F_{1,4}^{(1)}\left(1\right), & D_2^2F_2\left(z_1,z_2;\tau_4\right) = F_{2,4}^{(2)}\left(1\right) \\ D_3^2F_3\left(z_3,z_4;\tau_1\right) = F_{3,1}^{(2)}\left(1\right), & D_4D_3F_3\left(z_3,z_4;\tau_1\right) = F_{3,1}^{(1)}\left(1\right)F_{4,1}^{(1)}\left(1\right), & D_4^2F_3\left(z_3,z_4;\tau_1\right) = F_{4,1}^{(2)}\left(1\right) \\ D_3^2F_4\left(z_3,z_4;\tau_2\right) = F_{3,2}^{(2)}\left(1\right), & D_4D_3F_4\left(z_3,z_4;\tau_2\right) = F_{3,2}^{(1)}\left(1\right)F_{4,2}^{(1)}\left(1\right), & D_4^2F_4\left(z_3,z_4;\tau_2\right) = F_{4,2}^{(2)}\left(1\right) \end{array}$$

According to the equations given before, we can obtain general expressions, so for $F_1\left(z_1,z_2;\tau_3\right)$ and $F_2\left(z_1,z_2;\tau_4\right)$ we have

$$D_jF_i\left(z_1,z_2;\tau_{2i+1}\right)=\mathbb{1}_{j\leq 2}F^{(1)}_{j,2i+1},\quad D_jF_i\left(z_3,z_4;\tau_{2i+1}\right)=\mathbb{1}_{j\geq 3}F^{(1)}_{j,2i+1} \tag{33.35.17}$$

for $i=1,2$ and $j=1,2,3,4$. The second order partial derivatives can be obtained in the following

$$\begin{array}{ll}D_i^2F_k\left(z_1,z_2;\tau_{2k+1}\right)=F^{(2)}_{i,2k+1}, & D_i^2F_k\left(z_3,z_4;\tau_{2k+1}\right)=F^{(2)}_{i,2k+1}\\ D_jD_iF_k\left(z_1,z_2;\tau_{2k+1}\right)=F^{(1)}_{j,2k+1}F^{(1)}_{i,2k+1}, & D_jD_iF_k\left(z_3,z_4;\tau_{2k+1}\right)=F^{(1)}_{j,2k+1}F^{(1)}_{i,2k+1}.\end{array} \tag{33.35.18}$$

$$\begin{aligned}D_jD_iF_3\left(z_1,z_2;\tau_1\right) &= \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F^{(2)}_{i,1}+\mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j\neq i}F^{(1)}_{j,1}F^{(1)}_{i,1}\\ D_jD_iF_4\left(z_1,z_2;\tau_2\right) &= \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F^{(2)}_{i,2}+\mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j\neq i}F^{(1)}_{j,2}F^{(1)}_{i,1}\\ D_jD_iF_1\left(z_3,z_4;\tau_3\right) &= \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j=i}F^{(2)}_{i,3}+\mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j\neq i}F^{(1)}_{j,3}F^{(1)}_{i,3}\\ D_jD_iF_2\left(z_3,z_4;\tau_4\right) &= \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j=i}F^{(2)}_{i,4}+\mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j\neq i}F^{(1)}_{j,4}F^{(1)}_{i,4}\end{aligned}$$

The second order partial derivatives are

$$\begin{aligned}&D_jD_iF_1=\mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1D_1F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i\neq j}D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j\right)\\ &+\left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq 6}D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i>j}D_i\tilde{P}_i\right)+\mathbb{1}_{i=2}\left(D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_i\tilde{P}_i+D_i^2F_1\right)\\ &D_jD_iF_2=\mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2D_2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i\neq j}D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j\right)\\ &+\left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq 6}D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i>j}D_i\tilde{P}_i\right)+\mathbb{1}_{i=1}\left(D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_i\tilde{P}_i+D_i^2F_2\right)\\ &D_jD_iF_3=\mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3D_3F_3\left(D\tilde{\theta}_3\right)^2D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3F_3D^2\tilde{\theta}_3D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3F_3D\tilde{\theta}_3\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i\neq j}D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j\right)\\ &+\mathbb{1}_{i+j\geq 5}D_3D_4F_3D\tilde{\theta}_3\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_i\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i>j}D_j\tilde{P}_j\right)+\mathbb{1}_{i=4}\left(D_3D_4F_3D\tilde{\theta}_3D_i\tilde{P}_i+D_i^2F_3\right)\\ &D_jD_iF_4=\mathbb{1}_{i,j\neq 4}D_4D_4F_4\left(D\tilde{\theta}_4\right)^2D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 4}D_4F_4D^2\tilde{\theta}_4D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 4}D_4F_4D\tilde{\theta}_4\left(\mathbb{1}_{i=j}D_i^2\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i\neq j}D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j\right)\\ &+\left(1-\mathbb{1}_{i=j=2}\right)\mathbb{1}_{i+j\geq 4}D_4D_3F_4D\tilde{\theta}_4\left(\mathbb{1}_{i\leq j}D_i\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i>j}D_j\tilde{P}_j\right)+\mathbb{1}_{i=3}\left(D_4D_3F_4D\tilde{\theta}_4D_i\tilde{P}_i+D_i^2F_4\right)\end{aligned}$$

then the mixed partial derivatives are:

$$\begin{aligned}D_kD_iF_1 &= D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}F_4\right)+D_iR_2D_k\left(F_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}F_4\right)+D_iF_2D_k\left(R_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}F_4\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_iF_4D_k\left(R_2+F_2\right)\\ D_kD_iF_2 &= D_kD_i\left(R_1+F_1+\mathbb{1}_{i\geq 3}F_3\right)+D_iR_1D_k\left(F_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}F_3\right)+D_iF_1D_k\left(R_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}F_3\right)+\mathbb{1}_{i\geq 3}D_iF_3D_k\left(R_1+F_1\right)\\ D_kD_iF_3 &= D_kD_i\left(R_4+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2+F_4\right)+D_iR_4D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2+F_4\right)+D_iF_4D_k\left(R_4+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_k\left(R_4+F_4\right)\\ D_kD_iF_4 &= D_kD_i\left(R_3+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1+F_3\right)+D_iR_3D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1+F_3\right)+D_iF_3D_k\left(R_3+\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1\right)+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_k\left(R_3+F_3\right)\end{aligned}$$

for $i,k=1,\ldots,4$.

$$\begin{aligned}
D_jD_iF_1 &= D_jD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq3}F_4\right)+D_iR_2D_j\left(F_2+\mathbb{1}_{j\geq3}F_4\right)+D_iF_2D_j\left(R_2+\mathbb{1}_{j\geq3}F_4\right)+\mathbb{1}_{i\geq3}D_iF_4D_j\left(R_2+F_2\right)\\
&= D_jD_iR_2+D_jD_iF_2+\mathbb{1}_{i\geq3}D_jD_iF_4+D_iR_2D_jF_2+\mathbb{1}_{j\geq3}D_iR_2D_jF_4+D_iF_2D_jR_2+\mathbb{1}_{j\geq3}D_iF_2D_jF_4\\
&+ \mathbb{1}_{i\geq3}D_iF_4D_jR_2+\mathbb{1}_{i\geq3}D_iF_4D_jF_2\\
&= D_jD_iR_2+\mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2D_2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2\mathbb{1}_{i=j}D_i^2\tilde{P}_i\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2\mathbb{1}_{i\neq j}D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq6}D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2\mathbb{1}_{i\leq j}D_j\tilde{P}_j\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq6}D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2\mathbb{1}_{i>j}D_i\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i=1}D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_i\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i=1}D_i^2F_2\\
&+ \mathbb{1}_{i\geq3}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,2}^{(2)}+\mathbb{1}_{i\geq3}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,2}^{(1)}F_{i,2}^{(1)}\\
&+ D_iR_2D_jF_2+\mathbb{1}_{j\geq3}D_iR_2D_jF_4+D_iF_2D_jR_2+\mathbb{1}_{j\geq3}D_iF_2D_jF_4+\mathbb{1}_{i\geq3}D_iF_4D_jR_2+\mathbb{1}_{i\geq3}D_iF_4D_jF_2\\
&= D_jD_iR_2+\mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2D_2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2\mathbb{1}_{i=j}D_i^2\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2\mathbb{1}_{i\neq j}D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq6}D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2\mathbb{1}_{i\leq j}D_j\tilde{P}_j+\left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq6}D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2\mathbb{1}_{i>j}D_i\tilde{P}_i\\
&+ \mathbb{1}_{i=1}D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_i\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i=1}D_i^2F_2\\
&+ \mathbb{1}_{i\geq3}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,2}^{(2)}+\mathbb{1}_{i\geq3}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,2}^{(1)}F_{i,2}^{(1)}\\
&+ D_iR_2D_jF_2+\mathbb{1}_{j\geq3}D_iR_2D_jF_4\\
&+ D_iF_2D_jR_2+\mathbb{1}_{j\geq3}D_iF_2D_jF_4+\mathbb{1}_{i\geq3}D_iF_4D_jR_2+\mathbb{1}_{i\geq3}D_iF_4D_jF_2\\
&= \mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq6}D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2\mathbb{1}_{i\leq j}D_j\tilde{P}_j\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq6}D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2\mathbb{1}_{i>j}D_i\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i=1}D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_i\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i=1}D_i^2F_2\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2\mathbb{1}_{i=j}D_i^2\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2\mathbb{1}_{i\neq j}D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j\\
&+ \mathbb{1}_{i\geq3}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,2}^{(2)}+\mathbb{1}_{i\geq3}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,2}^{(1)}F_{i,2}^{(1)}\\
&+ D_iR_2D_jF_2+\mathbb{1}_{j\geq3}D_iR_2D_jF_4+D_iF_2D_jR_2+\mathbb{1}_{j\geq3}D_iF_2D_jF_4+\mathbb{1}_{i\geq3}D_iF_4D_jR_2\\
&+ \mathbb{1}_{i\geq3}D_iF_4D_jF_2+R_2^{(2)}\mu_i\mu_j+\mathbb{1}_{i=j}r_2P_i^{(2)}+\mathbb{1}_{i=j}r_2\mu_i\mu_j\\
D_jD_iF_1 &= \mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2^2F_2\left(D\tilde{\theta}_2\right)^2D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq6}D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2\mathbb{1}_{i\leq j}D_j\tilde{P}_j\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq6}D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2\mathbb{1}_{i>j}D_i\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i=1}D_2D_1F_2D\tilde{\theta}_2D_i\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i=1}D_i^2F_2\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2F_2D^2\tilde{\theta}_2D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2\mathbb{1}_{i=j}D_i^2\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i,j\neq2}D_2F_2D\tilde{\theta}_2\mathbb{1}_{i\neq j}D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j\\
&+ \mathbb{1}_{i\geq3}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,2}^{(2)}+\mathbb{1}_{i\geq3}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,2}^{(1)}F_{i,2}^{(1)}\\
&+ D_iR_2D_jF_2+\mathbb{1}_{j\geq3}D_iR_2D_jF_4+D_iF_2D_jR_2+\mathbb{1}_{j\geq3}D_iF_2D_jF_4+\mathbb{1}_{i\geq3}D_iF_4D_jR_2\\
&+ \mathbb{1}_{i\geq3}D_iF_4D_jF_2+R_2^{(2)}\mu_i\mu_j+\mathbb{1}_{i=j}r_2P_i^{(2)}+\mathbb{1}_{i=j}r_2\mu_i\mu_j
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_1(i,j) &= \mathbb{1}_{i,j\neq 2} f_2(2,2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 \mu_i\mu_j + \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq 6}\mathbb{1}_{i\leq j} f_2(1,2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\mu_j\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq 6}\mathbb{1}_{i>j} f_2(1,2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\mu_i + \mathbb{1}_{i=1} f_2(1,2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\mu_i + \mathbb{1}_{i=1} f_2(1,1)\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 2} f_2(2)\,\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 2}\mathbb{1}_{i=j} f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{P}_i^{(2)} + \mathbb{1}_{i,j\neq 2}\mathbb{1}_{i\neq j} f_2(2)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j\\
&+ \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,2}^{(2)} + \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,2}^{(1)}F_{i,2}^{(1)}\\
&+ r_2\tilde{\mu}_i f_2(j) + \mathbb{1}_{j\geq 3} r_2\tilde{\mu}_i F_{j,2}^{(1)} + f_2(i)\,r_2\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{j\geq 3} f_2(i)\,F_{j,2}^{(1)} + \mathbb{1}_{i\geq 3}F_{i,2}^{(1)} r_2\tilde{\mu}_j\\
&+ \mathbb{1}_{i\geq 3}F_{i,2}^{(1)} f_2(j) + R_2^{(2)}\mu_i\mu_j + \mathbb{1}_{i=j} r_2 P_i^{(2)} + \mathbb{1}_{i=j} r_2\tilde{\mu}_i\mu_j\\
&= \mathbb{1}_{i=1} f_2(1,1) + \left[\left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq 6}\mathbb{1}_{i\leq j}\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\mu_j + \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq 6}\mathbb{1}_{i>j}\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\mu_i\right.\\
&+ \left.\mathbb{1}_{i=1}\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\mu_i\right] f_2(1,2) + \mathbb{1}_{i,j\neq 2}\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\mu_i\mu_j f_2(2,2)\\
&+ \left[\mathbb{1}_{i,j\neq 2}\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 2}\mathbb{1}_{i=j}\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{P}_i^{(2)} + \mathbb{1}_{i,j\neq 2}\mathbb{1}_{i\neq j}\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j\right] f_2(2)\\
&+ \left[r_2\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i\geq 3}F_{i,2}^{(1)}\right] f_2(j) + \left[r_2\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{j\geq 3}F_{j,2}^{(1)}\right] f_2(i)\\
&+ \left[R_2^{(2)} + \mathbb{1}_{i=j} r_2\right]\tilde{\mu}_i\mu_j\\
&+ \mathbb{1}_{j\geq 3}F_{j,2}^{(1)}\left[\mathbb{1}_{j\neq i}F_{i,2}^{(1)} + r_2\tilde{\mu}_i\right] + \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,2}^{(2)}\\
&+ r_2\left[\mathbb{1}_{i=j}P_i^{(2)} + \mathbb{1}_{i\geq 3}F_{i,2}^{(1)}\tilde{\mu}_j\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1(i,j) &= \mathbb{1}_{i=1} f_2(1,1) + \left[\left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq 6}\mathbb{1}_{i\leq j}\frac{\mu_j}{1-\tilde{\mu}_2} + \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq 6}\mathbb{1}_{i>j}\frac{\mu_i}{1-\tilde{\mu}_2} + \mathbb{1}_{i=1}\frac{\mu_i}{1-\tilde{\mu}_2}\right] f_2(1,2)\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 2}\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\mu_i\mu_j f_2(2,2) + \left[\mathbb{1}_{i,j\neq 2}\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 2}\mathbb{1}_{i=j}\frac{\tilde{P}_i^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2} + \mathbb{1}_{i,j\neq 2}\mathbb{1}_{i\neq j}\frac{\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_2}\right] f_2(2)\\
&+ \left[r_2\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i\geq 3}F_{i,2}^{(1)}\right] f_2(j) + \left[r_2\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{j\geq 3}F_{j,2}^{(1)}\right] f_2(i) + \left[R_2^{(2)} + \mathbb{1}_{i=j} r_2\right]\tilde{\mu}_i\mu_j\\
&+ \mathbb{1}_{j\geq 3}F_{j,2}^{(1)}\left[\mathbb{1}_{j\neq i}F_{i,2}^{(1)} + r_2\tilde{\mu}_i\right] + r_2\left[\mathbb{1}_{i=j}P_i^{(2)} + \mathbb{1}_{i\geq 3}F_{i,2}^{(1)}\tilde{\mu}_j\right] + \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,2}^{(2)}
\end{aligned}
$$

$$D_jD_iF_3\left(z_1,z_2;\tau_1\right) = \mathbb{1}_{i\geq3}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,1}^{(2)}+\mathbb{1}_{i\geq3}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,1}^{(1)}F_{i,1}^{(1)}$$

$$\begin{aligned}
D_jD_iF_2 &= D_jD_iR_1+D_jD_iF_1+\mathbb{1}_{i\geq3}D_jD_iF_3+D_iR_1D_jF_1+\mathbb{1}_{j\geq3}D_iR_1D_jF_3+D_iF_1D_jR_1\\
&+ \mathbb{1}_{j\geq3}D_iF_1D_jF_3+\mathbb{1}_{i\geq3}D_iF_3D_jR_1+\mathbb{1}_{i\geq3}D_iF_3D_jF_1\\
&= R_1^{(2)}\mu_i\mu_j+\mathbb{1}_{i=j}r_1P_i^{(2)}+\mathbb{1}_{i=j}r_1\mu_i\mu_j\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq1}D_1D_1F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq1}D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1\mathbb{1}_{i=j}D_i^2\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i,j\neq1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1\mathbb{1}_{i\neq j}D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq6}D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1\mathbb{1}_{i\leq j}D_j\tilde{P}_j+\left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq6}D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1\mathbb{1}_{i>j}D_i\tilde{P}_i\\
&+ \mathbb{1}_{i=2}D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_i\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i=2}D_i^2F_1\\
&+ \mathbb{1}_{i\geq3}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,1}^{(2)}+\mathbb{1}_{i\geq3}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,1}^{(1)}F_{i,1}^{(1)}\\
&+ D_iR_1D_jF_1+\mathbb{1}_{j\geq3}D_iR_1D_jF_3\\
&+ D_iF_1D_jR_1+\mathbb{1}_{j\geq3}D_iF_1D_jF_3+\mathbb{1}_{i\geq3}D_iF_3D_jR_1+\mathbb{1}_{i\geq3}D_iF_3D_jF_1\\
&= \mathbb{1}_{i,j\neq1}D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq6}D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1\mathbb{1}_{i\leq j}D_j\tilde{P}_j\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq6}D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1\mathbb{1}_{i>j}D_i\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i=2}D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_i\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i=2}D_i^2F_1\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq1}D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1\mathbb{1}_{i\neq j}D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1\mathbb{1}_{i=j}D_i^2\tilde{P}_i\\
&+ R_1^{(2)}\mu_i\mu_j+\mathbb{1}_{i=j}r_1P_i^{(2)}+\mathbb{1}_{i=j}r_1\mu_i\mu_j+D_iR_1D_jF_1\\
&+ \mathbb{1}_{i\geq3}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,1}^{(2)}+\mathbb{1}_{i\geq3}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,1}^{(1)}F_{i,1}^{(1)}\\
&+ \mathbb{1}_{j\geq3}D_iR_1D_jF_3+D_iF_1D_jR_1\\
&+ \mathbb{1}_{j\geq3}D_iF_1D_jF_3+\mathbb{1}_{i\geq3}D_iF_3D_jR_1+\mathbb{1}_{i\geq3}D_iF_3D_jF_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_jD_iF_2 &= \mathbb{1}_{i,j\neq1}D_1^2F_1\left(D\tilde{\theta}_1\right)^2D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq6}D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1\mathbb{1}_{i\leq j}D_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i=2}D_i^2F_1\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq6}D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1\mathbb{1}_{i>j}D_i\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i=2}D_1D_2F_1D\tilde{\theta}_1D_i\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i,j\neq1}D_1F_1D^2\tilde{\theta}_1D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1\mathbb{1}_{i\neq j}D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq1}D_1F_1D\tilde{\theta}_1\mathbb{1}_{i=j}D_i^2\tilde{P}_i+R_1^{(2)}\mu_i\mu_j+\mathbb{1}_{i=j}r_1P_i^{(2)}+\mathbb{1}_{i=j}r_1\mu_i\mu_j\\
&+ D_iR_1D_jF_1\\
&+ \mathbb{1}_{i\geq3}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,1}^{(2)}+\mathbb{1}_{i\geq3}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,1}^{(1)}F_{i,1}^{(1)}\\
&+ \mathbb{1}_{j\geq3}D_iR_1D_jF_3+D_iF_1D_jR_1+\mathbb{1}_{j\geq3}D_iF_1D_jF_3\\
&+ \mathbb{1}_{i\geq3}D_iF_3D_jR_1+\mathbb{1}_{i\geq3}D_iF_3D_jF_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2\left(i,j\right) &= \mathbb{1}_{i,j\neq1}\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_jf_1\left(1,1\right)+\left[\left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq6}\mathbb{1}_{i\leq j}\frac{\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_1}+\left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq6}\mathbb{1}_{i>j}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_1}\right.\\
&+ \left.\mathbb{1}_{i=2}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_1}\right]f_1\left(1,2\right)+\mathbb{1}_{i=2}f_1\left(2,2\right)+\left[\mathbb{1}_{i,j\neq1}\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq1}\mathbb{1}_{i\neq j}\frac{\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_1}+\mathbb{1}_{i,j\neq1}\mathbb{1}_{i=j}\frac{\tilde{P}_i^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_1}\right]f_1\left(1\right)\\
&+ \left[r_1\mu_i+\mathbb{1}_{i\geq3}F_{i,1}^{(1)}\right]f_1\left(j\right)+\left[\mathbb{1}_{j\geq3}F_{j,1}^{(1)}+r_1\mu_j\right]f_1\left(i\right)+\left[R_1^{(2)}+\mathbb{1}_{i=j}\right]\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j+\mathbb{1}_{i\geq3}F_{i,1}^{(1)}\left[r_1\mu_j+\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,1}^{(1)}\right]\\
&+ r_1\left[\mathbb{1}_{j\geq3}\mu_iF_{j,1}^{(1)}+\mathbb{1}_{i=j}P_i^{(2)}\right]+\mathbb{1}_{i\geq3}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,1}^{(2)}
\end{aligned}$$

$$D_jD_iF_2\left(z_3,z_4;\tau_4\right) = \mathbb{1}_{i\leq2}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,4}^{(2)}+\mathbb{1}_{i\leq2}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,4}^{(1)}F_{i,4}^{(1)}$$

$$
\begin{aligned}
D_jD_iF_3 &= R_3^{(2)}\mu_i\mu_j + \mathbb{1}_{i=j}r_3P_i^{(2)} + \mathbb{1}_{i=j}r_3\mu_i\mu_j\\
&+ \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,4}^{(2)} + \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,4}^{(1)}F_{i,4}^{(1)}\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 4}D_4D_4F_4\left(D\tilde{\theta}_4\right)^2 D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 4}D_4F_4D^2\tilde{\theta}_4D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 4}D_4F_4D\tilde{\theta}_4\mathbb{1}_{i=j}D_i^2\tilde{P}_i + \mathbb{1}_{i,j\neq 4}D_4F_4D\tilde{\theta}_4\mathbb{1}_{i\neq j}D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=2}\right)\mathbb{1}_{i+j\geq 4}D_4D_3F_4D\tilde{\theta}_4\mathbb{1}_{i\leq j}D_i\tilde{P}_i + \left(1-\mathbb{1}_{i=j=2}\right)\mathbb{1}_{i+j\geq 4}D_4D_3F_4D\tilde{\theta}_4\mathbb{1}_{i>j}D_j\tilde{P}_j\\
&+ \mathbb{1}_{i=3}D_4D_3F_4D\tilde{\theta}_4D_i\tilde{P}_i + \mathbb{1}_{i=3}D_i^2F_4 + \mathbb{1}_{j\leq 2}D_iR_4D_jF_2 + D_iR_4D_jF_4 + D_iF_4D_jR_4 + \mathbb{1}_{j\leq 2}D_iF_4D_jF_2\\
&+ \mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_jR_4 + \mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_jF_4\\
&= \mathbb{1}_{i,j\neq 4}D_4^2F_4\left(D\tilde{\theta}_4\right)^2 D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j + \left(1-\mathbb{1}_{i=j=2}\right)\mathbb{1}_{i+j\geq 4}D_4D_3F_4D\tilde{\theta}_4\mathbb{1}_{i\leq j}D_i\tilde{P}_i\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=2}\right)\mathbb{1}_{i+j\geq 4}D_4D_3F_4D\tilde{\theta}_4\mathbb{1}_{i>j}D_j\tilde{P}_j + \mathbb{1}_{i=3}D_4D_3F_4D\tilde{\theta}_4D_i\tilde{P}_i + \mathbb{1}_{i=3}D_i^2F_4\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 4}D_4F_4D^2\tilde{\theta}_4D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 4}D_4F_4D\tilde{\theta}_4\mathbb{1}_{i=j}D_i^2\tilde{P}_i + \mathbb{1}_{i,j\neq 4}D_4F_4D\tilde{\theta}_4\mathbb{1}_{i\neq j}D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j\\
&+ D_iR_4D_jF_4 + D_iF_4D_jR_4 + \mathbb{1}_{j\leq 2}D_iF_4D_jF_2 + \mathbb{1}_{j\leq 2}D_iR_4D_jF_2\\
&+ \mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_jR_4 + \mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_jF_4 + R_3^{(2)}\mu_i\mu_j + \mathbb{1}_{i=j}r_3P_i^{(2)} + \mathbb{1}_{i=j}r_3\mu_i\mu_j\\
&+ \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,4}^{(2)} + \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,4}^{(1)}F_{i,4}^{(1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_jD_iF_3 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 4}D_4^2F_4\left(D\tilde{\theta}_4\right)^2 D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j + \left(1-\mathbb{1}_{i=j=2}\right)\mathbb{1}_{i+j\geq 4}D_4D_3F_4D\tilde{\theta}_4\mathbb{1}_{i\leq j}D_i\tilde{P}_i\\
&+ \left(1-\mathbb{1}_{i=j=2}\right)\mathbb{1}_{i+j\geq 4}D_4D_3F_4D\tilde{\theta}_4\mathbb{1}_{i>j}D_j\tilde{P}_j + \mathbb{1}_{i=3}D_4D_3F_4D\tilde{\theta}_4D_i\tilde{P}_i + \mathbb{1}_{i=3}D_i^2F_4\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 4}D_4F_4D^2\tilde{\theta}_4D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 4}D_4F_4D\tilde{\theta}_4\mathbb{1}_{i=j}D_i^2\tilde{P}_i + \mathbb{1}_{i,j\neq 4}D_4F_4D\tilde{\theta}_4\mathbb{1}_{i\neq j}D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j\\
&+ D_iR_4D_jF_4 + D_iF_4D_jR_4 + \mathbb{1}_{j\leq 2}D_iF_4D_jF_2 + \mathbb{1}_{j\leq 2}D_iR_4D_jF_2\\
&+ \mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_jR_4 + \mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_2D_jF_4 + R_3^{(2)}\mu_i\mu_j + \mathbb{1}_{i=j}r_3P_i^{(2)} + \mathbb{1}_{i=j}r_3\mu_i\mu_j\\
&+ \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,4}^{(2)} + \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,4}^{(1)}F_{i,4}^{(1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_3\left(i,j\right) &= \mathbb{1}_{i=3}f_4\left(3,3\right) + \left[\left(1-\mathbb{1}_{i=j=2}\right)\mathbb{1}_{i+j\geq 4}\mathbb{1}_{i\leq j}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_4} + \left(1-\mathbb{1}_{i=j=2}\right)\mathbb{1}_{i+j\geq 4}\mathbb{1}_{i>j}\frac{\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_4} + \mathbb{1}_{i=3}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_4}\right]f_4\left(3,4\right)\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 4}f_4\left(4,4\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j + \left[\mathbb{1}_{i,j\neq 4}\tilde{\theta}_4^{(2)}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 4}\mathbb{1}_{i=j}\frac{\tilde{P}_i^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_4} + \mathbb{1}_{i,j\neq 4}\mathbb{1}_{i\neq j}\frac{\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_4}\right]f_4\left(4\right)\\
&+ \left[r_4\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_{i,4}^{(1)}\right]f_4\left(j\right) + \left[r_4\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{j\leq 2}F_{j,4}^{(1)}\right]f_4\left(i\right) + \left[R_4^{(2)} + \mathbb{1}_{i=j}r_4\right]\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j\\
&+ \mathbb{1}_{i\leq 2}F_{i,4}^{(1)}\left[r_4\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,4}^{(1)}\right] + r_4\left[\mathbb{1}_{i=j}P_i^{(2)} + \mathbb{1}_{j\leq 2}\tilde{\mu}_iF_{j,4}^{(1)}\right] + \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,4}^{(2)}
\end{aligned}
$$

$$
D_jD_iF_1\left(z_3,z_4;\tau_3\right) = \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,3}^{(2)} + \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,3}^{(1)}F_{i,3}^{(1)}
$$

$$
\begin{aligned}
D_jD_iF_4 &= D_jD_iR_3 + \mathbb{1}_{i\leq 2}D_jD_iF_1 + \mathbb{1}_{i=4}D_3D_4F_3D\tilde{\theta}_3D_i\tilde{P}_i + \mathbb{1}_{i=4}D_i^2F_3\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3D_3F_3\left(D\tilde{\theta}_3\right)^2 D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3F_3D^2\tilde{\theta}_3D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3F_3D\tilde{\theta}_3\mathbb{1}_{i=j}D_i^2\tilde{P}_i\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3F_3D\tilde{\theta}_3\mathbb{1}_{i\neq j}D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j + \mathbb{1}_{i+j\geq 5}D_3D_4F_3D\tilde{\theta}_3\mathbb{1}_{i\leq j}D_i\tilde{P}_i + \mathbb{1}_{i+j\geq 5}D_3D_4F_3D\tilde{\theta}_3\mathbb{1}_{i>j}D_j\tilde{P}_j\\
&+ \mathbb{1}_{j\leq 2}D_iR_3D_jF_1 + D_iR_3D_jF_3 + D_iF_3D_jR_3 + \mathbb{1}_{j\leq 2}D_iF_3D_jF_1 + \mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_jR_3 + \mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_jF_3\\
&= \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3D_3F_3\left(D\tilde{\theta}_3\right)^2 D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j + \mathbb{1}_{i=4}D_3D_4F_3D\tilde{\theta}_3D_i\tilde{P}_i + \mathbb{1}_{i=4}D_i^2F_3 + \mathbb{1}_{i+j\geq 5}D_3D_4F_3D\tilde{\theta}_3\mathbb{1}_{i>j}D_j\tilde{P}_j\\
&+ \mathbb{1}_{i+j\geq 5}D_3D_4F_3D\tilde{\theta}_3\mathbb{1}_{i\leq j}D_i\tilde{P}_i + \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3F_3D^2\tilde{\theta}_3D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3F_3D\tilde{\theta}_3\mathbb{1}_{i=j}D_i^2\tilde{P}_i\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3F_3D\tilde{\theta}_3\mathbb{1}_{i\neq j}D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j + \mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_jR_3 + \mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_jF_3\\
&+ \mathbb{1}_{j\leq 2}D_iR_3D_jF_1 + D_iR_3D_jF_3 + D_iF_3D_jR_3 + \mathbb{1}_{j\leq 2}D_iF_3D_jF_1 + D_jD_iR_3\\
&+ \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,3}^{(2)} + \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,3}^{(1)}F_{i,3}^{(1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_jD_iF_4 &= \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3D_3F_3\left(D\tilde{\theta}_3\right)^2 D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i=4}D_3D_4F_3D\tilde{\theta}_3D_i\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i=4}D_i^2F_3+\mathbb{1}_{i+j\geq 5}D_3D_4F_3D\tilde{\theta}_3\mathbb{1}_{i>j}D_j\tilde{P}_j\\
&+ \mathbb{1}_{i+j\geq 5}D_3D_4F_3D\tilde{\theta}_3\mathbb{1}_{i\leq j}D_i\tilde{P}_i+\mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3F_3D^2\tilde{\theta}_3D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3F_3D\tilde{\theta}_3\mathbb{1}_{i=j}D_i^2\tilde{P}_i\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 3}D_3F_3D\tilde{\theta}_3\mathbb{1}_{i\neq j}D_i\tilde{P}_iD_j\tilde{P}_j+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_jR_3+\mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_jF_3\\
&+ \mathbb{1}_{j\leq 2}D_iR_3D_jF_1+D_iR_3D_jF_3+D_iF_3D_jR_3+\mathbb{1}_{j\leq 2}D_iF_3D_jF_1+D_jD_iR_3\\
&+ \mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,3}^{(2)}+\mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,3}^{(1)}F_{i,3}^{(1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_4(i,j) &= \mathbb{1}_{i,j\neq 3}f_3(3,3)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j+\left[\left(1-\mathbb{1}_{i=j=2}\right)\mathbb{1}_{i+j\geq 5}\mathbb{1}_{i\leq j}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_3}+\left(1-\mathbb{1}_{i=j=2}\right)\mathbb{1}_{i+j\geq 5}\mathbb{1}_{i>j}\frac{\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_3}\right.\\
&+ \left.\mathbb{1}_{i=4}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_3}\right]f_3(3,4)+\mathbb{1}_{i=4}f_3(4,4)+\left[\mathbb{1}_{i,j\neq 3}\tilde{\theta}_3^{(2)}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 3}\mathbb{1}_{i=j}\frac{\tilde{P}_i^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_3}+\mathbb{1}_{i,j\neq 3}\mathbb{1}_{i\neq j}\frac{\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_3}\right]f_3(3)\\
&+ \left[r_3\tilde{\mu}_i+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_{i,3}^{(1)}\right]f_3(j)+\left[r_3\tilde{\mu}_j+\mathbb{1}_{j\leq 2}F_{j,3}^{(1)}\right]f_3(i)+\left[R_3^{(2)}+\mathbb{1}_{i=j}r_3\right]\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j\\
&+ \mathbb{1}_{i\leq 2}F_{i,3}^{(1)}\left[r_3\tilde{\mu}_j+\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,3}^{(1)}\right]+r_3\left[\mathbb{1}_{i=j}P_i^{(2)}+\mathbb{1}_{j\leq 2}\tilde{\mu}_iF_{j,3}^{(1)}\right]+\mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,3}^{(2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1(i,j) &= \mathbb{1}_{i=1}f_2(1,1)+\left[\left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq 6}\mathbb{1}_{i\leq j}\frac{\mu_j}{1-\tilde{\mu}_2}+\left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq 6}\mathbb{1}_{i>j}\frac{\mu_i}{1-\tilde{\mu}_2}+\mathbb{1}_{i=1}\frac{\mu_i}{1-\tilde{\mu}_2}\right]f_2(1,2)\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 2}\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\mu_i\mu_jf_2(2,2)+\left[\mathbb{1}_{i,j\neq 2}\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 2}\mathbb{1}_{i=j}\frac{\tilde{P}_i^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}+\mathbb{1}_{i,j\neq 2}\mathbb{1}_{i\neq j}\frac{\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_2}\right]f_2(2)\\
&+ \left[r_2\tilde{\mu}_i+\mathbb{1}_{i\geq 3}F_{i,2}^{(1)}\right]f_2(j)+\left[r_2\tilde{\mu}_j+\mathbb{1}_{j\geq 3}F_{j,2}^{(1)}\right]f_2(i)+\left[R_2^{(2)}+\mathbb{1}_{i=j}r_2\right]\tilde{\mu}_i\mu_j\\
&+ \mathbb{1}_{j\geq 3}F_{j,2}^{(1)}\left[\mathbb{1}_{j\neq i}F_{i,2}^{(1)}+r_2\tilde{\mu}_i\right]+r_2\left[\mathbb{1}_{i=j}P_i^{(2)}+\mathbb{1}_{i\geq 3}F_{i,2}^{(1)}\tilde{\mu}_j\right]+\mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,2}^{(2)}\\
f_2(i,j) &= \mathbb{1}_{i,j\neq 1}\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_jf_1(1,1)+\left[\left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq 6}\mathbb{1}_{i\leq j}\frac{\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_1}+\left(1-\mathbb{1}_{i=j=3}\right)\mathbb{1}_{i+j\leq 6}\mathbb{1}_{i>j}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_1}\right.\\
&+ \left.\mathbb{1}_{i=2}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_1}\right]f_1(1,2)+\mathbb{1}_{i=2}f_1(2,2)+\left[\mathbb{1}_{i,j\neq 1}\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 1}\mathbb{1}_{i\neq j}\frac{\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_1}+\mathbb{1}_{i,j\neq 1}\mathbb{1}_{i=j}\frac{\tilde{P}_i^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_1}\right]f_1(1)\\
&+ \left[r_1\mu_i+\mathbb{1}_{i\geq 3}F_{i,1}^{(1)}\right]f_1(j)+\left[\mathbb{1}_{j\geq 3}F_{j,1}^{(1)}+r_1\mu_j\right]f_1(i)+\left[R_1^{(2)}+\mathbb{1}_{i=j}\right]\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j+\mathbb{1}_{i\geq 3}F_{i,1}^{(1)}\left[r_1\mu_j+\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,1}^{(1)}\right]\\
&+ r_1\left[\mathbb{1}_{j\geq 3}\mu_iF_{j,1}^{(1)}+\mathbb{1}_{i=j}P_i^{(2)}\right]+\mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,1}^{(2)}\\
f_3(i,j) &= \mathbb{1}_{i=3}f_4(3,3)+\left[\left(1-\mathbb{1}_{i=j=2}\right)\mathbb{1}_{i+j\geq 4}\mathbb{1}_{i\leq j}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_4}+\left(1-\mathbb{1}_{i=j=2}\right)\mathbb{1}_{i+j\geq 4}\mathbb{1}_{i>j}\frac{\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_4}+\mathbb{1}_{i=3}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_4}\right]f_4(3,4)\\
&+ \mathbb{1}_{i,j\neq 4}f_4(4,4)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j+\left[\mathbb{1}_{i,j\neq 4}\tilde{\theta}_4^{(2)}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 4}\mathbb{1}_{i=j}\frac{\tilde{P}_i^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_4}+\mathbb{1}_{i,j\neq 4}\mathbb{1}_{i\neq j}\frac{\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_4}\right]f_4(4)\\
&+ \left[r_4\tilde{\mu}_i+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_{i,4}^{(1)}\right]f_4(j)+\left[r_4\tilde{\mu}_j+\mathbb{1}_{j\leq 2}F_{j,4}^{(1)}\right]f_4(i)+\left[R_4^{(2)}+\mathbb{1}_{i=j}r_4\right]\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j\\
&+ \mathbb{1}_{i\leq 2}F_{i,4}^{(1)}\left[r_4\tilde{\mu}_j+\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,4}^{(1)}\right]+r_4\left[\mathbb{1}_{i=j}P_i^{(2)}+\mathbb{1}_{j\leq 2}\tilde{\mu}_iF_{j,4}^{(1)}\right]+\mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,4}^{(2)}\\
f_4(i,j) &= \mathbb{1}_{i,j\neq 3}f_3(3,3)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j+\left[\left(1-\mathbb{1}_{i=j=2}\right)\mathbb{1}_{i+j\geq 5}\mathbb{1}_{i\leq j}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_3}+\left(1-\mathbb{1}_{i=j=2}\right)\mathbb{1}_{i+j\geq 5}\mathbb{1}_{i>j}\frac{\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_3}\right.\\
&+ \left.\mathbb{1}_{i=4}\frac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_3}\right]f_3(3,4)+\mathbb{1}_{i=4}f_3(4,4)+\left[\mathbb{1}_{i,j\neq 3}\tilde{\theta}_3^{(2)}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j+\mathbb{1}_{i,j\neq 3}\mathbb{1}_{i=j}\frac{\tilde{P}_i^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_3}+\mathbb{1}_{i,j\neq 3}\mathbb{1}_{i\neq j}\frac{\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_3}\right]f_3(3)\\
&+ \left[r_3\tilde{\mu}_i+\mathbb{1}_{i\leq 2}F_{i,3}^{(1)}\right]f_3(j)+\left[r_3\tilde{\mu}_j+\mathbb{1}_{j\leq 2}F_{j,3}^{(1)}\right]f_3(i)+\left[R_3^{(2)}+\mathbb{1}_{i=j}r_3\right]\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j\\
&+ \mathbb{1}_{i\leq 2}F_{i,3}^{(1)}\left[r_3\tilde{\mu}_j+\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,3}^{(1)}\right]+r_3\left[\mathbb{1}_{i=j}P_i^{(2)}+\mathbb{1}_{j\leq 2}\tilde{\mu}_iF_{j,3}^{(1)}\right]+\mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,3}^{(2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1(1,1) &= f_2(1,1) + 2\mu_1 f_2(1,2) + \mu_1\tilde{\mu}_2 f_2(2,2) + P_1^{(2)}\left[r_2 + f_2(2)\right] + 2r_2 f_2(1) + R_2^{(2)}\mu_1\\
f_1(1,2) &= \tilde{\mu}_2 f_2(1,2) + \mu_1\tilde{\mu}_2 f_2(2,2) + \tilde{\mu}_2\mu_1\left[R_2^{(2)} + r_2 + f_2(2)\right] + r_2\tilde{\mu}_1 f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2 f_2(1)\\
f_1(1,3) &= \mu_3 f_2(1,2) + \mu_1\mu_3 f_2(2,2) + \mu_1\mu_3\left[R_2^{(2)} + r_2 + f_2(2)\right] + r_2\mu_1\left[f_2(3) + F_{3,2}^{(1)}\right] + f_2(1)\left[r_2\mu_3 + F_{3,2}^{(1)}\right]\\
f_1(1,4) &= \mu_4 f_2(1,2) + \mu_1\mu_4 f_2(2,2) + \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4\left[R_2^{(2)} + r_2 + f_2(2)\right] + r_2\tilde{\mu}_1\left[f_2(4) + F_{4,2}^{(1)}\right] + f_2(1)\left[r_2\tilde{\mu}_4 + F_{4,2}^{(1)}\right]\\
f_1(2,2) &= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2^2 + r_2\tilde{P}_2^{(2)} + f_2(2,2)\tilde{\mu}_2^2 + f_2(2)P_2^{(2)} + 2r_2\tilde{\mu}_2 f_2(2) = \tilde{\mu}_2^2 f_2(2,2) + \tilde{P}_2^{(2)}\left[r_2 + f_2(2)\right] + \tilde{\mu}_2\big[R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2 + 2\\
f_1(2,3) &= \tilde{\mu}_2\mu_3 f_2(2,2) + \tilde{\mu}_2\mu_3\left[R_2^{(2)} + r_2 + f_2(2)\right] + r_2\tilde{\mu}_2\left[f_2(3) + F_{3,1}^{(1)}(1)\right] + f_2(2)\left[r_2\mu_3 + F_{3,1}^{(1)}(1)\right]\\
f_1(2,4) &= \tilde{\mu}_2\mu_4 f_2(2,2) + \tilde{\mu}_2\mu_4\left[R_2^{(2)} + r_2 + f_2(2)\right] + r_2\tilde{\mu}_2\left[f_2(4) + F_{4,2}^{(1)}\right] + f_2(2)\left[r_2\tilde{\mu}_4 + F_{4,2}^{(1)}\right]\\
f_1(3,3) &= \mu_3^2 f_2(2,2) + \tilde{P}_3^{(2)}\left[r_2 + f_2(2)\right] + r_2\tilde{\mu}_3\left[f_2(3) + F_{3,2}^{(1)} + f_2(3)\right] + F_{3,2}^{(1)}\left[2f_2(3) + r_2\tilde{\mu}_3\right] + F_{3,2}^{(2)} + R_2^{(2)}\tilde{\mu}_3^2\\
f_1(3,4) &= \mu_3\mu_4 f_2(2,2) + \mu_3\mu_4\left[R_2^{(2)} + r_2 + f_2(2)\right] + r_2\tilde{\mu}_3\left[f_2(4) + F_{4,2}^{(1)}\right] + r_2\tilde{\mu}_4\left[f_2(3) + F_{3,2}^{(1)}\right] + F_{4,2}^{(1)}\big[f_2(3) + F_{3,}^{(1}\\
f_1(4,4) &= f_2(2,2)\mu_4^2 + P_4^{(2)}\left[r_2 + f_2(2)\right] + 2F_{4,2}^{(1)}\left[r_2\tilde{\mu}_4 + f_2(4)\right] + \tilde{\mu}_4\left[R_2^{(2)}\tilde{\mu}_4 + 2r_2 f_2(4)\right] + F_{4,2}^{(2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(1,1) &= f_1(1,1)\mu_1^2 + f_1(1)\left[P_1^{(2)} + 2r_1\tilde{\mu}_1\right] + R_1^2\tilde{\mu}_1^2 + r_1\tilde{P}_1^{(2)}\\
f_2(1,2) &= \mu_1\tilde{\mu}_2 f_1(1,1) + \mu_1 f_1(1,2) + \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\left[R_1^{(2)} + r_1 + f_1(1)\right] + r_1\left[\tilde{\mu}_1 f_1(2) + \tilde{\mu}_2 f_1(1)\right]\\
f_2(1,3) &= \mu_1\mu_3 f_1(1,1) + \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3\left[R_1^{(2)} + r_1 + f_1(1)\right] + r_1\tilde{\mu}_1\left[f_1(3) + F_{3,1}^{(1)}\right] + f_1(1)\left[r_1\tilde{\mu}_3 + F_{3,1}^{(1)}\right]\\
f_2(1,4) &= \mu_1\mu_4 f_1(1,1) + \mu_1\mu_4\left[R_1^{(2)} + r_1 + f_1(1)\right] + r_1\mu_1\left[f_1(4) + F_{4,1}^{(1)}\right] + f_1(1)\left[r_1\mu_4 + F_{4,1}^{(1)}\right]\\
f_2(2,2) &= \tilde{\mu}_2^2 f_1(1,1) + 2\tilde{\mu}_2 f_1(1,2) + \tilde{\mu}_2 f_1(2,2) + \tilde{P}_2^{(2)}\left[r_1 + f_1(1)\right] + \tilde{\mu}_2\left[\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)} + 2r_1 f_1(2)\right]\\
f_2(2,3) &= \tilde{\mu}_2\mu_3 f_1(1,1) + \mu_3 f_1(1,2) + \tilde{\mu}_2\mu_3\left[R_1^{(2)} + r_1 + f_1(1)\right] + r_1\tilde{\mu}_2\left[f_1(3) + F_{3,1}^{(1)}\right] + f_1(2)\left[r_1\tilde{\mu}_3 + F_{3,1}^{(1)}\right]\\
f_2(2,4) &= \tilde{\mu}_2\mu_4 f_1(1,1) + \mu_4 f_1(1,2) + \tilde{\mu}_2\mu_4\left[+R_1^{(2)} + r_1 + f_1(1)\right] + r_1\tilde{\mu}_2\left[f_1(4) + F_{4,1}^{(1)}\right] + f_1(2)\left[r_1\tilde{\mu}_4 + F_{4,1}^{(1)}\right]\\
f_2(3,3) &= \mu_3^2 f_1(1,1) + P_3^{(2)}\left[r_1 + f_1(1)\right] + 2r_1\tilde{\mu}_3\left[f_1(3) + F_{3,1}^{(1)}\right] + \left[R_1^{(2)}\tilde{\mu}_3^2 + F_{3,1}^{(2)} + 2F_{3,1}^{(1)} f_1(3)\right]\\
f_2(3,4) &= \mu_3\mu_4 f_1(1,1) + \mu_3\mu_4\left[R_1^{(2)} + r_1 + f_1(1)\right] + r_1\mu_3\left[f_1(4) + F_{4,1}^{(1)}\right] + f_1(3)\left[r_1\tilde{\mu}_4 + F_{4,1}^{(1)}\right] + F_{3,1}^{(1)}\big[r_1\tilde{\mu}_4 + f_1(4\\
f_2(4,4) &= \mu_4^2 f_1(1,1) + P_4^{(2)}\left[r_1 + f_1(1)\right] + \tilde{\mu}_4\left[2r_1 f_1(4) + R_1^{(2)}\tilde{\mu}_4\right] + 2F_{4,1}^{(1)}\left[f_1(4) + r_1\tilde{\mu}_4\right] + F_{4,1}^{(2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_3(1,1) &= \mu_1^2 f_4(4,4) + P_1^{(2)}\left[r_4 + f_4(4)\right] + 2r_4\tilde{\mu}_1\left[F_{1,4}^{(1)} + f_4(1)\right] + \left[2f_4(1)F_{1,4}^{(1)} + F_{1,4}^{(2)} + R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1^2\right]\\
f_3(1,2) &= \mu_1\tilde{\mu}_2 f_4(4,4) + \mu_1\tilde{\mu}_2\left[R_4^{(2)} + r_4 + f_4(4)\right] + r_4\tilde{\mu}_1\left[F_{2,4}^{(1)} + f_4(2)\right] + f_4(1)\left[r_4\tilde{\mu}_2 + F_{2,4}^{(1)}\right] + F_{1,4}^{(1)}\big[r_4\tilde{\mu}_2 + f_4(2\\
f_3(1,3) &= \mu_1\mu_3 f_4(4,4) + \mu_1 f_4(3,4) + \mu_1\mu_3\left[R_4^{(2)} + r_4 + f_4(4)\right] + r_4\tilde{\mu}_3\left[F_{1,4}^{(1)} + f_4(1)\right] + f_4(3)\left[F_{1,4}^{(1)} + r_4\tilde{\mu}_1\right]\\
f_3(1,4) &= \mu_1\mu_4 f_4(4,4) + \mu_1\mu_4\left[R_4^{(2)} + r_4 + f_4(4)\right] + f_4(4)\left[r_4\tilde{\mu}_1 + F_{1,4}^{(1)}\right] + r_4\tilde{\mu}_4\left[f_4(1) + F_{1,4}^{(1)}\right]\\
f_3(2,2) &= \tilde{\mu}_2^2 f_4(4,4) + R_4^{(2)}\tilde{\mu}_2^2 + \tilde{P}_2^{(2)}\left[r_4 + f_4(4)\right] + 2r_4\tilde{\mu}_2\left[F_{2,4}^{(1)} + f_4(2)\right] + \left[2f_4(2)F_{2,4}^{(1)} + F_{2,4}^{(2)}\right]\\
f_3(2,3) &= \tilde{\mu}_2\mu_3 f_4(4,4) + \tilde{\mu}_2 f_4(3,4) + \tilde{\mu}_2\mu_3\left[R_4^{(2)} + r_4 + f_4(4)\right] + r_4\tilde{\mu}_3\left[f_4(2) + F_{2,4}^{(1)}\right] + f_4(3)\left[r_4\tilde{\mu}_2 + F_{2,4}^{(1)}\right]\\
f_3(2,4) &= \tilde{\mu}_2\mu_4 f_4(4,4) + \tilde{\mu}_2\mu_4\left[R_4^{(2)} + r_4 + f_4(4)\right] + r_4\tilde{\mu}_4\left[f_4(4) + F_{2,4}^{(1)}\right] + f_4(4)\left[r_4\tilde{\mu}_2 + F_{2,4}^{(1)}\right]\\
f_3(3,3) &= \mu_3^2 f_4(4,4) + 2\mu_3 f_4(3,4) + f_4(3,3) + P_3^{(2)}\left[r_4 + f_4(4)\right] + \tilde{\mu}_3\left[R_4^{(2)}\tilde{\mu}_3 + 2r_4 f_4(4)\right]\\
f_3(3,4) &= \mu_4 f_4(3,4) + \mu_3\mu_4 f_4(4,4) + \mu_3\mu_4\left[R_4^{(2)} + r_4 + f_4(4)\right] + r_4\left[\tilde{\mu}_3 f_4(4) + \tilde{\mu}_4 f_4(3)\right]\\
f_3(4,4) &= \mu_4^2 f_4(4,4) + P_4^{(2)}\left[r_4 + f_4(4)\right] + \tilde{\mu}_4\left[R_4^{(2)}\tilde{\mu}_4 + 2r_4 f_4(4)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_4(1,1) &= \mu_1^2 f_3(3,3) + P_1^{(2)}\left[r_3 + f_3(3)\right] + 2f_3(1)\left[r_3\tilde{\mu}_1 + F_{1,3}^{(1)}\right] + \tilde{\mu}_1\left[R_3^{(2)}\tilde{\mu}_1 + 2F_{1,3}^{(1)} r_3\right] + F_{1,3}^{(2)}\\
f_4(1,2) &= \mu_1\tilde{\mu}_2 f_3(3,3) + \mu_1\tilde{\mu}_2\left[R_3^{(2)} + r_3 + f_3(3)\right] + r_3\tilde{\mu}_1\left[F_{2,3}^{(1)} + f_3(2)\right] + f_3(1)\left[r_3\tilde{\mu}_2 + F_{2,3}^{(1)}\right] + F_{1,3}^{(1)}\left[r_3\tilde{\mu}_2 + f_3(2\right.\\
f_4(1,3) &= \mu_1\mu_3 f_3(3,3) + \mu_1\mu_3\left[R_3^{(2)} + r_3 + f_3(3)\right] + r_3\tilde{\mu}_3\left[f_3(1) + F_{1,3}^{(1)}\right] + f_3(3)\left[F_{1,3}^{(1)} + r_3\tilde{\mu}_1\right]\\
f_4(1,4) &= \mu_4\mu_1 f_3(3,3) + \mu_1 f_3(3,4) + \mu_1\mu_4\left[R_3^{(2)} + r_3\tilde{\mu}_1 + f_3(3)\right] + r_3\tilde{\mu}_4\left[f_3(3) + F_{1,3}^{(1)}\right] + f_3(4)\left[r_3\tilde{\mu}_1 + F_{1,3}^{(1)}\right]\\
f_4(2,2) &= \tilde{\mu}_2^2 f_3(3,3) + P_2^{(2)}\left[r_3 + f_3(3)\right] + 2r_3\tilde{\mu}_2\left[F_{2,3}^{(1)} + f_3(2)\right] + \left[R_3^{(2)}\tilde{\mu}_2^2 + F_{2,3}^{(2)} + 2f_3(2)F_{2,3}^{(1)}\right]\\
f_4(2,3) &= \mu_3\tilde{\mu}_2 f_3(3,3) + \mu_3\tilde{\mu}_2\left[R_3^{(2)} + r_3 + f_3(3)\right] + r_3\tilde{\mu}_3\left[f_3(2) + F_{2,3}^{(1)}\right] + f_3(3)\left[r_3\tilde{\mu}_2 + F_{2,3}^{(1)}\right]\\
f_4(2,4) &= \tilde{\mu}_2\mu_4 f_3(3,3) + \tilde{\mu}_2 f_3(3,4) + \mu_4\tilde{\mu}_2\left[R_3^{(2)} + r_3 + f_3(3)\right] + f_3(4)\left[r_3\tilde{\mu}_2 + F_{2,3}^{(1)}\right] + r_3\tilde{\mu}_4\left[f_3(2) + F_{2,3}^{(1)}\right]\\
f_4(3,3) &= \mu_3^2 f_3(3,3) + P_3^{(2)}\left[r_3 + f_3(3)\right] + \tilde{\mu}_3\left[R_3^{(2)}\tilde{\mu}_3 + 2r_3 f_3(3)\right]\\
f_4(3,4) &= \mu_3\mu_4 f_3(3,3) + \mu_3 f_3(3,4) + \mu_4\mu_3\left[R_3^{(2)} + r_3 + f_3(3)\right] + r_3\left[\tilde{\mu}_3 f_3(4) + \tilde{\mu}_4 f_3(3)\right]\\
f_4(4,4) &= \mu_4^2 f_3(3,3) + 2\mu_4 f_3(3,4) + \mu_4 f_3(4,4) + \tilde{\mu}_4\left[2r_3 f_3(4) + R_3^{(2)}\tilde{\mu}_4\right] + P_4^{(2)}\left[r_3 + f_3(3)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lllllll}
D_1D_1F_1 = 0, & D_2D_1F_1 = 0, & D_3D_1F_1 = 0, & D_4D_1F_1 = 0, & D_1D_2F_1 = 0, & D_1D_3F_1 = 0, & D_1D_4F_1 = 0,\\
D_2D_1F_2 = 0, & D_2D_3F_3 = 0, & D_2D_4F_2 = 0, & D_1D_2F_2 = 0, & D_2D_2F_2 = 0, & D_3D_2F_2 = 0, & D_4D_2F_2 = 0,\\
D_3D_1F_3 = 0, & D_3D_2F_3 = 0, & D_1D_3F_3 = 0, & D_2D_3F_3 = 0, & D_3D_3F_3 = 0, & D_4D_3F_3 = 0, & D_3D_4F_3 = 0,\\
D_4D_1F_4 = 0, & D_4D_2F_4 = 0, & D_4D_3F_4 = 0, & D_1D_4F_4 = 0, & D_2D_4F_4 = 0, & D_3D_4F_4 = 0, & D_4D_4F_4 = 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2D_2F_1 &= f_1(1,1)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2^2 + f_1(1)\,\frac{\tilde{P}_2^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1(1,2)\,\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1(1,2)\,\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1(2,2)\\
D_3D_2F_1 &= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3 + f_1(1)\,\frac{\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1(1,2)\,\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_1}\\
D_4D_2F_1 &= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 + f_1(1)\,\frac{\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_1} + f_1(1,2)\,\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_1}\\
D_3D_3F_1 &= f_1(1,1)\left(\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_3^2 + f_1(1)\,\frac{\tilde{P}_3^2}{1-\tilde{\mu}_1}\\
D_4D_3F_1 &= f_1(1,1)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^2\tilde{\mu}_4\tilde{\mu}_3 + f_1(1)\,\frac{\tilde{\mu}_4\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_1}\\
D_4D_4F_1 &= f_1(1,1)\left(\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\tilde{\mu}_4^2 + f_1(1)\,\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\tilde{P}_4^{(2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_1F_2 &= f_2(2)\,\frac{\tilde{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2(2)\,\theta_2^{(2)}\tilde{\mu}_1^2 + f_2(2,1)\,\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} + \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2,1) + f_2(1,1)\\
D_3D_1F_2 &= f_2(2,1)\,\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2(2,2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3 + f_2(2)\,\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3 + f_2(2)\,\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_2}\\
D_4D_1F_2 &= f_2(2,2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4 + f_2(2)\,\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4 + f_2(2)\,\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2(2,1)\,\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2}\\
D_3D_3F_2 &= f_2(2,2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_3^2 + f_2(2)\,\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_3^2 + f_2(2)\,\frac{\tilde{P}_3^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}\\
D_4D_3F_2 &= f_2(2,2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4 + f_2(2)\,\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4 + f_2(2)\,\frac{\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2}\\
D_4D_4F_2 &= f_2(2,2)\left(\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 + f_2(2)\,\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_4^2 + f_2(2)\,\frac{\tilde{P}_4^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_1F_3 &= f_3(3,3)\left(\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2 + f_3(3)\frac{\tilde{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_3} + f_3(3)\tilde{\theta}_3^{(2)}\tilde{\mu}_1^2\\
D_2D_1F_3 &= f_3(3,3)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + f_3(3)\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\tilde{\theta}_3^{(2)} + f_3(3)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_3}\\
D_4D_1F_3 &= f_3(3,3)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4 + f_3(3)\tilde{\theta}_3^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4 + f_3(3)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_3} + f_3(3,4)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_3}\\
D_2D_2F_3 &= f_3(3,3)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2 + f_3(3)\tilde{\theta}_3^{(2)}\tilde{\mu}_2^2 + f_3(3)\frac{\tilde{P}_2^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_3}\\
D_4D_2F_3 &= f_3(3,3)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 + f_3(3)\tilde{\theta}_3^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 + f_3(3)\frac{\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_3} + f_3(3,4)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_3}\\
D_4D_4F_3 &= f_3(3,3)\left(\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2 + f_3(3)\tilde{\theta}_3^{(2)}\tilde{\mu}_4^2 + f_3(3)\frac{\tilde{P}_4^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_3} + 2f_3(3,4)\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_3} + f_3(4,4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_1F_4 &= f_4(4,4)\left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2 + f_4(4)\tilde{\theta}_4^{(2)}\tilde{\mu}_1^2 + f_4(4)\frac{\tilde{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_4}\\
D_2D_1F_4 &= f_4(4,4)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + f_4(4)\tilde{\theta}_4^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + f_4(4)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_4}\\
D_3D_1F_4 &= f_4(4,4)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3 + f_4(4)\tilde{\theta}_4^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3 + f_4(4)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4} + f_4(4,3)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_4}\\
D_2D_2F_4 &= f_4(4,4)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2 + f_4(4)\tilde{\theta}_4^{(2)}\tilde{\mu}_2^2 + f_4(4)\frac{\tilde{P}_2^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_4}\\
D_3D_2F_4 &= f_4(4,4)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3 + f_4(4)\tilde{\theta}_4^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3 + f_4(4)\frac{\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4} + f_4(4,3)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_4}\\
D_3D_3F_4 &= f_4(4,4)\left(\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2 + f_4(4)\tilde{\theta}_4^{(2)}\tilde{\mu}_3^2 + f_4(4)\frac{\tilde{P}_3^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_4} + 2f_4(4,3)\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4} + f_4(3,3)
\end{aligned}
$$

Then according to the equations in **??**, *we have*

$$
\begin{aligned}
f_1(i,k) &= D_kD_i\left(R_2+F_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}F_4\right) + D_iR_2D_k\left(F_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}F_4\right) + D_iF_2D_k\left(R_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}F_4\right)\\
&+ \mathbb{1}_{i\geq 3}D_iF_4D_k\left(R_2+F_2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1(1,1) &= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1^2 + r_2\tilde{P}_1^{(2)} + f_2(2)\frac{\tilde{P}_1^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2} + f_2(2)\theta_2^{(2)}\tilde{\mu}_1^2 + f_2(2,1)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} + \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2)\\
&+ \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2,1) + f_2(1,1) + 2r_2\tilde{\mu}_2 f_2(1) = \left[\left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + 2\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2,1) + f_2(1,1)\right]\\
&+ \left[\tilde{\mu}_1^2\left(R_2^{(2)} + f_2(2)\theta_2^{(2)}\right) + \tilde{P}_1^{(2)}\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2} + r_2\right) + 2r_2\tilde{\mu}_2 f_2(1)\right],\\
&= a_1 f_2(2,2) + a_2 f_2(2,1) + a_3 f_2(1,1) + K_1
\end{aligned}
$$

$$
a_1 = \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2,\quad a_2 = 2\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2},\quad a_3 = 1,\quad K_1 = \tilde{\mu}_1^2\left(R_2^{(2)} + f_2(2)\theta_2^{(2)}\right) + \tilde{P}_1^{(2)}\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2} + r_2\right) + 2r_2\tilde{\mu}_2 f_2(1)
$$

$$
\begin{aligned}
f_1(1,2) &= D_2D_1R_2 + D_2D_1F_2 + D_1R_2D_2F_2 + D_1F_2D_2R_2\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + r_2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + D_2D_1F_2 + r_2\tilde{\mu}_1 f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2 f_2(1)\\
&= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\left[R_2^{(2)} + +r_2\right] + r_2\left[\tilde{\mu}_1 f_2(2) + \tilde{\mu}_2 f_2(1)\right]\\
&= K_2
\end{aligned}
$$

$$K_2 = \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\left[R_2^{(2)}++r_2\right]+r_2\left[\tilde{\mu}_1 f_2\left(2\right)+\tilde{\mu}_2 f_2\left(1\right)\right],$$

$$\begin{aligned}
f_1\left(1,3\right) &= D_3D_1R_2+D_3D_1F_2+D_1R_2D_3F_2+D_1R_2D_3F_4+D_1F_2D_3R_2+D_1F_2D_3F_4\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3+r_2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3+D_3D_1F_2+r_2\tilde{\mu}_1 f_2\left(3\right)+r_2\tilde{\mu}_1 D_3F_4+r_2\tilde{\mu}_3 f_2\left(1\right)+D_3F_4 f_2\left(1\right)\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3+r_2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3+f_2\left(2,1\right)\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_2}+f_2\left(2,2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3+f_2\left(2\right)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3+f_2\left(2\right)\frac{\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_2}\\
&+ r_2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3\left(r_1+\frac{r\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}}\right)+F_{3,1}^{(1)}\left(1\right)+r_2\tilde{\mu}_1F_{3,2}^{(1)}+r_2\tilde{\mu}_3r_1\tilde{\mu}_1+F_{3,2}^{(1)}r_1\tilde{\mu}_1=\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3 f_2\left(2,2\right)\\
&+ \frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(2,1\right)+\left[\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3\left[R_2^{(2)}+r_2+f_2\left(2\right)\left(\tilde{\theta}_2^{(2)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\right]+r_2\tilde{\mu}_1\left[F_{3,2}^{(1)}+f_2\left(1\right)\right]\right.\\
&+ \left.\left[r_2\tilde{\mu}_3+F_{3,2}^{(1)}\right]f_2\left(1\right)\right]\\
&= a_4 f_2\left(2,2\right)+a_5 f\left(2,1\right)+K_3,
\end{aligned}$$

$$a_4=\left(\tfrac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3,\quad a_5=\tfrac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_2},$$

$$K_3 = \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3\left[R_2^{(2)}+r_2+f_2\left(2\right)\left(\tilde{\theta}_2^{(2)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\right]+r_2\tilde{\mu}_1\left[F_{3,2}^{(1)}+f_2\left(1\right)\right]+\left[r_2\tilde{\mu}_3+F_{3,2}^{(1)}\right]f_2\left(1\right),$$

$$\begin{aligned}
f_1\left(1,4\right) &= D_4D_1R_2+D_4D_1F_2+D_1R_2D_4F_2+D_1R_2D_4F_4+D_1F_2D_4R_2+D_1F_2D_4F_4\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4+r_2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4+D_4D_1F_2+r_2\tilde{\mu}_1 f_2\left(4\right)+r_2\tilde{\mu}_1D_4F_4+r_2\tilde{\mu}_4 f_2\left(1\right)+f_2\left(1\right)D_4F_4\\
&= \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4 f_2\left(2,2\right)+\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(2,1\right)+\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4\left[R_2^{(2)}+r_2+f_2\left(2\right)\left(\tilde{\theta}_2^{(2)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\right]\\
&+ \left[r_2\tilde{\mu}_1\left[f_2\left(4\right)+F_{4,2}^{(1)}\right]+f_2\left(1\right)\left[r_2\tilde{\mu}_4+F_{4,2}^{(1)}\right]\right]\\
&= a_6 f_2\left(2,2\right)+a_7 f_2\left(2,1\right)+K_4
\end{aligned}$$

$$a_6=\left(\tfrac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4,\quad a_7=\tfrac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2},$$

$$K_4=\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4\left[R_2^{(2)}+r_2+f_2\left(2\right)\left(\tilde{\theta}_2^{(2)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\right]+r_2\tilde{\mu}_1\left[f_2\left(4\right)+F_{4,2}^{(1)}\right]+f_2\left(1\right)\left[r_2\tilde{\mu}_4+F_{4,2}^{(1)}\right]$$

$$\begin{aligned}
f_1\left(2,2\right) &= D_2D_2\left(R_2+F_2\right)+D_2R_2D_2F_2+D_2F_2D_2R_2=D_2D_2R_2+D_2D_2F_2+D_2R_2D_2F_2+D_2F_2D_2R_2\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2^2+r_2\tilde{P}_2^{(2)}+D_2D_2F_2+2r_2\tilde{\mu}_2 f_2\left(2\right)=R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2^2+r_2\tilde{P}_2^{(2)}+2r_2\tilde{\mu}_2 f_2\left(2\right)\\
&= \tilde{\mu}_2^2\left[R_2^{(2)}+2r_2\frac{r\left(1-\tilde{\mu}_2\right)}{1-\mu}\right]+r_2\tilde{P}_2^{(2)}=K_5
\end{aligned}$$

$$K_5=\tilde{\mu}_2^2\left[R_2^{(2)}+2r_2\frac{r\left(1-\tilde{\mu}_2\right)}{1-\mu}\right]+r_2\tilde{P}_2^{(2)}$$

$$\begin{aligned}
f_1\left(2,3\right) &= D_3D_2R_2+D_3D_2F_2+D_2R_2D_3F_2+D_2R_2D_3F_4+D_2F_2D_3R_2+D_2F_2D_3F_4\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3+r_2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3+D_3D_2F_2+r_2\tilde{\mu}_2 f_2\left(3\right)+r_2\tilde{\mu}_2D_3F_4+r_2\tilde{\mu}_3 f_2\left(2\right)+f_2\left(2\right)D_3F_4\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3+r_2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3+r_2\tilde{\mu}_2 f_2\left(3\right)+r_2\tilde{\mu}_2F_{3,2}^{(1)}+r_2\tilde{\mu}_3 f_2\left(2\right)+f_2\left(2\right)F_{3,2}^{(1)}\\
&= \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3\left[R_2^{(2)}+r_2\right]+r_2\tilde{\mu}_2\left[f_2\left(3\right)+F_{3,2}^{(1)}\right]+f_2\left(2\right)\left[r_2\tilde{\mu}_3+F_{3,2}^{(1)}\right]=K_6
\end{aligned}$$

$$K_6 = \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3 \left[R_2^{(2)} + r_2\right] + r_2\tilde{\mu}_2 \left[f_2(3) + F_{3,2}^{(1)}\right] + f_2(2)\left[r_2\tilde{\mu}_3 + F_{3,2}^{(1)}\right]$$

$$\begin{aligned}
f_1(2,4) &= D_4D_2R_2 + D_4D_2F_2 + D_2R_2D_4F_2 + D_2R_2D_4F_4 + D_2F_2D_4R_2 + D_2F_2D_4F_4\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 + r_2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 + D_4D_2F_2 + r_2\tilde{\mu}_2 f_2(4) + r_2\tilde{\mu}_2 D_4F_4 + r_2\tilde{\mu}_4 f_2(2) + f_2(2) D_4F_4\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 + r_2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 + r_2\tilde{\mu}_2 f_2(4) + r_2\tilde{\mu}_2 F_{4,2}^{(1)} + r_2\tilde{\mu}_4 f_2(2) + f_2(2) F_{4,2}^{(1)}\\
&= \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4\left[R_2^{(2)} + r_2\right] + r_2\tilde{\mu}_2\left[f_2(4) + F_{4,2}^{(1)}\right] + f_2(2)\left[r_2\tilde{\mu}_4 + F_{4,2}^{(1)}\right]\\
&= K_7
\end{aligned}$$

$$K_7 = \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 \left[R_2^{(2)} + r_2\right] + r_2\tilde{\mu}_2 \left[f_2(4) + F_{4,2}^{(1)}\right] + f_2(2)\left[r_2\tilde{\mu}_4 + F_{4,2}^{(1)}\right]$$

$$\begin{aligned}
f_1(3,3) &= D_3D_3R_2 + D_3D_3F_2 + D_3D_3F_4 + D_3R_2D_3F_2 + D_3R_2D_3F_4\\
&+ D_3F_2D_3R_2 + D_3F_2D_3F_4 + D_3F_4D_3R_2 + D_3F_4D_3F_2\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_3^2 + r_2\tilde{P}_3^{(2)} + D_3D_3F_2 + D_3D_3F_4 + r_2\tilde{\mu}_3 f_2(3) + r_2\tilde{\mu}_3 D_3F_4\\
&+ r_2\tilde{\mu}_3 f_2(3) + f_2(3) D_3F_4 + r_2\tilde{\mu}_3 D_3F_4 + f_2(3) D_3F_4\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_3^2 + r_2\tilde{P}_3^{(2)} + f_2(2,2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_3^2 + f_2(2)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_3^2 + f_2(2)\frac{\tilde{P}_3^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2} + F_{3,2}^{(2)}\\
&+ 2r_2\tilde{\mu}_3 f_2(3) + 2r_2\tilde{\mu}_3 F_{3,2}^{(1)} + 2f_2(3) F_{3,2}^{(1)} = f_2(2,2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_3^2\\
&+ \tilde{\mu}_3^2\left[R_2^{(2)} + +f_2(2)\tilde{\theta}_2^{(2)}\right] + \tilde{P}_3^{(2)}\left[\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2} + r_2\right] + 2r_2\tilde{\mu}_3\left[f_2(3) + F_{3,2}^{(1)}\right] + 2f_2(3) F_{3,2}^{(1)} + F_{3,2}^{(2)}\\
&= a_8 f_2(2,2) + K_8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_8 &= \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_3^2\\
K_8 &= \tilde{\mu}_3^2\left[R_2^{(2)} + +f_2(2)\tilde{\theta}_2^{(2)}\right] + \tilde{P}_3^{(2)}\left[\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2} + r_2\right] + 2r_2\tilde{\mu}_3\left[f_2(3) + F_{3,2}^{(1)}\right] + 2f_2(3) F_{3,2}^{(1)} + F_{3,2}^{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1(3,4) &= D_4D_3R_2 + D_4D_3F_2 + D_4D_3F_4 + D_3R_2D_4F_2 + D_3R_2D_4F_4\\
&+ D_3F_2D_4R_2 + D_3F_2D_4F_4 + D_3F_4D_4R_2 + D_3F_4D_4F_2\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4 + r_2\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4 + D_4D_3F_2 + D_4D_3F_4 + r_2\tilde{\mu}_3 f_2(4) + r_2\tilde{\mu}_3 D_4F_4\\
&+ r_2\tilde{\mu}_4 f_2(3) + D_4F_4 f_2(3) + D_3F_4 r_2\tilde{\mu}_4 + D_3F_4 f_2(4)\\
&= R_2^{(2)}\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4 + r_2\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4 + f_2(2,2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4 + f_2(2)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4 + f_2(2)\frac{\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2} + F_{4,2}^{(1)}F_{3,2}^{(1)}\\
&+ r_2\tilde{\mu}_3 f_2(4) + r_2\tilde{\mu}_3 F_{4,2}^{(1)} + r_2\tilde{\mu}_4 f_2(3) + F_{4,2}^{(1)} f_2(3) + F_{3,2}^{(1)} r_2\tilde{\mu}_4 + F_{3,2}^{(1)} f_2(4)\\
&= \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4 f_2(2,2) + \tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4\left[R_2^{(2)} + r_2 + \left(\tilde{\theta}_2^{(2)} + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right) f_2(2)\right]\\
&+ r_2\tilde{\mu}_3\left(f_2(4) + F_{4,2}^{(1)}\right) + r_2\tilde{\mu}_4\left(f_2(3) + F_{3,2}^{(1)}\right) + F_{4,2}^{(1)}\left(f_2(3) + F_{3,2}^{(1)}\right) + F_{3,2}^{(1)} f_2(4)\\
&= a_9 f_2(2,2) + K_9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_9 &= \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4\\
K_9 &= \tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4\left[R_2^{(2)} + r_2 + \left(\tilde{\theta}_2^{(2)} + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right) f_2(2)\right] + r_2\tilde{\mu}_3\left(f_2(4) + F_{4,2}^{(1)}\right) + r_2\tilde{\mu}_4\left(f_2(3) + F_{3,2}^{(1)}\right)\\
&+ F_{4,2}^{(1)}\left(f_2(3) + F_{3,2}^{(1)}\right) + F_{3,2}^{(1)} f_2(4)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_1(4,4) &= D_4D_4R_2 + D_4D_4F_2 + D_4D_4F_4 + D_4R_2D_4F_2 + D_4R_2D_4F_4 + D_4F_2D_4R_2 + D_4F_2D_4F_4\\
&+ D_4F_4D_4R_2 + D_4F_4D_4F_2 = R_2^{(2)}\tilde{\mu}_4^2 + r_2\tilde{P}_4^{(2)} + D_4D_4F_2 + D_4D_4F_4 + 2r_2\tilde{\mu}_4 f_2(4)\\
&+ 2r_2\tilde{\mu}_4 D_4F_4 + 2D_4F_4f_2(4) = R_2^{(2)}\tilde{\mu}_4^2 + r_2\tilde{P}_4^{(2)} + f_2(2,2)\left(\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 + f_2(2)\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_4^2 + f_2(2)\frac{\tilde{P}_4^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}\\
&+ F_{4,2}^{(2)} + 2r_2\tilde{\mu}_4 f_2(4) + 2r_2\tilde{\mu}_4 F_{4,2}^{(1)} + 2F_{4,2}^{(1)}f_2(4) = \left(\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + \tilde{\mu}_4^2\left[R_2^{(2)} + f_2(2)\tilde{\theta}_2^{(2)}\right]\\
&+ \tilde{P}_4^{(2)}\left[r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right] + 2r_2\tilde{\mu}_4\left[f_2(4) + F_{4,2}^{(1)}\right] + 2F_{4,2}^{(1)}f_2(4) = a_{10}f_2(2,2) + K_{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{10} &= \left(\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\\
K_{10} &= \tilde{\mu}_4^2\left[R_2^{(2)} + f_2(2)\tilde{\theta}_2^{(2)}\right] + \tilde{P}_4^{(2)}\left[r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right] + 2r_2\tilde{\mu}_4\left[f_2(4) + F_{4,2}^{(1)}\right] + 2F_{4,2}^{(1)}f_2(4)
\end{aligned}
$$

So, following this procedure we have similar expressions for the rest of the elements

$$
\begin{aligned}
f_2(i,k) &= D_kD_i\left(R_1 + F_1 + \mathbb{1}_{i\geq 3}F_3\right) + D_iR_1D_k\left(F_1 + \mathbb{1}_{k\geq 3}F_3\right) + D_iF_1D_k\left(R_1 + \mathbb{1}_{k\geq 3}F_3\right)\\
&+ \mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\tilde{F}_3D_k\left(R_1 + F_1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(1,1) &= R_1^2\tilde{\mu}_1^2 + r_1\tilde{P}_1^{(2)} + 2r_1\tilde{\mu}_1 f_1(1) = K_{11}\\
f_2(1,2) &= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\left[R_1^{(2)} + r_1\right] + r_1\left[\tilde{\mu}_1 f_1(2) + \tilde{\mu}_2 f_1(1)\right] = K_{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(1,3) &= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3\left[R_1^{(2)} + r_1\right] + r_1\tilde{\mu}_1\left[f_1(3) + F_{3,1}^{(1)}\right] + f_1(1)\left[r_1\tilde{\mu}_3 + F_{3,1}^{(1)}\right] = K_{13}\\
f_2(1,4) &= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4\left[R_1^{(2)} + r_1\right] + r_1\tilde{\mu}_1\left[f_1(4) + F_{4,1}^{(1)}\right] + f_1(1)\left[r_1\tilde{\mu}_4 + F_{4,1}^{(1)}\right] = K_{14}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(2,2) &= f_1(1,1)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 + 2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}f_1(1,2) + f_1(2,2) + \tilde{\mu}_2^2\left[R_1^{(2)} + f_1(1)\tilde{\theta}_1^{(2)}\right] + \tilde{P}_2^{(2)}\left[r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\tilde{\mu}_1}\right]\\
&+ 2r_1\tilde{\mu}_2 f_1(2)\\
&= a_{11}f_1(1,1) + a_{12}f_1(1,2) + a_{13}f_1(2,2) + K_{15}
\end{aligned}
$$

$$
a_{11} = \left(\tfrac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 a_{12} = 2\tfrac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1}a_{13} = 1
$$

$$
K_{15} = \tilde{\mu}_2^2\left[R_1^{(2)} + f_1(1)\tilde{\theta}_1^{(2)}\right] + \tilde{P}_2^{(2)}\left[r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\tilde{\mu}_1}\right] + 2r_1\tilde{\mu}_2 f_1(2)
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(2,3) &= \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3 f_1(1,1) + \frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_1}f_1(1,2) + \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3\left[R_1^{(2)} + r_1 + f_1(1)\left(\tilde{\theta}_1^{(2)} + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\right]\\
&+ r_1\tilde{\mu}_2\left[f_1(3) + F_{3,1}^{(1)}\right] + f_1(2)\left[r_1\tilde{\mu}_3 + F_{3,1}^{(1)}\right] = a_{14}f_1(1,1) + a_{15}f_1(1,2) + K_{16}
\end{aligned}
$$

$$
a_{14} = \left(\tfrac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3, \quad a_{15} = \tfrac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_1}
$$

$$
K_{16} = \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3\left[R_1^{(2)} + r_1 + f_1(1)\left(\tilde{\theta}_1^{(2)} + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\right] + r_1\tilde{\mu}_2\left[f_1(3) + F_{3,1}^{(1)}\right] + f_1(2)\left[r_1\tilde{\mu}_3 + F_{3,1}^{(1)}\right]
$$

$$\begin{aligned}
f_2(2,4) &= \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 f_1(1,1) + \frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_1} f_1(1,2) + \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4\left[R_1^{(2)} + r_1 + f_1(1)\left(\tilde{\theta}_1^{(2)} + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\right]\\
&+ r_1\tilde{\mu}_2\left[f_1(4) + \tilde{\mu}_2 F_{4,1}^{(1)}\right] + f_1(2)\left[r_1\tilde{\mu}_4 + F_{4,1}^{(1)}\right] = a_{16} f_1(1,1) + a_{17} f_1(1,2) + K_{17}
\end{aligned}$$

$$a_{16} = \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4, \quad a_{17} = \frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_1}$$

$$K_{17} = \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4\left[R_1^{(2)} + r_1 + f_1(1)\left(\tilde{\theta}_1^{(2)} + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\right] + r_1\tilde{\mu}_2\left[f_1(4) + \tilde{\mu}_2 F_{4,1}^{(1)}\right] + f_1(2)\left[r_1\tilde{\mu}_4 + F_{4,1}^{(1)}\right]$$

$$\begin{aligned}
f_2(3,3) &= \left(\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 f_1(1,1) + \tilde{\mu}_3^2\left[R_1^{(2)} + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\right] + \tilde{P}_3^{(2)}\left[r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\tilde{\mu}_1}\right] + 2r_1\tilde{\mu}_3\left[f_1(3) + F_{3,1}^{(1)}\right]\\
&+ F_{3,1}^{(2)} + 2F_{3,1}^{(1)} f_1(3)\\
&= a_{18} f_1(1,1) + K_{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{18} &= \left(\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\\
K_{18} &= \tilde{\mu}_3^2\left[R_1^{(2)} + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\right] + \tilde{P}_3^{(2)}\left[r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\tilde{\mu}_1}\right] + 2r_1\tilde{\mu}_3\left[f_1(3) + F_{3,1}^{(1)}\right] + F_{3,1}^{(2)} + 2F_{3,1}^{(1)} f_1(3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(3,4) &= \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 \tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4 f_1(1,1) + \tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4\left[R_1^{(2)} + r_1 + f_1(1)\left(\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\right] + r_1\tilde{\mu}_3\left[f_1(4) + F_{4,1}^{(1)}\right]\\
&+ f_1(3)\left[r_1\tilde{\mu}_4 + F_{4,1}^{(1)}\right] + F_{3,1}^{(1)}\left[r_1\tilde{\mu}_4 + F_{4,1}^{(1)} + f_1(4)\right] = a_{19} f_1(1,1) + K_{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{19} &= \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 \tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4\\
K_{19} &= \tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4\left[R_1^{(2)} + r_1 + f_1(1)\left(\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_1}\right)\right] + r_1\tilde{\mu}_3\left[f_1(4) + F_{4,1}^{(1)}\right] + f_1(3)\left[r_1\tilde{\mu}_4 + F_{4,1}^{(1)}\right]\\
&+ F_{3,1}^{(1)}\left[r_1\tilde{\mu}_4 + F_{4,1}^{(1)} + f_1(4)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(4,4) &= \left(\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2 f_1(1,1) + \tilde{\mu}_4^2\left[R_1^{(2)} + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\right] + \tilde{P}_4^{(2)}\left[r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\tilde{\mu}_1}\right] + f_1(4)\left[2r_1\tilde{\mu}_4 + 2F_{4,1}^{(1)}\right]\\
&+ F_{4,1}^{(2)} + 2F_{4,1}^{(1)} r_1\tilde{\mu}_4 = a_{20} f_1(1,1) + K_{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{20} &= \left(\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_1}\right)^2\\
K_{20} &= \tilde{\mu}_4^2\left[R_1^{(2)} + f_1(1)\,\tilde{\theta}_1^{(2)}\right] + \tilde{P}_4^{(2)}\left[r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\tilde{\mu}_1}\right] + f_1(4)\left[2r_1\tilde{\mu}_4 + 2F_{4,1}^{(1)}\right] + F_{4,1}^{(2)} + 2F_{4,1}^{(1)} r_1\tilde{\mu}_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3(i,k) &= D_k D_i\left(\tilde{R}_4 + \mathbb{1}_{k\leq 2}F_2 + F_4\right) + D_i\tilde{R}_4 D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_2 + F_4\right) + D_i F_4 D_k\left(\tilde{R}_4 + \mathbb{1}_{k\leq 2}F_2\right)\\
&+ \mathbb{1}_{i\leq 2} D_i F_2 D_k\left(\tilde{R}_4 + F_4\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3(1,1) &= f_4(4,4)\left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2+\tilde{\mu}_1^2\left[R_2^{(2)}+f_4(4)\,\tilde{\theta}_4^{(2)}\right]+2r_4\tilde{\mu}_1\left[F_{1,4}^{(1)}+f_4(1)\right]+\tilde{P}_1^{(2)}\left[r_4++\frac{f_4(4)}{1-\tilde{\mu}_2}\right]\\
&+ \left[F_{1,4}^{(2)}+2f_4(1)\,F_{1,4}^{(1)}\right]=a_{21}f_4(4,4)+K_{21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2\\
K_{22} &= \tilde{\mu}_1^2\left[R_2^{(2)}+f_4(4)\,\tilde{\theta}_4^{(2)}\right]+2r_4\tilde{\mu}_1\left[F_{1,4}^{(1)}+f_4(1)\right]+\tilde{P}_1^{(2)}\left[r_4++\frac{f_4(4)}{1-\tilde{\mu}_2}\right]+\left[F_{1,4}^{(2)}+2f_4(1)\,F_{1,4}^{(1)}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3(1,2) &= \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2f_4(4,4)+\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\left[R_4^{(2)}+r_4+f_4(4)\left(\tilde{\theta}_4^{(2)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\right]+r_4\tilde{\mu}_1\left(F_{2,4}^{(1)}+f_4(2)\right)\\
&+ r_4\tilde{\mu}_2\left(f_4(1)+F_{1,4}^{(1)}\right)+\left[f_4(2)\,F_{1,4}^{(1)}+f_4(1)\,F_{2,4}^{(1)}+F_{2,4}^{(1)}F_{1,4}^{(1)}\right]=a_{22}f_4(4,4)+K_{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{22} &= \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\\
K_{22} &= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\left[R_4^{(2)}+r_4+f_4(4)\left(\tilde{\theta}_4^{(2)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\right]+r_4\tilde{\mu}_1\left(F_{2,4}^{(1)}+f_4(2)\right)+r_4\tilde{\mu}_2\left(f_4(1)+F_{1,4}^{(1)}\right)\\
&+ \left[f_4(2)\,F_{1,4}^{(1)}+f_4(1)\,F_{2,4}^{(1)}+F_{2,4}^{(1)}F_{1,4}^{(1)}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3(1,3) &= \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3f_4(4,4)+\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_4}f_4(4,3)+\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3\left[R_4^{(2)}+r_4+f_4(4)\left(\tilde{\theta}_4^{(2)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)\right]\\
&+ \tilde{\mu}_3\left[r_4\left(f_4(1)+F_{1,4}^{(1)}\right)+r_3F_{1,4}^{(1)}\right]+r_4\tilde{\mu}_1f_4(3)\\
&= a_{23}f_4(4,4)+a_{24}f_4(4,3)+K_{23}
\end{aligned}$$

$$a_{22}=\left(\tfrac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3,\quad a_{23}=\tfrac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_4}$$

$$K_{23} = \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3\left[R_4^{(2)}+r_4+f_4(4)\left(\tilde{\theta}_4^{(2)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)\right]+\tilde{\mu}_3\left[r_4\left(f_4(1)+F_{1,4}^{(1)}\right)+r_3F_{1,4}^{(1)}\right]+r_4\tilde{\mu}_1f_4(3)$$

$$\begin{aligned}
f_3(1,4) &= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4\left(R_4^{(2)}+r_4\right)+r_4\left[\tilde{\mu}_1f_4(4)+\tilde{\mu}_4\left(f_4(1)+F_{1,4}^{(1)}\right)\right]+f_4(4)\,F_{1,4}^{(1)}=K_{24}\\
f_3(2,2) &= f_4(4,4)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2+\tilde{\mu}_2^2\left[R_4^{(2)}+f_4(4)\,\tilde{\theta}_4^{(2)}\right]+2r_4\tilde{\mu}_2\left[F_{2,4}^{(1)}+f_4(2)\right]+\tilde{P}_2^{(2)}\left[\frac{f_4(4)}{1-\tilde{\mu}_4}+r_4\right]\\
&+ \left[2f_4(2)\,F_{2,4}^{(1)}+F_{2,4}^{(2)}\right]=a_{25}f_4(4,4)+K_{25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{25} &= \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2\\
K_{25} &= \tilde{\mu}_2^2\left[R_4^{(2)}+f_4(4)\,\tilde{\theta}_4^{(2)}\right]+2r_4\tilde{\mu}_2\left[F_{2,4}^{(1)}+f_4(2)\right]+\tilde{P}_2^{(2)}\left[\frac{f_4(4)}{1-\tilde{\mu}_4}+r_4\right]+\left[2f_4(2)\,F_{2,4}^{(1)}+F_{2,4}^{(2)}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3(2,3) &= f_4(4,4)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3+f_4(4,3)\,\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_4}+\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3\left[R_4^{(2)}+r_4+f_4(4)\left(\tilde{\theta}_4^{(2)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)\right]\\
&+ r_4\tilde{\mu}_3\left[F_{2,4}^{(1)}+f_4(2)\right]+\left[r_4\tilde{\mu}_2+F_{2,4}^{(1)}\right]f_4(3)=a_{26}f_4(4,4)+a_{27}f_4(4,3)+K_{26}
\end{aligned}$$

$$a_{26} = \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2 \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3, \quad a_{27} = \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_4}$$

$$K_{26} = \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3\left[R_4^{(2)} + r_4 + f_4(4)\left(\tilde{\theta}_4^{(2)} + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_4}\right)\right] + r_4\tilde{\mu}_3\left[F_{2,4}^{(1)} + f_4(2)\right] + \left[r_4\tilde{\mu}_2 + F_{2,4}^{(1)}\right] f_4(3)$$

$$f_3(2,4) = \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4\left[R_4^{(2)} + r_4\right] + r_4\tilde{\mu}_4\left[f_4(4) + F_{2,4}^{(2)}\right] + \left[r_4\tilde{\mu}_2 + F_{2,4}^{(2)}\right] f_4(4) = K_{27}$$

$$\begin{aligned} f_3(3,3) &= f_4(4,4)\left(\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2 + 2f_4(4,3)\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4} + f_4(3,3) + \tilde{\mu}_3^2\left[R_4^{(2)} + f_4(4)\tilde{\theta}_4^{(2)}\right] + \tilde{P}_3^{(2)}\left[r_4 + \frac{f_4(4)}{1-\tilde{\mu}_4}\right] \\ &+ 2r_4\tilde{\mu}_3 f_4(4) = a_{28}f_4(4,4) + a_{29}f_4(4,3) + a_{30}f_4(3,3) + K_{28} \end{aligned}$$

$$a_{28} = \left(\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2, \quad a_{29} = 2\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4}, \quad a_{30} = 1$$

$$K_{28} = \tilde{\mu}_3^2\left[R_4^{(2)} + f_4(4)\tilde{\theta}_4^{(2)}\right] + \tilde{P}_3^{(2)}\left[r_4 + \frac{f_4(4)}{1-\tilde{\mu}_4}\right] + 2r_4\tilde{\mu}_3 f_4(4)$$

$$\begin{aligned} f_3(3,4) &= \tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4\left[R_4^{(2)} + r_4\right] + r_4\left[\tilde{\mu}_3 f_4(4) + \tilde{\mu}_4 f_4(3)\right] = K_{29} \\ f_3(4,4) &= R_4^{(2)}\tilde{\mu}_4^2 + r_4\tilde{P}_4^{(2)} + 2r_4\tilde{\mu}_4 f_4(4) = K_{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4(i,k) &= D_kD_i\left(R_3 + \mathbb{1}_{i\leq 2}F_1 + F_3\right) + D_iR_3D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}F_1 + F_3\right) + D_iF_3D_k\left(R_3 + \mathbb{1}_{k\leq 2}F_1\right) \\ &+ \mathbb{1}_{i\leq 2}D_iF_1D_k\left(R_3 + F_3\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4(1,1) &= f_3(3,3)\left(\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2 + \tilde{\mu}_1^2\left[R_3^{(2)} + \tilde{\theta}_3^{(2)}f_3(3)\right] + \tilde{P}_2^{(2)}\left[r_3 + \frac{f_3(3)}{1-\tilde{\mu}_3}\right] + 2r_3\tilde{\mu}_1\left[F_{1,3}^{(1)} + f_3(1)\right] \\ &+ \left[2F_{1,3}^{(1)}f_3(1) + F_{1,3}^{(2)}\right] = a_{31}f_3(3,3) + K_{31} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= \left(\frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4}\right)^2 \\ K_{31} &= \tilde{\mu}_1^2\left[R_3^{(2)} + \tilde{\theta}_3^{(2)}f_3(3)\right] + \tilde{P}_2^{(2)}\left[r_3 + \frac{f_3(3)}{1-\tilde{\mu}_3}\right] + 2r_3\tilde{\mu}_1\left[F_{1,3}^{(1)} + f_3(1)\right] + \left[2F_{1,3}^{(1)}f_3(1) + F_{1,3}^{(2)}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4(1,2) &= f_3(3,3)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\left[R_3^{(2)} + r_3 + \tilde{\theta}_3^{(2)}f_3(3) + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}f_3(3)\right] + r_3\tilde{\mu}_1\left[f_3(2) + F_{2,3}^{(1)}\right] \\ &+ f_3(1)\left[F_{2,3}^{(1)} + r_3\tilde{\mu}_2\right] + F_{1,3}^{(1)}\left[r_3\tilde{\mu}_2 + f_3(2)\right] + F_{2,3}^{(1)}F_{1,3}^{(1)} = a_{32}f_3(3,3) + K_{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{32} &= \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2 \\ K_{32} &= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\left[R_3^{(2)} + r_3 + \tilde{\theta}_3^{(2)}f_3(3) + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}f_3(3)\right] + r_3\tilde{\mu}_1\left[f_3(2) + F_{2,3}^{(1)}\right] + f_3(1)\left[F_{2,3}^{(1)} + r_3\tilde{\mu}_2\right] \\ &+ F_{1,3}^{(1)}\left[r_3\tilde{\mu}_2 + f_3(2)\right] + F_{2,3}^{(1)}F_{1,3}^{(1)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_4(1,3) &= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3\left[R_3^{(2)}+r_3\right]+r_3\tilde{\mu}_3\left[f_3(1)+F_{1,3}^{(1)}\right]+f_3(3)\left[r_3\tilde{\mu}_1+F_{1,3}^{(1)}\right]=K_{33}\\
f_4(1,4) &= f_3(3,3)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3+f_3(3,4)\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_3}+\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4\left[f_3(3)\left(\tilde{\theta}_3^{(2)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)+r_3+R_3^{(2)}\right]\\
&+ r_3\tilde{\mu}_4\left[f_3(3)+F_{1,3}^{(1)}\right]+f_3(4)\left[r_3\tilde{\mu}_1+F_{1,3}^{(1)}\right]=a_{33}f_3(3,3)+a_{34}f_3(3,4)+K_{34}
\end{aligned}
$$

$$
a_{33}=\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3,\quad a_{34}=\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_3}
$$

$$
K_{34} = \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4\left[f_3(3)\left(\tilde{\theta}_3^{(2)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)+r_3+R_3^{(2)}\right]+r_3\tilde{\mu}_4\left[f_3(3)+F_{1,3}^{(1)}\right]+f_3(4)\left[r_3\tilde{\mu}_1+F_{1,3}^{(1)}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
f_4(2,2) &= f_3(3,3)\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2+\tilde{\mu}_2^2\left[R_3^{(2)}+f_3(3)\tilde{\theta}_3^{(2)}\right]+2r_3\tilde{\mu}_2\left[f_3(2)+F_{2,3}^{(1)}\right]+\tilde{P}_2^{(2)}\left[f_3(3)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}+r_3\right]\\
&+ \left[F_{2,3}^{(2)}+2f_3(2)F_{2,3}^{(1)}\right]=a_{35}f_3(3,3)+K_{35}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{35} &= \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2\\
K_{35} &= \tilde{\mu}_2^2\left[R_3^{(2)}+f_3(3)\tilde{\theta}_3^{(2)}\right]+2r_3\tilde{\mu}_2\left[f_3(2)+F_{2,3}^{(1)}\right]+\tilde{P}_2^{(2)}\left[f_3(3)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}+r_3\right]+\left[F_{2,3}^{(2)}+2f_3(2)F_{2,3}^{(1)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_4(2,3) &= \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3\left[R_3^{(2)}+r_3\right]+r_3\tilde{\mu}_3\left[f_3(2)+F_{2,3}^{(1)}\right]+\left[r_3\tilde{\mu}_2+F_{2,3}^{(1)}\right]f_3(3)=K_{36}\\
f_4(2,4) &= f_3(3,3)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4+f_3(3,4)\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_3}+\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4\left[R_3^{(2)}+r_3+f_3(3)\left(\tilde{\theta}_3^{(2)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)\right]\\
&+ r_3\tilde{\mu}_4\left[f_3(2)+F_{2,3}^{(1)}\right]+\left[r_3\tilde{\mu}_2+F_{2,3}^{(1)}\right]f_3(4)=a_{36}f_3(3,3)+a_{37}f_3(3,4)+K_{37}
\end{aligned}
$$

$$
a_{36}=\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4,\quad a_{37}=\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_3}
$$

$$
K_{37} = \tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4\left[R_3^{(2)}+r_3+f_3(3)\left(\tilde{\theta}_3^{(2)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}\right)\right]+r_3\tilde{\mu}_4\left[f_3(2)+F_{2,3}^{(1)}\right]+\left[r_3\tilde{\mu}_2+F_{2,3}^{(1)}\right]f_3(4)
$$

$$
f_4(3,3) = R_3^{(2)}\tilde{\mu}_3^2+r_3\tilde{P}_3^{(2)}+2r_3\tilde{\mu}_3f_3(3)=K_{38}
$$

$$
f_4(3,4) = \tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_4\left[R_3^{(2)}+r_3\right]+r_3\left[\tilde{\mu}_3f_3(4)+\tilde{\mu}_4f_3(3)\right]=K_{39}
$$

$$
\begin{aligned}
f_4(4,4) &= f_3(3,3)\left(\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2+2f_3(3,4)\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_3}+f_3(4,4)+\tilde{\mu}_4^2\left[R_3^{(2)}+f_3(3)\tilde{\theta}_3^{(2)}\right]\\
&+ \tilde{P}_4^{(2)}\left[f_3(3)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}+r_3\right]+2r_3\tilde{\mu}_4f_3(4)=a_{38}f_3(3,3)+a_{39}f_3(3,4)+a_{40}f_3(4,4)+K_{40}
\end{aligned}
$$

$$
a_{38}=\left(\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_3}\right)^2,\quad a_{39}=2\frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_3},\quad a_{40}=1
$$

$$
K_{40} = \tilde{\mu}_4^2\left[R_3^{(2)}+f_3(3)\tilde{\theta}_3^{(2)}\right]+\tilde{P}_4^{(2)}\left[f_3(3)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_3}+r_3\right]+2r_3\tilde{\mu}_4f_3(4)
$$

so we have

33.36. Resultados Necesarios

Proposición 33.32 *Sea $f(g(x)h(y))$ función continua y con derivadas mixtas de segundo orden, entonces se tiene lo siguiente:*

$$\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y)) = \frac{\partial f(g(x)h(y))}{\partial x}\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot h(y)$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y)) &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial f(g(x)h(y))}{\partial x}\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot h(y)\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\right\}\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot h(y)+\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2}\cdot h(y)\\
&= \frac{\partial^2}{\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot h(y)\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot h(y)+\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2}\cdot h(y)\\
&= \frac{\partial^2}{\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right)^2\cdot h^2(y)+\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2}\cdot h(y)
\end{aligned}$$

Expresion de las Parciales mixtas para F_1 y F_2

a)

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

b)

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

c)

$$\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

d)

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

e)

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

f)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = f_1(2,2)+\frac{1}{1-\mu_1}\tilde{P}_2^{(2)}(1)f_1(1)\\
+\quad&\tilde{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1)+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,2)+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(1,1)
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)\\
+\quad&\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}(1)f_1(1)+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1,2)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(1,1)
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1\left(1\right)\\ &+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1\left(1,2\right)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

i)

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

j)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1\left(2\right)\\ &+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(2\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1\left(2,1\right)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)\\ &+ \hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 f_1\left(1\right)\\ &+ \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1\left(1\right)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

m)

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

n)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1\left(1\right)\\ &+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1\left(2,1\right)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1\left(2,2\right)\end{aligned}$$

ñ)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1\left(1\right)\\ &+ \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_2^{(2)}\left(w_2\right)f_1\left(1\right)\\ &+ \hat{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+\left(\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

p)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}P_1^{(2)}\left(1\right)f_2\left(2\right)+f_2\left(1,1\right)\\ &+ \mu_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)f_2\left(2\right)+\mu_1\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)+\left(\mu_1\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right)+\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)\end{aligned}$$

q)

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

r)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(2\right)\\ &+ \mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)f_2\left(2\right)+\mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2f_2\left(2,2\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)\end{aligned}$$

s)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(2\right)\\ &+ \mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)f_2\left(2\right)+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2f_2\left(2,2\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)\end{aligned}$$

t)

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0;$$

u)

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

v)

$$\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

w)

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

x)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}P_1^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)+\mu_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)\\ &+ \mu_1\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)+\left(\mu_1\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2f_2\left(2,2\right)\\ &+ \mu_1\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)+f_2\left(1,1\right)\end{aligned}$$

y)

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

z)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \mu_1\hat{\mu}_1\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)+\mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)\\ &+ \mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)+\hat{\mu}_1\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)\\ &+ \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right)\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \mu_1\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\frac{\partial}{\partial z_1}F_2\left(1\right)+\mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)\\ &+ \hat{\mu}_2\mu_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right)+\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)\end{aligned}$$

)

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)\\ &+ \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right)\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)+\hat{\mu}_2^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)\\ &+ \left(\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right)\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}P_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)+\mu_1^2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)\\ &+ \mu_1^2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \mu_1\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_2\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)\\ &+ \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)\\ &+ \mu_1\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{f}_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

)

$$\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \mu_1\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)\\ &+ \mu_1\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}f_1\left(1,2\right)+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

)

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \mu_1\tilde{\mu}_2\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right) + \mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1\left(1,1\right)$$

)

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right) + \tilde{\mu}_2^2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1\left(1,1\right)$$

)

$$\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

)

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right) + \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_2\hat{f}_1\left(1,2\right)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1\left(1,1\right)$$

)

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

)

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

)

$$\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

)

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

)

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \mu_1\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right) + \mu_1\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1\left(1,2\right)+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1\left(1,1\right)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
= \; & P_1\left(z_1\right)\hat{P}_2'\left(w_2\right)\hat{\theta}_1'\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right),w_2\right)\\
+ \; & P_1\left(z_1\right)^2\hat{P}_2\left(w_2\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2'\left(w_2\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{\theta}_1''\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right),w_2\right)\\
+ \; & P_1\left(z_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\hat{\theta}_1'\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{F}_1^{(1,1)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right),w_2\right)\\
+ \; & P_1\left(z_1\right)^2\hat{P}_2\left(w_2\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2'\left(w_2\right)\hat{\theta}_1'\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)^2\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{F}_1^{(2,0)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right),w_2\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} \quad = \quad 0$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
= \;& \hat{F}_1^{(0,2)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right),w_2\right)\\
+ \;& P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{\theta}_1'\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{P}_2''\left(w_2\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right),w_2\right)\\
+ \;& P_1\left(z_1\right)^2\tilde{P}_2\left(z_2\right)^2\hat{P}_2'\left(w_2\right)^2\hat{\theta}_1''\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right),w_2\right)\\
+ \;& P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2'\left(w_2\right)\hat{\theta}_1'\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\\
+ \;& P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2'\left(w_2\right)\hat{\theta}_1'\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_1^{(1,1)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right),w_2\right)\\
+ \;& P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2'\left(w_2\right)\hat{\theta}_1'\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2'\left(w_2\right)\hat{\theta}_1'\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\\
& \hat{F}_1^{(2,0)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right),w_2\right)\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
= \;& P_1\left(w_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)P_1''\left(z_1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \;& P_1\left(w_1\right)^2\tilde{P}_2\left(z_2\right)^2P_1'\left(z_1\right)^2\hat{\theta}_2''\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \;& P_1\left(w_1\right)^2\tilde{P}_2\left(z_2\right)^2P_1'\left(z_1\right)^2\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
= \;& P_1\left(w_1\right)P_1'\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \;& P_1\left(w_1\right)^2P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(z_1\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{\theta}_2''\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \;& P_1\left(w_1\right)^2P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)^2\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
= \;& \tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)P_1'\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \;& P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)^2P_1'\left(w_1\right)P_1'\left(z_1\right)\hat{\theta}_2''\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \;& P_1\left(w_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\\
& \hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \;& P_1\left(w_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(1,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} \quad = \quad 0$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
= \;& P_1\left(w_1\right)P_1'\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \;& P_1\left(w_1\right)^2P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(z_1\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{\theta}_2''\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \;& P_1\left(w_1\right)^2P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)^2\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} \\
= \; & P_1\left(w_1\right)^2 P_1\left(z_1\right)^2 \tilde{P}_2'\left(z_2\right)^2 \hat{\theta}_2''\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right) \\
+ \; & P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\tilde{P}_2''\left(z_2\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right) \\
+ \; & P_1\left(w_1\right)^2 P_1\left(z_1\right)^2 \hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)^2 \tilde{P}_2'\left(z_2\right)^2 \hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} \\
= \; & P_1\left(z_1\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right) \\
+ \; & P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)^2\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{\theta}_2''\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right) \\
+ \; & P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right) \\
& \hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right) \\
+ \; & P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{F}_2^{(1,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} \\
= \; & \tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)P_1'\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right) \\
+ \; & P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)^2P_1'\left(w_1\right)P_1'\left(z_1\right)\hat{\theta}_2''\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right) \\
+ \; & P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)^2P_1'\left(w_1\right)P_1'\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right) \\
+ \; & P_1\left(w_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(1,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} \\
= \; & P_1\left(z_1\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right) \\
+ \; & P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)^2\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{\theta}_2''\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right) \\
+ \; & P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)^2\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)^2\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right) \\
+ \; & P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{F}_2^{(1,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} \\
= \; & P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)P_1''\left(w_1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right) \\
+ \; & P_1\left(z_1\right)^2\tilde{P}_2\left(z_2\right)^2P_1'\left(w_1\right)^2\hat{\theta}_2''\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right) \\
+ \; & P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(1,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right) \\
+ \; & P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right) \\
& \hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right) \\
+ \; & P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(1,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right) \\
+ \; & \hat{F}_2^{(2,0)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

33.36.1. Derivadas de Segundo Orden para F_1

Mixtas para z_1:

a)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= \;& r_2P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2R_2^{(2)}\left(1\right)+2\mu_1r_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{1,0)}\right)+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}P_1^{(2)}F_2^{(0,1)}+\mu_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+ \;& \frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}+\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right)+F_2^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= \;& \mu_1r_2\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right).
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= \;& \mu_1\hat{\mu}_1r_2+\mu_1\hat{\mu}_1R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\mu_1r_2\hat{F}_2^{(1,0)}\\
+ \;& \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+ \;& \mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= \;& \mu_1\hat{\mu}_2r_2+\mu_1\hat{\mu}_2R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1r_2\hat{F}_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\\
+ \;& \hat{F}_2^{(1,0)}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}\\
+ \;& \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

Mixtas para z_2:

e)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \mu_1\tilde{\mu}_2 r_2+\mu_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right).
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \tilde{\mu}_2^2 R_2^{(2)}(1)+r_2\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right).
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 r_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}.
\end{aligned}$$

Mixtas para w_1:

i)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \mu_1\hat{\mu}_1 r_2+\mu_1\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+\;& r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+r_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\hat{F}_2^{(1,0)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right).
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \hat{\mu}_1^2 R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+2r_2\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+2r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

Mixtas para w_2:

m)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
=\;& r_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}+r_2\mu_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\hat{F}_2^{(0,1)}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right).
\end{aligned}$$

n)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
=\;& r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}.
\end{aligned}$$

ñ)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
=\;& r_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
=\;& \hat{\mu}_2^2R_2^{(2)}(1)+r_2\hat{P}_2^{(2)}(1)+2r_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}\\
+\;& 2r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

33.36.2. Derivadas de Segundo Orden para F_2

Mixtas para z_1:

a)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
=\;& r_1P_1^{(2)}(1)+\mu_1^2R_1^{(2)}(1).
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
=\;& \mu_1\tilde{\mu}_2r_1+\mu_1\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right).
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
=\;& r_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1R_1^{(2)}(1)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
=\;& \mu_1\hat{\mu}_2r_1+\mu_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

Mixtas para z_2:

e)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right).
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \tilde{\mu}_2^2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)+2r_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)+F_1^{(0,2)}+\tilde{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+\;& \frac{1}{1-\mu_1}\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(2,0)}+F_1^{(1,1)}\right).
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1r_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;& \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}\\
+\;& \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2r_1+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\\
+\;& \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}\\
+\;& \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

Mixtas para w_1:

i)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1R_1^{(2)}(1)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1R_1^{(2)}\left(1\right)+\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}+r_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_2^{(1,0)}\\
+\;& r_1\hat{\mu}_1\left(F_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\left(F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{2,0)}\right).
\end{aligned}$$

k)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&\hat{\mu}_1^2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+2r_1\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+\;&2r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}+\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

l)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+\;&\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+\hat{F}_1^{(1,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

Mixtas para w_2:

m)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&r_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

n)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&r_1\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\\
+\;&\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+r_1\hat{\mu}_2\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\right)+\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\right)\hat{F}_1^{(0,1)}\\
+\;&\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

ñ)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+\;&\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(0,1)}F_1^{(1,0)}+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+\hat{F}_1^{(1,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

o)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)+2r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+\hat{F}_1^{(0,2)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+\;&\frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(0,1)}+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

33.36.3. Derivadas de Segundo Orden para $\hat{F}_1$

Mixtas para z_1:

a)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= &\;\hat{r}_2P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}P_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+ &\;\left(\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+2\hat{r}_2\mu_1F_2^{(1,0)}+2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= &\;\hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\mu_1F_2^{(0,1)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+ &\;\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= &\;\hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(1,0)}+\hat{r}_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(1,0)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= &\;\hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+ &\;\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

Mixtas para z_2:

e)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= &\;\hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\mu_1\hat{r}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+ &\;\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= &\;\hat{r}_2\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+ &\;\tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+F_2^{(0,2)}+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= &\;\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right) \\
= \quad & \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)} \\
+ \quad & \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

Mixtas para w_1:

i)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right) \\
= \quad & \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(1,0)}+\hat{r}_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(1,0)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right) \\
= \quad & \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right) \\
= \quad & \hat{r}_2\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right) \\
= \quad & \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

Mixtas para w_2:

m)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right) \\
= \quad & \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)} \\
+ \quad & \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

n)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right) \\
= \quad & \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)} \\
+ \quad & \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

ñ)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right) \\
= \quad & \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2P_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

33.36.4. Derivadas de Segundo Orden para $\hat{F}_2$

Mixtas para z_1:

a)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_1P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_1\mu_1F_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}P_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1^2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;&2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(2,0)}+\left(\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\mu_1F_1^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{r}_1F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;&\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(1,1)}\\
+\;&\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;&\hat{r}_1\mu_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+F_1^{(1,0)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}$$

Mixtas para z_2:

e)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\mu_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;&\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(1,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

f)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\ \hat{r}_1\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_1^{(0,1)}+F_1^{(0,2)}+2\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+&\ \tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}F^{(0,1)}\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

g)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\ \hat{r}_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\ \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+&\ \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+F_1^{(0,1)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+&\ \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

Mixtas para w_1:

i)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\ \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

j)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\ \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

k)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\ \hat{r}_1\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right).
\end{aligned}
$$

l)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\ \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right).
\end{aligned}
$$

Mixtas para w_1:

m)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= &\quad \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\mu_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+ &\quad F_1^{(1,0)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}\\
+ &\quad \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

n)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= &\quad \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+ &\quad F_1^{(0,1)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}\\
+ &\quad \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

ñ)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= &\quad \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right).
\end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= &\quad \hat{r}_1\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_1\hat{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\hat{F}_1^{(0,2)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ &\quad \hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}$$

SaddleBrown

Introducción

Un sistema de visitas (Polling System) consiste en una cola a la cuál llegan los usuarios para ser atendidos por uno o varios servidores de acuerdo a una política determinada, en la cual se puede asumir que la manera en que los usuarios llegan a la misma es conforme a un proceso Poisson con tasa de llegada μ. De igual manera se puede asumir que la distribución de los servicios a cada uno de los usuarios presentes en la cola es conforme a una variable aleatoria exponencial. Esto es la base para la conformación de los Sistemas de Visitas Cíclicas, de los cuales es posible obtener sus Funciones Generadoras de Probabilidades, primeros y segundos momentos así como medidas de desempeño que permiten tener una mejor descripción del funcionamiento del sistema en cualquier momento t asumiendo estabilidad.

DarkSlateGray

Objetivos Principales

- *Encontrar las ecuaciones que modelan el comportamiento de una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC) con propiedades similares.*
- *Encontrar expresiones analíticas para las longitudes de las colas al momento en que el servidor llega a una de ellas para comenzar a dar servicio, así como de sus segundos momentos.*
- *Determinar las principales medidas de Desempeño para la RSVC tales como: Número de usuarios presentes en cada una de las colas del sistema cuando uno de los servidores está presente atendiendo, Tiempos que transcurre entre las visitas del servidor a la misma cola.*

Descripción de la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas

El uso de la Función Generadora de Probabilidades (FGP's) nos permite determinar las Funciones de Distribución de Probabilidades Conjunta de manera indirecta sin necesidad de hacer uso de las propiedades de las distribuciones de probabilidad de cada uno de los procesos que intervienen en la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas.

- *Se definen los procesos para los arribos para cada una de las colas:*$X_i(t)$ *y* $\hat{X}_i(t)$. *Y para los usuarios que se trasladan de un sistema a otro se tiene el proceso* $Y(t)$,
- *En lo que respecta al servidor, en términos de los tiempos de visita a cada una de las colas, se definen las variables aleatorias* τ_1, τ_2 *para* Q_1, Q_2 *respectivamente; y* ζ_1, ζ_2 *para* $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ *del sistema 2.*
- *A los tiempos en que el servidor termina de atender en las colas* $Q_1, Q_2, \hat{Q}_1, \hat{Q}_2$, *se les denotará por* $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$ *respectivamente.*
- *Los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por* $\tau_2 - \overline{\tau}_1, \tau_1 - \overline{\tau}_2$ *y* $\zeta_2 - \overline{\zeta}_1, \zeta_1 - \overline{\zeta}_2$ *para el sistema 1 y el sistema 2, respectivamente.*

Cada uno de estos procesos con su respectiva FGP. Además, para cada una de las colas en cada sistema, el número de usuarios al tiempo en que llega el servidor a dar servicio está dado por el número de usuarios presentes en la cola al tiempo t, más el número de usuarios que llegan a la cola en el intervalo de tiempo $[\tau_i, \overline{\tau}_i]$, *es decir*

$$L_1(\overline{\tau}_1) = L_1(\tau_1) + X_1(\overline{\tau}_1 - \tau_1), \hat{L}_i(\overline{\tau}_i) = \hat{L}_i(\tau_i) + \hat{X}_i(\overline{\tau}_i - \tau_i), L_2(\overline{\tau}_1) = L_2(\tau_1) + X_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1) + Y_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1),$$

Una vez definidas las Funciones Generadoras de Probabilidades Conjuntas se construyen las ecuaciones recursivas que permiten obtener la información sobre la longitud de cada una de las colas, al momento en que uno de los servidores llega a una de las colas para dar servicio, basándose en la información que se tiene sobre su llegada a la cola inmediata anterior.

$$\begin{aligned}
F_2(z_1, z_2, w_1, w_2) &= R_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right),\\
F_1(z_1, z_2, w_1, w_2) &= R_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), w_1, w_2\right),\\
\hat{F}_2(z_1, z_2, w_1, w_2) &= \hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)\hat{F}_1\left(z_1, z_2, \hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right),\\
\hat{F}_1(z_1, z_2, w_1, w_2) &= \hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)\hat{F}_2\left(z_1, z_2, w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right).
\end{aligned}$$

Resultado Principal

Sean $\mu_1, \mu_2, \check{\mu}_2, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ *y* $\tilde{\mu}_2 = \mu_2 + \check{\mu}_2$ *los valores esperados de los proceso definidos anteriormente, y sean* $r_1, r_2, \hat{r}_1$ *y* $\hat{r}_2$ *los valores esperado s de los tiempos de traslado del servidor entre las colas para cada uno de los sistemas de visitas cíclicas. Si se definen* $\mu = \mu_1 + \tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2$, *y* $r = r_1 + r_2$ *y* $\hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$, *entonces se tiene el siguiente resultado.*

Teorema 33.67 *Supongamos que $\mu < 1$, $\hat{\mu} < 1$, entonces, el número de usuarios presentes en cada una de las colas que conforman la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas cuando uno de los servidores visita a alguna de ellas está dada por la solución del Sistema de Ecuaciones Lineales presentados arriba cuyas expresiones damos a continuación:*

$$
\begin{array}{lll}
f_1(1) = r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}, & f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2, & f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right), \\
f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right), & f_2(1) = r_1\mu_1, & f_2(2) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}, \\
f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right), & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right), & \hat{f}_1(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right), \\
\hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}, & \hat{f}_1(3) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}, & \hat{f}_1(4) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2, \\
\hat{f}_2(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right), & \hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_1}, & \hat{f}_2(3) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1, \\
 & \hat{f}_2(4) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}. &
\end{array}
$$

Las ecuaciones que determinan los segundos momentos de las longitudes de las colas de los dos sistemas se pueden ver en este sitio

Medidas de Desempeño

Definición 33.6 *Sea L_i^* el número de usuarios cuando el servidor visita la cola Q_i para dar servicio, para $i = 1, 2$.*

Entonces

Proposición 33.33 *Para la cola Q_i, $i = 1, 2$, se tiene que el número de usuarios presentes al momento de ser visitada por el servidor está dado por*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= f_i(i) \qquad (33.36.1)\\
Var\left[L_i^*\right] &= f_i(i,i) + \mathbb{E}\left[L_i^*\right] - \mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. \qquad (33.36.2)
\end{aligned}
$$

Definición 33.7 *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo, bajo condiciones de estabilidad.*

$$
C_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]
$$

Definición 33.8 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo.*

$$
I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]
$$

Proposición 33.34 *Para los tiempos de intervisita del servidor I_i, se tiene que*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I_i\right] &= \frac{f_i(i)}{\mu_i}, \\
Var\left[I_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).
\end{aligned}
$$

Proposición 33.35 *Para los tiempos que ocupa el servidor para atender a los usuarios presentes en la cola Q_i, con FGP denotada por S_i, se tiene que*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{1-\mu_i}, \\
Var\left[S_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^3}
\end{aligned}
$$

Proposición 33.36 *Para la duración de los ciclos C_i se tiene que*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i(z)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)} \\
Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}.
\end{aligned}
$$

DarkSlateBlue

Conjeturas

Definición 33.9 *Dada una cola Q_i, sea $\mathcal{L} = \left\{L_1(t), L_2(t), \hat{L}_1(t), \hat{L}_2(t)\right\}$ las longitudes de todas las colas de la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas. Supóngase que el servidor visita Q_i, si $L_i(t) = 0$ y $\hat{L}_i(t) = 0$ para $i = 1, 2$, entonces los elementos de $\mathcal{L}$ son puntos regenerativos.*

Definición 33.10 *Un ciclo regenerativo es el intervalo de tiempo que ocurre entre dos puntos regenerativos sucesivos, $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$.*

Defínanse los puntos de regenararación en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \ldots, L_N(t)]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j(\tau_i(m)) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.
Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}[C_i]$ como

$$\mathbb{E}[C_i] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}[M_i]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}[C_i] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ *solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de* $P_i(z)$*, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right]\\ &= \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)} = \frac{1-I_i[P_i(z)]}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\ &- \frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\ &- \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2}\\ &+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\ &+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z\rightarrow 1^+$*:*

$$\begin{aligned}Q_i^{(1)}(z) &= lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{dQ_i(z)}{dz} &(33.36.3)\\ &= lim_{z\rightarrow 1}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &(33.36.4)\\ &- lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &(33.36.5)\\ &- lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} &(33.36.6)\\ &+ lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &(33.36.7)\\ &+ lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(nz))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} &(33.36.8)\end{aligned}$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
& lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}=lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\right]}\\
= & lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)+\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}=lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
= & lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)+(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}}\\
= & lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}\right]}\\
= & lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+ & lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+ & lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}=lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
= & lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}\\
= & lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
= & lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}'[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+ & lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

33.36.5. Longitudes de la Cola en cualquier tiempo

Sea $V_{i}\left(z\right)=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{z-P_{i}\left(z\right)}$

$$
\frac{\partial V_{i}\left(z\right)}{\partial z} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left[\frac{I_{i}{'}\left(z\right)\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}-\frac{\left(I_{i}\left(z\right)-1\right)\left(1-P_{i}{'}\left(z\right)\right)}{\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}}\right]
$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$
U_{i}\left(z\right)=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\cdot\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}V_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\right)\frac{I_i(z)-1}{1-z}+\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\frac{d}{dz}\left(\frac{I_i(z)-1}{1-z}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{-P_i(z)(z-P_i(z))-(1-P_i(z))\left(1-P_i^{'}(z)\right)}{(z-P_i(z))^2}\cdot\frac{I_i(z)-1}{1-z}\right\}\\
&+ \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\cdot\frac{I_i^{'}(z)(1-z)+(I_i(z)-1)}{(1-z)^2}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_i(z)}{\partial z} &= \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])}{(1-z)^2\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}+\frac{(1-P_i[z])I_i^{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}\\
&- \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])(1-P'[z])}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])^2}-\frac{(-1+I_i[z])P_i{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}
\end{aligned}
$$

33.37. Descripción de una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas

Consideremos una red de sistema de visitas cíclicas conformada por dos sistemas de visitas cíclicas, cada una con dos colas independientes, donde además se permite el intercambio de usuarios entre los dos sistemas en la segunda cola de cada uno de ellos.

Supuestos sobe la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas

- *Los arribos de los usuarios ocurren conforme a un proceso Poisson con tasa de llegada μ_1 y μ_2 para el sistema 1, mientras que para el sistema 2, lo hacen conforme a un proceso Poisson con tasa $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ respectivamente.*
- *Se considerarán intervalos de tiempo de la forma $[t, t+1]$. Los usuarios arriban por paquetes de manera independiente del resto de las colas. Se define el grupo de usuarios que llegan a cada una de las colas del sistema 1, caracterizadas por Q_1 y Q_2 respectivamente, en el intervalo de tiempo $[t, t+1]$ por $X_1(t), X_2(t)$.*
- *Se definen los procesos $\hat{X}_1(t), \hat{X}_2(t)$ para las colas del sistema 2, denotadas por $\hat{Q}_1$ y $\hat{Q}_2$ respectivamente. Donde además se supone que $\mu_i < 1$ y $\hat{\mu} < 1$ para $i = 1, 2$.*
- *Se define el proceso $Y_2(t)$ para el número de usuarios que se trasladan del sistema 2 al sistema 1, de la cola $\hat{Q}_2$ a la cola Q_2, en el intervalo de tiempo $[t, t+1]$. El traslado de un sistema a otro ocurre de manera que los tiempos entre llegadas de los usuarios a la cola dos del sistema 1 provenientes del sistema 2, se distribuye de manera general con parámetro $\check{\mu}_2$, con $\check{\mu}_2 < 1$.*
- *En lo que respecta al servidor, en términos de los tiempos de visita a cada una de las colas, se definen las variables aleatorias τ_i, para Q_i, para $i = 1, 2$, respectivamente; y ζ_i para $\hat{Q}_i$, $i = 1, 2$, del sistema 2 respectivamente. A los tiempos en que el servidor termina de atender en las colas $Q_i, \hat{Q}_i$,se les denotará por $\overline{\tau}_i, \overline{\zeta}_i$ para $i = 1, 2$, respectivamente.*
- *Los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por $\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i$ y $\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i$, $i = 1, 2$, para el sistema 1 y el sistema 2, respectivamente.*

El uso de la Función Generadora de Probabilidades (FGP's) nos permite determinar las Funciones de Distribución de Probabilidades Conjunta de manera indirecta sin necesidad de hacer uso de las propiedades de las distribuciones de probabilidad de cada uno de los procesos que intervienen en la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas.

Cada uno de estos procesos con su respectiva FGP. Además, para cada una de las colas en cada sistema, el número de usuarios al tiempo en que llega el servidor a dar servicio está dado por el número de usuarios presentes en la cola al tiempo t, más el número de usuarios que llegan a la cola en el intervalo de tiempo $[\tau_i, \overline{\tau}_i]$.
Una vez definidas las Funciones Generadoras de Probabilidades Conjuntas se construyen las ecuaciones recursivas que permiten obtener la información sobre la longitud de cada una de las colas, al momento en que uno de los servidores llega a una de las colas para dar servicio, basándose en la información que se tiene sobre su llegada a la cola inmediata anterior.

33.37.1. Funciones Generadoras de Probabilidades

Para cada uno de los procesos de llegada a las colas $X_i, \hat{X}_i$, $i = 1,2$, *y* Y_2, *con* $\tilde{X}_2 = X_2 + Y_2$ *anteriores se define su Función Generadora de Probabilidades (FGP):* $P_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_i^{X_i(t)}\right], \hat{P}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\hat{X}_i(t)}\right]$, *para* $i = 1,2$, *y* $\check{P}_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{Y_2(t)}\right], \tilde{P}_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{\tilde{X}_2(t)}\right]$, *con primer momento definidos por* $\mu_i = \mathbb{E}[X_i(t)] = P_i^{(1)}(1), \hat{\mu}_i = \mathbb{E}\left[\hat{X}_i(t)\right] = \hat{P}_i^{(1)}(1)$, *para* $i = 1,2$, *y* $\check{\mu}_2 = \mathbb{E}[Y_2(t)] = \check{P}_2^{(1)}(1), \tilde{\mu}_2 = \mathbb{E}\left[\tilde{X}_2(t)\right] = \tilde{P}_2^{(1)}(1)$.

En lo que respecta al servidor, en términos de los tiempos de visita a cada una de las colas, se denotarán por $B_i(t)$ *a los procesos correspondientes a las variables aleatorias* τ_i *para* Q_i, *respectivamente; y* $\hat{B}_i(t)$ *con parámetros* ζ_i *para* $\hat{Q}_i$, *del sistema 2 respectivamente. Y a los tiempos en que el servidor termina de atender en las colas* $Q_i, \hat{Q}_i$, *se les denotará por* $\overline{\tau}_i, \overline{\zeta}_i$ *respectivamente. Entonces, los tiempos de servicio están dados por las diferencias* $\overline{\tau}_i - \tau_i$ *para* Q_i, *y* $\overline{\zeta}_i - \zeta_i$ *para* $\hat{Q}_i$ *respectivamente, para* $i = 1,2$.

Sus procesos se definen por: $S_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_i^{\overline{\tau}_i - \tau_i}\right]$ *y* $\hat{S}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\overline{\zeta}_i - \zeta_i}\right]$, *con primer momento dado por:* $s_i = \mathbb{E}[\overline{\tau}_i - \tau_i]$ *y* $\hat{s}_i = \mathbb{E}\left[\overline{\zeta}_i - \zeta_i\right]$, *para* $i = 1,2$. *Análogamente los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por* $\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i$ *y* $\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i$ *para el sistema 1 y el sistema 2, respectivamente, con* $i = 1,2$.

La FGP para estos tiempos de traslado están dados por $R_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_1^{\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i}\right]$ *y* $\hat{R}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i}\right]$ *y al igual que como se hizo con anterioridad, se tienen los primeros momentos de estos procesos de traslado del servidor entre las colas de cada uno de los sistemas que conforman la red de sistemas de visitas cíclicas:* $r_i = R_i^{(1)}(1) = \mathbb{E}[\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i]$ *y* $\hat{r}_i = \hat{R}_i^{(1)}(1) = \mathbb{E}\left[\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i\right]$ *para* $i = 1,2$.

Se definen los procesos de conteo para el número de usuarios en cada una de las colas al tiempo t, $L_i(t)$, *para* $H_i(t)$ *del sistema 1, mientras que para el segundo sistema, se tienen los procesos* $\hat{L}_i(t)$ *para* $\hat{H}_i(t)$, *es decir,* $H_i(t) = \mathbb{E}\left[z_i^{L_i(t)}\right]$ *y* $\hat{H}_i(t) = \mathbb{E}\left[w_i^{\hat{L}_i(t)}\right]$. *Con lo dichohasta ahora, se tiene que el número de usuarios presentes en los tiempos* $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$, *es cero, es decir,* $L_i(\overline{\tau_i}) = 0$, *y* $\hat{L}_i\left(\overline{\zeta_i}\right) = 0$ *para i=1,2 para cada uno de los dos sistemas.*

Para cada una de las colas en cada sistema, el número de usuarios al tiempo en que llega el servidor a dar servicio está dado por el número de usuarios presentes en la cola al tiempo $t = \tau_i, \zeta_i$, *más el número de usuarios que llegan a la cola en el intervalo de tiempo* $[\tau_i, \overline{\tau}_i], \left[\zeta_i, \overline{\zeta}_i\right]$, *es decir* $\hat{L}_i(\overline{\tau}_j) = \hat{L}_i(\tau_j) + \hat{X}_i(\overline{\tau}_j - \tau_j)$, *para* $i,j = 1,2$, *mientras que para el primer sistema:* $L_1(\overline{\tau}_j) = L_1(\tau_j) + X_1(\overline{\tau}_j - \tau_j)$. *En el caso específico de* Q_2, *además, hay que considerar el número de usuarios que pasan del sistema 2 al sistema 1, a traves de* $\hat{Q}_2$ *mientras el servidor en* Q_2 *está ausente, es decir:*

$$L_2(\overline{\tau}_1) = L_2(\tau_1) + X_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1) + Y_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1). \tag{33.37.1}$$

33.37.2. El problema de la ruina del jugador

Supongamos que se tiene un jugador que cuenta con un capital inicial de $\tilde{L}_0 \geq 0$ *unidades, esta persona realiza una serie de dos juegos simultáneos e independientes de manera sucesiva, dichos eventos son independientes e idénticos entre sí para cada realización. La ganancia en el n-ésimo juego es* $\tilde{X}_n = X_n + Y_n$ *unidades de las cuales se resta una cuota de 1 unidad por cada juego simultáneo, es decir, se restan dos unidades por cada juego realizado. En términos de la teoría de colas puede pensarse como el número de usuarios que llegan a una cola vía dos procesos de arribo distintos e independientes entre sí. Su Función Generadora de Probabilidades (FGP) está dada por* $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{L}_0}\right]$, *además*

$$\tilde{P}(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{X}_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n + Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n} z^{Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right]\mathbb{E}\left[z^{Y_n}\right] = P(z)\check{P}(z),$$

con $\tilde{\mu} = \mathbb{E}\left[\tilde{X}_n\right] = \tilde{P}[z] < 1$. *Sea* $\tilde{L}_n$ *el capital remanente después del n-ésimo juego. Entonces*

$$\tilde{L}_n = \tilde{L}_0 + \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \cdots + \tilde{X}_n - 2n.$$

La ruina del jugador ocurre después del n-ésimo juego, es decir, la cola se vacía después del n-ésimo juego, entonces sea T *definida como* $T = min\left\{\tilde{L}_n = 0\right\}$. *Si* $\tilde{L}_0 = 0$, *entonces claramente* $T = 0$. *En este sentido* T *puede interpretarse como la longitud del periodo de tiempo que el servidor ocupa para dar servicio en la cola, comenzando con* $\tilde{L}_0$ *grupos de usuarios presentes en la cola, quienes arribaron conforme a un proceso dado por* $\tilde{P}(z)$.

Sea $g_{n,k}$ *la probabilidad del evento de que el jugador no caiga en ruina antes del n-ésimo juego, y que además tenga un capital de k unidades antes del n-ésimo juego, es decir,*
Dada $n \in \{1,2,\ldots,\}$ *y* $k \in \{0,1,2,\ldots,\}$

$$g_{n,k} := P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1,\ldots,n, \tilde{L}_n = k\right\}$$

la cual además se puede escribir como:

$$
\begin{aligned}
g_{n,k} &= P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1, \ldots, n, \tilde{L}_n = k\right\} = \sum_{j=1}^{k+1} g_{n-1,j} P\left\{\tilde{X}_n = k - j + 1\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1\right\} = \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1, Y_n = l\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1 | Y_n = l\right\} P\left\{Y_n = l\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n = k - j - l + 1\right\} P\left\{Y_n = l\right\}
\end{aligned}
$$

es decir

$$
g_{n,k} = \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n = k - j - l + 1\right\} P\left\{Y_n = l\right\} \tag{33.37.2}
$$

además

$$
g_{0,k} = P\left\{\tilde{L}_0 = k\right\}. \tag{33.37.3}
$$

Se definen las siguientes FGP:

$$
G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k} z^k, \text{ para } n = 0, 1, \ldots, \tag{33.37.4}
$$

$$
G(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z) w^n. \tag{33.37.5}
$$

En particular para $k = 0$,

$$
g_{n,0} = G_n(0) = P\left\{\tilde{L}_j > 0, \text{ para } j < n, \text{ y } \tilde{L}_n = 0\right\} = P\left\{T = n\right\},
$$

además

$$
G(0, w) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(0) w^n = \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{T = n\right\} w^n = \mathbb{E}\left[w^T\right]
$$

la cuál resulta ser la FGP del tiempo de ruina T.

Proposición 33.37 *Sean $G_n(z)$ y $G(z, w)$ definidas como en (33.80.4) y (33.80.5) respectivamente, entonces*

$$
G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right] \tilde{P}(z). \tag{33.37.6}
$$

Además

$$
G(z, w) = \frac{zF(z) - wP(z) G(0, w)}{z - wR(z)}, \tag{33.37.7}
$$

con un único polo en el círculo unitario, además, el polo es de la forma $z = \theta(w)$ y satisface que

i) $\tilde{\theta}(1) = 1$,

ii) $\tilde{\theta}^{(1)}(1) = \frac{1}{1-\tilde{\mu}}$,

iii) $\tilde{\theta}^{(2)}(1) = \frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2} + \frac{\tilde{\sigma}}{(1-\tilde{\mu})^3}$.

Finalmente, además se cumple que

$$
\mathbb{E}\left[w^T\right] = G(0, w) = F\left[\tilde{\theta}(w)\right]. \tag{33.37.8}
$$

Multiplicando las ecuaciones (33.80.2) y (33.80.3) por el término z^k:

$$
\begin{aligned}
g_{n,k} z^k &= \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n = k - j - l + 1\right\} P\left\{Y_n = l\right\} z^k, \\
g_{0,k} z^k &= P\left\{\tilde{L}_0 = k\right\} z^k,
\end{aligned}
$$

ahora sumamos sobre k

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k} z^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n = k-j-l+1\right\} P\left\{Y_n = l\right\} z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} P\left\{Y_n = l\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+(j+l-1)-(j+l-1)} \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} P\left\{Y_n = l\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} z^{j-1} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)} P\left\{Y_n = l\right\} z^l \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} z^{j-1} \sum_{k=j+l-1}^{\infty} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)} P\left\{Y_n = l\right\} z^l \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j} z^{j-1} \sum_{l=1}^{j}\sum_{k=j+l-1}^{\infty} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)} P\left\{Y_n = l\right\} z^l \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j} z^{j-1} \sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)} P\left\{Y_n = l\right\} z^l
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j} z^{j-1} \sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)} \sum_{l=1}^{j} P\left\{Y_n = l\right\} z^l \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j} z^{j-1} \sum_{l=1}^{\infty} P\left\{Y_n = l\right\} z^l \sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)} \\
&= \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right] \tilde{P}(z) \sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)} \\
&= \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right] \tilde{P}(z) P(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right] \tilde{P}(z),
\end{aligned}$$

es decir la ecuación (33.80.4) se puede reescribir como

$$G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right] \tilde{P}(z). \tag{33.37.9}$$

Por otra parte recordemos la ecuación (33.80.4)

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k} z^k, \ \textit{entonces}\ \frac{G_n(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} g_{n,k} z^{k-1},$$

Por lo tanto utilizando la ecuación (33.80.9):

$$\begin{aligned}
G(z,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z) w^n = G_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(z) w^n = F(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[G_n(z) - G_n(0)\right] w^n \frac{\tilde{P}(z)}{z} \\
&= F(z) + \frac{w}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left[G_n(z) - G_n(0)\right] w^{n-1} \tilde{P}(z)
\end{aligned}$$

es decir

$$G(z,w) = F(z) + \frac{w}{z}\left[G(z,w) - G(0,w)\right] \tilde{P}(z),$$

entonces

$$\begin{aligned}
G(z,w) = F(z) + \frac{w}{z}\left[G(z,w) - G(0,w)\right] \tilde{P}(z) &= F(z) + \frac{w}{z}\tilde{P}(z) G(z,w) - \frac{w}{z}\tilde{P}(z) G(0,w) \\
&\Leftrightarrow \\
G(z,w)\left\{1 - \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\right\} &= F(z) - \frac{w}{z}\tilde{P}(z) G(0,w),
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$G(z,w)=\frac{zF(z)-w\tilde{P}(z)G(0,w)}{1-w\tilde{P}(z)}. \tag{33.37.10}$$

Ahora $G(z,w)$ *es analítica en* $|z|=1$. *Sean* z,w *tales que* $|z|=1$ *y* $|w|\leq 1$, *como* $\tilde{P}(z)$ *es FGP*

$$|z-\left(z-w\tilde{P}(z)\right)|<|z|\Leftrightarrow|w\tilde{P}(z)|<|z|$$

es decir, se cumplen las condiciones del Teorema de Rouché y por tanto, z *y* $z-w\tilde{P}(z)$ *tienen el mismo número de ceros en* $|z|=1$. *Sea* $z=\tilde{\theta}(w)$ *la solución única de* $z-w\tilde{P}(z)$, *es decir*

$$\tilde{\theta}(w)-w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)=0, \tag{33.37.11}$$

con $|\tilde{\theta}(w)|<1$. *Cabe hacer mención que* $\tilde{\theta}(w)$ *es la FGP para el tiempo de ruina cuando* $\tilde{L}_0=1$. *Considerando la ecuación (33.80.11)*

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)|_{w=1}-\frac{\partial}{\partial w}\left\{w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}|_{w=1}=\tilde{\theta}^{(1)}(w)|_{w=1}-\frac{\partial}{\partial w}w\left\{\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}|_{w=1}\\ &- w\frac{\partial}{\partial w}\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)|_{w=1}=\tilde{\theta}^{(1)}(1)-\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right)-w\left\{\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial\tilde{\theta}(w)}\cdot\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}|_{w=1}\right\}\\ & \tilde{\theta}^{(1)}(1)-\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right)-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\cdot\tilde{\theta}^{(1)}(1),\end{aligned}$$

luego

$$\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right)=\tilde{\theta}^{(1)}(1)-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\cdot\tilde{\theta}^{(1)}(1)=\tilde{\theta}^{(1)}(1)\left(1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\right),$$

por tanto

$$\tilde{\theta}^{(1)}(1)=\frac{\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{\left(1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\right)}=\frac{1}{1-\tilde{\mu}}.$$

Ahora determinemos el segundo momento de $\tilde{\theta}(w)$, *nuevamente consideremos la ecuación (33.80.11):*

$$0 = \tilde{\theta}(w)-w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\Rightarrow 0=\frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}(w)-w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}\Rightarrow 0=\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}(w)-w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}\right\}$$

luego

$$\begin{aligned}& \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)-\frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\}=\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)-\frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\}\\ =& \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}-\left[\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+w\frac{\partial}{\partial w}R\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\}=\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}-\left[\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+w\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial w}\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}\right]\right\}\\ =& \frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right\}\\ =& \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\frac{\partial}{\partial w}\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)-\frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right]\\ =& \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial\tilde{\theta}(w)}\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)-w\frac{\partial\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w)-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\frac{\partial\tilde{\theta}^{(1)}(w)}{\partial w}\\ =& \tilde{\theta}^{(2)}(w)-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)-w\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\left(\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right)^2-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(2)}(w)\\ =& \tilde{\theta}^{(2)}(w)-2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)-w\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\left(\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right)^2-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(2)}(w)\\ =& \tilde{\theta}^{(2)}(w)\left[1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]-\tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}& \tilde{\theta}^{(2)}(w)\left[1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]-\tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]=0\\ \tilde{\theta}^{(2)}(w) =& \frac{\tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2R^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}=\frac{\tilde{\theta}^{(1)}(w)w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}\\ +& \frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}\end{aligned}$$

si evaluamos la expresión anterior en $w = 1$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(2)}(1) &= \frac{\left(\tilde{\theta}^{(1)}(1)\right)^2 \tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)} + \frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(1)\,\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)} = \frac{\left(\tilde{\theta}^{(1)}(1)\right)^2 \tilde{P}^{(2)}(1)}{1-\tilde{P}^{(1)}(1)} + \frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(1)\,\tilde{P}^{(1)}(1)}{1-\tilde{P}^{(1)}(1)}\\
&= \frac{\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}}\right)^2 \tilde{P}^{(2)}(1)}{1-\tilde{\mu}} + \frac{2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}}\right)\tilde{\mu}}{1-\tilde{\mu}} = \frac{\tilde{P}^{(2)}(1)}{(1-\tilde{\mu})^3} + \frac{2\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2} = \frac{\sigma^2-\tilde{\mu}+\tilde{\mu}^2}{(1-\tilde{\mu})^3} + \frac{2\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}\\
&= \frac{\sigma^2-\tilde{\mu}+\tilde{\mu}^2+2\tilde{\mu}(1-\tilde{\mu})}{(1-\tilde{\mu})^3}
\end{aligned}$$

es decir

$$\tilde{\theta}^{(2)}(1) = \frac{\sigma^2}{(1-\tilde{\mu})^3} + \frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}.$$

Corolario 33.8 *El tiempo de ruina del jugador tiene primer y segundo momento dados por*

$$\mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{1-\tilde{\mu}} \tag{33.37.12}$$

$$Var[T] = \frac{Var\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^3}. \tag{33.37.13}$$

33.38. Procesos de Llegadas a las colas en la RSVC

Se definen los procesos de llegada de los usuarios a cada una de las colas dependiendo de la llegada del servidor pero del sistema al cuál no pertenece la cola en cuestión:
Para el sistema 1 y el servidor del segundo sistema

$$F_{i,j}(z_i;\zeta_j) = \mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\zeta_j)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[L_i(\zeta_j)=k\right]z_i^k,\ para\ i,j=1,2.$$

Ahora se definen para el segundo sistema y el servidor del primero

$$\hat{F}_{i,j}(w_i;\tau_j) = \mathbb{E}\left[w_i^{\hat{L}_i(\tau_j)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\hat{L}_i(\tau_j)=k\right]w_i^k,\ para\ i,j=1,2.$$

Ahora, con lo anterior definamos la FGP conjunta para el segundo sistema;

$$\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_j)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_j)}\right] = \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_j)}\right]\mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2(\tau_j)}\right] = \hat{F}_{1,j}(w_1;\tau_j)\,\hat{F}_{2,j}(w_2;\tau_j) = \hat{F}_j(w_1,w_2;\tau_j).$$

Con respecto al sistema 1 se tiene la FGP conjunta con respecto al servidor del otro sistema:

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_j)}z_2^{L_2(\zeta_j)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_j)}\right]\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\zeta_j)}\right] = F_{1,j}(z_1;\zeta_j)\,F_{2,j}(z_2;\zeta_j) = F_j(z_1,z_2;\zeta_j).$$

Ahora analicemos la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas, entonces se define la PGF conjunta al tiempo t para los tiempos de visita del servidor en cada una de las colas, para comenzar a dar servicio, definidos anteriormente al tiempo $t=\{\tau_1,\tau_2,\zeta_1,\zeta_2\}$:

$$F_j(z_1,z_2,w_1,w_2) = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{2}z_i^{L_i(\tau_j)}\prod_{i=1}^{2}w_i^{\hat{L}_i(\tau_j)}\right] \tag{33.38.1}$$

$$\hat{F}_j(z_1,z_2,w_1,w_2) = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{2}z_i^{L_i(\zeta_j)}\prod_{i=1}^{2}w_i^{\hat{L}_i(\zeta_j)}\right] \tag{33.38.2}$$

para $j=1,2$. Entonces, con la finalidad de encontrar el número de usuarios presentes en el sistema cuando el servidor deja de atender una de las colas de cualquier sistema se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right] = \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]\\
=\ &\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)+X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)+Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)+\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)+\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]
\end{aligned}$$

utilizando la ecuacion dada (34.4.1), luego

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)} z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)} z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)} w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)} w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)} w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)} \left\{w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right\} \left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)} z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)} w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)} w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]
\end{aligned}$$

Aplicando el hecho de que el número de usuarios que llegan a cada una de las colas del segundo sistema es independiente de las llegadas a las colas del primer sistema:

$$= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)} \left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)} z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)} w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)} w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right] \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]$$

dado que los arribos a cada una de las colas son independientes, podemos separar la esperanza para los procesos de llegada a Q_1 *y* Q_2 *al tiempo* τ_1*, que es el tiempo en que el servidor visita a* Q_1*. Recordando que* $\tilde{X}_2(z_2) = X_2(z_2) + Y_2(z_2)$ *se tiene*

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)} \left\{z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)} w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)} w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right] \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)} \left\{\tilde{P}_2(z_2)^{\overline{\tau}_1-\tau_1} \hat{P}_1(w_1)^{\overline{\tau}_1-\tau_1} \hat{P}_2(w_2)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right\}\right] \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)} \left\{\tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2)\right\}^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right] \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)} \theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2)\right)^{L_1(\tau_1)}\right] \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2)\right), z2\right) \hat{F}_1(w_1, w_2; \tau_1)\\
&\equiv F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right)
\end{aligned}$$

Las igualdades anteriores son ciertas pues el número de usuarios que llegan a $\hat{Q}_2$ *durante el intervalo* $[\tau_1, \overline{\tau}_1]$ *aún no han sido atendidos por el servidor del sistema 2 y por tanto aún no pueden pasar al sistema 1 a traves de* Q_2*. Por tanto el número de usuarios que pasan de* $\hat{Q}_2$ *a* Q_2 *en el intervalo de tiempo* $[\tau_1, \overline{\tau}_1]$ *depende de la política de traslado entre los dos sistemas, conforme a la sección anterior.*

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right] &= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right) && (33.38.3)\\
&= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2)\right), z2\right) \hat{F}_1(w_1, w_2; \tau_1) && (33.38.4)
\end{aligned}$$

Utilizando un razonamiento análogo para $\overline{\tau}_2$*:*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)+X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)} w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)+\hat{X}_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)+\hat{X}_2(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)} z_1^{X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)} w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)} w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)} w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)} z_1^{X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)} w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)} w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right] \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)} P_1(z_1)^{\overline{\tau}_2-\tau_2} \hat{P}_1(w_1)^{\overline{\tau}_2-\tau_2} \hat{P}_2(w_2)^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\right] \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]
\end{aligned}$$

utlizando la proposición (33.90) referente al problema de la ruina del jugador:

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)} \left\{P_1(z_1) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2)\right\}^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\right] \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)} \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2)\right)^{L_2(\tau_2)}\right] \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
&= F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2)\right)\right) \hat{F}_2(w_1, w_2; \tau_2)
\end{aligned}$$

entonces se define

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right] &= F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2)\right), w_1, w_2\right) && (33.38.5)\\
&\equiv F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2)\right)\right) \hat{F}_2(w_1, w_2; \tau_2) && (33.38.6)
\end{aligned}$$

Ahora para $\overline{\zeta}_1$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)} z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)} z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)} z_1^{X_1(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)} z_2^{L_2(\zeta_1)} z_2^{X_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)} z_2^{Y_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)} w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)} w_2^{\hat{X}_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)} z_2^{L_2(\zeta_1)}\right] \mathbb{E}\left[z_1^{X_1(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)} z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)} w_2^{\hat{X}_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)} w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)} z_2^{L_2(\zeta_1)}\right] \mathbb{E}\left[P_1(z_1)^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1} \tilde{P}_2(z_2)^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1} \hat{P}_2(w_2)^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1} w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)} z_2^{L_2(\zeta_1)}\right] \mathbb{E}\left[\left\{P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_2(w_2)\right\}^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1} w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)} z_2^{L_2(\zeta_1)}\right] \mathbb{E}\left[\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_2(w_2)\right)^{\hat{L}_1(\zeta_1)} w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right] \\
= \; & F_1(z_1, z_2; \zeta_1) \hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right)
\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)} z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right] &= \hat{F}_1\left(z_1, z_2, \hat{\theta}_1\left(P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right) && (33.38.7) \\
&= F_1(z_1, z_2; \zeta_1) \hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right) && (33.38.8)
\end{aligned}$$

Finalmente para $\overline{\zeta}_2$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)} z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)} z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)} z_1^{X_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)} z_2^{L_2(\zeta_2)} z_2^{X_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)} z_2^{Y_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)} w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)} w_1^{\hat{X}_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)} z_2^{L_2(\zeta_2)}\right] \mathbb{E}\left[z_1^{X_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)} z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)} w_1^{\hat{X}_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)} w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)} z_2^{L_2(\zeta_2)}\right] \mathbb{E}\left[P_1(z_1)^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2} \tilde{P}_2(z_2)^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2} \hat{P}(w_1)^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2} w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)} z_2^{L_2(\zeta_2)}\right] \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)} \left\{P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \hat{P}(w_1)\right\}^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)} z_2^{L_2(\zeta_2)}\right] \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)} \hat{\theta}_2\left(P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \hat{P}(w_1)\right)^{\hat{L}_2\zeta_2}\right] \\
= \; & F_2(z_1, z_2; \zeta_2) \hat{F}_2\left(w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1)\right)\right]
\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)} z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right] &= \hat{F}_2\left(z_1, z_2, w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1)\right)\right) && (33.38.9) \\
&= F_2(z_1, z_2; \zeta_2) \hat{F}_2\left(w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1)\right)\right) && (33.38.10)
\end{aligned}$$

33.39. Ecuaciones Recursivas para la R.S.V.C.

Con lo desarrollado hasta ahora podemos encontrar las ecuaciones recursivas que modelan la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (R.S.V.C):

$$\begin{aligned}
F_2(z_1, z_2, w_1, w_2) &= R_1(z_1, z_2, w_1, w_2) \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right] \\
&= R_1\left(P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \prod_{i=1}^{2} \hat{P}_i(w_i)\right) F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2)\right), z2\right) \hat{F}_1(w_1, w_2; \tau_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1(z_1, z_2, w_1, w_2) &= R_2(z_1, z_2, w_1, w_2) \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right] \\
&= R_2\left(P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \prod_{i=1}^{2} \hat{P}_i(w_i)\right) F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2)\right)\right) \hat{F}_2(w_1, w_2; \tau_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{F}_2(z_1,z_2,w_1,w_2) &= \hat{R}_1(z_1,z_2,w_1,w_2)\,\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right]\\
&= \hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\,\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1,w_2) &= \hat{R}_2(z_1,z_2,w_1,w_2)\,\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right]\\
&= \hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\,\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)
\end{aligned}$$

33.39.1. Tiempos de Traslado del Servidor

Para

$$R_1(\mathbf{z},\mathbf{w}) = R_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.39.1}$$

se tiene que

$$\frac{\partial R_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = r_1\mu_1,\quad \frac{\partial R_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = r_1\tilde{\mu}_2,\quad \frac{\partial R_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = r_1\hat{\mu}_1,\quad \frac{\partial R_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = r_1\hat{\mu}_2,$$

Análogamente se tiene

$$R_2(\mathbf{z},\mathbf{w}) = R_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.39.2}$$

$$\frac{\partial R_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = r_2\mu_1,\quad \frac{\partial R_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = r_2\tilde{\mu}_2,\quad \frac{\partial R_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = r_2\hat{\mu}_1,\quad \frac{\partial R_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = r_2\hat{\mu}_2,$$

Para el segundo sistema:

$$\hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w}) = \hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.39.3}$$

$$\frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{r}_1\mu_1,\quad \frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{r}_1\tilde{\mu}_2,\quad \frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{r}_1\hat{\mu}_1,\quad \frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{r}_1\hat{\mu}_2,$$

Finalmente

$$\hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w}) = \hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.39.4}$$

$$\frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{r}_2\mu_1,\quad \frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{r}_2\tilde{\mu}_2,\quad \frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{r}_2\hat{\mu}_1,\quad \frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{r}_2\hat{\mu}_2.$$

33.39.2. Usuarios presentes en la cola

Hagamos lo correspondiente con las siguientes expresiones obtenidas en la sección anterior, recordemos que

$$F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2,w_1,w_2\right) = F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2,w_1,w_2\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2,w_1,w_2\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial \theta_1}{\partial \tilde{P}_2}\cdot\frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial F_1}{\partial z_2} = f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2+f_1(2)\\
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2,w_1,w_2\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial \theta_1}{\partial \hat{P}_1}\cdot\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial w_1}+\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_1} = f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_1+\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1)\\
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2,w_1,w_2\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial \theta_1}{\partial \hat{P}_2}\cdot\frac{\partial \hat{P}_2}{\partial w_2}+\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_2} = f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_2+\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)
\end{aligned}$$

para τ_2:

$$F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_1,w_2\right)=F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2;\tau_2\right)$$

al igual que antes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_1,w_2\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial\tilde{\theta}_2}{\partial P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z_2}+\frac{\partial F_2}{\partial z_1}=f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\mu_1+f_2\left(1\right)\\
\frac{\partial F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_1,w_2\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\
\frac{\partial F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_1,w_2\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial\tilde{\theta}_2}{\partial\hat{P}_1}\cdot\frac{\partial\hat{P}_1}{\partial w_1}+\frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_1}=f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1+\hat{F}_{2,1}^{(1)}\left(1\right)\\
\frac{\partial F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_1,w_2\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial\tilde{\theta}_2}{\partial\hat{P}_2}\cdot\frac{\partial\hat{P}_2}{\partial w_2}+\frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_2}=f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_2+\hat{F}_{2,2}^{(1)}\left(1\right)
\end{aligned}$$

Ahora para el segundo sistema

$$\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)=F_1\left(z_1,z_2;\zeta_1\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_1}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_1}{\partial P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z_1}+\frac{\partial F_1}{\partial z_1}=\hat{f}_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1+F_{1,1}^{(1)}\left(1\right)\\
\frac{\partial\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_1}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_1}{\partial\tilde{P}_2}\cdot\frac{\partial\tilde{P}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial F_1}{\partial z_2}=\hat{f}_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2+F_{2,1}^{(1)}\left(1\right)\\
\frac{\partial\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\
\frac{\partial\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_1}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_1}{\partial\hat{P}_2}\cdot\frac{\partial\hat{P}_2}{\partial w_2}+\frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_2}=\hat{f}_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2+\hat{f}_1\left(2\right)
\end{aligned}$$

Finalmente para ζ_2

$$\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right) = F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right]$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_2}{\partial P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z_1}+\frac{\partial F_2}{\partial z_1}=\hat{f}_2\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1+F_{1,2}^{(1)}\left(1\right)\\
\frac{\partial\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_2}{\partial\tilde{P}_2}\cdot\frac{\partial\tilde{P}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial F_2}{\partial z_2}=\hat{f}_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2+F_{2,2}^{(1)}\left(1\right)\\
\frac{\partial\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_2}{\partial\hat{P}_1}\cdot\frac{\partial\hat{P}_1}{\partial w_1}+\frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_1}=\hat{f}_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1+\hat{f}_2\left(1\right)\\
\frac{\partial\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0
\end{aligned}$$

33.39.3. Ecuaciones Recursivas

Entonces, de todo lo desarrollado hasta ahora se tienen las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{array}{ll}
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = r_1\mu_1, & \frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = r_1\tilde{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2 + f_1\left(2\right),\\
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = r_1\hat{\mu}_1 + f_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{1,1}\left(1\right), & \frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = r_1\hat{\mu}_2 + f_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,1}\left(1\right),\\
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = r_2\mu_1 + f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\mu_1 + f_2\left(1\right), & \frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = r_2\tilde{\mu}_2,\\
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = r_2\hat{\mu}_1 + f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{2,1}\left(1\right), & \frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = r_2\hat{\mu}_2 + f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,2}\left(1\right),\\
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{r}_1\mu_1 + \hat{f}_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1 + F^{(1)}_{1,1}\left(1\right), & \frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{r}_1\mu_2 + \hat{f}_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,1}\left(1\right),\\
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{r}_1\hat{\mu}_1, & \frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{r}_1\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1\left(2\right),\\
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{r}_2\mu_1 + \hat{f}_2\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1 + F^{(1)}_{1,2}\left(1\right), & \frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{r}_2\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,2}\left(1\right),\\
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{r}_2\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2\left(1\right), & \frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{r}_2\hat{\mu}_2
\end{array}
$$

Es decir, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$
f_2\left(1\right) = r_1\mu_1, \quad f_1\left(2\right) = r_2\tilde{\mu}_2, \quad \hat{f}_1\left(4\right) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2, \quad \hat{f}_2\left(3\right) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1
$$

$$
\begin{aligned}
f_1\left(1\right) &= r_2\mu_1 + \mu_1\left(\frac{f_2\left(2\right)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + r_1\mu_1 = \mu_1\left(r_1 + r_2 + \frac{f_2\left(2\right)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) = \mu_1\left(r + \frac{f_2\left(2\right)}{1-\tilde{\mu}_2}\right),\\
f_1\left(3\right) &= r_2\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_1\left(\frac{f_2\left(2\right)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,2}\left(1\right) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{f_2\left(2\right)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2},\\
f_1\left(4\right) &= r_2\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_2\left(\frac{f_2\left(2\right)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,2}\left(1\right) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{f_2\left(2\right)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2},\\
f_2\left(2\right) &= r_1\tilde{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\left(\frac{f_1\left(1\right)}{1-\mu_1}\right) + f_1\left(2\right) = \left(r_1 + \frac{f_1\left(1\right)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2 + r_2\tilde{\mu}_2 = \left(r_1 + r_2 + \frac{f_1\left(1\right)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2 = \left(r + \frac{f_1\left(1\right)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2,\\
f_2\left(3\right) &= r_1\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_1\left(\frac{f_1\left(1\right)}{1-\mu_1}\right) + \hat{F}^{(1)}_{1,1}\left(1\right) = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{f_1\left(1\right)}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1},\\
f_2\left(4\right) &= r_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_2\left(\frac{f_1\left(1\right)}{1-\mu_1}\right) + \hat{F}^{(1)}_{2,1}\left(1\right) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{f_1\left(1\right)}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\mu_1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_1\left(1\right) &= \hat{r}_2\mu_1 + \mu_1\left(\frac{\hat{f}_2\left(4\right)}{1-\hat{\mu}_2}\right) + F^{(1)}_{1,2}\left(1\right) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2\left(4\right)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1 + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2},\\
\hat{f}_1\left(2\right) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_2\left(4\right)}{1-\hat{\mu}_2}\right) + F^{(1)}_{2,2}\left(1\right) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2\left(4\right)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2},\\
\hat{f}_1\left(3\right) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_1\left(\frac{\hat{f}_2\left(4\right)}{1-\hat{\mu}_2}\right) + \hat{f}_2\left(3\right) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2\left(4\right)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{r}_1\hat{\mu}_1 = \left(\hat{r}_1 + \hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2\left(4\right)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 = \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_2\left(4\right)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1,\\
\hat{f}_2\left(1\right) &= \hat{r}_1\mu_1 + \mu_1\left(\frac{\hat{f}_1\left(3\right)}{1-\hat{\mu}_1}\right) + F^{(1)}_{1,1}\left(1\right) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1\left(3\right)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1 + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1},\\
\hat{f}_2\left(2\right) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_1\left(3\right)}{1-\hat{\mu}_1}\right) + F^{(1)}_{2,1}\left(1\right) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1\left(3\right)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1},\\
\hat{f}_2\left(4\right) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_1\left(3\right)}{1-\hat{\mu}_1}\right) + \hat{f}_1\left(4\right) = \hat{r}_1\hat{\mu}_2 + \hat{r}_2\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_1\left(3\right)}{1-\hat{\mu}_1}\right) = \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_1\left(3\right)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2,
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
\begin{array}{lll}
f_1\left(1\right) = \mu_1\left(r + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) & f_1\left(2\right) = r_2\tilde{\mu}_2 & f_1\left(3\right) = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}\\
f_1\left(4\right) = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2} & f_2\left(1\right) = r_1\mu_1 & f_2\left(2\right) = \left(r + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2\\
f_2\left(3\right) = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} & f_2\left(4\right) = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\mu_1} & \hat{f}_1\left(1\right) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1 + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2}\\
\hat{f}_1\left(2\right) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2} & \hat{f}_1\left(3\right) = \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 & \hat{f}_1\left(4\right) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2\\
\hat{f}_2\left(1\right) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1 + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1} & \hat{f}_2\left(2\right) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1} & \hat{f}_2\left(3\right) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
 & \hat{f}_2\left(4\right) = \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 &
\end{array}
$$

33.39.4. Solución del Sistema de Ecuaciones Lineales

Se puede demostrar que la solución del sistema de ecuaciones está dado por las siguientes expresiones, donde

$$\mu = \mu_1 + \tilde{\mu}_2 \ , \ \hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2 \ , \ r = r_1 + r_2 \ y \ \hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$$

entonces

$$\begin{array}{lll}
f_1(1) = r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu} & f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) & f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) \\
f_2(2) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu} & f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right) & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right) \\
\hat{f}_1(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) & \hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2} & \hat{f}_1(3) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}} \\
\hat{f}_2(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) & \hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\hat{\mu_2}}{\hat{\mu}_1} & \hat{f}_2(4) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}
\end{array}$$

A saber

$$\begin{aligned}
f_1(3) &= \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2} = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2} = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2} \\
&= \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu} + \frac{1}{\mu_2}\right) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1(4) &= \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2} = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2} = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2} \\
&= \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu} + \frac{1}{\mu_2}\right) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(3) &= \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} \\
&= \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu} + \frac{1}{\mu_1}\right) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(4) &= \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\mu_1} = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} \\
&= \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu} + \frac{1}{\mu_1}\right) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1(1) &= \mu_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2} = \mu_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_2}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2} = \mu_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_1}{\mu_2} \\
&= \mu_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\mu_2}{1-\hat{\mu}} + \frac{1}{\hat{\mu}_2}\right) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2} + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right)
\end{aligned}$$

$$\hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2} = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_2}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2} = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}_2(1) &= \mu_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1} = \mu_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_1}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1} = \mu_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1} \\
&= \mu_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}} + \frac{1}{\hat{\mu}_1}\right) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1} + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right)
\end{aligned}$$

$$\hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\tilde{\mu}_1}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1} = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_1}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1} = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1}$$

33.40. Resultado Principal

Sean $\mu_1, \mu_2, \breve{\mu}_2, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ y $\tilde{\mu}_2 = \mu_2 + \breve{\mu}_2$ los valores esperados de los proceso definidos anteriormente, y sean $r_1, r_2, \hat{r}_1$ y $\hat{r}_2$ los valores esperado s de los tiempos de traslado del servidor entre las colas para cada uno de los sistemas de visitas cíclicas. Si se definen $\mu = \mu_1 + \tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2$, y $r = r_1 + r_2$ y $\hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$, entonces se tiene el siguiente resultado.

Teorema 33.68 *Supongamos que $\mu < 1$, $\hat{\mu} < 1$, entonces, el número de usuarios presentes en cada una de las colas que conforman la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas cuando uno de los servidores visita a alguna de ellas está dada por la solución del Sistema de Ecuaciones Lineales presentados arriba cuyas expresiones damos a continuación:*

$$\begin{array}{lll}
f_1(1) = r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}, & f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2, & f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right), \\
f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right), & f_2(1) = r_1\mu_1, & f_2(2) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}, \\
f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right), & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right), & \hat{f}_1(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right), \\
\hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}, & \hat{f}_1(3) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}, & \hat{f}_1(4) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2, \\
\hat{f}_2(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right), & \hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\breve{\mu}_2}{\hat{\mu}_1}, & \hat{f}_2(3) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1, \\
 & \hat{f}_2(4) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}. &
\end{array}$$

33.41. Segundos Momentos

Para poder determinar los segundos momentos para los tiempos de traslado del servidor es necesaria la siguiente proposición:

Proposición 33.38 *Sea $f(g(x)h(y))$ función continua tal que tiene derivadas parciales mixtas de segundo orden, entonces se tiene lo siguiente:*

$$\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y)) = \frac{\partial f(g(x)h(y))}{\partial x} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y)$$

por tanto

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y)) = \frac{\partial^2}{\partial x}f(g(x)h(y)) \cdot \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right)^2 \cdot h^2(y) + \frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2} \cdot h(y) \tag{33.41.1}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y)) = \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial h(y)}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(g(x)h(y)) \cdot g(x) \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\right\}$$

Demostración 33.8

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y)) &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial f(g(x)h(y))}{\partial x} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y)\right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\right\} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2} \cdot h(y) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x}f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2} \cdot h(y) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x}f(g(x)h(y)) \cdot \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right)^2 \cdot h^2(y) + \frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2} \cdot h(y).
\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y)) &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial f(g(x)h(y))}{\partial x} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y)\right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\right\} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial h(y)}{y} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial h(y)}{\partial y} \cdot g(x) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial h(y)}{\partial y} \\
&= \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial h(y)}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(g(x)h(y)) \cdot g(x) \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\right\}
\end{aligned}$$

Utilizando la proposición anterior (Proposiciíon 33.91)se tiene el siguiente resultado que me dice como calcular los segundos momentos para los procesos de traslado del servidor:

Proposición 33.39 *Sea R_i la Función Generadora de Probabilidades para el número de arribos a cada una de las colas de la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas definidas como en (33.83.4). Entonces las derivadas parciales están dadas por las siguientes expresiones:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_i^2} &= \left(\frac{\partial P_i(z_i)}{\partial z_i}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial^2 z_i}\\ &+ \left(\frac{\partial P_i(z_i)}{\partial z_i}\right)^2\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_i}\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_2\partial z_1} &= \frac{\partial\tilde{P}_2(z_2)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1(z_1)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_2\partial z_1}\\ &+ \frac{\partial\tilde{P}_2(z_2)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1(z_1)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial w_i\partial z_1} &= \frac{\partial\hat{P}_i(w_i)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1(z_1)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial w_i\partial z_1}\\ &+ \frac{\partial\hat{P}_i(w_i)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1(z_1)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_1},\end{aligned}$$

finalmente

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial w_i\partial z_2} &= \frac{\partial\hat{P}_i(w_i)}{\partial w_i}\cdot\frac{\partial\tilde{P}_2(z_2)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial w_i\partial z_2}\\ &+ \frac{\partial\hat{P}_i(w_i)}{\partial w_i}\cdot\frac{\partial\tilde{P}_2(z_2)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_2},\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$.

33.41.1. Sistema de Ecuaciones Lineales para los Segundos Momentos

En el apéndice (33.66) se demuestra que las ecuaciones para las ecuaciones parciales mixtas están dadas por:

$$\begin{aligned}f_1(1,1) &= r_2P_1^{(2)}(1) + \mu_1^2R_2^{(2)}(1) + 2\mu_1 r_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right) + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}P_1^{(2)}f_2(2) + \mu_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)f_2(2)\\ &+ \frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(1,2) + \frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2,2) + f_2(1,2)\right) + f_2(1,1),\\ f_1(2,1) &= \mu_1 r_2\tilde{\mu}_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2R_2^{(2)}(1) + r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right),\\ f_1(3,1) &= \mu_1\hat{\mu}_1 r_2 + \mu_1\hat{\mu}_1R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right) + \mu_1 r_2\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(1,2)\\ &+ \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2)\\ f_1(4,1) &= \mu_1\hat{\mu}_2 r_2 + \mu_1\hat{\mu}_2R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + \mu_1 r_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2^{(1,2)}\\ &+ \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_1(1,2) &= \mu_1\tilde{\mu}_2 r_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2R_2^{(2)}(1) + r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right),\\ f_1(2,2) &= \tilde{\mu}_2^2R_2^{(2)}(1) + r_2\tilde{P}_2^{(2)}(1),\\ f_1(3,2) &= \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 r_2 + \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1),\\ f_1(4,2) &= \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_2 + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_1(1,3) &= \mu_1\hat{\mu}_1 r_2 + \mu_1\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2) + r_2\mu_1\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\\
&+ r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right) + \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(1) + f_2(1)\right)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2,2) + f_2^{(1,2)}\right),\\
f_1(2,3) &= \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1),\\
f_1(3,3) &= \hat{\mu}_1^2 R_2^{(2)}(1) + r_2\hat{P}_1^{(2)}(1) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \hat{\mu}_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2) + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_1^{(2)}(1) f_2(2)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2,2) + 2r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + 2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \hat{f}_{2,1}^{(2)}(1),\\
f_1(4,3) &= r_2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2) + r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \hat{f}_2(1,2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1(1,4) &= r_2\mu_1\hat{\mu}_2 + \mu_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2) + r_2\mu_1\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\\
&+ r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right) + \hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2,2) + f_2(1,2)\right),\\
f_1(2,4) &= r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1),\\
f_1(3,4) &= r_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_2^{(2)}(1) f_2(2) + r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \hat{f}_2^{(2)}(1,2),\\
f_1(4,4) &= \hat{\mu}_2^2 R_2^{(2)}(1) + r_2\hat{P}_2^{(2)}(1) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \hat{\mu}_2^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2) + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}(1) f_2(2)\\
&+ 2r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + 2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + \hat{f}_{2,2}^{(2)}(1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(1,1) &= r_1 P_1^{(2)}(1) + \mu_1^2 R_1^{(2)}(1),\\
f_2(2,1) &= \mu_1\tilde{\mu}_2 r_1 + \mu_1\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1} f_1(1) + f_1(2)\right),\\
f_2(3,1) &= r_1\mu_1\hat{\mu}_1 + \mu_1\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1) + r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1} f_1(1) + r_1\mu_1\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1),\\
f_2(4,1) &= \mu_1\hat{\mu}_2 r_1 + \mu_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\mu_1\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1) + r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1} f_1(1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(1,2) &= r_1\mu_1\tilde{\mu}_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1} f_1(1) + f_1(2)\right),\\
f_2(2,2) &= \tilde{\mu}_2^2 R_1^{(2)}(1) + r_1\tilde{P}_2^{(2)}(1) + 2r_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1} f_1(1) + f_1(2)\right) + f_1(2,2) + \tilde{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}(1) f_1(1)\\
&+ \frac{1}{1-\mu_1}\tilde{P}_2^{(2)}(1) f_1(1) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1} f_1(1,2) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1} f_1(1,1) + f_1(1,2)\right),\\
f_2(3,2) &= \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_1 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1) + r_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1} f_1(1) + \hat{\mu}_1 r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1} f_1(1) + f_1(2)\right) + r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1)\\
&+ \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1} f_1(1) + f_1(2)\right)\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1) + \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1} f_1(1) + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}(1) f_1(1) + \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1} f_1(1,2)\\
&+ \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 f_1(1,1),\\
f_2(4,2) &= \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_1 + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1) + r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1} f_1(1) + \hat{\mu}_2 r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1} f_1(1) + f_1(2)\right)\\
&+ \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1} f_1(1) + f_1(2)\right)\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1) + \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\mu_1} f_1(1) + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1) f_1(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1} f_1(1,2)\\
&+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(1,1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2\,(1,3) &= r_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1R_1^{(2)}(1)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)+r_1\mu_1\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1),\\
f_2\,(2,3) &= r_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1R_1^{(2)}\,(1)+\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+r_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\,(1)\,f_1(1)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,1}(1)\\
&+ r_1\hat{\mu}_1\left(f_1(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right)++\left(f_1(2)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right)\hat{F}_{1,1}(1)+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\left(f_1(1,2)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,1)\right),\\
f_2\,(3,3) &= \hat{\mu}_1^2R_1^{(2)}\,(1)+r_1\hat{P}_1^{(2)}\,(1)+2r_1\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_1^2\theta_1^{(2)}\,(1)\,f_1(1)+2r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1)\\
&+ \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_1^{(2)}\,(1)\,f_1(1)+2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)\hat{F}_{1,1}(1)+\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\right)^2f_1(1,1)+\hat{f}_{1,1}^{(2)}(1),\\
f_2\,(4,3) &= r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\,(1)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_{1,2}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_{1,1}(1)+\hat{f}_1^{(2)}(1,2)\\
&+ \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\,(1)\,f_1(1)+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)\hat{F}_{1,2}(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_{1,1}(1)f_1(1)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2f_1(2,2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2\,(1,4) &= r_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\,(1)+r_1\mu_1\hat{F}_{1,2}(1)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1),\\
f_2\,(2,4) &= r_1\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}\,(1)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,2}(1)+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\,(1)\,f_1(1)\\
&+ r_1\hat{\mu}_2\left(f_1(2)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right)+\left(f_1(2)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right)\hat{F}_{1,2}(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(f_1(1,2)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,1)\right),\\
f_2\,(3,4) &= r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\,(1)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_{1,2}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\,(1)\,f_1(1)\\
&+ +\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\hat{F}_{1,2}(1)f_1(1)+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_{1,1}(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_{1,1}(1)f_1(1)+\hat{f}_1^{(2)}(1,2)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2f_1(1,1),\\
f_2\,(4,4) &= \hat{\mu}_2R_1^{(2)}\,(1)+r_1\hat{P}_2^{(2)}\,(1)+2r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+\hat{f}_{1,2}^{(2)}(1)+2r_1\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}\,(1)\,f_1(1)\\
&+ \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_2^{(2)}\,(1)\,f_1(1)+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\hat{F}_{1,2}(1)+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\right)^2f_1(1,1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_1\,(1,1) &= \hat{r}_2P_1^{(2)}\,(1)+\mu_1^2\hat{R}_2^{(2)}\,(1)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}P_1^{(2)}\,(1)\,\hat{f}_2(2)+\mu_1^2\hat{\theta}_2^{(2)}\,(1)\,\hat{f}_2(2)\\
&+ \left(\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)+2\hat{r}_2\mu_1F_{2,1}(1)+2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1)+F_{2,1}^{(2)}(1),\\
\hat{f}_1\,(2,1) &= \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\,(1)+\hat{r}_2\mu_1F_{2,2}(1)+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+f_{2,1}^{(2)}(1)\\
&+ \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\,(1)\,\hat{f}_2(2)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(2)+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_{2,1}(1)\\
&+ \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1),\\
\hat{f}_1\,(3,1) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\,(1)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,1}(1)+\hat{r}_2\mu_1\hat{f}_2(1)\\
&+ F_{2,1}(1)\hat{f}_2(1)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1\,(4,1) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\,(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\,(1)\,\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,1}(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_1(1,2) &= \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1) + \mu_1\hat{r}_2F_{2,2}(1) + \frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + 2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2) + \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(2) + \mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)\\
&+ \hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_{2,1}(1) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1) + f_2^{(2)}(1,2),\\
\hat{f}_1(2,2) &= \hat{r}_2\tilde{P}_2^{(2)}(1) + \tilde{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}(1) + 2\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_{2,2}(1) + 2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + f_{2,2}^{(2)}(1)\\
&+ \frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2) + \tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2) + 2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(2) + \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2),\\
\hat{f}_1(3,2) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1) + \hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,2}(1) + \hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2(1) + F_{2,2}(1)\hat{f}_2(1) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1(4,2) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1) + \hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,2}(1) + \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + 2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(1) + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{f}_2(2,2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_1(1,3) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1 + \mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1) + \hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + \hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,1}(1) + \hat{r}_2\mu_1\hat{f}_2(1) + F_{2,1}(1)\hat{f}_2(1) + \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1(2,3) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1) + \hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,2}(1) + \hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2(1) + F_{2,2}(1)\hat{f}_2(1) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1(3,3) &= \hat{r}_2\hat{P}_1^{(2)}(1) + \hat{\mu}_1^2\hat{R}_2^{(2)}(1) + 2\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{f}_2(1) + \hat{f}_2(1,1),\\
\hat{f}_1(4,3) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1) + \hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + \hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{f}_2(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_1(1,4) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2 + \mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + 2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2) + \hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,1}(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1),\\
\hat{f}_1(2,4) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1) + \hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,2}(1) + \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + 2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,2}(1) + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2),\\
\hat{f}_1(3,4) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1) + \hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + \hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{f}_2(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1(4,4) &= \hat{r}_2P_2^{(2)}(1) + \hat{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}(1) + 2\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + \frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2) + \hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2) + \left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_2(1,1) &= \hat{r}_1P_1^{(2)}(1) + \mu_1^2\hat{R}_1^{(2)}(1) + 2\hat{r}_1\mu_1F_{1,1}(1) + 2\hat{r}_1\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}P_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)\\
&+ \mu_1^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + 2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1^{(}1)F_{1,1}(1) + f_{1,1}^{(2)}(1) + \left(\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1^{(1,1)},\\
\hat{f}_2(2,1) &= \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\mu_1F_{1,2}(1) + \tilde{\mu}_2\hat{r}_1F_{1,1}(1) + \frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + f_1^{(2)}(1,2) + \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)\\
&+ 2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,2}(1) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,1}(1) + \mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),\\
\hat{f}_2(3,1) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1 + \mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,1}(1) + \hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1(1),\\
\hat{f}_2(4,1) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2 + \mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_2F_{1,1}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)\\
&+ \hat{r}_1\mu_1\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right) + F_{1,1}(1)\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right) + \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{f}_1(1,2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,1)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_2(1,2) &= \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\mu_1F_{1,2}(1)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_{1,1}(1)+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,1}(1)\\
&+ 2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,2}(1)+f_1^{(2)}(1,2)+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),\\
\hat{f}_2(2,2) &= \hat{r}_1\tilde{P}_2^{(2)}(1)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_{1,2}(1)+f_{1,2}^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}F_{1,2}(1)\hat{f}_1(1)+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),\\
\hat{f}_2(3,2) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,2}(1)+\hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1),\\
\hat{f}_2(4,2) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)F_{1,2}(1)+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+F_{1,2}(1)\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)\\
&+ \hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{f}_1(1,2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,1)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_2(1,3) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,1}(1)+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1),\\
\hat{f}_2(2,3) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,2}(1)+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1),\\
\hat{f}_2(3,3) &= \hat{r}_1\hat{P}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_1^{(2)}(1),\\
\hat{f}_2(4,3) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_2(1,4) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_{1,1}(1)+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\hat{r}_1\mu_1\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2)\\
&+ F_{1,1}(1)\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),\\
\hat{f}_2(2,4) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_{1,2}(1)+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2)\\
&+ \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+F_{1,2}(1)\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),\\
\hat{f}_2(3,4) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right),\\
\hat{f}_2(4,4) &= \hat{r}_1\hat{P}_2^{(2)}(1)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\hat{\mu}_2\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+\hat{f}_1(2,2)\\
&+ \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{f}_1(1,2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,1)\right).
\end{aligned}
$$

33.42. Medidas de Desempeño

Definición 33.11 *Sea L_i^* el número de usuarios cuando el servidor visita la cola Q_i para dar servicio, para $i = 1, 2$.*

Entonces

Proposición 33.40 *Para la cola Q_i, $i = 1, 2$, se tiene que el número de usuarios presentes al momento de ser visitada por el servidor está dado por*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= f_i(i) && (33.42.1)\\
Var\left[L_i^*\right] &= f_i(i,i)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. && (33.42.2)
\end{aligned}
$$

Definición 33.12 *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo, bajo condiciones de estabilidad.*

$$C_i(z)=\mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$$

Definición 33.13 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo.*

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$$

Proposición 33.41 *Para los tiempos de intervisita del servidor I_i, se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[I_i\right] &= \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i},\\ Var\left[I_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2}-\frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2}f_i\left(i\right).\end{aligned}$$

Proposición 33.42 *Para los tiempos que ocupa el servidor para atender a los usuarios presentes en la cola Q_i, con FGP denotada por S_i, se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1-\mu_i}=\frac{f_i\left(i\right)}{1-\mu_i},\\ Var\left[S_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^3}\end{aligned}$$

Proposición 33.43 *Para la duración de los ciclos C_i se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right]=\frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i}=\frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}\\ Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.\end{aligned}$$

Apéndice A

a*)*

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\ =\;& r_2P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2R_2^{(2)}\left(1\right)+2\mu_1r_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{1,0)}\right)+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}P_1^{(2)}F_2^{(0,1)}+\mu_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\ +\;& \frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}+\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right)+F_2^{(2,0)}.\end{aligned}$$

b*)*

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\ =\;& \mu_1r_2\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right).\end{aligned}$$

c*)*

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\ =\;& \mu_1\hat{\mu}_1r_2+\mu_1\hat{\mu}_1R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\mu_1r_2\hat{F}_2^{(1,0)}\\ +\;& \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\ +\;& \mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}.\end{aligned}$$

d*)*

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\ =\;& \mu_1\hat{\mu}_2r_2+\mu_1\hat{\mu}_2R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1r_2\hat{F}_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\\ +\;& \hat{F}_2^{(1,0)}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}\\ +\;& \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}.\end{aligned}$$

e*)*

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\ =\;& \mu_1\tilde{\mu}_2r_2+\mu_1\tilde{\mu}_2R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right).\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \tilde{\mu}_2^2R_2^{(2)}(1)+r_2\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right).
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2r_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2r_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}.
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \mu_1\hat{\mu}_1r_2+\mu_1\hat{\mu}_1R_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+ & r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+r_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\hat{F}_2^{(1,0)}\\
+ & \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right).
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1r_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \hat{\mu}_1^2R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+2r_2\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+ & \frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+2r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & r_2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+ & \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

m)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & r_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+r_2\mu_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+ & r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\hat{F}_2^{(0,1)}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right).
\end{aligned}$$

n)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}.
\end{aligned}$$

ñ)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

o)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \hat{\mu}_2^2R_2^{(2)}(1)+r_2\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)+2r_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+\;& 2r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}
$$

a)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_1P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2R_1^{(2)}\left(1\right).
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \mu_1\tilde{\mu}_2r_1+\mu_1\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right).
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \mu_1\hat{\mu}_2r_1+\mu_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right).
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \tilde{\mu}_2^2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)+2r_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)+F_1^{(0,2)}+\tilde{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+\;& \frac{1}{1-\mu_1}\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(2,0)}+F_1^{(1,1)}\right).
\end{aligned}
$$

g)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1r_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;& \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}\\
+\;& \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

h)
$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= & \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_1+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2 r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\\
+ & \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}\\
+ & \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

i)
$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= & r_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

j)
$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= & r_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}+r_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)F_2^{(1,0)}\\
+ & r_1\hat{\mu}_1\left(F_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ & \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\left(F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

k)
$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= & \hat{\mu}_1^2 R_1^{(2)}(1)+r_1\hat{P}_1^{(2)}(1)+2r_1\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1^2\theta_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}\\
+ & 2r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\right)^2 F_1^{(2,0)}+\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

l)
$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= & r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}(1)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}\\
+ & \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+\hat{F}_1^{(1,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

m)
$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= & r_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}(1)+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

n)
$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= & r_1\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\\
+ & \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}+r_1\hat{\mu}_2\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\right)+\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\right)\hat{F}_1^{(0,1)}\\
+ & \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

ñ)
$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= & r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}(1)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}\\
+ & \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(0,1)}F_1^{(1,0)}+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+\hat{F}_1^{(1,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

o)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)+2r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+\hat{F}_1^{(0,2)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+\;&\frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(0,1)}+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

a)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}P_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\left(\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+2\hat{r}_2\mu_1F_2^{(1,0)}+2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\mu_1F_2^{(0,1)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(1,0)}+\hat{r}_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(1,0)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\mu_1\hat{r}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+F_2^{(0,2)}+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}
$$

g)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

h)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(1,0)}+\hat{r}_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(1,0)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

m)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

n)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

ñ)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2P_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

a)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_1P_1^{(2)}(1)+\mu_1^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\mu_1F_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}P_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;& 2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(2,0)}+\left(\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\mu_1F_1^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{r}_1F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;& \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(1,1)}\\
+\;& \mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;& \hat{r}_1\mu_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+F_1^{(1,0)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\mu_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;& \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(1,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_1\tilde{P}_2^{(2)}(1)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_1^{(0,1)}+F_1^{(0,2)}+2\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;& \tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}F^{(0,1)}\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

g)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)F_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;& \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+F_1^{(0,1)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+\;& \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

i)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;& \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;& \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;& \hat{r}_1\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right).
\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;& \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right).
\end{aligned}$$

m)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;& \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\mu_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+\;& F_1^{(1,0)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}\\
+\;& \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

n)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;& \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+\;& F_1^{(0,1)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}\\
+\;& \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

ñ)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;& \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right).
\end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;& \hat{r}_1\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_1\hat{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\hat{F}_1^{(0,2)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;& \hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}$$

Las ecuaciones que determinan los segundos momentos de las longitudes de las colas de los dos sistemas se pueden ver en este sitio

Apéndice B

Distribución para los usuarios de traslado

Se puede demostrar que

$$\frac{d^k}{dy}\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu-y}\right)=\frac{k!}{(\lambda+\mu)^k} \tag{33.42.3}$$

Proposición 33.44 *Sea τ variable aleatoria no negativa con distribución exponencial con media μ, y sea $L(t)$ proceso Poisson con parámetro λ. Entonces*

$$\mathbb{P}\left\{L(\tau)=k\right\}=f_{L(\tau)}(k)=\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k. \tag{33.42.4}$$

Además

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L(\tau)\right] &= \frac{\lambda}{\mu} && (33.42.5)\\
\mathbb{E}\left[(L(\tau))^2\right] &= \frac{\lambda}{\mu}\left(2\frac{\lambda}{\mu}+1\right) && (33.42.6)\\
V\left[L(\tau)\right] &= \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right). && (33.42.7)
\end{aligned}$$

A saber, para k fijo se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{L(\tau)=k\right\} &= \mathbb{P}\left\{L(\tau)=k,\tau\in(0,\infty)\right\}\\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}\left\{L(\tau)=k,\tau=y\right\}f_\tau(y)\,dy=\int_0^\infty \mathbb{P}\left\{L(y)=k\right\}f_\tau(y)\,dy\\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda y}}{k!}(\lambda y)^k\left(\mu e^{-\mu y}\right)dy=\frac{\lambda^k\mu}{k!}\int_0^\infty y^k e^{-(\mu+\lambda)y}dy\\
&= \frac{\lambda^k\mu}{(\lambda+\mu)\,k!}\int_0^\infty y^k(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)y}dy=\frac{\lambda^k\mu}{(\lambda+\mu)\,k!}\int_0^\infty y^k f_Y(y)\,dy\\
&= \frac{\lambda^k\mu}{(\lambda+\mu)\,k!}\mathbb{E}\left[Y^k\right]=\frac{\lambda^k\mu}{(\lambda+\mu)\,k!}\frac{d^k}{dy}\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu-y}\right)|_{y=0}\\
&= \frac{\lambda^k\mu}{(\lambda+\mu)\,k!}\frac{k!}{(\lambda+\mu)^k}=\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k.
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}\left\{L(\tau)=k\right\} &= \sum_{k=0}^\infty\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\sum_{k=0}^\infty\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\\
&= \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}\right)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\right)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

determinemos primero la esperanza de $L(\tau)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L(\tau)\right] &= \sum_{k=0}^\infty k\mathbb{P}\left\{L(\tau)=k\right\}=\sum_{k=0}^\infty k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\sum_{k=0}^\infty k\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k=\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\sum_{k=1}^\infty k\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k-1}\\
&= \frac{\mu\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}\right)^2=\frac{\mu\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\right)^2\\
&= \frac{\lambda}{\mu}.
\end{aligned}$$

Ahora su segundo momento:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(L(\tau))^2\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}\{L(\tau)=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k = \frac{\mu\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)^2\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k-2} \\
&= \frac{\mu\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\left(\frac{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+1}{\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}-1\right)^3}\right) = \frac{\mu\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\left(-\frac{\frac{2\lambda+\mu}{\lambda+\mu}}{\left(-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^3}\right) \\
&= \frac{\mu\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\left(\frac{2\lambda+\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\right)^3 = \frac{\lambda(2\lambda+\mu)}{\mu^2} \\
&= \frac{\lambda}{\mu}\left(2\frac{\lambda}{\mu}+1\right).
\end{aligned}
$$

y por tanto

$$
\begin{aligned}
V[L(\tau)] &= \frac{\lambda(2\lambda+\mu)}{\mu^2} - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 = \frac{\lambda^2+\mu\lambda}{\mu^2} \\
&= \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right).
\end{aligned}
$$

Ahora, determinemos la distribución del número de usuarios que pasan de $\hat{Q}_2$ a Q_2 considerando dos políticas de traslado en específico:

a*) Solamente pasa un usuario,*

b*) Se permite el paso de k usuarios,*

una vez que son atendidos por el servidor en $\hat{Q}_2$.

Política de un solo usuario: *Sea R_2 el número de usuarios que llegan a $\hat{Q}_2$ al tiempo t, sea R_1 el número de usuarios que pasan de $\hat{Q}_2$ a Q_2 al tiempo t.*

A saber:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[R_1] &= \sum_{y\geq 0}\mathbb{P}[R_2=y]\,\mathbb{E}[R_1|R_2=y] \\
&= \sum_{y\geq 0}\mathbb{P}[R_2=y]\sum_{x\geq 0}x\mathbb{P}[R_1=x|R_2=y] \\
&= \sum_{y\geq 0}\sum_{x\geq 0}x\mathbb{P}[R_1=x|R_2=y]\,\mathbb{P}[R_2=y].
\end{aligned}
$$

Determinemos

$$
\mathbb{E}[R_1|R_2=y] = \sum_{x\geq 0}x\mathbb{P}[R_1=x|R_2=y]. \tag{33.42.8}
$$

supongamos que $y=0$, entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[R_1=0|R_2=0] &= 1, \\
\mathbb{P}[R_1=x|R_2=0] &= 0, \text{ para cualquier } x\geq 1,
\end{aligned}
$$

por tanto

$$
\mathbb{E}[R_1|R_2=0]=0.
$$

Para $y=1$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[R_1=0|R_2=1] &= 0, \\
\mathbb{P}[R_1=1|R_2=1] &= 1,
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\mathbb{E}[R_1|R_2=1]=1.
$$

Para $y>1$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[R_1=0|R_2\geq 1] &= 0, \\
\mathbb{P}[R_1=1|R_2\geq 1] &= 1, \\
\mathbb{P}[R_1>1|R_2\geq 1] &= 0,
\end{aligned}
$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right]=1,\ \textit{para cualquier}\ y>1.$$

es decir

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right]=1,\ \textit{para cualquier}\ y\geq 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[R_1\right] &= \sum_{y\geq 0}\sum_{x\geq 0} x\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=y\right]\mathbb{P}\left[R_2=y\right]=\sum_{y\geq 0}\sum_{x}\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right]\mathbb{P}\left[R_2=y\right]\\
&= \sum_{y\geq 0}\mathbb{P}\left[R_2=y\right]=\sum_{y\geq 1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}=1.
\end{aligned}$$

Además para $k\in Z^+$

$$\begin{aligned}
f_{R_1}(k) &= \mathbb{P}\left[R_1=k\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=n\right]\mathbb{P}\left[R_2=n\right]\\
&= \mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\
&+ \mathbb{P}\left[R_1=k|R_2>1\right]\mathbb{P}\left[R_2>1\right],
\end{aligned}$$

donde para

$k=0$**:**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1=0\right]=\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\
+\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2>1\right]\mathbb{P}\left[R_2>1\right]=\mathbb{P}\left[R_2=0\right].
\end{aligned}$$

$k=1$**:**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1=1\right]=\mathbb{P}\left[R_1=1|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=1|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\
+\mathbb{P}\left[R_1=1|R_2>1\right]\mathbb{P}\left[R_2>1\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2=n\right].
\end{aligned}$$

$k=2$**:**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1=2\right]=\mathbb{P}\left[R_1=2|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=2|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\
+\mathbb{P}\left[R_1=2|R_2>1\right]\mathbb{P}\left[R_2>1\right]=0.
\end{aligned}$$

$k=j$**:**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1=j\right]=\mathbb{P}\left[R_1=j|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=j|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\
+\mathbb{P}\left[R_1=j|R_2>1\right]\mathbb{P}\left[R_2>1\right]=0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
f_{R_1}(0) &= \mathbb{P}\left[R_2=0\right]\\
f_{R_1}(1) &= \sum_{n\geq 1}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2=n\right]\\
f_{R_1}(j) &= 0,\ \textit{para}\ j>1.
\end{aligned}$$

Política de k usuarios: *Al igual que antes, para* $y\in Z^+$ *fijo*

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right]=\sum_{x}x\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=y\right].$$

Entonces, si tomamos diversos valore para y:

$y=0$*:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=0\right] &= 1,\\
\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=0\right] &= 0,\ \textit{para cualquier}\ x\geq 1,
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=0\right]=0.$$

Para $y=1$*,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=1\right] &= 0,\\
\mathbb{P}\left[R_1=1|R_2=1\right] &= 1,
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=1\right]=1.$$

Para $y=2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=2\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1=1|R_2=2\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1=2|R_2=2\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1=3|R_2=2\right] &= 0,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=2\right]=3.$$

Para $y=3$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=3\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1=1|R_2=3\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1=2|R_2=3\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1=3|R_2=3\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1=4|R_2=3\right] &= 0,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=3\right]=6.$$

En general, para $k\geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=k\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1=j|R_2=k\right] &= 1,\ \textit{para}\ 1\leq j\leq k,\\ \mathbb{P}\left[R_1=j|R_2=k\right] &= 0,\ \textit{para}\ j>k,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=k\right]=\frac{k\left(k+1\right)}{2}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[R_1\right] &= \sum_y \mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right]\mathbb{P}\left[R_2=y\right]\\ &= \sum_y \mathbb{P}\left[R_2=y\right]\frac{y\left(y+1\right)}{2}=\sum_{y\geq 1}\left(\frac{y\left(y+1\right)}{2}\right)\frac{\left(\lambda t\right)^y}{y!}e^{-\lambda t}\\ &= \frac{\lambda t}{2}e^{-\lambda t}\sum_{y\geq 1}\left(y+1\right)\frac{\left(\lambda t\right)^{y-1}}{\left(y-1\right)!}=\frac{\lambda t}{2}e^{-\lambda t}\left(e^{\lambda t}\left(\lambda t+2\right)\right)\\ &= \frac{\lambda t\left(\lambda t+2\right)}{2},\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{E}\left[R_1\right]=\frac{\lambda t\left(\lambda t+2\right)}{2}. \tag{33.42.9}$$

Además para $k\in Z^+$ *fijo*

$$\begin{aligned}f_{R_1}\left(k\right) &= \mathbb{P}\left[R_1=k\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=n\right]\mathbb{P}\left[R_2=n\right]\\ &= \mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\ &+ \mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=2\right]\mathbb{P}\left[R_2=2\right]+\cdots+\mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=j\right]\mathbb{P}\left[R_2=j\right]+\cdots+\end{aligned}$$

donde para

$k=0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=0\right]=\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\ +\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=j\right]\mathbb{P}\left[R_2=j\right]=\mathbb{P}\left[R_2=0\right].\end{aligned}$$

$k = 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[R_1 = 1] = \mathbb{P}[R_1 = 1|R_2 = 0]\,\mathbb{P}[R_2 = 0] + \mathbb{P}[R_1 = 1|R_2 = 1]\,\mathbb{P}[R_2 = 1]\\ +\mathbb{P}[R_1 = 1|R_2 = 1]\,\mathbb{P}[R_2 = 1] + \cdots + \mathbb{P}[R_1 = 1|R_2 = j]\,\mathbb{P}[R_2 = j]\\ = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}[R_2 = n].\end{aligned}$$

$k = 2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[R_1 = 2] = \mathbb{P}[R_1 = 2|R_2 = 0]\,\mathbb{P}[R_2 = 0] + \mathbb{P}[R_1 = 2|R_2 = 1]\,\mathbb{P}[R_2 = 1]\\ +\mathbb{P}[R_1 = 2|R_2 = 2]\,\mathbb{P}[R_2 = 2] + \cdots + \mathbb{P}[R_1 = 2|R_2 = j]\,\mathbb{P}[R_2 = j]\\ = \sum_{n=2}^{\infty}\mathbb{P}[R_2 = n].\end{aligned}$$

En general

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[R_1 = k] = \mathbb{P}[R_1 = k|R_2 = 0]\,\mathbb{P}[R_2 = 0] + \mathbb{P}[R_1 = k|R_2 = 1]\,\mathbb{P}[R_2 = 1]\\ +\mathbb{P}[R_1 = k|R_2 = 2]\,\mathbb{P}[R_2 = 2] + \cdots + \mathbb{P}[R_1 = k|R_2 = k]\,\mathbb{P}[R_2 = k]\\ = \sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}[R_2 = n].\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f_{R_1}(k) = \mathbb{P}[R_1 = k] = \sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}[R_2 = n].$$

Objetivos Principales

- *Encontrar las ecuaciones que modelan el comportamiento de una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC) con propiedades similares.*
- *Encontrar expresiones analíticas para las longitudes de las colas al momento en que el servidor llega a una de ellas para comenzar a dar servicio, así como de sus segundos momentos.*
- *Determinar las principales medidas de Desempeño para la RSVC tales como: Número de usuarios presentes en cada una de las colas del sistema cuando uno de los servidores está presente atendiendo, Tiempos que transcurre entre las visitas del servidor a la misma cola.*

33.43. Descripción de una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas

Consideremos una red de sistema de visitas cíclicas conformada por dos sistemas de visitas cíclicas, cada una con dos colas independientes, donde además se permite el intercambio de usuarios entre los dos sistemas en la segunda cola de cada uno de ellos.

Supuestos sobe la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas

- *Los arribos de los usuarios ocurren conforme a un proceso Poisson con tasa de llegada* μ_1 *y* μ_2 *para el sistema 1, mientras que para el sistema 2, lo hacen conforme a un proceso Poisson con tasa* $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ *respectivamente.*
- *Se considerarán intervalos de tiempo de la forma* $[t, t+1]$*. Los usuarios arriban por paquetes de manera independiente del resto de las colas. Se define el grupo de usuarios que llegan a cada una de las colas del sistema 1, caracterizadas por* Q_1 *y* Q_2 *respectivamente, en el intervalo de tiempo* $[t, t+1]$ *por* $X_1(t), X_2(t)$.
- *Se definen los procesos* $\hat{X}_1(t), \hat{X}_2(t)$ *para las colas del sistema 2, denotadas por* $\hat{Q}_1$ *y* $\hat{Q}_2$ *respectivamente. Donde además se supone que* $\mu_i < 1$ *y* $\hat{\mu} < 1$ *para* $i = 1, 2$.
- *Se define el proceso* $Y_2(t)$ *para el número de usuarios que se trasladan del sistema 2 al sistema 1, de la cola* $\hat{Q}_2$ *a la cola* Q_2*, en el intervalo de tiempo* $[t, t+1]$*. El traslado de un sistema a otro ocurre de manera que los tiempos entre llegadas de los usuarios a la cola dos del sistema 1 provenientes del sistema 2, se distribuye de manera general con parámetro* $\check{\mu}_2$*, con* $\check{\mu}_2 < 1$.

- *En lo que respecta al servidor, en términos de los tiempos de visita a cada una de las colas, se definen las variables aleatorias τ_i, para Q_i, para $i = 1, 2$, respectivamente; y ζ_i para $\hat{Q}_i$, $i = 1, 2$, del sistema 2 respectivamente. A los tiempos en que el servidor termina de atender en las colas $Q_i, \hat{Q}_i$,se les denotará por $\overline{\tau}_i, \overline{\zeta}_i$ para $i = 1, 2$, respectivamente.*
- *Los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por $\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i$ y $\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i$, $i = 1, 2$, para el sistema 1 y el sistema 2, respectivamente.*

El uso de la Función Generadora de Probabilidades (FGP's) nos permite determinar las Funciones de Distribución de Probabilidades Conjunta de manera indirecta sin necesidad de hacer uso de las propiedades de las distribuciones de probabilidad de cada uno de los procesos que intervienen en la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas.

Cada uno de estos procesos con su respectiva FGP. Además, para cada una de las colas en cada sistema, el número de usuarios al tiempo en que llega el servidor a dar servicio está dado por el número de usuarios presentes en la cola al tiempo t, más el número de usuarios que llegan a la cola en el intervalo de tiempo $[\tau_i, \overline{\tau}_i]$.
Una vez definidas las Funciones Generadoras de Probabilidades Conjuntas se construyen las ecuaciones recursivas que permiten obtener la información sobre la longitud de cada una de las colas, al momento en que uno de los servidores llega a una de las colas para dar servicio, basándose en la información que se tiene sobre su llegada a la cola inmediata anterior.

33.43.1. Funciones Generadoras de Probabilidades

Para cada uno de los procesos de llegada a las colas $X_i, \hat{X}_i$, $i = 1, 2$, y Y_2, con $\tilde{X}_2 = X_2 + Y_2$ anteriores se define su Función Generadora de Probabilidades (FGP): $P_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_i^{X_i(t)}\right], \hat{P}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\hat{X}_i(t)}\right]$, para $i = 1, 2$, y $\check{P}_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{Y_2(t)}\right], \tilde{P}_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{\tilde{X}_2(t)}\right]$, con primer momento definidos por $\mu_i = \mathbb{E}[X_i(t)] = P_i^{(1)}(1), \hat{\mu}_i = \mathbb{E}\left[\hat{X}_i(t)\right] = \hat{P}_i^{(1)}(1)$, para $i = 1, 2$, y $\check{\mu}_2 = \mathbb{E}[Y_2(t)] = \check{P}_2^{(1)}(1), \tilde{\mu}_2 = \mathbb{E}\left[\tilde{X}_2(t)\right] = \tilde{P}_2^{(1)}(1)$.
En lo que respecta al servidor, en términos de los tiempos de visita a cada una de las colas, se denotarán por $B_i(t)$ a los procesos correspondientes a las variables aleatorias τ_i para Q_i, respectivamente; y $\hat{B}_i(t)$ con parámetros ζ_i para $\hat{Q}_i$, del sistema 2 respectivamente. Y a los tiempos en que el servidor termina de atender en las colas $Q_i, \hat{Q}_i$, se les denotará por $\overline{\tau}_i, \overline{\zeta}_i$ respectivamente. Entonces, los tiempos de servicio están dados por las diferencias $\overline{\tau}_i - \tau_i$ para Q_i, y $\overline{\zeta}_i - \zeta_i$ para $\hat{Q}_i$ respectivamente, para $i = 1, 2$.

Sus procesos se definen por: $S_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_i^{\overline{\tau}_i - \tau_i}\right]$ y $\hat{S}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\overline{\zeta}_i - \zeta_i}\right]$, con primer momento dado por: $s_i = \mathbb{E}[\overline{\tau}_i - \tau_i]$ y $\hat{s}_i = \mathbb{E}\left[\overline{\zeta}_i - \zeta_i\right]$, para $i = 1, 2$. Análogamente los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por $\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i$ y $\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i$ para el sistema 1 y el sistema 2, respectivamente, con $i = 1, 2$.

La FGP para estos tiempos de traslado están dados por $R_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_1^{\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i}\right]$ y $\hat{R}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i}\right]$ y al igual que como se hizo con anterioridad, se tienen los primeros momentos de estos procesos de traslado del servidor entre las colas de cada uno de los sistemas que conforman la red de sistemas de visitas cíclicas: $r_i = R_i^{(1)}(1) = \mathbb{E}[\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i]$ y $\hat{r}_i = \hat{R}_i^{(1)}(1) = \mathbb{E}\left[\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i\right]$ para $i = 1, 2$.
Se definen los procesos de conteo para el número de usuarios en cada una de las colas al tiempo t, $L_i(t)$, para $H_i(t)$ del sistema 1, mientras que para el segundo sistema, se tienen los procesos $\hat{L}_i(t)$ para $\hat{H}_i(t)$, es decir, $H_i(t) = \mathbb{E}\left[z_i^{L_i(t)}\right]$ y $\hat{H}_i(t) = \mathbb{E}\left[w_i^{\hat{L}_i(t)}\right]$. Con lo dichohasta ahora, se tiene que el número de usuarios presentes en los tiempos $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$, es cero, es decir, $L_i(\overline{\tau_i}) = 0$, y $\hat{L}_i\left(\overline{\zeta_i}\right) = 0$ para i=1,2 para cada uno de los dos sistemas.
Para cada una de las colas en cada sistema, el número de usuarios al tiempo en que llega el servidor a dar servicio está dado por el número de usuarios presentes en la cola al tiempo $t = \tau_i, \zeta_i$, más el número de usuarios que llegan a la cola en el intervalo de tiempo $[\tau_i, \overline{\tau}_i], \left[\zeta_i, \overline{\zeta}_i\right]$, es decir $\hat{L}_i(\overline{\tau}_j) = \hat{L}_i(\tau_j) + \hat{X}_i(\overline{\tau}_j - \tau_j)$, para $i, j = 1, 2$, mientras que para el primer sistema: $L_1(\overline{\tau}_j) = L_1(\tau_j) + X_1(\overline{\tau}_j - \tau_j)$. En el caso específico de Q_2, además, hay que considerar el número de usuarios que pasan del sistema 2 al sistema 1, a traves de $\hat{Q}_2$ mientras el servidor en Q_2 está ausente, es decir:

$$L_2(\overline{\tau}_1) = L_2(\tau_1) + X_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1) + Y_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1). \tag{33.43.1}$$

33.43.2. El problema de la ruina del jugador

Supongamos que se tiene un jugador que cuenta con un capital inicial de $\tilde{L}_0 \geq 0$ unidades, esta persona realiza una serie de dos juegos simultáneos e independientes de manera sucesiva, dichos eventos son independientes *e idénticos entre sí para cada realización. La ganancia en el n-ésimo juego es $\tilde{X}_n = X_n + Y_n$ unidades de las cuales se resta una cuota de 1 unidad por cada juego simultáneo, es decir, se restan dos unidades por cada juego realizado. En términos de la teoría de colas puede pensarse como el número de usuarios que llegan a una cola vía dos procesos de arribo distintos e independientes entre sí. Su Función Generadora de Probabilidades (FGP) está dada por $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{L}_0}\right]$, además*

$$\tilde{P}(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{X}_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n+Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n}z^{Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right]\mathbb{E}\left[z^{Y_n}\right] = P(z)\check{P}(z),$$

con $\tilde{\mu} = \mathbb{E}\left[\tilde{X}_n\right] = \tilde{P}[z] < 1$. Sea $\tilde{L}_n$ el capital remanente después del n-ésimo juego. Entonces

$$\tilde{L}_n = \tilde{L}_0 + \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \cdots + \tilde{X}_n - 2n.$$

La ruina del jugador ocurre después del n-ésimo juego, es decir, la cola se vacía después del n-ésimo juego, entonces sea T definida como $T = min\left\{\tilde{L}_n = 0\right\}$. Si $\tilde{L}_0 = 0$, entonces claramente $T = 0$. En este sentido T puede interpretarse como la longitud del periodo de tiempo que el servidor ocupa para dar servicio en la cola, comenzando con $\tilde{L}_0$ grupos de usuarios presentes en la cola, quienes arribaron conforme a un proceso dado por $\tilde{P}(z)$.

Sea $g_{n,k}$ la probabilidad del evento de que el jugador no caiga en ruina antes del n-ésimo juego, y que además tenga un capital de k unidades antes del n-ésimo juego, es decir,
Dada $n \in \{1, 2, \ldots, \}$ y $k \in \{0, 1, 2, \ldots, \}$

$$g_{n,k} := P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1, \ldots, n, \tilde{L}_n = k\right\}$$

la cual además se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
g_{n,k} &= P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1, \ldots, n, \tilde{L}_n = k\right\} = \sum_{j=1}^{k+1} g_{n-1,j}P\left\{\tilde{X}_n = k - j + 1\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} g_{n-1,j}P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1\right\} = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1, Y_n = l\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1 | Y_n = l\right\}P\left\{Y_n = l\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\left\{X_n = k - j - l + 1\right\}P\left\{Y_n = l\right\}
\end{aligned}$$

es decir

$$g_{n,k} = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\left\{X_n = k - j - l + 1\right\}P\left\{Y_n = l\right\} \tag{33.43.2}$$

además

$$g_{0,k} = P\left\{\tilde{L}_0 = k\right\}. \tag{33.43.3}$$

Se definen las siguientes FGP:

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k}z^k, \text{ para } n = 0, 1, \ldots, \tag{33.43.4}$$

$$G(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z)w^n. \tag{33.43.5}$$

En particular para $k = 0$,

$$g_{n,0} = G_n(0) = P\left\{\tilde{L}_j > 0, \text{ para } j < n, \text{ y } \tilde{L}_n = 0\right\} = P\{T = n\},$$

además

$$G(0, w) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(0)w^n = \sum_{n=0}^{\infty} P\{T = n\}w^n = \mathbb{E}\left[w^T\right]$$

la cuál resulta ser la FGP del tiempo de ruina T.

Proposición 33.45 *Sean $G_n(z)$ y $G(z,w)$ definidas como en (33.80.4) y (33.80.5) respectivamente, entonces*

$$G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z). \tag{33.43.6}$$

Además

$$G(z,w) = \frac{zF(z) - wP(z)G(0,w)}{z - wR(z)}, \tag{33.43.7}$$

con un único polo en el círculo unitario, además, el polo es de la forma $z = \theta(w)$ y satisface que

i) $\tilde{\theta}(1) = 1$,

ii) $\tilde{\theta}^{(1)}(1) = \frac{1}{1-\tilde{\mu}}$,

iii) $\tilde{\theta}^{(2)}(1) = \frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2} + \frac{\tilde{\sigma}}{(1-\tilde{\mu})^3}$.

Finalmente, además se cumple que

$$\mathbb{E}\left[w^T\right] = G(0,w) = F\left[\tilde{\theta}(w)\right]. \tag{33.43.8}$$

Multiplicando las ecuaciones (33.80.2) y (33.80.3) por el término z^k:

$$\begin{aligned}
g_{n,k}z^k &= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-j-l+1\}P\{Y_n = l\}z^k,\\
g_{0,k}z^k &= P\left\{\tilde{L}_0 = k\right\}z^k,
\end{aligned}$$

ahora sumamos sobre k

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k}z^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-j-l+1\}P\{Y_n = l\}z^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^k\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-(j+l-1)\}P\{Y_n = l\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+(j+l-1)-(j+l-1)}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-(j+l-1)\}P\{Y_n = l\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}z^{j-1}P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}P\{Y_n = l\}z^l\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{k=j+l-1}^{\infty} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}P\{Y_n = l\}z^l\\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{l=1}^{j}\sum_{k=j+l-1}^{\infty} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}P\{Y_n = l\}z^l\\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}P\{Y_n = l\}z^l
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}\sum_{l=1}^{j} P\{Y_n = l\}z^l\\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{l=1}^{\infty} P\{Y_n = l\}z^l\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}\\
&= \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z)\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}\\
&= \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z)P(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z),
\end{aligned}$$

es decir la ecuación (33.80.4) se puede reescribir como

$$G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z). \tag{33.43.9}$$

Por otra parte recordemos la ecuación (33.80.4)

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k} z^k, \text{ entonces } \frac{G_n(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} g_{n,k} z^{k-1},$$

Por lo tanto utilizando la ecuación (33.80.9):

$$\begin{aligned} G(z,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z) w^n = G_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(z) w^n = F(z) + \sum_{n=0}^{\infty} [G_n(z) - G_n(0)] w^n \frac{\tilde{P}(z)}{z} \\ &= F(z) + \frac{w}{z} \sum_{n=0}^{\infty} [G_n(z) - G_n(0)] w^{n-1} \tilde{P}(z) \end{aligned}$$

es decir

$$G(z,w) = F(z) + \frac{w}{z}[G(z,w) - G(0,w)] \tilde{P}(z),$$

entonces

$$\begin{aligned} G(z,w) = F(z) + \frac{w}{z}[G(z,w) - G(0,w)] \tilde{P}(z) &= F(z) + \frac{w}{z}\tilde{P}(z) G(z,w) - \frac{w}{z}\tilde{P}(z) G(0,w) \\ &\Leftrightarrow \\ G(z,w)\left\{1 - \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\right\} &= F(z) - \frac{w}{z}\tilde{P}(z) G(0,w), \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$G(z,w) = \frac{zF(z) - w\tilde{P}(z) G(0,w)}{1 - w\tilde{P}(z)}. \tag{33.43.10}$$

Ahora $G(z,w)$ *es analítica en* $|z| = 1$*. Sean* z, w *tales que* $|z| = 1$ *y* $|w| \leq 1$*, como* $\tilde{P}(z)$ *es FGP*

$$|z - \left(z - w\tilde{P}(z)\right)| < |z| \Leftrightarrow |w\tilde{P}(z)| < |z|$$

es decir, se cumplen las condiciones del Teorema de Rouché y por tanto, z *y* $z - w\tilde{P}(z)$ *tienen el mismo número de ceros en* $|z| = 1$*. Sea* $z = \tilde{\theta}(w)$ *la solución única de* $z - w\tilde{P}(z)$*, es decir*

$$\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) = 0, \tag{33.43.11}$$

con $|\tilde{\theta}(w)| < 1$*. Cabe hacer mención que* $\tilde{\theta}(w)$ *es la FGP para el tiempo de ruina cuando* $\tilde{L}_0 = 1$*.*
Considerando la ecuación (33.80.11)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)|_{w=1} - \frac{\partial}{\partial w}\left\{w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}|_{w=1} = \tilde{\theta}^{(1)}(w)|_{w=1} - \frac{\partial}{\partial w} w\left\{\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}|_{w=1} \\ &- w\frac{\partial}{\partial w}\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)|_{w=1} = \tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) - w\left\{\frac{\partial \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial\tilde{\theta}(w)} \cdot \frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}|_{w=1}\right\} \\ & \tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right) \cdot \tilde{\theta}^{(1)}(1), \end{aligned}$$

luego

$$\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) = \tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right) \cdot \tilde{\theta}^{(1)}(1) = \tilde{\theta}^{(1)}(1)\left(1 - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\right),$$

por tanto

$$\tilde{\theta}^{(1)}(1) = \frac{\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{\left(1 - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\right)} = \frac{1}{1 - \tilde{\mu}}.$$

Ahora determinemos el segundo momento de $\tilde{\theta}(w)$*, nuevamente consideremos la ecuación (33.80.11):*

$$0 = \tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\} \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}\right\}$$

luego

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)-\frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\}=\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)-\frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\}\\
= & \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}-\left[\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+w\frac{\partial}{\partial w}R\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\}=\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}-\left[\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+w\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial w}\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}\right]\right\}\\
= & \frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right\}\\
= & \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\frac{\partial}{\partial w}\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)-\frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right]\\
= & \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial\tilde{\theta}(w)}\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)-w\frac{\partial\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w)-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\frac{\partial\tilde{\theta}^{(1)}(w)}{\partial w}\\
= & \tilde{\theta}^{(2)}(w)-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)-w\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\left(\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right)^2-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(2)}(w)\\
= & \tilde{\theta}^{(2)}(w)-2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)-w\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\left(\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right)^2-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(2)}(w)\\
= & \tilde{\theta}^{(2)}(w)\left[1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]-\tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(2)}(w)\left[1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right] & - & \tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]=0\\
\tilde{\theta}^{(2)}(w) & = & \frac{\tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2R^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}\\
\tilde{\theta}^{(2)}(w) & = & \frac{\tilde{\theta}^{(1)}(w)\,w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}+\frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}
\end{aligned}$$

si evaluamos la expresión anterior en $w=1$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(2)}(1) & = & \frac{\left(\tilde{\theta}^{(1)}(1)\right)^2\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}+\frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(1)\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}=\frac{\left(\tilde{\theta}^{(1)}(1)\right)^2\tilde{P}^{(2)}(1)}{1-\tilde{P}^{(1)}(1)}+\frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(1)\tilde{P}^{(1)}(1)}{1-\tilde{P}^{(1)}(1)}\\
& = & \frac{\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}}\right)^2\tilde{P}^{(2)}(1)}{1-\tilde{\mu}}+\frac{2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}}\right)\tilde{\mu}}{1-\tilde{\mu}}=\frac{\tilde{P}^{(2)}(1)}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{2\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}=\frac{\sigma^2-\tilde{\mu}+\tilde{\mu}^2}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{2\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}\\
& = & \frac{\sigma^2-\tilde{\mu}+\tilde{\mu}^2+2\tilde{\mu}(1-\tilde{\mu})}{(1-\tilde{\mu})^3}
\end{aligned}$$

es decir

$$\tilde{\theta}^{(2)}(1)=\frac{\sigma^2+\tilde{\mu}-\tilde{\mu}^2}{(1-\tilde{\mu})^3}=\frac{\sigma^2}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{\tilde{\mu}(1-\tilde{\mu})}{(1-\tilde{\mu})^3}=\frac{\sigma^2}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}.$$

Corolario 33.9 *El tiempo de ruina del jugador tiene primer y segundo momento dados por*

$$\mathbb{E}[T]=\frac{\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{1-\tilde{\mu}} \quad (33.43.12)$$

$$Var[T]=\frac{Var\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^3}. \quad (33.43.13)$$

33.44. Procesos de Llegadas a las colas en la RSVC

Se definen los procesos de llegada de los usuarios a cada una de las colas dependiendo de la llegada del servidor pero del sistema al cuál no pertenece la cola en cuestión:
Para el sistema 1 y el servidor del segundo sistema

$$F_{i,j}(z_i;\zeta_j)=\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\zeta_j)}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[L_i(\zeta_j)=k\right]z_i^k,\ para\ i,j=1,2.$$

Ahora se definen para el segundo sistema y el servidor del primero

$$\hat{F}_{i,j}\left(w_i;\tau_j\right) = \mathbb{E}\left[w_i^{\hat{L}_i(\tau_j)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\hat{L}_i\left(\tau_j\right)=k\right]w_i^k, \text{ para } i,j=1,2.$$

Ahora, con lo anterior definamos la FGP conjunta para el segundo sistema;

$$\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_j)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_j)}\right] = \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_j)}\right]\mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2(\tau_j)}\right] = \hat{F}_{1,j}\left(w_1;\tau_j\right)\hat{F}_{2,j}\left(w_2;\tau_j\right) = \hat{F}_j\left(w_1,w_2;\tau_j\right).$$

Con respecto al sistema 1 se tiene la FGP conjunta con respecto al servidor del otro sistema:

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_j)}z_2^{L_2(\zeta_j)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_j)}\right]\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\zeta_j)}\right] = F_{1,j}\left(z_1;\zeta_j\right)F_{2,j}\left(z_2;\zeta_j\right) = F_j\left(z_1,z_2;\zeta_j\right).$$

Ahora analicemos la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas, entonces se define la PGF conjunta al tiempo t para los tiempos de visita del servidor en cada una de las colas, para comenzar a dar servicio, definidos anteriormente al tiempo $t=\{\tau_1,\tau_2,\zeta_1,\zeta_2\}$:

$$F_j\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{2}z_i^{L_i(\tau_j)}\prod_{i=1}^{2}w_i^{\hat{L}_i(\tau_j)}\right] \tag{33.44.1}$$

$$\hat{F}_j\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{2}z_i^{L_i(\zeta_j)}\prod_{i=1}^{2}w_i^{\hat{L}_i(\zeta_j)}\right] \tag{33.44.2}$$

para $j=1,2$. Entonces, con la finalidad de encontrar el número de usuarios presentes en el sistema cuando el servidor deja de atender una de las colas de cualquier sistema se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right] &= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]\\ =\ \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)+X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)+Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)+\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)+\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]\end{aligned}$$

utilizando la ecuacion dada (34.4.1), luego

$$\begin{aligned}&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right\}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\end{aligned}$$

Aplicando el hecho de que el número de usuarios que llegan a cada una de las colas del segundo sistema es independiente de las llegadas a las colas del primer sistema:

$$= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]$$

dado que los arribos a cada una de las colas son independientes, podemos separar la esperanza para los procesos de llegada a Q_1 y Q_2 al tiempo τ_1, que es el tiempo en que el servidor visita a Q_1. Recordando que $\tilde{X}_2(z_2)=X_2(z_2)+Y_2(z_2)$ se tiene

$$\begin{aligned}&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{\tilde{P}_2\left(z_2\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\hat{P}_1\left(w_1\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\hat{P}_2\left(w_2\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right\}^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)^{L_1(\tau_1)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\ &= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z2\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2;\tau_1\right)\\ &\equiv F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2,w_1,w_2\right)\end{aligned}$$

Las igualdades anteriores son ciertas pues el número de usuarios que llegan a $\hat{Q}_2$ durante el intervalo $[\tau_1,\overline{\tau}_1]$ aún no han sido atendidos por el servidor del sistema 2 y por tanto aún no pueden pasar al sistema 1 a traves de Q_2. Por tanto el número de usuarios que pasan de $\hat{Q}_2$ a Q_2 en el intervalo de tiempo $[\tau_1,\overline{\tau}_1]$ depende de la política de traslado entre los dos sistemas, conforme a la sección anterior.

Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right] = F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right) \tag{33.44.3}$$

$$= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z2\right)\hat{F}_1(w_1, w_2; \tau_1) \tag{33.44.4}$$

Utilizando un razonamiento análogo para $\overline{\tau}_2$*:*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right]\\
=\;& \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)+X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)} w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)+\hat{X}_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)+\hat{X}_2(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right]\\
=\;& \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)} z_1^{X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)} w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)} w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)} w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right]\\
=\;& \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)} z_1^{X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)} w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)} w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
=\;& \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)} P_1(z_1)^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\hat{P}_1(w_1)^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\hat{P}_2(w_2)^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]
\end{aligned}$$

utlizando la proposición (33.90) referente al problema de la ruina del jugador:

$$\begin{aligned}
=\;& \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}\left\{P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right\}^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
=\;& \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)^{L_2(\tau_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
=\;& F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1, w_2; \tau_2)
\end{aligned}$$

entonces se define

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right] = F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), w_1, w_2\right) \tag{33.44.5}$$

$$\equiv F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1, w_2; \tau_2) \tag{33.44.6}$$

Ahora para $\overline{\zeta}_1$ *:*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)} z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)} z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right]\\
=\;& \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)} z_1^{X_1(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)} z_2^{L_2(\zeta_1)} z_2^{X_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)} z_2^{Y_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)} w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)} w_2^{\hat{X}_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}\right]\\
=\;& \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)} z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[z_1^{X_1(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)} z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)} w_2^{\hat{X}_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)} w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right]\\
=\;& \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)} z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[P_1(z_1)^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1}\tilde{P}_2(z_2)^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1}\hat{P}_2(w_2)^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1} w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right]\\
=\;& \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)} z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[\left\{P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right\}^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1} w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right]\\
=\;& \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)} z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right)^{\hat{L}_1(\zeta_1)} w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right]\\
=\;& F_1(z_1, z_2; \zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right)
\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)} z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right] = \hat{F}_1\left(z_1, z_2, \hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right) \tag{33.44.7}$$

$$= F_1(z_1, z_2; \zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right) \tag{33.44.8}$$

Finalmente para $\overline{\zeta}_2$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}\right]\\
= &\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_1^{X_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}z_2^{X_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}z_2^{Y_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}\right]\\
= &\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[z_1^{X_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\right]\\
= &\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[P_1(z_1)^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}\tilde{P}_2(z_2)^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}\hat{P}(w_1)^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\right]\\
= &\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\left\{P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}(w_1)\right\}^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}\right]\\
= &\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}(w_1)\right)^{\hat{L}_2\zeta_2}\right]\\
= &F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right]
\end{aligned}$$

es decir

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right] = \hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right) \tag{33.44.9}$$

$$= F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right) \tag{33.44.10}$$

33.45. Ecuaciones Recursivas para la R.S.V.C.

Con lo desarrollado hasta ahora podemos encontrar las ecuaciones recursivas que modelan la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (R.S.V.C):

$$\begin{aligned}
F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) &= R_1(z_1,z_2,w_1,w_2)\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]\\
&= R_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2,w_1,w_2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1(z_1,z_2,w_1,w_2) &= R_2(z_1,z_2,w_1,w_2)\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]\\
&= R_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),w_1,w_2\right)
\end{aligned}$$

que son equivalentes a las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
\hat{F}_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = \hat{R}_1(z_1,z_2,w_1,w_2)\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right]\\
\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1,w_2) = \hat{R}_2(z_1,z_2,w_1,w_2)\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right]
\end{aligned}$$

que son equivalentes a las siguientes ecuaciones

$$\hat{F}_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = \hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right) \tag{33.45.1}$$

$$\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1,w_2) = \hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right) \tag{33.45.2}$$

33.45.1. Tiempos de Traslado del Servidor

Para

$$R_1(\mathbf{z},\mathbf{w}) = R_1\left((P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.45.3}$$

se tiene que

$$\frac{\partial R_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = R_1^{(1)}(1)\,P_1^{(1)}(1) = r_1\mu_1, \quad \frac{\partial R_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = R_1^{(1)}(1)\,\tilde{P}_2^{(1)}(1) = r_1\tilde{\mu}_2,$$
$$\frac{\partial R_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = R_1^{(1)}(1)\,\hat{P}_1^{(1)}(1) = r_1\hat{\mu}_1, \quad \frac{\partial R_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = R_1^{(1)}(1)\,\hat{P}_2^{(1)}(1) = r_1\hat{\mu}_2,$$

Análogamente se tiene

$$R_2(\mathbf{z},\mathbf{w}) = R_2\left(P_1(z_1)\,\tilde{P}_2(z_2)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.45.4}$$

$$\frac{\partial R_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = R_2^{(1)}(1)\,P_1^{(1)}(1) = r_2\mu_1, \quad \frac{\partial R_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = R_2^{(1)}(1)\,\tilde{P}_2^{(1)}(1) = r_2\tilde{\mu}_2,$$
$$\frac{\partial R_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = R_2^{(1)}(1)\,\hat{P}_1^{(1)}(1) = r_2\hat{\mu}_1, \quad \frac{\partial R_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = R_2^{(1)}(1)\,\hat{P}_2^{(1)}(1) = r_2\hat{\mu}_2,$$

Para el segundo sistema:

$$\hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w}) = \hat{R}_1\left(P_1(z_1)\,\tilde{P}_2(z_2)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.45.5}$$

$$\frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_1^{(1)}(1)\,P_1^{(1)}(1) = \hat{r}_1\mu_1, \quad \frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_1^{(1)}(1)\,\tilde{P}_2^{(1)}(1) = \hat{r}_1\tilde{\mu}_2,$$
$$\frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_1^{(1)}(1)\,\hat{P}_1^{(1)}(1) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1, \quad \frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_1^{(1)}(1)\,\hat{P}_2^{(1)}(1) = \hat{r}_1\hat{\mu}_2,$$

Finalmente

$$\hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w}) = \hat{R}_2\left(P_1(z_1)\,\tilde{P}_2(z_2)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.45.6}$$

$$\frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_2^{(1)}(1)\,P_1^{(1)}(1) = \hat{r}_2\mu_1, \quad \frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_2^{(1)}(1)\,\tilde{P}_2^{(1)}(1) = \hat{r}_2\tilde{\mu}_2,$$
$$\frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_2^{(1)}(1)\,\hat{P}_1^{(1)}(1) = \hat{r}_2\hat{\mu}_1, \quad \frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_2^{(1)}(1)\,\hat{P}_2^{(1)}(1) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2.$$

33.45.2. Usuarios presentes en la cola

Hagamos lo correspondiente con las siguientes expresiones obtenidas en la sección anterior: Recordemos que

$$F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right) = F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right), z_2\right)\hat{F}_1(w_1, w_2; \tau_1)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial \theta_1}{\partial \tilde{P}_2}\cdot\frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial z_2} + \frac{\partial F_1}{\partial z_2}\\
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial \theta_1}{\partial \hat{P}_1}\cdot\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial w_1} + \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_1}\\
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial \theta_1}{\partial \hat{P}_2}\cdot\frac{\partial \hat{P}_2}{\partial w_2} + \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_2}
\end{aligned}$$

para τ_2*:*

$$F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right), w_1, w_2\right) = F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1, w_2; \tau_2)$$

al igual que antes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_1,w_2\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial\tilde{\theta}_2}{\partial P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z_2}+\frac{\partial F_2}{\partial z_1}\\
\frac{\partial F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_1,w_2\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\
\frac{\partial F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_1,w_2\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial\tilde{\theta}_2}{\partial\hat{P}_1}\cdot\frac{\partial\hat{P}_1}{\partial w_1}+\frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_1}\\
\frac{\partial F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_1,w_2\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial\tilde{\theta}_2}{\partial\hat{P}_2}\cdot\frac{\partial\hat{P}_2}{\partial w_2}+\frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_2}
\end{aligned}$$

Ahora para el segundo sistema

$$\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)=F_1\left(z_1,z_2;\zeta_1\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_1}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_1}{\partial P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z_1}+\frac{\partial F_1}{\partial z_1}\\
\frac{\partial\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_1}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_1}{\partial\tilde{P}_2}\cdot\frac{\partial\tilde{P}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial F_1}{\partial z_2}\\
\frac{\partial\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\
\frac{\partial\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_1}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_1}{\partial\hat{P}_2}\cdot\frac{\partial\hat{P}_2}{\partial w_2}+\frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_2}
\end{aligned}$$

Finalmente para ζ_2

$$\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right) \quad = \quad F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right]$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_2}{\partial P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z_1}+\frac{\partial F_2}{\partial z_1}\\
\frac{\partial\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_2}{\partial\tilde{P}_2}\cdot\frac{\partial\tilde{P}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial F_2}{\partial z_2}\\
\frac{\partial\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_2}{\partial\hat{P}_1}\cdot\frac{\partial\hat{P}_1}{\partial w_1}+\frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_1}\\
\frac{\partial\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0
\end{aligned}$$

33.45.3. Ecuaciones Recursivas

Entonces, de todo lo desarrollado hasta ahora se tienen las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_1\mu_1\\
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= = r_1\tilde{\mu}_2 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2 + f_1(2)\\
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_1\hat{\mu}_1 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{1,1}(1)\\
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_1\hat{\mu}_2 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1)\\
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_2\mu_1 + f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\mu_1 + f_2(1)\\
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_2\tilde{\mu}_2\\
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_2\hat{\mu}_1 + f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1)\\
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_2\hat{\mu}_2 + f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_1\mu_1 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1 + F^{(1)}_{1,1}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_1\mu_2 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,1}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_1\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(2)\\
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_2\mu_1 + \hat{f}_2(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1 + F^{(1)}_{1,2}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,2}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_2\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_2\hat{\mu}_2
\end{aligned}
$$

Es decir, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
f_2(1) &= r_1\mu_1\\
f_1(2) &= r_2\tilde{\mu}_2\\
f_2(2) &= r_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\left(\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+f_1(2)=\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2+r_2\tilde{\mu}_2\\
&= \left(r_1+r_2+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2=\left(r+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2\\
f_2(3) &= r_1\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\left(\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\hat{F}^{(1)}_{1,1}(1)=\hat{\mu}_1\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}\\
f_2(4) &= r_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\hat{F}^{(1)}_{2,1}(1)=\hat{\mu}_2\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_1}\\
f_1(1) &= r_2\mu_1+\mu_1\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+r_1\mu_1=\mu_1\left(r_1+r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\\
&= \mu_1\left(r+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\\
f_1(3) &= r_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\hat{F}^{(1)}_{1,2}(1)=\hat{\mu}_1\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}\\
f_1(4) &= r_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\hat{F}^{(1)}_{2,2}(1)=\hat{\mu}_2\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2}\\
\hat{f}_1(4) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_2\\
\hat{f}_2(3) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
\hat{f}_1(1) &= \hat{r}_2\mu_1+\mu_1\left(\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)+F^{(1)}_{1,2}(1)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2}\\
\hat{f}_1(2) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)+F^{(1)}_{2,2}(1)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}\\
\hat{f}_1(3) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\left(\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)+\hat{f}_2(3)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
&= \left(\hat{r}_1+\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1=\left(\hat{r}+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1\\
\hat{f}_2(1) &= \hat{r}_1\mu_1+\mu_1\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)+F^{(1)}_{1,1}(1)=\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1}\\
\hat{f}_2(2) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)+F^{(1)}_{2,1}(1)=\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1}\\
\hat{f}_2(4) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)+\hat{f}_1(4)=\hat{r}_1\hat{\mu}_2+\hat{r}_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\\
&= \left(\hat{r}+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
\begin{array}{lll}
f_1(1)=\mu_1\left(r+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) & f_1(2)=r_2\tilde{\mu}_2 & f_1(3)=\hat{\mu}_1\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}\\
f_1(4)=\hat{\mu}_2\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2} & f_2(1)=r_1\mu_1 & f_2(2)=\left(r+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2\\
f_2(3)=\hat{\mu}_1\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} & f_2(4)=\hat{\mu}_2\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_1} & \hat{f}_1(1)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2}\\
\hat{f}_1(2)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2} & \hat{f}_1(3)=\left(\hat{r}+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 & \hat{f}_1(4)=\hat{r}_2\hat{\mu}_2\\
\hat{f}_2(1)=\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1} & \hat{f}_2(2)=\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1} & \hat{f}_2(3)=\hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
 & \hat{f}_2(4)=\left(\hat{r}+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 &
\end{array}
$$

33.45.4. Solución del Sistema de Ecuaciones Lineales

A saber, se puede demostrar que la solución del sistema de ecuaciones está dado por las siguientes expresiones, donde

$$\mu=\mu_1+\tilde{\mu}_2\ ,\ \hat{\mu}=\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\ ,\ r=r_1+r_2\ \text{y}\ \hat{r}=\hat{r}_1+\hat{r}_2$$

entonces

$$\begin{array}{lll}
f_1(1) = r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu} & f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) & f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)\\
f_2(2) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu} & f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right) & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right)\\
\hat{f}_1(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) & \hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2} & \hat{f}_1(3) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}\\
\hat{f}_2(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) & \hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1} & \hat{f}_2(4) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}
\end{array}$$

A saber

$$\begin{aligned}
f_1(3) &= \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2} = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2} = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}\\
&= \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu} + \frac{1}{\mu_2}\right) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1(4) &= \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2} = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2} = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}\\
&= \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu} + \frac{1}{\mu_2}\right) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(3) &= \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}\\
&= \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu} + \frac{1}{\mu_1}\right) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(4) &= \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\mu_1} = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}\\
&= \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu} + \frac{1}{\mu_1}\right) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1(1) &= \mu_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2} = \mu_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_2}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2} = \mu_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_1}{\mu_2}\\
&= \mu_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\mu_2}{1-\hat{\mu}} + \frac{1}{\hat{\mu}_2}\right) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2} + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right)
\end{aligned}$$

$$\hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2} = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_2}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2} = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}_2(1) &= \mu_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1} = \mu_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_1}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1} = \mu_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1}\\
&= \mu_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}} + \frac{1}{\hat{\mu}_1}\right) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1} + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right)
\end{aligned}$$

$$\hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\tilde{\mu}_1}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1} = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_1}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1} = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1}$$

33.46. Resultado Principal

Sean $\mu_1, \mu_2, \check{\mu}_2, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ y $\tilde{\mu}_2 = \mu_2 + \check{\mu}_2$ los valores esperados de los proceso definidos anteriormente, y sean $r_1, r_2, \hat{r}_1$ y $\hat{r}_2$ los valores esperado s de los tiempos de traslado del servidor entre las colas para cada uno de los sistemas de visitas cíclicas. Si se definen $\mu = \mu_1 + \tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2$, y $r = r_1 + r_2$ y $\hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$, entonces se tiene el siguiente resultado.

Teorema 33.69 *Supongamos que $\mu < 1$, $\hat{\mu} < 1$, entonces, el número de usuarios presentes en cada una de las colas que conforman la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas cuando uno de los servidores visita a alguna de ellas está dada por la solución del Sistema de Ecuaciones Lineales presentados arriba cuyas expresiones damos a continuación:*

$$\begin{array}{lll}
f_1(1) = r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}, & f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2, & f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right),\\
f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right), & f_2(1) = r_1\mu_1, & f_2(2) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu},\\
f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right), & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right), & \hat{f}_1(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right),\\
\hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}, & \hat{f}_1(3) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}, & \hat{f}_1(4) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2,\\
\hat{f}_2(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right), & \hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\hat{\mu_2}}{\hat{\mu}_1}, & \hat{f}_2(3) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1,\\
 & \hat{f}_2(4) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}. &
\end{array}$$

33.47. Segundos Momentos

Para poder determinar los segundos momentos para los tiempos de traslado del servidor es necesaria la siguiente proposición:

Proposición 33.46 *Sea $f(g(x)h(y))$ función continua tal que tiene derivadas parciales mixtas de segundo orden, entonces se tiene lo siguiente:*

$$\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y)) = \frac{\partial f(g(x)h(y))}{\partial x}\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot h(y)$$

por tanto

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y)) = \frac{\partial^2}{\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right)^2\cdot h^2(y) + \frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2}\cdot h(y) \tag{33.47.1}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y)) = \frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot\frac{\partial h(y)}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(g(x)h(y))\cdot g(x)\cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\right\}$$

Demostración 33.9

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y)) &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial f(g(x)h(y))}{\partial x}\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot h(y)\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\right\}\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2}\cdot h(y)\\
&= \frac{\partial^2}{\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot h(y)\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2}\cdot h(y)\\
&= \frac{\partial^2}{\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right)^2\cdot h^2(y) + \frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2}\cdot h(y).
\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y)) &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial f(g(x)h(y))}{\partial x}\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot h(y)\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\right\}\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot\frac{\partial h(y)}{y}\\
&= \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\frac{\partial h(y)}{\partial y}\cdot g(x)\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot\frac{\partial h(y)}{\partial y}\\
&= \frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot\frac{\partial h(y)}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(g(x)h(y))\cdot g(x)\cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\right\}
\end{aligned}$$

Utilizando la proposición anterior (Proposiciíon 33.91)se tiene el siguiente resultado que me dice como calcular los segundos momentos para los procesos de traslado del servidor:

Proposición 33.47 *Sea R_i la Función Generadora de Probabilidades para el número de arribos a cada una de las colas de la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas definidas como en (33.83.4). Entonces las derivadas parciales están dadas por las siguientes expresiones:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_i^2} &= \left(\frac{\partial P_i(z_i)}{\partial z_i}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial^2 z_i}\\
&+ \left(\frac{\partial P_i(z_i)}{\partial z_i}\right)^2\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_i}
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_2\partial z_1} &= \frac{\partial\tilde{P}_2(z_2)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1(z_1)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_2\partial z_1}\\
&+ \frac{\partial\tilde{P}_2(z_2)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1(z_1)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial w_i\partial z_1} &= \frac{\partial\hat{P}_i(w_i)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1(z_1)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial w_i\partial z_1}\\
&+ \frac{\partial\hat{P}_i(w_i)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1(z_1)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_1},
\end{aligned}$$

finalmente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial w_i\partial z_2} &= \frac{\partial\hat{P}_i(w_i)}{\partial w_i}\cdot\frac{\partial\tilde{P}_2(z_2)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial w_i\partial z_2}\\
&+ \frac{\partial\hat{P}_i(w_i)}{\partial w_i}\cdot\frac{\partial\tilde{P}_2(z_2)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_2},
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$.

33.47.1. Sistema de Ecuaciones Lineales para los Segundos Momentos

En el apéndice (33.66) se demuestra que las ecuaciones para las ecuaciones parciales mixtas están dadas por:

$$\begin{aligned}
f_1(1,1) &= r_2 P_1^{(2)}(1) + \mu_1^2 R_2^{(2)}(1) + 2\mu_1 r_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right) + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}P_1^{(2)}f_2(2) + \mu_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)f_2(2)\\
&+ \frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(1,2) + \frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2,2) + f_2(1,2)\right) + f_2(1,1),\\
f_1(2,1) &= \mu_1 r_2\tilde{\mu}_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right),\\
f_1(3,1) &= \mu_1\hat{\mu}_1 r_2 + \mu_1\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right) + \mu_1 r_2\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\\
&+ \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2)\\
&+ +\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(1,2),\\
f_1(4,1) &= \mu_1\hat{\mu}_2 r_2 + \mu_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + \mu_1 r_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right)\\
&+ \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2^{(1,2)},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_1(1,2) &= \mu_1\tilde{\mu}_2 r_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right),\\
f_1(2,2) &= \tilde{\mu}_2^2 R_2^{(2)}(1) + r_2\tilde{P}_2^{(2)}(1),\\
f_1(3,2) &= \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 r_2 + \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1),\\
f_1(4,2) &= \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_2 + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1),\\
f_1(1,3) &= \mu_1\hat{\mu}_1 r_2 + \mu_1\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)f_2(2) + r_2\mu_1\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\\
&+ r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right) + \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(1) + f_2(1)\right)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2,2) + f_2^{(1,2)}\right),\\
f_1(2,3) &= \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1),\\
f_1(3,3) &= \hat{\mu}_1^2 R_2^{(2)}(1) + r_2\hat{P}_1^{(2)}(1) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + \hat{\mu}_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)f_2(2) + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_1^{(2)}(1)f_2(2)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2,2) + 2r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + 2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \hat{f}_{2,1}^{(2)}(1),\\
f_1(4,3) &= r_2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + \hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)f_2(2) + r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \hat{f}_2(1,2),\\
f_1(1,4) &= r_2\mu_1\hat{\mu}_2 + \mu_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)f_2(2) + r_2\mu_1\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\\
&+ r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right) + \hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2,2) + f_2(1,2)\right),\\
f_1(2,4) &= r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1),\\
f_1(3,4) &= r_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_2^{(2)}(1)f_2(2) + r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \hat{f}_2^{(2)}(1,2),\\
f_1(4,4) &= \hat{\mu}_2^2 R_2^{(2)}(1) + r_2\hat{P}_2^{(2)}(1) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + \hat{\mu}_2^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)f_2(2) + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}(1)f_2(2)\\
&+ 2r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + 2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + \hat{f}_{2,2}^{(2)}(1),\\
f_2(1,1) &= r_1 P_1^{(2)}(1) + \mu_1^2 R_1^{(2)}(1),\\
f_2(2,1) &= \mu_1\tilde{\mu}_2 r_1 + \mu_1\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right),\\
f_2(3,1) &= r_1\mu_1\hat{\mu}_1 + \mu_1\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1) + r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1) + r_1\mu_1\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1),\\
f_2(4,1) &= \mu_1\hat{\mu}_2 r_1 + \mu_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\mu_1\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1) + r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(1,2) &= r_1\mu_1\tilde{\mu}_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right),\\
f_2(2,2) &= \tilde{\mu}_2^2 R_1^{(2)}(1) + r_1\tilde{P}_2^{(2)}(1) + 2r_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right) + f_1(2,2) + \tilde{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1)\\
&+ \frac{1}{1-\mu_1}\tilde{P}_2^{(2)}(1)f_1(1) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,2) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,1) + f_1(1,2)\right),\\
f_2(3,2) &= \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_1 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1) + r_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_1 r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right) + r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1)\\
&+ \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right)\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1) + \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1) + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}(1)f_1(1) + \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1,2)\\
&+ \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 f_1(1,1),\\
f_2(4,2) &= \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_1 + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1) + r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_2 r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right)\\
&+ \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right)\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1) + \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu_2}}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,2)\\
&+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(1,1),\\
f_2(1,3) &= r_1\mu_1\hat{\mu}_1 + \mu_1\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1) + r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1) + r_1\mu_1\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1),\\
f_2(2,3) &= r_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1) + \frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + r_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1) + r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,1}(1)\\
&+ r_1\hat{\mu}_1\left(f_1(1) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right) + +\left(f_1(2) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right)\hat{F}_{1,1}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\left(f_1(1,2) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,1)\right),\\
f_2(3,3) &= \hat{\mu}_1^2 R_1^{(2)}(1) + r_1\hat{P}_1^{(2)}(1) + 2r_1\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_1^2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1) + 2r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1)\\
&+ \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_1^{(2)}(1)f_1(1) + 2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)\hat{F}_{1,1}(1) + \left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(1,1) + \hat{f}_{1,1}^{(2)}(1),\\
f_2(4,3) &= r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_{1,2}(1) + \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + 2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_{1,1}(1)\\
&+ \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1) + \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)\hat{F}_{1,2}(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_{1,1}(1)f_1(1)\\
&+ \hat{f}_1^{(2)}(1,2) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(2,2),\\
f_2(1,4) &= r_1\mu_1\hat{\mu}_2 + \mu_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\mu_1\hat{F}_{1,2}(1) + r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1),\\
f_2(2,4) &= r_1\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,2}(1) + \frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1)\\
&+ r_1\hat{\mu}_2\left(f_1(2) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right) + \left(f_1(2) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right)\hat{F}_{1,2}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(f_1(1,2) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,1)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(3,4) &= r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_{1,2}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)\,f_1(1)\\
&+ +\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\hat{F}_{1,2}(1)f_1(1)+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_{1,1}(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_{1,1}(1)f_1(1)+\hat{f}_1^{(2)}(1,2)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(1,1),\\
f_2(4,4) &= \hat{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\hat{P}_2^{(2)}(1)+2r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+\hat{f}_{1,2}^{(2)}(1)+2r_1\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}(1)\,f_1(1)\\
&+ \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_2^{(2)}(1)\,f_1(1)+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\hat{F}_{1,2}(1)+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(1,1),\\
\hat{f}_1(1,1) &= \hat{r}_2P_1^{(2)}(1)+\mu_1^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}P_1^{(2)}(1)\,\hat{f}_2(2)+\mu_1^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\,\hat{f}_2(2)\\
&+ \left(\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)+2\hat{r}_2\mu_1F_{2,1}(1)+2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1)+F_{2,1}^{(2)}(1),\\
\hat{f}_1(2,1) &= \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\mu_1F_{2,2}(1)+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\,\hat{f}_2(2)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(2)+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_{2,1}(1)\\
&+ \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1)+f_{2,1}^{(2)}(1),\\
\hat{f}_1(3,1) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,1}(1)+\hat{r}_2\mu_1\hat{f}_2(1)\\
&+ F_{2,1}(1)\hat{f}_2(1)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1(4,1) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\,\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,1}(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1),\\
\hat{f}_1(1,2) &= \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\mu_1\hat{r}_2F_{2,2}(1)+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\,\hat{f}_2(2)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(2)+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)\\
&+ \hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_{2,1}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1)+f_2^{(2)}(1,2),\\
\hat{f}_1(2,2) &= \hat{r}_2\tilde{P}_2^{(2)}(1)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_{2,2}(1)+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+f_{2,2}^{(2)}(1)\\
&+ \frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{P}_2^{(2)}(1)\,\hat{f}_2(2)+\tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\,\hat{f}_2(2)+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(2)+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2),\\
\hat{f}_1(3,2) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,2}(1)+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2(1)+F_{2,2}(1)\hat{f}_2(1)\\
&+ \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1(4,2) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,2}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\,\hat{f}_2(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(1)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{f}_2(2,2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_1(1,3) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1 + \mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1) + \hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + \hat{r}_2\hat{\mu}_1 F_{2,1}(1) + \hat{r}_2\mu_1\hat{f}_2(1)\\
&+ F_{2,1}(1)\hat{f}_2(1) + \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1(2,3) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1) + \hat{r}_2\hat{\mu}_1 F_{2,2}(1) + \hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2(1)\\
&+ F_{2,2}(1)\hat{f}_2(1) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1(3,3) &= \hat{r}_2\hat{P}_1^{(2)}(1) + \hat{\mu}_1^2\hat{R}_2^{(2)}(1) + 2\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{f}_2(1) + \hat{f}_2(1,1),\\
\hat{f}_1(4,3) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1) + \hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + \hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{f}_2(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1(1,4) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2 + \mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + 2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2) + \hat{r}_2\hat{\mu}_2 F_{2,1}(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1),\\
\hat{f}_1(2,4) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1) + \hat{r}_2\hat{\mu}_2 F_{2,2}(1) + \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + 2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,2}(1) + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2),\\
\hat{f}_1(3,4) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1) + \hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + \hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{f}_2(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1(4,4) &= \hat{r}_2 P_2^{(2)}(1) + \hat{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}(1) + 2\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + \frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)\\
&+ \hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2) + \left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2),\\
\hat{f}_2(,1) &= \hat{r}_1 P_1^{(2)}(1) + \mu_1^2\hat{R}_1^{(2)}(1) + 2\hat{r}_1\mu_1 F_{1,1}(1) + 2\hat{r}_1\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}P_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)\\
&+ \mu_1^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + 2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1^{(}1)F_{1,1}(1) + f_{1,1}^{(2)}(1) + \left(\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1^{(1,1)},\\
\hat{f}_2(2,1) &= \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\mu_1 F_{1,2}(1) + \tilde{\mu}_2\hat{r}_1 F_{1,1}(1) + \frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ 2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,2}(1) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,1}(1)\\
&+ f_1^{(2)}(1,2) + \mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),\\
\hat{f}_2(3,1) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1 + \mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_1 F_{1,1}(1) + \hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1(1),\\
\hat{f}_2(4,1) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2 + \mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_2 F_{1,1}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + \hat{r}_1\mu_1\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right) + F_{1,1}(1)\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)\\
&+ \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{f}_1(1,2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,1)\right),\\
\hat{f}_2(1,2) &= \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\mu_1 F_{1,2}(1) + \hat{r}_1\tilde{\mu}_2 F_{1,1}(1) + \frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ 2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,2}(1)\\
&+ \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,1}(1) + f_1^{(2)}(1,2) + \mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_2(2,2) &= \hat{r}_1\tilde{P}_2^{(2)}(1)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_{1,2}(1)+f_{1,2}^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}F_{1,2}(1)\hat{f}_1(1)+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),\\
\hat{f}_2(3,2) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,2}(1)+\hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1),\\
\hat{f}_2(4,2) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)F_{1,2}(1)+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ \hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)\\
&+ F_{1,2}(1)\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{f}_1(1,2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,1)\right),\\
\hat{f}_2(1,3) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,1}(1)+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1),\\
\hat{f}_2(2,3) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,2}(1)+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1),\\
\hat{f}_2(3,3) &= \hat{r}_1\hat{P}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_1^{(2)}(1),\\
\hat{f}_2(4,3) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right),\\
\hat{f}_2(1,4) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_{1,1}(1)+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\hat{r}_1\mu_1\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)\\
&+ F_{1,1}(1)\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)\\
&+ \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2)+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),\\
\hat{f}_2(2,4) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_{1,2}(1)+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+F_{1,2}(1)\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),\\
\hat{f}_2(3,4) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right),\\
\hat{f}_2(4,4) &= \hat{r}_1\hat{P}_2^{(2)}(1)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\hat{\mu}_2\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+\hat{f}_1(2,2)\\
&+ \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{f}_1(1,2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,1)\right).
\end{aligned}
$$

33.48. Medidas de Desempeño

Definición 33.14 *Sea L_i^* el número de usuarios cuando el servidor visita la cola Q_i para dar servicio, para $i=1,2$.*

Entonces

Proposición 33.48 *Para la cola Q_i, $i=1,2$, se tiene que el número de usuarios presentes al momento de ser visitada por el servidor está dado por*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= f_i(i) && (33.48.1)\\
Var\left[L_i^*\right] &= f_i(i,i)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. && (33.48.2)
\end{aligned}
$$

Definición 33.15 *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo, bajo condiciones de estabilidad.*

$$C_i(z)=\mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$$

Definición 33.16 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo.*

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$$

Proposición 33.49 *Para los tiempos de intervisita del servidor I_i, se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I_i] &= \frac{f_i(i)}{\mu_i},\\ Var[I_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).\end{aligned}$$

Proposición 33.50 *Para los tiempos que ocupa el servidor para atender a los usuarios presentes en la cola Q_i, con FGP denotada por S_i, se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{1-\mu_i},\\ Var[S_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{(1-\mu_i)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^3}\end{aligned}$$

Proposición 33.51 *Para la duración de los ciclos C_i se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i]\,\mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)}\\ Var[C_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}.\end{aligned}$$

Apéndice A

a*)*

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
=\;& r_2P_1^{(2)}(1)+\mu_1^2R_2^{(2)}(1)+2\mu_1r_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{1,0)}\right)+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}P_1^{(2)}F_2^{(0,1)}+\mu_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}+\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right)+F_2^{(2,0)}.\end{aligned}$$

b*)*

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
=\;& \mu_1r_2\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right).\end{aligned}$$

c*)*

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
=\;& \mu_1\hat{\mu}_1r_2+\mu_1\hat{\mu}_1R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\mu_1r_2\hat{F}_2^{(1,0)}\\
+\;& \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}\\
+\;& \mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}.\end{aligned}$$

d*)*

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
=\;& \mu_1\hat{\mu}_2r_2+\mu_1\hat{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1r_2\hat{F}_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\\
+\;& \hat{F}_2^{(1,0)}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}.\end{aligned}$$

e)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&\mu_1\tilde{\mu}_2 r_2+\mu_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right).
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&\tilde{\mu}_2^2 R_2^{(2)}(1)+r_2\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right).
\end{aligned}
$$

g)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 r_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}.
\end{aligned}
$$

i)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&\mu_1\hat{\mu}_1 r_2+\mu_1\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+\;&r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+r_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\hat{F}_2^{(1,0)}\\
+\;&\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right).
\end{aligned}
$$

j)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

k)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&\hat{\mu}_1^2 R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+2r_2\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+\;&\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+2r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

l)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&r_2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

m)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&r_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+r_2\mu_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\hat{F}_2^{(0,1)}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right).
\end{aligned}
$$

n)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
= & r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}.
\end{aligned}$$

ñ)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
= & r_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+ & \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
= & \hat{\mu}_2^2R_2^{(2)}(1)+r_2\hat{P}_2^{(2)}(1)+2r_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}\\
+ & 2r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= & r_1P_1^{(2)}(1)+\mu_1^2R_1^{(2)}(1).
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= & \mu_1\tilde{\mu}_2r_1+\mu_1\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right).
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= & r_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1R_1^{(2)}(1)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= & \mu_1\hat{\mu}_2r_1+\mu_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= & r_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right).
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= & \tilde{\mu}_2^2R_1^{(2)}(1)+r_1\tilde{P}_2^{(2)}(1)+2r_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)+F_1^{(0,2)}+\tilde{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}\\
+ & \frac{1}{1-\mu_1}\tilde{P}_2^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(2,0)}+F_1^{(1,1)}\right).
\end{aligned}$$

g)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= & \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1)+r_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1 r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ & \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}\\
+ & \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= & \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_1+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2 r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\\
+ & \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}\\
+ & \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

i)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= & r_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

j)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= & r_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}+r_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)F_2^{(1,0)}\\
+ & r_1\hat{\mu}_1\left(F_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ & \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\left(F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

k)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= & \hat{\mu}_1^2 R_1^{(2)}(1)+r_1\hat{P}_1^{(2)}(1)+2r_1\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1^2\theta_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}\\
+ & 2r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}+\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

l)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= & r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}(1)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}\\
+ & \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+\hat{F}_1^{(1,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

m)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= & r_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}(1)+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

n)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_1\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\\
+\;& \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+r_1\hat{\mu}_2\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\right)+\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\right)\hat{F}_1^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

ñ)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(0,1)}F_1^{(1,0)}+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+\hat{F}_1^{(1,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

o)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)+2r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+\hat{F}_1^{(0,2)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+\;& \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(0,1)}+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

a)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;& \hat{r}_2P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}P_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \left(\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+2\hat{r}_2\mu_1F_2^{(1,0)}+2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\mu_1F_2^{(0,1)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(1,0)}+\hat{r}_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(1,0)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\mu_1\hat{r}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

f)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\tilde{P}_2^{(2)}(1)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{P}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+F_2^{(0,2)}+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(1,0)}+\hat{r}_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(1,0)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\hat{P}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

m)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

n)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

ñ)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= \quad & \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

o)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\right)\\
= \quad & \hat{r}_2P_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+ \quad & \left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}
$$

a)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= \quad & \hat{r}_1P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_1\mu_1F_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}P_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1^2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ \quad & 2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(2,0)}+\left(\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= \quad & \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\mu_1F_1^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{r}_1F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ \quad & \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(1,1)}\\
+ \quad & \mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= \quad & \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= \quad & \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ \quad & \hat{r}_1\mu_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+F_1^{(1,0)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= \quad & \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\mu_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ \quad & \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(1,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= \quad & \hat{r}_1\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_1^{(0,1)}+F_1^{(0,2)}+2\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ \quad & \tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}F^{(0,1)}\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

g)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;&\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+F_1^{(0,1)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+\;&\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right).\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right).\end{aligned}$$

m)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\mu_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+\;&F_1^{(1,0)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}\\
+\;&\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.\end{aligned}$$

n)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+\;&F_1^{(0,1)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}\\
+\;&\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.\end{aligned}$$

ñ)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right).\end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\hat{P}_2^{(2)}(1)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\hat{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\hat{F}_1^{(0,2)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;&\hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}$$

Las ecuaciones que determinan los segundos momentos de las longitudes de las colas de los dos sistemas se pueden ver en este sitio

Apéndice B

Distribución para los usuarios de traslado

Se puede demostrar que

$$\frac{d^k}{dy}\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu-y}\right)=\frac{k!}{(\lambda+\mu)^k} \tag{33.48.3}$$

Proposición 33.52 *Sea τ variable aleatoria no negativa con distribución exponencial con media μ, y sea $L(t)$ proceso Poisson con parámetro λ. Entonces*

$$\mathbb{P}\{L(\tau)=k\}=f_{L(\tau)}(k)=\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k. \tag{33.48.4}$$

Además

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L(\tau)] &= \frac{\lambda}{\mu} && (33.48.5)\\
\mathbb{E}\left[(L(\tau))^2\right] &= \frac{\lambda}{\mu}\left(2\frac{\lambda}{\mu}+1\right) && (33.48.6)\\
V[L(\tau)] &= \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right). && (33.48.7)
\end{aligned}$$

A saber, para k fijo se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{L(\tau)=k\} &= \mathbb{P}\{L(\tau)=k,\tau\in(0,\infty)\}\\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}\{L(\tau)=k,\tau=y\}f_\tau(y)\,dy=\int_0^\infty \mathbb{P}\{L(y)=k\}f_\tau(y)\,dy\\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda y}}{k!}(\lambda y)^k\left(\mu e^{-\mu y}\right)dy=\frac{\lambda^k\mu}{k!}\int_0^\infty y^k e^{-(\mu+\lambda)y}dy\\
&= \frac{\lambda^k\mu}{(\lambda+\mu)\,k!}\int_0^\infty y^k(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)y}dy=\frac{\lambda^k\mu}{(\lambda+\mu)\,k!}\int_0^\infty y^k f_Y(y)\,dy\\
&= \frac{\lambda^k\mu}{(\lambda+\mu)\,k!}\mathbb{E}\left[Y^k\right]=\frac{\lambda^k\mu}{(\lambda+\mu)\,k!}\frac{d^k}{dy}\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu-y}\right)|_{y=0}\\
&= \frac{\lambda^k\mu}{(\lambda+\mu)\,k!}\frac{k!}{(\lambda+\mu)^k}=\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k.
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}\{L(\tau)=k\} &= \sum_{k=0}^\infty\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\sum_{k=0}^\infty\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\\
&= \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}\right)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\right)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

determinemos primero la esperanza de $L(\tau)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L\left(\tau\right)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}\left\{L\left(\tau\right)=k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k} \\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k} = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k-1} \\
&= \frac{\mu\lambda}{\left(\lambda+\mu\right)^{2}}\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}\right)^{2} = \frac{\mu\lambda}{\left(\lambda+\mu\right)^{2}}\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\right)^{2} \\
&= \frac{\lambda}{\mu}.
\end{aligned}$$

Ahora su segundo momento:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(L\left(\tau\right)\right)^{2}\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^{2}\mathbb{P}\left\{L\left(\tau\right)=k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^{2}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k} \\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\sum_{k=0}^{\infty} k^{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k} = \frac{\mu\lambda}{\left(\lambda+\mu\right)^{2}}\sum_{k=2}^{\infty}\left(k-1\right)^{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k-2} \\
&= \frac{\mu\lambda}{\left(\lambda+\mu\right)^{2}}\left(\frac{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+1}{\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}-1\right)^{3}}\right) = \frac{\mu\lambda}{\left(\lambda+\mu\right)^{2}}\left(-\frac{\frac{2\lambda+\mu}{\lambda+\mu}}{\left(-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{3}}\right) \\
&= \frac{\mu\lambda}{\left(\lambda+\mu\right)^{2}}\left(\frac{2\lambda+\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\right)^{3} = \frac{\lambda\left(2\lambda+\mu\right)}{\mu^{2}} \\
&= \frac{\lambda}{\mu}\left(2\frac{\lambda}{\mu}+1\right).
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
V\left[L\left(\tau\right)\right] &= \frac{\lambda\left(2\lambda+\mu\right)}{\mu^{2}} - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2} = \frac{\lambda^{2}+\mu\lambda}{\mu^{2}} \\
&= \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right).
\end{aligned}$$

Ahora, determinemos la distribución del número de usuarios que pasan de $\hat{Q}_2$ a Q_2 considerando dos políticas de traslado en específico:

a*) Solamente pasa un usuario,*

b*) Se permite el paso de k usuarios,*

una vez que son atendidos por el servidor en $\hat{Q}_2$.

Política de un solo usuario: *Sea R_2 el número de usuarios que llegan a $\hat{Q}_2$ al tiempo t, sea R_1 el número de usuarios que pasan de $\hat{Q}_2$ a Q_2 al tiempo t.*

A saber:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[R_1\right] &= \sum_{y\geq 0}\mathbb{P}\left[R_2=y\right]\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right] \\
&= \sum_{y\geq 0}\mathbb{P}\left[R_2=y\right]\sum_{x\geq 0} x\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=y\right] \\
&= \sum_{y\geq 0}\sum_{x\geq 0} x\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=y\right]\mathbb{P}\left[R_2=y\right].
\end{aligned}$$

Determinemos

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right] = \sum_{x\geq 0} x\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=y\right]. \tag{33.48.8}$$

supongamos que $y=0$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=0\right] &= 1, \\
\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=0\right] &= 0, \text{ para cualquier } x\geq 1,
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}[R_1|R_2=0]=0.$$

Para $y=1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[R_1=0|R_2=1] &= 0,\\ \mathbb{P}[R_1=1|R_2=1] &= 1,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}[R_1|R_2=1]=1.$$

Para $y>1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[R_1=0|R_2\geq 1] &= 0,\\ \mathbb{P}[R_1=1|R_2\geq 1] &= 1,\\ \mathbb{P}[R_1>1|R_2\geq 1] &= 0,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}[R_1|R_2=y]=1,\ \textit{para cualquier } y>1.$$

es decir

$$\mathbb{E}[R_1|R_2=y]=1,\ \textit{para cualquier } y\geq 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R_1] &= \sum_{y\geq 0}\sum_{x\geq 0}x\mathbb{P}[R_1=x|R_2=y]\,\mathbb{P}[R_2=y]=\sum_{y\geq 0}\sum_{x}\mathbb{E}[R_1|R_2=y]\,\mathbb{P}[R_2=y]\\ &= \sum_{y\geq 0}\mathbb{P}[R_2=y]=\sum_{y\geq 1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}=1.\end{aligned}$$

Además para $k\in Z^+$

$$\begin{aligned}f_{R_1}(k) &= \mathbb{P}[R_1=k]=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}[R_1=k|R_2=n]\,\mathbb{P}[R_2=n]\\ &= \mathbb{P}[R_1=k|R_2=0]\,\mathbb{P}[R_2=0]+\mathbb{P}[R_1=k|R_2=1]\,\mathbb{P}[R_2=1]\\ &+ \mathbb{P}[R_1=k|R_2>1]\,\mathbb{P}[R_2>1],\end{aligned}$$

donde para

$k=0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[R_1=0]=\mathbb{P}[R_1=0|R_2=0]\,\mathbb{P}[R_2=0]+\mathbb{P}[R_1=0|R_2=1]\,\mathbb{P}[R_2=1]\\ +\mathbb{P}[R_1=0|R_2>1]\,\mathbb{P}[R_2>1]=\mathbb{P}[R_2=0].\end{aligned}$$

$k=1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[R_1=1]=\mathbb{P}[R_1=1|R_2=0]\,\mathbb{P}[R_2=0]+\mathbb{P}[R_1=1|R_2=1]\,\mathbb{P}[R_2=1]\\ +\mathbb{P}[R_1=1|R_2>1]\,\mathbb{P}[R_2>1]=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}[R_2=n].\end{aligned}$$

$k=2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[R_1=2]=\mathbb{P}[R_1=2|R_2=0]\,\mathbb{P}[R_2=0]+\mathbb{P}[R_1=2|R_2=1]\,\mathbb{P}[R_2=1]\\ +\mathbb{P}[R_1=2|R_2>1]\,\mathbb{P}[R_2>1]=0.\end{aligned}$$

$k=j$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[R_1=j]=\mathbb{P}[R_1=j|R_2=0]\,\mathbb{P}[R_2=0]+\mathbb{P}[R_1=j|R_2=1]\,\mathbb{P}[R_2=1]\\ +\mathbb{P}[R_1=j|R_2>1]\,\mathbb{P}[R_2>1]=0.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}f_{R_1}(0) &= \mathbb{P}[R_2=0]\\ f_{R_1}(1) &= \sum_{n\geq 1}^{\infty}\mathbb{P}[R_2=n]\\ f_{R_1}(j) &= 0,\ \textit{para } j>1.\end{aligned}$$

Política de k usuarios: *Al igual que antes, para $y \in Z^+$ fijo*

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = y\right] = \sum_x x\mathbb{P}\left[R_1 = x|R_2 = y\right].$$

Entonces, si tomamos diversos valore para y:

$y = 0$*:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 0\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = x|R_2 = 0\right] &= 0, \text{ para cualquier } x \geq 1,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = 0\right] = 0.$$

Para $y = 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 1\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 1\right] &= 1,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = 1\right] = 1.$$

Para $y = 2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 2\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 2\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 2\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 3|R_2 = 2\right] &= 0,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = 2\right] = 3.$$

Para $y = 3$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 3\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 3\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 3\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 3|R_2 = 3\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 4|R_2 = 3\right] &= 0,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = 3\right] = 6.$$

En general, para $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = k\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = j|R_2 = k\right] &= 1, \text{ para } 1 \leq j \leq k,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = j|R_2 = k\right] &= 0, \text{ para } j > k,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = k\right] = \frac{k\left(k+1\right)}{2}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[R_1\right] &= \sum_y \mathbb{E}\left[R_1|R_2 = y\right]\mathbb{P}\left[R_2 = y\right]\\ &= \sum_y \mathbb{P}\left[R_2 = y\right]\frac{y\left(y+1\right)}{2} = \sum_{y\geq 1}\left(\frac{y\left(y+1\right)}{2}\right)\frac{\left(\lambda t\right)^y}{y!}e^{-\lambda t}\\ &= \frac{\lambda t}{2}e^{-\lambda t}\sum_{y\geq 1}\left(y+1\right)\frac{\left(\lambda t\right)^{y-1}}{\left(y-1\right)!} = \frac{\lambda t}{2}e^{-\lambda t}\left(e^{\lambda t}\left(\lambda t+2\right)\right)\\ &= \frac{\lambda t\left(\lambda t+2\right)}{2},\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{E}\left[R_1\right] = \frac{\lambda t\left(\lambda t + 2\right)}{2}. \tag{33.48.9}$$

Además para $k \in Z^+$ fijo

$$\begin{aligned}
f_{R_1}(k) &= \mathbb{P}\left[R_1 = k\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = n\right] \mathbb{P}\left[R_2 = n\right] \\
&= \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = 0\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 1\right] \\
&+ \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = 2\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 2\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = j\right] \mathbb{P}\left[R_2 = j\right] + \cdots +
\end{aligned}$$

donde para

$k = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = 0\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 0 | R_2 = 0\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 0 | R_2 = 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 1\right] \\
+\mathbb{P}\left[R_1 = 0 | R_2 = j\right] \mathbb{P}\left[R_2 = j\right] = \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right].
\end{aligned}$$

$k = 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = 1\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 1 | R_2 = 0\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 1 | R_2 = 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 1\right] \\
+\mathbb{P}\left[R_1 = 1 | R_2 = 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 1\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = 1 | R_2 = j\right] \mathbb{P}\left[R_2 = j\right] \\
= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[R_2 = n\right].
\end{aligned}$$

$k = 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = 2\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 2 | R_2 = 0\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 2 | R_2 = 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 1\right] \\
+\mathbb{P}\left[R_1 = 2 | R_2 = 2\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 2\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = 2 | R_2 = j\right] \mathbb{P}\left[R_2 = j\right] \\
= \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}\left[R_2 = n\right].
\end{aligned}$$

En general

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = k\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = 0\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 1\right] \\
+\mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = 2\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 2\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = k\right] \mathbb{P}\left[R_2 = k\right] \\
= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}\left[R_2 = n\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f_{R_1}(k) = \mathbb{P}\left[R_1 = k\right] = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}\left[R_2 = n\right].$$

Objetivos Principales

- *Encontrar las ecuaciones que modelan el comportamiento de una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC) con propiedades similares.*
- *Encontrar expresiones analíticas para las longitudes de las colas al momento en que el servidor llega a una de ellas para comenzar a dar servicio, así como de sus segundos momentos.*
- *Determinar las principales medidas de Desempeño para la RSVC tales como: Número de usuarios presentes en cada una de las colas del sistema cuando uno de los servidores está presente atendiendo, Tiempos que transcurre entre las visitas del servidor a la misma cola.*

33.49. Descripción de una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas

Consideremos una red de sistema de visitas cíclicas conformada por dos sistemas de visitas cíclicas, cada una con dos colas independientes, donde además se permite el intercambio de usuarios entre los dos sistemas en la segunda cola de cada uno de ellos.

Supuestos sobe la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas

- *Los arribos de los usuarios ocurren conforme a un proceso Poisson con tasa de llegada μ_1 y μ_2 para el sistema 1, mientras que para el sistema 2, lo hacen conforme a un proceso Poisson con tasa $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ respectivamente.*
- *Se considerarán intervalos de tiempo de la forma $[t, t+1]$. Los usuarios arriban por paquetes de manera independiente del resto de las colas. Se define el grupo de usuarios que llegan a cada una de las colas del sistema 1, caracterizadas por Q_1 y Q_2 respectivamente, en el intervalo de tiempo $[t, t+1]$ por $X_1(t), X_2(t)$.*
- *Se definen los procesos $\hat{X}_1(t), \hat{X}_2(t)$ para las colas del sistema 2, denotadas por $\hat{Q}_1$ y $\hat{Q}_2$ respectivamente. Donde además se supone que $\mu_i < 1$ y $\hat{\mu} < 1$ para $i = 1, 2$.*
- *Se define el proceso $Y_2(t)$ para el número de usuarios que se trasladan del sistema 2 al sistema 1, de la cola $\hat{Q}_2$ a la cola Q_2, en el intervalo de tiempo $[t, t+1]$. El traslado de un sistema a otro ocurre de manera que los tiempos entre llegadas de los usuarios a la cola dos del sistema 1 provenientes del sistema 2, se distribuye de manera general con parámetro $\check{\mu}_2$, con $\check{\mu}_2 < 1$.*
- *En lo que respecta al servidor, en términos de los tiempos de visita a cada una de las colas, se definen las variables aleatorias τ_i, para Q_i, para $i = 1, 2$, respectivamente; y ζ_i para $\hat{Q}_i$, $i = 1, 2$, del sistema 2 respectivamente. A los tiempos en que el servidor termina de atender en las colas $Q_i, \hat{Q}_i$,se les denotará por $\overline{\tau}_i, \overline{\zeta}_i$ para $i = 1, 2$, respectivamente.*
- *Los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por $\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i$ y $\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i$, $i = 1, 2$, para el sistema 1 y el sistema 2, respectivamente.*

El uso de la Función Generadora de Probabilidades (FGP's) nos permite determinar las Funciones de Distribución de Probabilidades Conjunta de manera indirecta sin necesidad de hacer uso de las propiedades de las distribuciones de probabilidad de cada uno de los procesos que intervienen en la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas.

Cada uno de estos procesos con su respectiva FGP. Además, para cada una de las colas en cada sistema, el número de usuarios al tiempo en que llega el servidor a dar servicio está dado por el número de usuarios presentes en la cola al tiempo t, más el número de usuarios que llegan a la cola en el intervalo de tiempo $[\tau_i, \overline{\tau}_i]$.
Una vez definidas las Funciones Generadoras de Probabilidades Conjuntas se construyen las ecuaciones recursivas que permiten obtener la información sobre la longitud de cada una de las colas, al momento en que uno de los servidores llega a una de las colas para dar servicio, basándose en la información que se tiene sobre su llegada a la cola inmediata anterior.

33.49.1. Funciones Generadoras de Probabilidades

Para cada uno de los procesos de llegada a las colas $X_i, \hat{X}_i$, $i = 1, 2$, y Y_2, con $\tilde{X}_2 = X_2 + Y_2$ anteriores se define su Función Generadora de Probabilidades (FGP): $P_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_i^{X_i(t)}\right], \hat{P}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\hat{X}_i(t)}\right]$, para $i = 1, 2$, y $\check{P}_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{Y_2(t)}\right], \tilde{P}_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{\tilde{X}_2(t)}\right]$, con primer momento definidos por $\mu_i = \mathbb{E}[X_i(t)] = P_i^{(1)}(1), \hat{\mu}_i = \mathbb{E}\left[\hat{X}_i(t)\right] = \hat{P}_i^{(1)}(1)$, para $i = 1, 2$, y $\check{\mu}_2 = \mathbb{E}[Y_2(t)] = \check{P}_2^{(1)}(1), \tilde{\mu}_2 = \mathbb{E}\left[\tilde{X}_2(t)\right] = \tilde{P}_2^{(1)}(1)$.
En lo que respecta al servidor, en términos de los tiempos de visita a cada una de las colas, se denotarán por $B_i(t)$ a los procesos correspondientes a las variables aleatorias τ_i para Q_i, respectivamente; y $\hat{B}_i(t)$ con parámetros ζ_i para $\hat{Q}_i$, del sistema 2 respectivamente. Y a los tiempos en que el servidor termina de atender en las colas $Q_i, \hat{Q}_i$, se les denotará por $\overline{\tau}_i, \overline{\zeta}_i$ respectivamente. Entonces, los tiempos de servicio están dados por las diferencias $\overline{\tau}_i - \tau_i$ para Q_i, y $\overline{\zeta}_i - \zeta_i$ para $\hat{Q}_i$ respectivamente, para $i = 1, 2$.

Sus procesos se definen por: $S_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_i^{\overline{\tau}_i - \tau_i}\right]$ y $\hat{S}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\overline{\zeta}_i - \zeta_i}\right]$, con primer momento dado por: $s_i = \mathbb{E}[\overline{\tau}_i - \tau_i]$ y $\hat{s}_i = \mathbb{E}\left[\overline{\zeta}_i - \zeta_i\right]$, para $i = 1, 2$. Análogamente los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por $\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i$ y $\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i$ para el sistema 1 y el sistema 2, respectivamente, con $i = 1, 2$.

La FGP para estos tiempos de traslado están dados por $R_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_1^{\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i}\right]$ y $\hat{R}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i}\right]$ y al igual que como se hizo con anterioridad, se tienen los primeros momentos de estos procesos de traslado del servidor entre las colas de cada uno de los sistemas que conforman la red de sistemas de visitas cíclicas: $r_i = R_i^{(1)}(1) = \mathbb{E}[\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i]$ y $\hat{r}_i = \hat{R}_i^{(1)}(1) = \mathbb{E}\left[\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i\right]$ para $i = 1, 2$.

Se definen los procesos de conteo para el número de usuarios en cada una de las colas al tiempo t, $L_i(t)$, para $H_i(t)$ del sistema 1, mientras que para el segundo sistema, se tienen los procesos $\hat{L}_i(t)$ para $\hat{H}_i(t)$, es decir, $H_i(t) = \mathbb{E}\left[z_i^{L_i(t)}\right]$ y $\hat{H}_i(t) = \mathbb{E}\left[w_i^{\hat{L}_i(t)}\right]$. Con lo dichohasta ahora, se tiene que el número de usuarios presentes en los tiempos $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$, es cero, es decir, $L_i(\overline{\tau_i}) = 0$, y $\hat{L}_i\left(\overline{\zeta_i}\right) = 0$ para i=1,2 para cada uno de los dos sistemas.

Para cada una de las colas en cada sistema, el número de usuarios al tiempo en que llega el servidor a dar servicio está dado por el número de usuarios presentes en la cola al tiempo $t = \tau_i, \zeta_i$, *más el número de usuarios que llegan a la cola en el intervalo de tiempo* $[\tau_i, \overline{\tau}_i]$, $\left[\zeta_i, \overline{\zeta}_i\right]$, *es decir* $\hat{L}_i(\overline{\tau}_j) = \hat{L}_i(\tau_j) + \hat{X}_i(\overline{\tau}_j - \tau_j)$, *para* $i, j = 1, 2$, *mientras que para el primer sistema:* $L_1(\overline{\tau}_j) = L_1(\tau_j) + X_1(\overline{\tau}_j - \tau_j)$. *En el caso específico de* Q_2, *además, hay que considerar el número de usuarios que pasan del sistema 2 al sistema 1, a traves de* $\hat{Q}_2$ *mientras el servidor en* Q_2 *está ausente, es decir:*

$$L_2(\overline{\tau}_1) = L_2(\tau_1) + X_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1) + Y_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1). \tag{33.49.1}$$

33.49.2. El problema de la ruina del jugador

Supongamos que se tiene un jugador que cuenta con un capital inicial de $\tilde{L}_0 \geq 0$ *unidades, esta persona realiza una serie de dos juegos simultáneos e independientes de manera sucesiva, dichos eventos son independientes e idénticos entre sí para cada realización. La ganancia en el n-ésimo juego es* $\tilde{X}_n = X_n + Y_n$ *unidades de las cuales se resta una cuota de 1 unidad por cada juego simultáneo, es decir, se restan dos unidades por cada juego realizado. En términos de la teoría de colas puede pensarse como el número de usuarios que llegan a una cola vía dos procesos de arribo distintos e independientes entre sí. Su Función Generadora de Probabilidades (FGP) está dada por* $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{L}_0}\right]$, *además*

$$\tilde{P}(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{X}_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n+Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n} z^{Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right]\mathbb{E}\left[z^{Y_n}\right] = P(z)\check{P}(z),$$

con $\tilde{\mu} = \mathbb{E}\left[\tilde{X}_n\right] = \tilde{P}[z] < 1$. *Sea* $\tilde{L}_n$ *el capital remanente después del n-ésimo juego. Entonces*

$$\tilde{L}_n = \tilde{L}_0 + \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \cdots + \tilde{X}_n - 2n.$$

La ruina del jugador ocurre después del n-ésimo juego, es decir, la cola se vacía después del n-ésimo juego, entonces sea T *definida como* $T = min\left\{\tilde{L}_n = 0\right\}$. *Si* $\tilde{L}_0 = 0$, *entonces claramente* $T = 0$. *En este sentido* T *puede interpretarse como la longitud del periodo de tiempo que el servidor ocupa para dar servicio en la cola, comenzando con* $\tilde{L}_0$ *grupos de usuarios presentes en la cola, quienes arribaron conforme a un proceso dado por* $\tilde{P}(z)$.

Sea $g_{n,k}$ *la probabilidad del evento de que el jugador no caiga en ruina antes del n-ésimo juego, y que además tenga un capital de k unidades antes del n-ésimo juego, es decir,*
Dada $n \in \{1, 2, \ldots,\}$ *y* $k \in \{0, 1, 2, \ldots,\}$

$$g_{n,k} := P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1, \ldots, n, \tilde{L}_n = k\right\}$$

la cual además se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
g_{n,k} &= P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1, \ldots, n, \tilde{L}_n = k\right\} = \sum_{j=1}^{k+1} g_{n-1,j} P\left\{\tilde{X}_n = k - j + 1\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1\right\} = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1, Y_n = l\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1 | Y_n = l\right\} P\left\{Y_n = l\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n = k - j - l + 1\right\} P\left\{Y_n = l\right\}
\end{aligned}$$

es decir

$$g_{n,k} = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n = k - j - l + 1\right\} P\left\{Y_n = l\right\} \tag{33.49.2}$$

además

$$g_{0,k} = P\left\{\tilde{L}_0 = k\right\}. \tag{33.49.3}$$

Se definen las siguientes FGP:

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k} z^k, \text{ para } n = 0, 1, \ldots, \tag{33.49.4}$$

$$G\left(z,w\right)=\sum_{n=0}^{\infty}G_{n}\left(z\right)w^{n}. \tag{33.49.5}$$

En particular para $k=0$,

$$g_{n,0}=G_{n}\left(0\right)=P\left\{\tilde{L}_{j}>0,\text{ para } j<n,\text{ y } \tilde{L}_{n}=0\right\}=P\left\{T=n\right\},$$

además

$$G\left(0,w\right)=\sum_{n=0}^{\infty}G_{n}\left(0\right)w^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}P\left\{T=n\right\}w^{n}=\mathbb{E}\left[w^{T}\right]$$

la cuál resulta ser la FGP del tiempo de ruina T.

Proposición 33.53 *Sean $G_{n}\left(z\right)$ y $G\left(z,w\right)$ definidas como en (33.80.4) y (33.80.5) respectivamente, entonces*

$$G_{n}\left(z\right)=\frac{1}{z}\left[G_{n-1}\left(z\right)-G_{n-1}\left(0\right)\right]\tilde{P}\left(z\right). \tag{33.49.6}$$

Además

$$G\left(z,w\right)=\frac{zF\left(z\right)-wP\left(z\right)G\left(0,w\right)}{z-wR\left(z\right)}, \tag{33.49.7}$$

con un único polo en el círculo unitario, además, el polo es de la forma $z=\theta\left(w\right)$ y satisface que

i) $\tilde{\theta}\left(1\right)=1$,

ii) $\tilde{\theta}^{(1)}\left(1\right)=\frac{1}{1-\tilde{\mu}}$,

iii) $\tilde{\theta}^{(2)}\left(1\right)=\frac{\tilde{\mu}}{\left(1-\tilde{\mu}\right)^{2}}+\frac{\tilde{\sigma}}{\left(1-\tilde{\mu}\right)^{3}}$.

Finalmente, además se cumple que

$$\mathbb{E}\left[w^{T}\right]=G\left(0,w\right)=F\left[\tilde{\theta}\left(w\right)\right]. \tag{33.49.8}$$

Multiplicando las ecuaciones (33.80.2) y (33.80.3) por el término z^{k}:

$$\begin{aligned}
g_{n,k}z^{k} &= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j}g_{n-1,j}P\left\{X_{n}=k-j-l+1\right\}P\left\{Y_{n}=l\right\}z^{k},\\
g_{0,k}z^{k} &= P\left\{\tilde{L}_{0}=k\right\}z^{k},
\end{aligned}$$

ahora sumamos sobre k

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}g_{n,k}z^{k} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j}g_{n-1,j}P\left\{X_{n}=k-j-l+1\right\}P\left\{Y_{n}=l\right\}z^{k}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}z^{k}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j}g_{n-1,j}P\left\{X_{n}=k-\left(j+l-1\right)\right\}P\left\{Y_{n}=l\right\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}z^{k+\left(j+l-1\right)-\left(j+l-1\right)}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j}g_{n-1,j}P\left\{X_{n}=k-\left(j+l-1\right)\right\}P\left\{Y_{n}=l\right\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j}g_{n-1,j}z^{j-1}P\left\{X_{n}=k-\left(j+l-1\right)\right\}z^{k-\left(j+l-1\right)}P\left\{Y_{n}=l\right\}z^{l}\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j}g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{k=j+l-1}^{\infty}P\left\{X_{n}=k-\left(j+l-1\right)\right\}z^{k-\left(j+l-1\right)}P\left\{Y_{n}=l\right\}z^{l}\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{l=1}^{j}\sum_{k=j+l-1}^{\infty}P\left\{X_{n}=k-\left(j+l-1\right)\right\}z^{k-\left(j+l-1\right)}P\left\{Y_{n}=l\right\}z^{l}\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j}P\left\{X_{n}=k-\left(j+l-1\right)\right\}z^{k-\left(j+l-1\right)}P\left\{Y_{n}=l\right\}z^{l}
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j} z^{j-1} \sum_{k=j+l-1}^{\infty} \sum_{l=1}^{j} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)} \sum_{l=1}^{j} P\left\{Y_n = l\right\} z^{l}\\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j} z^{j-1} \sum_{l=1}^{\infty} P\left\{Y_n = l\right\} z^{l} \sum_{k=j+l-1}^{\infty} \sum_{l=1}^{j} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)}\\
&= \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right] \tilde{P}(z) \sum_{k=j+l-1}^{\infty} \sum_{l=1}^{j} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)}\\
&= \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right] \tilde{P}(z) P(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right] \tilde{P}(z),
\end{aligned}$$

es decir la ecuación (33.80.4) se puede reescribir como

$$G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right] \tilde{P}(z). \tag{33.49.9}$$

Por otra parte recordemos la ecuación (33.80.4)

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k} z^{k}, \text{ entonces } \frac{G_n(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} g_{n,k} z^{k-1},$$

Por lo tanto utilizando la ecuación (33.80.9):

$$\begin{aligned}
G(z,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z) w^n = G_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(z) w^n = F(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[G_n(z) - G_n(0)\right] w^n \frac{\tilde{P}(z)}{z}\\
&= F(z) + \frac{w}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left[G_n(z) - G_n(0)\right] w^{n-1} \tilde{P}(z)
\end{aligned}$$

es decir

$$G(z,w) = F(z) + \frac{w}{z}\left[G(z,w) - G(0,w)\right] \tilde{P}(z),$$

entonces

$$\begin{aligned}
G(z,w) = F(z) + \frac{w}{z}\left[G(z,w) - G(0,w)\right] \tilde{P}(z) &= F(z) + \frac{w}{z}\tilde{P}(z) G(z,w) - \frac{w}{z}\tilde{P}(z) G(0,w)\\
&\Leftrightarrow\\
G(z,w)\left\{1 - \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\right\} &= F(z) - \frac{w}{z}\tilde{P}(z) G(0,w),
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$G(z,w) = \frac{zF(z) - w\tilde{P}(z) G(0,w)}{1 - w\tilde{P}(z)}. \tag{33.49.10}$$

Ahora $G(z,w)$ *es analítica en* $|z| = 1$. *Sean* z, w *tales que* $|z| = 1$ *y* $|w| \leq 1$, *como* $\tilde{P}(z)$ *es FGP*

$$|z - \left(z - w\tilde{P}(z)\right)| < |z| \Leftrightarrow |w\tilde{P}(z)| < |z|$$

es decir, se cumplen las condiciones del Teorema de Rouché y por tanto, z *y* $z - w\tilde{P}(z)$ *tienen el mismo número de ceros en* $|z| = 1$. *Sea* $z = \tilde{\theta}(w)$ *la solución única de* $z - w\tilde{P}(z)$, *es decir*

$$\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) = 0, \tag{33.49.11}$$

con $|\tilde{\theta}(w)| < 1$. *Cabe hacer mención que* $\tilde{\theta}(w)$ *es la FGP para el tiempo de ruina cuando* $\tilde{L}_0 = 1$. *Considerando la ecuación (33.80.11)*

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)|_{w=1} - \frac{\partial}{\partial w}\left\{w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}|_{w=1} = \tilde{\theta}^{(1)}(w)|_{w=1} - \frac{\partial}{\partial w} w\left\{\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}|_{w=1}\\
&- w\frac{\partial}{\partial w}\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)|_{w=1} = \tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) - w\left\{\frac{\partial \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial\tilde{\theta}(w)} \cdot \frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}|_{w=1}\right\}\\
&\tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right) \cdot \tilde{\theta}^{(1)}(1),
\end{aligned}$$

luego

$$\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right)=\tilde{\theta}^{(1)}(1)-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\cdot\tilde{\theta}^{(1)}(1)=\tilde{\theta}^{(1)}(1)\left(1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\right),$$

por tanto

$$\tilde{\theta}^{(1)}(1)=\frac{\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{\left(1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\right)}=\frac{1}{1-\tilde{\mu}}.$$

Ahora determinemos el segundo momento de $\tilde{\theta}(w)$, nuevamente consideremos la ecuación (33.80.11):

$$0 = \tilde{\theta}(w)-w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\Rightarrow 0=\frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}(w)-w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}\Rightarrow 0=\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}(w)-w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}\right\}$$

luego

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)-\frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\}=\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)-\frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\}\\
=&\ \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}-\left[\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+w\frac{\partial}{\partial w}R\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\}=\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}-\left[\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+w\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial w}\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}\right]\right\}\\
=&\ \frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right\}\\
=&\ \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\frac{\partial}{\partial w}\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)-\frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right]\\
=&\ \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial\tilde{\theta}(w)}\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)-w\frac{\partial\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w)-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\frac{\partial\tilde{\theta}^{(1)}(w)}{\partial w}\\
=&\ \tilde{\theta}^{(2)}(w)-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)-w\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\left(\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right)^2-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(2)}(w)\\
=&\ \tilde{\theta}^{(2)}(w)-2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)-w\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\left(\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right)^2-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(2)}(w)\\
=&\ \tilde{\theta}^{(2)}(w)\left[1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]-\tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(2)}(w)\left[1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right] &- \tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]=0\\
\tilde{\theta}^{(2)}(w) &= \frac{\tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2R^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}\\
\tilde{\theta}^{(2)}(w) &= \frac{\tilde{\theta}^{(1)}(w)\,w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}+\frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}
\end{aligned}$$

si evaluamos la expresión anterior en $w=1$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(2)}(1) &= \frac{\left(\tilde{\theta}^{(1)}(1)\right)^2\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}+\frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(1)\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}=\frac{\left(\tilde{\theta}^{(1)}(1)\right)^2\tilde{P}^{(2)}(1)}{1-\tilde{P}^{(1)}(1)}+\frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(1)\tilde{P}^{(1)}(1)}{1-\tilde{P}^{(1)}(1)}\\
&= \frac{\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}}\right)^2\tilde{P}^{(2)}(1)}{1-\tilde{\mu}}+\frac{2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}}\right)\tilde{\mu}}{1-\tilde{\mu}}=\frac{\tilde{P}^{(2)}(1)}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{2\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}=\frac{\sigma^2-\tilde{\mu}+\tilde{\mu}^2}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{2\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}\\
&= \frac{\sigma^2-\tilde{\mu}+\tilde{\mu}^2+2\tilde{\mu}(1-\tilde{\mu})}{(1-\tilde{\mu})^3}
\end{aligned}$$

es decir

$$\tilde{\theta}^{(2)}(1) = \frac{\sigma^2+\tilde{\mu}-\tilde{\mu}^2}{(1-\tilde{\mu})^3}=\frac{\sigma^2}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{\tilde{\mu}(1-\tilde{\mu})}{(1-\tilde{\mu})^3}=\frac{\sigma^2}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}.$$

Corolario 33.10 *El tiempo de ruina del jugador tiene primer y segundo momento dados por*

$$\mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{1-\tilde{\mu}} \qquad (33.49.12)$$

$$Var[T] = \frac{Var\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^3}. \qquad (33.49.13)$$

33.50. Procesos de Llegadas a las colas en la RSVC

Se definen los procesos de llegada de los usuarios a cada una de las colas dependiendo de la llegada del servidor pero del sistema al cuál no pertenece la cola en cuestión:
Para el sistema 1 y el servidor del segundo sistema

$$F_{i,j}\left(z_i;\zeta_j\right) = \mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\zeta_j)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[L_i\left(\zeta_j\right)=k\right]z_i^k,\ para\ i,j=1,2.$$

Ahora se definen para el segundo sistema y el servidor del primero

$$\hat{F}_{i,j}\left(w_i;\tau_j\right) = \mathbb{E}\left[w_i^{\hat{L}_i(\tau_j)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\hat{L}_i\left(\tau_j\right)=k\right]w_i^k,\ para\ i,j=1,2.$$

Ahora, con lo anterior definamos la FGP conjunta para el segundo sistema;

$$\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_j)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_j)}\right] = \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_j)}\right]\mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2(\tau_j)}\right] = \hat{F}_{1,j}\left(w_1;\tau_j\right)\hat{F}_{2,j}\left(w_2;\tau_j\right) = \hat{F}_j\left(w_1,w_2;\tau_j\right).$$

Con respecto al sistema 1 se tiene la FGP conjunta con respecto al servidor del otro sistema:

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_j)}z_2^{L_2(\zeta_j)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_j)}\right]\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\zeta_j)}\right] = F_{1,j}\left(z_1;\zeta_j\right)F_{2,j}\left(z_2;\zeta_j\right) = F_j\left(z_1,z_2;\zeta_j\right).$$

Ahora analicemos la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas, entonces se define la PGF conjunta al tiempo t para los tiempos de visita del servidor en cada una de las colas, para comenzar a dar servicio, definidos anteriormente al tiempo $t=\left\{\tau_1,\tau_2,\zeta_1,\zeta_2\right\}$*:*

$$F_j\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{2}z_i^{L_i(\tau_j)}\prod_{i=1}^{2}w_i^{\hat{L}_i(\tau_j)}\right] \tag{33.50.1}$$

$$\hat{F}_j\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{2}z_i^{L_i(\zeta_j)}\prod_{i=1}^{2}w_i^{\hat{L}_i(\zeta_j)}\right] \tag{33.50.2}$$

para $j=1,2$. *Entonces, con la finalidad de encontrar el número de usuarios presentes en el sistema cuando el servidor deja de atender una de las colas de cualquier sistema se tiene lo siguiente*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right] = \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]\\
=\ &\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)+X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)+Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)+\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)+\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]
\end{aligned}$$

utilizando la ecuacion dada (34.4.1), luego

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right\}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]
\end{aligned}$$

Aplicando el hecho de que el número de usuarios que llegan a cada una de las colas del segundo sistema es independiente de las llegadas a las colas del primer sistema:

$$= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]$$

dado que los arribos a cada una de las colas son independientes, podemos separar la esperanza para los procesos de llegada a Q_1 *y* Q_2 *al tiempo* τ_1*, que es el tiempo en que el servidor visita a* Q_1*. Recordando que* $\tilde{X}_2\left(z_2\right)=X_2\left(z_2\right)+Y_2\left(z_2\right)$ *se tiene*

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{\tilde{P}_2\left(z_2\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\hat{P}_1\left(w_1\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\hat{P}_2\left(w_2\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right\}^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)^{L_1(\tau_1)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z2\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2;\tau_1\right)\\
&\equiv F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2,w_1,w_2\right)
\end{aligned}$$

Las igualdades anteriores son ciertas pues el número de usuarios que llegan a $\hat{Q}_2$ durante el intervalo $[\tau_1, \overline{\tau}_1]$ aún no han sido atendidos por el servidor del sistema 2 y por tanto aún no pueden pasar al sistema 1 a traves de Q_2. Por tanto el número de usuarios que pasan de $\hat{Q}_2$ a Q_2 en el intervalo de tiempo $[\tau_1, \overline{\tau}_1]$ depende de la política de traslado entre los dos sistemas, conforme a la sección anterior.

Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right] = F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right) \quad (33.50.3)$$
$$= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z2\right)\hat{F}_1(w_1, w_2; \tau_1) \quad (33.50.4)$$

Utilizando un razonamiento análogo para $\overline{\tau}_2$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right] \\
= &\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)+X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)} w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)+\hat{X}_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)+\hat{X}_2(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right] \\
= &\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)} z_1^{X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)} w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)} w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)} w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right] \\
= &\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)} z_1^{X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)} w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)} w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right] \\
= &\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)} P_1(z_1)^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\hat{P}_1(w_1)^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\hat{P}_2(w_2)^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]
\end{aligned}$$

utlizando la proposición relacionada con la ruina del jugador

$$\begin{aligned}
= &\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}\left\{P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right\}^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right] \\
= &\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)^{L_2(\tau_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)} w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right] \\
= &\ F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1, w_2; \tau_2)
\end{aligned}$$

entonces se define

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right] = F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), w_1, w_2\right) \quad (33.50.5)$$
$$\equiv F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1, w_2; \tau_2) \quad (33.50.6)$$

Ahora para $\overline{\zeta}_1$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)} z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)} z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right] \\
= &\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)} z_1^{X_1(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)} z_2^{L_2(\zeta_1)} z_2^{X_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)} z_2^{Y_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)} w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)} w_2^{\hat{X}_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}\right] \\
= &\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)} z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[z_1^{X_1(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)} z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)} w_2^{\hat{X}_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)} w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right] \\
= &\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)} z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[P_1(z_1)^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1}\tilde{P}_2(z_2)^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1}\hat{P}_2(w_2)^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1} w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right] \\
= &\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)} z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[\left\{P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right\}^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1} w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right] \\
= &\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)} z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right)^{\hat{L}_1(\zeta_1)} w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right] \\
= &\ F_1(z_1, z_2; \zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right)
\end{aligned}$$

es decir

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)} z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right] = \hat{F}_1\left(z_1, z_2, \hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right) \quad (33.50.7)$$
$$= F_1(z_1, z_2; \zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right) \quad (33.50.8)$$

Finalmente para $\overline{\zeta}_2$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right]=\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}\right]\\
=&\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_1^{X_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}z_2^{X_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}z_2^{Y_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}\right]\\
=&\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[z_1^{X_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\right]\\
=&\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[P_1(z_1)^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}\tilde{P}_2(z_2)^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}\hat{P}(w_1)^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\right]\\
=&\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\left\{P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}(w_1)\right\}^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}\right]\\
=&\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}(w_1)\right)^{\hat{L}_2\zeta_2}\right]\\
=&\ F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right]
\end{aligned}$$

es decir

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right]=\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right) \tag{33.50.9}$$

$$=F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right) \tag{33.50.10}$$

33.51. Ecuaciones Recursivas para la R.S.V.C.

Con lo desarrollado hasta ahora podemos encontrar las ecuaciones recursivas que modelan la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (R.S.V.C):

$$\begin{aligned}
F_2(z_1,z_2,w_1,w_2)&=R_1(z_1,z_2,w_1,w_2)\,\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]\\
F_1(z_1,z_2,w_1,w_2)&=R_2(z_1,z_2,w_1,w_2)\,\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]\\
\hat{F}_2(z_1,z_2,w_1,w_2)&=\hat{R}_1(z_1,z_2,w_1,w_2)\,\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right]\\
\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1,w_2)&=\hat{R}_2(z_1,z_2,w_1,w_2)\,\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right]
\end{aligned}$$

que son equivalentes a las siguientes ecuaciones

$$F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2,w_1,w_2\right) \tag{33.51.1}$$

$$F_1(z_1,z_2,w_1,w_2) = R_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),w_1,w_2\right) \tag{33.51.2}$$

$$\hat{F}_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = \hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right) \tag{33.51.3}$$

$$\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1,w_2) = \hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right) \tag{33.51.4}$$

33.51.1. Tiempos de Traslado del Servidor

Para

$$R_1(\mathbf{z},\mathbf{w})=R_1\left((P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.51.5}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial R_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}=R_1^{(1)}(1)\,P_1^{(1)}(1)=r_1\mu_1, \quad \frac{\partial R_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}=R_1^{(1)}(1)\,\tilde{P}_2^{(1)}(1)=r_1\tilde{\mu}_2,\\
&\frac{\partial R_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}=R_1^{(1)}(1)\,\hat{P}_1^{(1)}(1)=r_1\hat{\mu}_1, \quad \frac{\partial R_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}=R_1^{(1)}(1)\,\hat{P}_2^{(1)}(1)=r_1\hat{\mu}_2,
\end{aligned}$$

Análogamente se tiene

$$R_2(\mathbf{z},\mathbf{w}) = R_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.51.6}$$

$\frac{\partial R_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = R_2^{(1)}(1)P_1^{(1)}(1) = r_2\mu_1, \quad \frac{\partial R_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = R_2^{(1)}(1)\tilde{P}_2^{(1)}(1) = r_2\tilde{\mu}_2,$
$\frac{\partial R_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = R_2^{(1)}(1)\hat{P}_1^{(1)}(1) = r_2\hat{\mu}_1, \quad \frac{\partial R_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = R_2^{(1)}(1)\hat{P}_2^{(1)}(1) = r_2\hat{\mu}_2,$

Para el segundo sistema:

$$\hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w}) = \hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.51.7}$$

$$\frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_1^{(1)}(1)P_1^{(1)}(1) = \hat{r}_1\mu_1, \quad \frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_1^{(1)}(1)\tilde{P}_2^{(1)}(1) = \hat{r}_1\tilde{\mu}_2,$$
$$\frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_1^{(1)}(1)\hat{P}_1^{(1)}(1) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1, \quad \frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_1^{(1)}(1)\hat{P}_2^{(1)}(1) = \hat{r}_1\hat{\mu}_2,$$

Finalmente

$$\hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w}) = \hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.51.8}$$

$$\frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_2^{(1)}(1)P_1^{(1)}(1) = \hat{r}_2\mu_1, \quad \frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_2^{(1)}(1)\tilde{P}_2^{(1)}(1) = \hat{r}_2\tilde{\mu}_2,$$
$$\frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_2^{(1)}(1)\hat{P}_1^{(1)}(1) = \hat{r}_2\hat{\mu}_1, \quad \frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_2^{(1)}(1)\hat{P}_2^{(1)}(1) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2.$$

33.51.2. Usuarios presentes en la cola

Hagamos lo correspondiente con las siguientes expresiones obtenidas en la sección anterior: Recordemos que

$$F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right) = F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2\right)\hat{F}_1(w_1, w_2; \tau_1)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial \theta_1}{\partial \tilde{P}_2}\cdot\frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial z_2} + \frac{\partial F_1}{\partial z_2}\\
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial \theta_1}{\partial \hat{P}_1}\cdot\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial w_1} + \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_1}\\
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial \theta_1}{\partial \hat{P}_2}\cdot\frac{\partial \hat{P}_2}{\partial w_2} + \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_2}
\end{aligned}$$

para τ_2*:*

$$F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), w_1, w_2\right) = F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1, w_2; \tau_2)$$

al igual que antes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), w_1, w_2\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z_2} + \frac{\partial F_2}{\partial z_1}\\
\frac{\partial F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), w_1, w_2\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\
\frac{\partial F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), w_1, w_2\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial \hat{P}_1}\cdot\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial w_1} + \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial w_1}\\
\frac{\partial F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), w_1, w_2\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial \hat{P}_2}\cdot\frac{\partial \hat{P}_2}{\partial w_2} + \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial w_2}
\end{aligned}$$

Ahora para el segundo sistema

$$\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)=F_1\left(z_1,z_2;\zeta_1\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_1}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_1}{\partial P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z_1}+\frac{\partial F_1}{\partial z_1}\\
\frac{\partial\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_1}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_1}{\partial\tilde{P}_2}\cdot\frac{\partial\tilde{P}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial F_1}{\partial z_2}\\
\frac{\partial\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\
\frac{\partial\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_1}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_1}{\partial\hat{P}_2}\cdot\frac{\partial\hat{P}_2}{\partial w_2}+\frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_2}
\end{aligned}$$

Finalmente para ζ_2

$$\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right) = F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right]$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_2}{\partial P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z_1}+\frac{\partial F_2}{\partial z_1}\\
\frac{\partial\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_2}{\partial\tilde{P}_2}\cdot\frac{\partial\tilde{P}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial F_2}{\partial z_2}\\
\frac{\partial\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_2}{\partial\hat{P}_1}\cdot\frac{\partial\hat{P}_1}{\partial w_1}+\frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_1}\\
\frac{\partial\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0
\end{aligned}$$

33.51.3. Ecuaciones Recursivas

Entonces, de todo lo desarrollado hasta ahora se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_1\mu_1\\
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= = r_1\tilde{\mu}_2+f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2+f_1(2)\\
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_1\hat{\mu}_1+f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_1+\hat{F}^{(1)}_{1,1}(1)\\
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_1\hat{\mu}_2+f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_2+\hat{F}^{(1)}_{2,1}(1)\\
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_2\mu_1+f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\mu_1+f_2(1)\\
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_2\tilde{\mu}_2\\
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_2\hat{\mu}_1+f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1+\hat{F}^{(1)}_{2,1}(1)\\
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_2\hat{\mu}_2+f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_2+\hat{F}^{(1)}_{2,2}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_1\mu_1+\hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1+F^{(1)}_{1,1}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_1\mu_2+\hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2+F^{(1)}_{2,1}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_1\hat{\mu}_2+\hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2+\hat{f}_1(2)\\
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_2\mu_1+\hat{f}_2(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1+F^{(1)}_{1,2}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2+\hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2+F^{(1)}_{2,2}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_2\hat{\mu}_1+\hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1+\hat{f}_2(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_2\hat{\mu}_2
\end{aligned}$$

Es decir, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
f_2(1) &= r_1\mu_1\\
f_1(2) &= r_2\tilde{\mu}_2\\
f_2(2) &= r_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\left(\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+f_1(2)=\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2+r_2\tilde{\mu}_2\\
&= \left(r_1+r_2+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2=\left(r+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2\\
f_2(3) &= r_1\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\left(\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\hat{F}^{(1)}_{1,1}(1)=\hat{\mu}_1\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}\\
f_2(4) &= r_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\hat{F}^{(1)}_{2,1}(1)=\hat{\mu}_2\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_1}\\
f_1(1) &= r_2\mu_1+\mu_1\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+r_1\mu_1=\mu_1\left(r_1+r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\\
&= \mu_1\left(r+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\\
f_1(3) &= r_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\hat{F}^{(1)}_{1,2}(1)=\hat{\mu}_1\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}\\
f_1(4) &= r_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\hat{F}^{(1)}_{2,2}(1)=\hat{\mu}_2\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2}\\
\hat{f}_1(4) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_2\\
\hat{f}_2(3) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
\hat{f}_1(1) &= \hat{r}_2\mu_1+\mu_1\left(\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)+F^{(1)}_{1,2}(1)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2}\\
\hat{f}_1(2) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)+F^{(1)}_{2,2}(1)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}\\
\hat{f}_1(3) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\left(\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)+\hat{f}_2(3)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
&= \left(\hat{r}_1+\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1=\left(\hat{r}+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1\\
\hat{f}_2(1) &= \hat{r}_1\mu_1+\mu_1\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)+F^{(1)}_{1,1}(1)=\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1}\\
\hat{f}_2(2) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)+F^{(1)}_{2,1}(1)=\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1}\\
\hat{f}_2(4) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)+\hat{f}_1(4)=\hat{r}_1\hat{\mu}_2+\hat{r}_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\\
&= \left(\hat{r}+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
\begin{array}{lll}
f_1(1)=\mu_1\left(r+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) & f_1(2)=r_2\tilde{\mu}_2 & f_1(3)=\hat{\mu}_1\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}\\
f_1(4)=\hat{\mu}_2\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2} & f_2(1)=r_1\mu_1 & f_2(2)=\left(r+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2\\
f_2(3)=\hat{\mu}_1\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} & f_2(4)=\hat{\mu}_2\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_1} & \hat{f}_1(1)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2}\\
\hat{f}_1(2)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2} & \hat{f}_1(3)=\left(\hat{r}+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 & \hat{f}_1(4)=\hat{r}_2\hat{\mu}_2\\
\hat{f}_2(1)=\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1} & \hat{f}_2(2)=\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1} & \hat{f}_2(3)=\hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
 & \hat{f}_2(4)=\left(\hat{r}+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 &
\end{array}
$$

33.51.4. Solución del Sistema de Ecuaciones Lineales

A saber, se puede demostrar que la solución del sistema de ecuaciones está dado por las siguientes expresiones, donde

$$\mu=\mu_1+\tilde{\mu}_2\ ,\ \hat{\mu}=\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\ ,\ r=r_1+r_2\ \text{y}\ \hat{r}=\hat{r}_1+\hat{r}_2$$

entonces

$$\begin{array}{lll}
f_1(1) = r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu} & f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) & f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) \\
f_2(2) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu} & f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right) & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right) \\
\hat{f}_1(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) & \hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2} & \hat{f}_1(3) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}} \\
\hat{f}_2(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) & \hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1} & \hat{f}_2(4) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}
\end{array}$$

A saber

$$\begin{aligned}
f_1(3) &= \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2} = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2} = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}\\
&= \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu} + \frac{1}{\mu_2}\right) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1(4) &= \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2} = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2} = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}\\
&= \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu} + \frac{1}{\mu_2}\right) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(3) &= \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}\\
&= \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu} + \frac{1}{\mu_1}\right) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(4) &= \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\mu_1} = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}\\
&= \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu} + \frac{1}{\mu_1}\right) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1(1) &= \mu_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2} = \mu_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_2}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2} = \mu_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_1}{\mu_2}\\
&= \mu_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\mu_2}{1-\hat{\mu}} + \frac{1}{\hat{\mu}_2}\right) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2} + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right)
\end{aligned}$$

$$\hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2} = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_2}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2} = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}_2(1) &= \mu_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1} = \mu_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_1}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1} = \mu_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1}\\
&= \mu_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}} + \frac{1}{\hat{\mu}_1}\right) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1} + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right)
\end{aligned}$$

$$\hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\tilde{\mu}_1}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1} = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_1}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1} = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1}$$

33.52. Resultado Principal

Sean $\mu_1, \mu_2, \check{\mu}_2, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ y $\tilde{\mu}_2 = \mu_2 + \check{\mu}_2$ los valores esperados de los proceso definidos anteriormente, y sean $r_1, r_2, \hat{r}_1$ y $\hat{r}_2$ los valores esperado s de los tiempos de traslado del servidor entre las colas para cada uno de los sistemas de visitas cíclicas. Si se definen $\mu = \mu_1 + \tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2$, y $r = r_1 + r_2$ y $\hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$, entonces se tiene el siguiente resultado.

Teorema 33.70 *Supongamos que $\mu < 1$, $\hat{\mu} < 1$, entonces, el número de usuarios presentes en cada una de las colas que conforman la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas cuando uno de los servidores visita a alguna de ellas está dada por la solución del Sistema de Ecuaciones Lineales presentados arriba cuyas expresiones damos a continuación:*

$$
\begin{array}{lll}
f_1(1) = r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}, & f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2, & f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right), \\
f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right), & f_2(1) = r_1\mu_1, & f_2(2) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}, \\
f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right), & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right), & \hat{f}_1(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right), \\
\hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}, & \hat{f}_1(3) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}, & \hat{f}_1(4) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2, \\
\hat{f}_2(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right), & \hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_1}, & \hat{f}_2(3) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1, \\
 & \hat{f}_2(4) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}. &
\end{array}
$$

33.53. Segundos Momentos

Para poder determinar los segundos momentos para los tiempos de traslado del servidor es necesaria la siguiente proposición:

Proposición 33.54 *Sea $f(g(x)h(y))$ función continua tal que tiene derivadas parciales mixtas de segundo orden, entonces se tiene lo siguiente:*

$$\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) = \frac{\partial f(g(x)h(y))}{\partial x} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y)$$

por tanto

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) = \frac{\partial^2}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right)^2 \cdot h^2(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2} \cdot h(y) \quad (33.53.1)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) = \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial h(y)}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(g(x)h(y)) \cdot g(x) \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y))\right\}$$

Demostración 33.10

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial f(g(x)h(y))}{\partial x} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y)\right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y))\right\} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2} \cdot h(y) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2} \cdot h(y) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right)^2 \cdot h^2(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2} \cdot h(y).
\end{aligned}
$$

Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial f(g(x)h(y))}{\partial x} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y)\right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y))\right\} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial h(y)}{y} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial h(y)}{\partial y} \cdot g(x) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial h(y)}{\partial y} \\
&= \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial h(y)}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(g(x)h(y)) \cdot g(x) \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y))\right\}
\end{aligned}
$$

Utilizando la proposición anterior (Proposiciíon 33.91)se tiene el siguiente resultado que me dice como calcular los segundos momentos para los procesos de traslado del servidor:

Proposición 33.55 *Sea R_i la Función Generadora de Probabilidades para el número de arribos a cada una de las colas de la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas definidas como en (33.83.4). Entonces las derivadas parciales están dadas por las siguientes expresiones:*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial z_i^2} &= \left(\frac{\partial P_i\left(z_i\right)}{\partial z_i}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial^2 z_i} \\
&+ \left(\frac{\partial P_i\left(z_i\right)}{\partial z_i}\right)^2 \cdot \frac{\partial R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial z_i}
\end{aligned}
$$

y además

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial z_2 \partial z_1} &= \frac{\partial \tilde{P}_2\left(z_2\right)}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial P_1\left(z_1\right)}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial^2 R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial z_2 \partial z_1} \\
&+ \frac{\partial \tilde{P}_2\left(z_2\right)}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial P_1\left(z_1\right)}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial z_1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial w_i \partial z_1} &= \frac{\partial \hat{P}_i\left(w_i\right)}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial P_1\left(z_1\right)}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial^2 R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial w_i \partial z_1} \\
&+ \frac{\partial \hat{P}_i\left(w_i\right)}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial P_1\left(z_1\right)}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial z_1},
\end{aligned}
$$

finalmente

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial w_i \partial z_2} &= \frac{\partial \hat{P}_i\left(w_i\right)}{\partial w_i} \cdot \frac{\partial \tilde{P}_2\left(z_2\right)}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial^2 R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial w_i \partial z_2} \\
&+ \frac{\partial \hat{P}_i\left(w_i\right)}{\partial w_i} \cdot \frac{\partial \tilde{P}_2\left(z_2\right)}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial z_2},
\end{aligned}
$$

para $i = 1, 2$.

33.53.1. Sistema de Ecuaciones Lineales para los Segundos Momentos

En el apéndice (33.66) se demuestra que las ecuaciones para las ecuaciones parciales mixtas están dadas por:

$$
\begin{aligned}
f_1\left(1,1\right) &= r_2 P_1^{(2)}\left(1\right) + \mu_1^2 R_2^{(2)}\left(1\right) + 2\mu_1 r_2 \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2\left(2\right) + f_2\left(1\right)\right) + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2} P_1^{(2)} f_2\left(2\right) + \mu_1^2 \tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right) f_2\left(2\right) \\
&+ \frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(1,2) + \frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2,2) + f_2(1,2)\right) + f_2(1,1), \\
f_1\left(2,1\right) &= \mu_1 r_2 \tilde{\mu}_2 + \mu_1 \tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}\left(1\right) + r_2 \tilde{\mu}_2 \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right), \\
f_1\left(3,1\right) &= \mu_1 \hat{\mu}_1 r_2 + \mu_1 \hat{\mu}_1 R_2^{(2)}\left(1\right) + r_2 \frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2 \hat{\mu}_1 \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right) + \mu_1 r_2 \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) \\
&+ \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right) \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \frac{\mu_1 \hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \mu_1 \hat{\mu}_1 \tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right) f_2(2) + \mu_1 \hat{\mu}_1 \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) \\
&+ + \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(1,2), \\
f_1\left(4,1\right) &= \mu_1 \hat{\mu}_2 r_2 + \mu_1 \hat{\mu}_2 R_2^{(2)}\left(1\right) + r_2 \frac{\mu_1 \hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \mu_1 r_2 \hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + r_2 \hat{\mu}_2 \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right) \\
&+ \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right) + \frac{\mu_1 \hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \mu_1 \hat{\mu}_2 \tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right) f_2(2) + \mu_1 \hat{\mu}_2 \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) \\
&+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2^{(1,2)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1(1,2) &= \mu_1\tilde{\mu}_2 r_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right),\\
f_1(2,2) &= \tilde{\mu}_2^2 R_2^{(2)}(1) + r_2\tilde{P}_2^{(2)}(1),\\
f_1(3,2) &= \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 r_2 + \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1),\\
f_1(4,2) &= \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_2 + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1),\\
f_1(1,3) &= \mu_1\hat{\mu}_1 r_2 + \mu_1\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2) + r_2\mu_1\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\\
&+ r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right) + \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(1) + f_2(1)\right)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2,2) + f_2^{(1,2)}\right),\\
f_1(2,3) &= \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1),\\
f_1(3,3) &= \hat{\mu}_1^2 R_2^{(2)}(1) + r_2\hat{P}_1^{(2)}(1) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \hat{\mu}_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2) + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_1^{(2)}(1) f_2(2)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2,2) + 2r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + 2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \hat{f}_{2,1}^{(2)}(1),\\
f_1(4,3) &= r_2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2) + r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \hat{f}_2(1,2),\\
f_1(1,4) &= r_2\mu_1\hat{\mu}_2 + \mu_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2) + r_2\mu_1\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\\
&+ r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right) + \hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2,2) + f_2(1,2)\right),\\
f_1(2,4) &= r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1),\\
f_1(3,4) &= r_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_2^{(2)}(1) f_2(2) + r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \hat{f}_2^{(2)}(1,2),\\
f_1(4,4) &= \hat{\mu}_2^2 R_2^{(2)}(1) + r_2\hat{P}_2^{(2)}(1) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \hat{\mu}_2^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2) + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}(1) f_2(2)\\
&+ 2r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + 2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + \hat{f}_{2,2}^{(2)}(1),\\
f_2(1,1) &= r_1 P_1^{(2)}(1) + \mu_1^2 R_1^{(2)}(1),\\
f_2(2,1) &= \mu_1\tilde{\mu}_2 r_1 + \mu_1\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1} f_1(1) + f_1(2)\right),\\
f_2(3,1) &= r_1\mu_1\hat{\mu}_1 + \mu_1\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1) + r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1} f_1(1) + r_1\mu_1\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1),\\
f_2(4,1) &= \mu_1\hat{\mu}_2 r_1 + \mu_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\mu_1\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1) + r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1} f_1(1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(1,2) &= r_1\mu_1\tilde{\mu}_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right),\\
f_2(2,2) &= \tilde{\mu}_2^2 R_1^{(2)}(1) + r_1\tilde{P}_2^{(2)}(1) + 2r_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right) + f_1(2,2) + \tilde{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}(1)\,f_1(1)\\
&+ \frac{1}{1-\mu_1}\tilde{P}_2^{(2)}(1)\,f_1(1) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,2) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,1) + f_1(1,2)\right),\\
f_2(3,2) &= \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_1 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1) + r_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_1 r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right) + r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1)\\
&+ \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right)\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1) + \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1) + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}(1)\,f_1(1) + \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1,2)\\
&+ \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 f_1(1,1),\\
f_2(4,2) &= \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_1 + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1) + r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_2 r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right)\\
&+ \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right)\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1) + \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu_2}}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)\,f_1(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,2)\\
&+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(1,1),\\
f_2(1,3) &= r_1\mu_1\hat{\mu}_1 + \mu_1\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1) + r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1) + r_1\mu_1\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1),\\
f_2(2,3) &= r_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1) + \frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + r_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)\,f_1(1) + r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,1}(1)\\
&+ r_1\hat{\mu}_1\left(f_1(1) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right) + + \left(f_1(2) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right)\hat{F}_{1,1}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\left(f_1(1,2) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,1)\right),\\
f_2(3,3) &= \hat{\mu}_1^2 R_1^{(2)}(1) + r_1\hat{P}_1^{(2)}(1) + 2r_1\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_1^2\theta_1^{(2)}(1)\,f_1(1) + 2r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1)\\
&+ \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_1^{(2)}(1)\,f_1(1) + 2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)\hat{F}_{1,1}(1) + \left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(1,1) + \hat{f}_{1,1}^{(2)}(1),\\
f_2(4,3) &= r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_{1,2}(1) + \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + 2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_{1,1}(1)\\
&+ \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)\,f_1(1) + \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)\hat{F}_{1,2}(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_{1,1}(1)f_1(1)\\
&+ \hat{f}_1^{(2)}(1,2) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(2,2),\\
f_2(1,4) &= r_1\mu_1\hat{\mu}_2 + \mu_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\mu_1\hat{F}_{1,2}(1) + r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1),\\
f_2(2,4) &= r_1\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,2}(1) + \frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)\,f_1(1)\\
&+ r_1\hat{\mu}_2\left(f_1(2) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right) + \left(f_1(2) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right)\hat{F}_{1,2}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(f_1(1,2) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,1)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2\left(3,4\right) &= r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_{1,2}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1(1)\\
&+ +\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\hat{F}_{1,2}(1)f_1(1)+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_{1,1}(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_{1,1}(1)f_1(1)+\hat{f}_1^{(2)}(1,2)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2f_1(1,1),\\
f_2\left(4,4\right) &= \hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)+2r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+\hat{f}_{1,2}^{(2)}(1)+2r_1\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1(1)\\
&+ \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)f_1(1)+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\hat{F}_{1,2}(1)+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\right)^2f_1(1,1),\\
\hat{f}_1\left(1,1\right) &= \hat{r}_2P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}P_1^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_2(2)+\mu_1^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_2(2)\\
&+ \left(\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)+2\hat{r}_2\mu_1F_{2,1}(1)+2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1)+F_{2,1}^{(2)}(1),\\
\hat{f}_1\left(2,1\right) &= \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\mu_1F_{2,2}(1)+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_2(2)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(2)+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_{2,1}(1)\\
&+ \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1)+f_{2,1}^{(2)}(1),\\
\hat{f}_1\left(3,1\right) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,1}(1)+\hat{r}_2\mu_1\hat{f}_2(1)\\
&+ F_{2,1}(1)\hat{f}_2(1)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1\left(4,1\right) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,1}(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1),\\
\hat{f}_1\left(1,2\right) &= \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\mu_1\hat{r}_2F_{2,2}(1)+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_2(2)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(2)+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)\\
&+ \hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_{2,1}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1)+f_2^{(2)}(1,2),\\
\hat{f}_1\left(2,2\right) &= \hat{r}_2\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_{2,2}(1)+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+f_{2,2}^{(2)}(1)\\
&+ \frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_2(2)+\tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_2(2)+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(2)+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2),\\
\hat{f}_1\left(3,2\right) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,2}(1)+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2(1)+F_{2,2}(1)\hat{f}_2(1)\\
&+ \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1\left(4,2\right) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,2}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_2(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(1)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{f}_2(2,2),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1(1,3) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,1}(1)+\hat{r}_2\mu_1\hat{f}_2(1)\\
&+ F_{2,1}(1)\hat{f}_2(1)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1(2,3) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,2}(1)+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2(1)\\
&+ F_{2,2}(1)\hat{f}_2(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1(3,3) &= \hat{r}_2\hat{P}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{f}_2(1)+\hat{f}_2(1,1),\\
\hat{f}_1(4,3) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{f}_2(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1(1,4) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,1}(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1),\\
\hat{f}_1(2,4) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,2}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,2}(1)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2),\\
\hat{f}_1(3,4) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{f}_2(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1(4,4) &= \hat{r}_2P_2^{(2)}(1)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)\\
&+ \hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2),\\
\hat{f}_2(,1) &= \hat{r}_1P_1^{(2)}(1)+\mu_1^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\mu_1F_{1,1}(1)+2\hat{r}_1\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}P_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)\\
&+ \mu_1^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1^{(}1)F_{1,1}(1)+f_{1,1}^{(2)}(1)+\left(\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1^{(1,1)},\\
\hat{f}_2(2,1) &= \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\mu_1F_{1,2}(1)+\tilde{\mu}_2\hat{r}_1F_{1,1}(1)+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ 2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,2}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,1}(1)\\
&+ f_1^{(2)}(1,2)+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),\\
\hat{f}_2(3,1) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,1}(1)+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1(1),\\
\hat{f}_2(4,1) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_{1,1}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\hat{r}_1\mu_1\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+F_{1,1}(1)\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)\\
&+ \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{f}_1(1,2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,1)\right),\\
\hat{f}_2(1,2) &= \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\mu_1F_{1,2}(1)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_{1,1}(1)+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ 2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,2}(1)\\
&+ \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,1}(1)+f_1^{(2)}(1,2)+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_2(2,2) &= \hat{r}_1\tilde{P}_2^{(2)}(1)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_{1,2}(1)+f_{1,2}^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}F_{1,2}(1)\hat{f}_1(1)+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),\\
\hat{f}_2(3,2) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,2}(1)+\hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1),\\
\hat{f}_2(4,2) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)F_{1,2}(1)+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ \hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)\\
&+ F_{1,2}(1)\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{f}_1(1,2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,1)\right),\\
\hat{f}_2(1,3) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,1}(1)+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1),\\
\hat{f}_2(2,3) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,2}(1)+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1),\\
\hat{f}_2(3,3) &= \hat{r}_1\hat{P}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_1^{(2)}(1),\\
\hat{f}_2(4,3) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right),\\
\hat{f}_2(1,4) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_{1,1}(1)+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\hat{r}_1\mu_1\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)\\
&+ F_{1,1}(1)\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)\\
&+ \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2)+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),\\
\hat{f}_2(2,4) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_{1,2}(1)+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+F_{1,2}(1)\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),\\
\hat{f}_2(3,4) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right),\\
\hat{f}_2(4,4) &= \hat{r}_1\hat{P}_2^{(2)}(1)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\hat{\mu}_2\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+\hat{f}_1(2,2)\\
&+ \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{f}_1(1,2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,1)\right).
\end{aligned}
$$

33.54. Medidas de Desempeño

Definición 33.17 *Sea L_i^* el número de usuarios cuando el servidor visita la cola Q_i para dar servicio, para $i=1,2$.*

Entonces

Proposición 33.56 *Para la cola Q_i, $i=1,2$, se tiene que el número de usuarios presentes al momento de ser visitada por el servidor está dado por*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= f_i(i) &\quad (33.54.1)\\
Var\left[L_i^*\right] &= f_i(i,i)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. &\quad (33.54.2)
\end{aligned}
$$

Definición 33.18 *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo, bajo condiciones de estabilidad.*

$$C_i(z)=\mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$$

Definición 33.19 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo.*

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$$

Proposición 33.57 *Para los tiempos de intervisita del servidor I_i, se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I_i] &= \frac{f_i(i)}{\mu_i},\\ Var[I_i] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).\end{aligned}$$

Proposición 33.58 *Para los tiempos que ocupa el servidor para atender a los usuarios presentes en la cola Q_i, con FGP denotada por S_i, se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{1-\mu_i},\\ Var[S_i] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^3}\end{aligned}$$

Proposición 33.59 *Para la duración de los ciclos C_i se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i]\,\mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)}\\ Var[C_i] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}.\end{aligned}$$

Apéndice A

a)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\ =\;& r_2P_1^{(2)}(1)+\mu_1^2R_2^{(2)}(1)+2\mu_1r_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{1,0)}\right)+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}P_1^{(2)}F_2^{(0,1)}+\mu_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}\\ +\;& \frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}+\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right)+F_2^{(2,0)}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\ =\;& \mu_1r_2\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right).\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\ =\;& \mu_1\hat{\mu}_1r_2+\mu_1\hat{\mu}_1R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\mu_1r_2\hat{F}_2^{(1,0)}\\ +\;& \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}\\ +\;& \mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\ =\;& \mu_1\hat{\mu}_2r_2+\mu_1\hat{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1r_2\hat{F}_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\\ +\;& \hat{F}_2^{(1,0)}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}\\ +\;& \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}.\end{aligned}$$

e)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&\mu_1\tilde{\mu}_2r_2+\mu_1\tilde{\mu}_2R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right).
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&\tilde{\mu}_2^2R_2^{(2)}(1)+r_2\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right).
\end{aligned}
$$

g)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2r_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2r_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}.
\end{aligned}
$$

i)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&\mu_1\hat{\mu}_1r_2+\mu_1\hat{\mu}_1R_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+\;&r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+r_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\hat{F}_2^{(1,0)}\\
+\;&\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right).
\end{aligned}
$$

j)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1r_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

k)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&\hat{\mu}_1^2R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+2r_2\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+\;&\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+2r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

l)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&r_2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

m)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;&r_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+r_2\mu_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\hat{F}_2^{(0,1)}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right).
\end{aligned}
$$

n)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}.
\end{aligned}$$

ñ)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \hat{\mu}_2^2R_2^{(2)}(1)+r_2\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)+2r_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+\;& 2r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_1P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2R_1^{(2)}\left(1\right).
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \mu_1\tilde{\mu}_2r_1+\mu_1\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right).
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \mu_1\hat{\mu}_2r_1+\mu_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right).
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \tilde{\mu}_2^2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)+2r_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)+F_1^{(0,2)}+\tilde{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+\;& \frac{1}{1-\mu_1}\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(2,0)}+F_1^{(1,1)}\right).
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1 r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+&\ \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}\\
+&\ \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_1+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2 r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\\
+&\ \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}\\
+&\ \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ r_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1R_1^{(2)}(1)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ r_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1R_1^{(2)}\left(1\right)+\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}+r_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_2^{(1,0)}\\
+&\ r_1\hat{\mu}_1\left(F_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+&\ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\left(F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{2,0)}\right).
\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ \hat{\mu}_1^2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+2r_1\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+&\ 2r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}+\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+&\ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+\hat{F}_1^{(1,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

m)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ r_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

n)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\ & r_1\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\\
+\ & \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+r_1\hat{\mu}_2\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\right)+\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\right)\hat{F}_1^{(0,1)}\\
+\ & \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}$$

ñ)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\ & r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+\ & \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(0,1)}F_1^{(1,0)}+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+\hat{F}_1^{(1,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\ & \hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)+2r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+\hat{F}_1^{(0,2)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+\ & \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(0,1)}+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\ & \hat{r}_2P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}P_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\ & \left(\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+2\hat{r}_2\mu_1F_2^{(1,0)}+2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\ & \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\mu_1F_2^{(0,1)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\ & \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\ & \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(1,0)}+\hat{r}_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(1,0)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\ & \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\ & \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\ & \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\mu_1\hat{r}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\ & \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+&\quad \tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+F_2^{(0,2)}+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+&\quad \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(1,0)}+\hat{r}_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(1,0)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

m)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+&\quad \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

n)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+&\quad \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

ñ)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

o)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2P_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+&\quad \left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}
$$

a)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_1\mu_1F_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}P_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1^2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+&\quad 2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(2,0)}+\left(\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\mu_1F_1^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{r}_1F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+&\quad \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(1,1)}\\
+&\quad \mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+&\quad \hat{r}_1\mu_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+F_1^{(1,0)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\mu_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+&\quad \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(1,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_1^{(0,1)}+F_1^{(0,2)}+2\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+&\quad \tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}F^{(0,1)}\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

g)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ & \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+F_1^{(0,1)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+ & \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

i)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

j)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

k)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_1\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right).
\end{aligned}
$$

l)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right).
\end{aligned}
$$

m)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\mu_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+ & F_1^{(1,0)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}\\
+ & \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

n)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+ & F_1^{(0,1)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}\\
+ & \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

ñ)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right).
\end{aligned}
$$

o)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_1\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_1\hat{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\hat{F}_1^{(0,2)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ & \hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones que determinan los segundos momentos de las longitudes de las colas de los dos sistemas se pueden ver en este sitio

Apéndice B

Distribución para los usuarios de traslado

Se puede demostrar que

$$\frac{d^k}{dy}\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu-y}\right)=\frac{k!}{\left(\lambda+\mu\right)^k} \tag{33.54.3}$$

Proposición 33.60 *Sea τ variable aleatoria no negativa con distribución exponencial con media μ, y sea $L\left(t\right)$ proceso Poisson con parámetro λ. Entonces*

$$\mathbb{P}\left\{L\left(\tau\right)=k\right\}=f_{L\left(\tau\right)}\left(k\right)=\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k. \tag{33.54.4}$$

Además

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L\left(\tau\right)\right] &= \frac{\lambda}{\mu} & (33.54.5)\\
\mathbb{E}\left[\left(L\left(\tau\right)\right)^2\right] &= \frac{\lambda}{\mu}\left(2\frac{\lambda}{\mu}+1\right) & (33.54.6)\\
V\left[L\left(\tau\right)\right] &= \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right). & (33.54.7)
\end{aligned}
$$

A saber, para k fijo se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{L\left(\tau\right)=k\right\} &= \mathbb{P}\left\{L\left(\tau\right)=k,\tau\in\left(0,\infty\right)\right\}\\
&= \int_0^{\infty}\mathbb{P}\left\{L\left(\tau\right)=k,\tau=y\right\}f_{\tau}\left(y\right)dy=\int_0^{\infty}\mathbb{P}\left\{L\left(y\right)=k\right\}f_{\tau}\left(y\right)dy\\
&= \int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda y}}{k!}\left(\lambda y\right)^k\left(\mu e^{-\mu y}\right)dy=\frac{\lambda^k\mu}{k!}\int_0^{\infty}y^ke^{-(\mu+\lambda)y}dy\\
&= \frac{\lambda^k\mu}{\left(\lambda+\mu\right)k!}\int_0^{\infty}y^k\left(\lambda+\mu\right)e^{-(\lambda+\mu)y}dy=\frac{\lambda^k\mu}{\left(\lambda+\mu\right)k!}\int_0^{\infty}y^kf_Y\left(y\right)dy\\
&= \frac{\lambda^k\mu}{\left(\lambda+\mu\right)k!}\mathbb{E}\left[Y^k\right]=\frac{\lambda^k\mu}{\left(\lambda+\mu\right)k!}\frac{d^k}{dy}\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu-y}\right)|_{y=0}\\
&= \frac{\lambda^k\mu}{\left(\lambda+\mu\right)k!}\frac{k!}{\left(\lambda+\mu\right)^k}=\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k.
\end{aligned}
$$

Además

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left\{L\left(\tau\right)=k\right\} &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\\
&= \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}\right)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\right)\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

determinemos primero la esperanza de $L\left(\tau\right)$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L(\tau)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}\left\{L(\tau)=k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k}\\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k} = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k-1}\\
&= \frac{\mu\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}\right)^2 = \frac{\mu\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\right)^2\\
&= \frac{\lambda}{\mu}.
\end{aligned}
$$

Ahora su segundo momento:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(L(\tau)\right)^2\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2\mathbb{P}\left\{L(\tau)=k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k}\\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\sum_{k=0}^{\infty} k^2\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k} = \frac{\mu\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)^2\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k-2}\\
&= \frac{\mu\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\left(\frac{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+1}{\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}-1\right)^3}\right) = \frac{\mu\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\left(-\frac{\frac{2\lambda+\mu}{\lambda+\mu}}{\left(-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^3}\right)\\
&= \frac{\mu\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\left(\frac{2\lambda+\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\right)^3 = \frac{\lambda(2\lambda+\mu)}{\mu^2}\\
&= \frac{\lambda}{\mu}\left(2\frac{\lambda}{\mu}+1\right).
\end{aligned}
$$

y por tanto

$$
\begin{aligned}
V\left[L(\tau)\right] &= \frac{\lambda(2\lambda+\mu)}{\mu^2} - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 = \frac{\lambda^2+\mu\lambda}{\mu^2}\\
&= \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right).
\end{aligned}
$$

Ahora, determinemos la distribución del número de usuarios que pasan de $\hat{Q}_2$ a Q_2 considerando dos políticas de traslado en específico:

a) *Solamente pasa un usuario,*

b) *Se permite el paso de k usuarios,*

una vez que son atendidos por el servidor en $\hat{Q}_2$.

Política de un solo usuario: *Sea R_2 el número de usuarios que llegan a $\hat{Q}_2$ al tiempo t, sea R_1 el número de usuarios que pasan de $\hat{Q}_2$ a Q_2 al tiempo t.*

A saber:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[R_1\right] &= \sum_{y\geq 0}\mathbb{P}\left[R_2=y\right]\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right]\\
&= \sum_{y\geq 0}\mathbb{P}\left[R_2=y\right]\sum_{x\geq 0}x\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=y\right]\\
&= \sum_{y\geq 0}\sum_{x\geq 0}x\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=y\right]\mathbb{P}\left[R_2=y\right].
\end{aligned}
$$

Determinemos

$$
\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right] = \sum_{x\geq 0}x\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=y\right]. \tag{33.54.8}
$$

supongamos que $y=0$, entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=0\right] &= 1,\\
\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=0\right] &= 0, \textit{ para cualquier } x\geq 1,
\end{aligned}
$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=0\right]=0.$$

Para $y=1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=1\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1=1|R_2=1\right] &= 1,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=1\right]=1.$$

Para $y>1$*:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2\geq 1\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1=1|R_2\geq 1\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1>1|R_2\geq 1\right] &= 0,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right]=1,\ \textit{para cualquier } y>1.$$

es decir

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right]=1,\ \textit{para cualquier } y\geq 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[R_1\right] &= \sum_{y\geq 0}\sum_{x\geq 0} x\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=y\right]\mathbb{P}\left[R_2=y\right]=\sum_{y\geq 0}\sum_{x}\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right]\mathbb{P}\left[R_2=y\right]\\ &= \sum_{y\geq 0}\mathbb{P}\left[R_2=y\right]=\sum_{y\geq 1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}=1.\end{aligned}$$

Además para $k\in Z^+$

$$\begin{aligned}f_{R_1}(k) &= \mathbb{P}\left[R_1=k\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=n\right]\mathbb{P}\left[R_2=n\right]\\ &= \mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\ &+ \mathbb{P}\left[R_1=k|R_2>1\right]\mathbb{P}\left[R_2>1\right],\end{aligned}$$

donde para

$k=0$**:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=0\right]=\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\ +\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2>1\right]\mathbb{P}\left[R_2>1\right]=\mathbb{P}\left[R_2=0\right].\end{aligned}$$

$k=1$**:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=1\right]=\mathbb{P}\left[R_1=1|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=1|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\ +\mathbb{P}\left[R_1=1|R_2>1\right]\mathbb{P}\left[R_2>1\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2=n\right].\end{aligned}$$

$k=2$**:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=2\right]=\mathbb{P}\left[R_1=2|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=2|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\ +\mathbb{P}\left[R_1=2|R_2>1\right]\mathbb{P}\left[R_2>1\right]=0.\end{aligned}$$

$k=j$**:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=j\right]=\mathbb{P}\left[R_1=j|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=j|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\ +\mathbb{P}\left[R_1=j|R_2>1\right]\mathbb{P}\left[R_2>1\right]=0.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}f_{R_1}(0) &= \mathbb{P}\left[R_2=0\right]\\ f_{R_1}(1) &= \sum_{n\geq 1}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2=n\right]\\ f_{R_1}(j) &= 0,\ \textit{para } j>1.\end{aligned}$$

Política de k usuarios: *Al igual que antes, para $y \in Z^+$ fijo*

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = y\right] = \sum_x x\mathbb{P}\left[R_1 = x|R_2 = y\right].$$

Entonces, si tomamos diversos valore para y:

$y = 0$*:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 0\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = x|R_2 = 0\right] &= 0, \text{ para cualquier } x \geq 1,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = 0\right] = 0.$$

Para $y = 1$*,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 1\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 1\right] &= 1,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = 1\right] = 1.$$

Para $y = 2$*,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 2\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 2\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 2\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 3|R_2 = 2\right] &= 0,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = 2\right] = 3.$$

Para $y = 3$*,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 3\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 3\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 3\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 3|R_2 = 3\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 4|R_2 = 3\right] &= 0,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = 3\right] = 6.$$

En general, para $k \geq 0$*,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = k\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = j|R_2 = k\right] &= 1, \text{ para } 1 \leq j \leq k,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = j|R_2 = k\right] &= 0, \text{ para } j > k,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = k\right] = \frac{k\left(k+1\right)}{2}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[R_1\right] &= \sum_y \mathbb{E}\left[R_1|R_2 = y\right]\mathbb{P}\left[R_2 = y\right]\\ &= \sum_y \mathbb{P}\left[R_2 = y\right]\frac{y\left(y+1\right)}{2} = \sum_{y\geq 1}\left(\frac{y\left(y+1\right)}{2}\right)\frac{(\lambda t)^y}{y!}e^{-\lambda t}\\ &= \frac{\lambda t}{2}e^{-\lambda t}\sum_{y\geq 1}\left(y+1\right)\frac{(\lambda t)^{y-1}}{(y-1)!} = \frac{\lambda t}{2}e^{-\lambda t}\left(e^{\lambda t}\left(\lambda t+2\right)\right)\\ &= \frac{\lambda t\left(\lambda t+2\right)}{2},\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{E}\left[R_1\right] = \frac{\lambda t\left(\lambda t + 2\right)}{2}. \tag{33.54.9}$$

Además para $k \in Z^{+}$ fijo

$$\begin{aligned} f_{R_1}\left(k\right) &= \mathbb{P}\left[R_1 = k\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = n\right] \mathbb{P}\left[R_2 = n\right] \\ &= \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = 0\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 1\right] \\ &+ \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = 2\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 2\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = j\right] \mathbb{P}\left[R_2 = j\right] + \cdots + \end{aligned}$$

donde para

$k = 0$**:**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[R_1 = 0\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 0 | R_2 = 0\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 0 | R_2 = 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 1\right] \\ + \mathbb{P}\left[R_1 = 0 | R_2 = j\right] \mathbb{P}\left[R_2 = j\right] = \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right]. \end{aligned}$$

$k = 1$**:**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[R_1 = 1\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 1 | R_2 = 0\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 1 | R_2 = 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 1\right] \\ + \mathbb{P}\left[R_1 = 1 | R_2 = 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 1\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = 1 | R_2 = j\right] \mathbb{P}\left[R_2 = j\right] \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[R_2 = n\right]. \end{aligned}$$

$k = 2$**:**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[R_1 = 2\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 2 | R_2 = 0\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 2 | R_2 = 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 1\right] \\ + \mathbb{P}\left[R_1 = 2 | R_2 = 2\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 2\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = 2 | R_2 = j\right] \mathbb{P}\left[R_2 = j\right] \\ = \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}\left[R_2 = n\right]. \end{aligned}$$

En general

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[R_1 = k\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = 0\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 1\right] \\ + \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = 2\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 2\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = k\right] \mathbb{P}\left[R_2 = k\right] \\ = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}\left[R_2 = n\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f_{R_1}\left(k\right) = \mathbb{P}\left[R_1 = k\right] = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}\left[R_2 = n\right].$$

Objetivos Principales

- *Encontrar las ecuaciones que modelan el comportamiento de una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC) con propiedades similares.*
- *Encontrar expresiones analíticas para las longitudes de las colas al momento en que el servidor llega a una de ellas para comenzar a dar servicio, así como de sus segundos momentos.*
- *Determinar las principales medidas de Desempeño para la RSVC tales como: Número de usuarios presentes en cada una de las colas del sistema cuando uno de los servidores está presente atendiendo, Tiempos que transcurre entre las visitas del servidor a la misma cola.*

33.55. Descripción de una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas

Consideremos una red de sistema de visitas cíclicas conformada por dos sistemas de visitas cíclicas, cada una con dos colas independientes, donde además se permite el intercambio de usuarios entre los dos sistemas en la segunda cola de cada uno de ellos.

Supóngase además que los arribos de los usuarios ocurren conforme a un proceso Poisson con tasa de llegada μ_1 y μ_2 para el sistema 1, mientras que para el sistema 2, lo hacen conforme a un proceso Poisson con tasa $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ respectivamente.

El traslado de un sistema a otro ocurre de manera que los tiempos entre llegadas de los usuarios a la cola dos del sistema 1 provenientes del sistema 2, se distribuye de manera exponencial con parámetro $\check{\mu}_2$.

Se considerarán intervalos de tiempo de la forma $[t, t+1]$. Los usuarios arriban por paquetes de manera independiente del resto de las colas. Se define el grupo de usuarios que llegan a cada una de las colas del sistema 1, caracterizadas por Q_1 y Q_2 respectivamente, en el intervalo de tiempo $[t, t+1]$ por $X_1(t), X_2(t)$. De igual manera se definen los procesos $\hat{X}_1(t), \hat{X}_2(t)$ para las colas del sistema 2, denotadas por $\hat{Q}_1$ y $\hat{Q}_2$ respectivamente.

Para el número de usuarios que se trasladan del sistema 2 al sistema 1, de la cola $\hat{Q}_2$ a la cola Q_2, en el intervalo de tiempo $[t, t+1]$, se define el proceso $Y_2(t)$.

El uso de la Función Generadora de Probabilidades (FGP's) nos permite determinar las Funciones de Distribución de Probabilidades Conjunta de manera indirecta sin necesidad de hacer uso de las propiedades de las distribuciones de probabilidad de cada uno de los procesos que intervienen en la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas.

En lo que respecta al servidor, en términos de los tiempos de visita a cada una de las colas, se definen las variables aleatorias τ_1, τ_2 para Q_1, Q_2 respectivamente; y ζ_1, ζ_2 para $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ del sistema 2. A los tiempos en que el servidor termina de atender en las colas $Q_1, Q_2, \hat{Q}_1, \hat{Q}_2$, se les denotará por $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$ respectivamente.

Los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por $\tau_2 - \overline{\tau}_1, \tau_1 - \overline{\tau}_2$ y $\zeta_2 - \overline{\zeta}_1, \zeta_1 - \overline{\zeta}_2$ para el sistema 1 y el sistema 2, respectivamente.

Cada uno de estos procesos con su respectiva FGP. Además, para cada una de las colas en cada sistema, el número de usuarios al tiempo en que llega el servidor a dar servicio está dado por el número de usuarios presentes en la cola al tiempo t, más el número de usuarios que llegan a la cola en el intervalo de tiempo $[\tau_i, \overline{\tau}_i]$.
Una vez definidas las Funciones Generadoras de Probabilidades Conjuntas se construyen las ecuaciones recursivas que permiten obtener la información sobre la longitud de cada una de las colas, al momento en que uno de los servidores llega a una de las colas para dar servicio, basándose en la información que se tiene sobre su llegada a la cola inmediata anterior.

33.55.1. Funciones Generadoras de Probabilidades

Para cada uno de los procesos de llegada a las colas $X_1, X_2, \hat{X}_1, \hat{X}_2$ y Y_2, con $\tilde{X}_2 = X_2 + Y_2$ anteriores se define su Función Generadora de Probabilidades (FGP):

$$
\begin{aligned}
P_1(z_1) = \mathbb{E}\left[z_1^{X_1(t)}\right], \quad & P_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{X_2(t)}\right], \quad \check{P}_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{Y_2(t)}\right], \\
\hat{P}_1(w_1) = \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{X}_1(t)}\right], \quad & \hat{P}_2(w_2) = \mathbb{E}\left[w_2^{\hat{X}_2(t)}\right], \quad \tilde{P}_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{\tilde{X}_2(t)}\right].
\end{aligned}
$$

Con primer momento definidos por

$$
\begin{aligned}
\mu_1 = \mathbb{E}[X_1(t)] = P_1^{(1)}(1), \quad & \mu_2 = \mathbb{E}[X_2(t)] = P_2^{(1)}(1), \\
\check{\mu}_2 = \mathbb{E}[Y_2(t)] = \check{P}_2^{(1)}(1), \quad & \hat{\mu}_1 = \mathbb{E}\left[\hat{X}_1(t)\right] = \hat{P}_1^{(1)}(1), \\
\hat{\mu}_2 = \mathbb{E}\left[\hat{X}_2(t)\right] = \hat{P}_2^{(1)}(1), \quad & \tilde{\mu}_2 = \mathbb{E}\left[\tilde{X}_2(t)\right] = \tilde{P}_2^{(1)}(1).
\end{aligned}
$$

En lo que respecta al servidor, en términos de los tiempos de visita a cada una de las colas, se denotarán por $B_1(t), B_2(t)$ los procesos correspondientes a las variables aleatorias τ_1, τ_2 para Q_1, Q_2 respectivamente; y $\hat{B}_1(t), \hat{B}_2(t)$ con parámetros ζ_1, ζ_2 para $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ del sistema 2. Y a los tiempos en que el servidor termina de atender en las colas $Q_1, Q_2, \hat{Q}_1, \hat{Q}_2$, se les denotará por $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$ respectivamente. Entonces, los tiempos de servicio están dados por las diferencias $\overline{\tau}_1 - \tau_1, \overline{\tau}_2 - \tau_2$ para Q_1, Q_2, y $\overline{\zeta}_1 - \zeta_1, \overline{\zeta}_2 - \zeta_2$ para $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ respectivamente.
Sus procesos se definen por:

$$
\begin{aligned}
S_1(z_1) = \mathbb{E}\left[z_1^{\overline{\tau}_1 - \tau_1}\right], \quad & S_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_1^{\overline{\tau}_2 - \tau_2}\right], \\
\hat{S}_1(w_1) = \mathbb{E}\left[w_1^{\overline{\zeta}_1 - \zeta_1}\right], \quad & \hat{S}_2(w_2) = \mathbb{E}\left[w_2^{\overline{\zeta}_2 - \zeta_2}\right],
\end{aligned}
$$

con primer momento dado por:

$$
s_1 = \mathbb{E}[\overline{\tau}_1 - \tau_1], \quad s_2 = \mathbb{E}[\overline{\tau}_2 - \tau_2], \quad \hat{s}_1 = \mathbb{E}\left[\overline{\zeta}_1 - \zeta_1\right], \quad \hat{s}_2 = \mathbb{E}\left[\overline{\zeta}_2 - \zeta_2\right].
$$

Análogamente los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por $\tau_2 - \overline{\tau}_1, \tau_1 - \overline{\tau}_2$ *y* $\zeta_2 - \overline{\zeta}_1, \zeta_1 - \overline{\zeta}_2$ *para el sistema 1 y el sistema 2, respectivamente.*
La FGP para estos tiempos de traslado están dados por

$$\begin{aligned}
R_1(z_1) &= \mathbb{E}\left[z_1^{\tau_2-\overline{\tau}_1}\right], \quad R_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{\tau_1-\overline{\tau}_2}\right], \\
\hat{R}_1(w_1) &= \mathbb{E}\left[w_1^{\zeta_2-\overline{\zeta}_1}\right], \quad \hat{R}_2(w_2) = \mathbb{E}\left[w_2^{\zeta_1-\overline{\zeta}_2}\right],
\end{aligned}$$

y al igual que como se hizo con anterioridad

$$\begin{aligned}
r_1 &= R_1^{(1)}(1) = \mathbb{E}\left[\tau_2 - \overline{\tau}_1\right], \quad r_2 = R_2^{(1)}(1) = \mathbb{E}\left[\tau_1 - \overline{\tau}_2\right], \\
\hat{r}_1 &= \hat{R}_1^{(1)}(1) = \mathbb{E}\left[\zeta_2 - \overline{\zeta}_1\right], \quad \hat{r}_2 = \hat{R}_2^{(1)}(1) = \mathbb{E}\left[\zeta_1 - \overline{\zeta}_2\right].
\end{aligned}$$

Se definen los procesos de conteo para el número de usuarios en cada una de las colas al tiempo t, $L_1(t), L_2(t)$, *para* $H_1(t), H_2(t)$ *del sistema 1, respectivamente. Y para el segundo sistema, se tienen los procesos* $\hat{L}_1(t), \hat{L}_2(t)$ *para* $\hat{H}_1(t), \hat{H}_2(t)$, *respectivamente, es decir,*

$$H_1(t) = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(t)}\right], \quad H_2(t) = \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(t)}\right], \quad \hat{H}_1(t) = \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(t)}\right], \quad \hat{H}_2(t) = \mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2(t)}\right].$$

Por lo dicho anteriormente se tiene que el número de usuarios presentes en los tiempos $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$, *es cero, es decir,* $L_i(\overline{\tau_i}) = 0$, *y* $\hat{L}_i\left(\overline{\zeta_i}\right) = 0$ *para i=1,2 para cada uno de los dos sistemas.*
Para cada una de las colas en cada sistema, el número de usuarios al tiempo en que llega el servidor a dar servicio está dado por el número de usuarios presentes en la cola al tiempo $t = \tau_i, \zeta_i$, *más el número de usuarios que llegan a la cola en el intervalo de tiempo* $[\tau_i, \overline{\tau}_i], \left[\zeta_i, \overline{\zeta}_i\right]$, *es decir*

$$\begin{aligned}
&L_1(\overline{\tau}_1) = L_1(\tau_1) + X_1(\overline{\tau}_1 - \tau_1), \quad \hat{L}_1(\overline{\tau}_1) = \hat{L}_1(\tau_1) + \hat{X}_1(\overline{\tau}_1 - \tau_1), \\
&\hat{L}_2(\overline{\tau}_1) = \hat{L}_2(\tau_1) + \hat{X}_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1).
\end{aligned}$$

En el caso específico de Q_2, *además, hay que considerar el número de usuarios que pasan del sistema 2 al sistema 1, a traves de* $\hat{Q}_2$ *mientras el servidor en* Q_2 *está ausente, es decir:*

$$L_2(\overline{\tau}_1) = L_2(\tau_1) + X_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1) + Y_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1). \tag{33.55.1}$$

33.55.2. El problema de la ruina del jugador

Supongamos que se tiene un jugador que cuenta con un capital inicial de $\tilde{L}_0 \geq 0$ *unidades, esta persona realiza una serie de dos juegos simultáneos e independientes de manera sucesiva, dichos eventos son independientes e idénticos entre sí para cada realización.*

La ganancia en el n-ésimo juego es

$$\tilde{X}_n = X_n + Y_n$$

unidades de las cuales se resta una cuota de 1 unidad por cada juego simultáneo, es decir, se restan dos unidades por cada juego realizado.

En términos de la teoría de colas puede pensarse como el número de usuarios que llegan a una cola vía dos procesos de arribo distintos e independientes entre sí.
Su Función Generadora de Probabilidades (FGP) está dada por

$$F(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{L}_0}\right]$$

$$\tilde{P}(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{X}_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n+Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n} z^{Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right]\mathbb{E}\left[z^{Y_n}\right] = P(z)\check{P}(z),$$

entonces

$$\tilde{\mu} = \mathbb{E}\left[\tilde{X}_n\right] = \tilde{P}[z] < 1.$$

Sea $\tilde{L}_n$ *el capital remanente después del n-ésimo juego. Entonces*

$$\tilde{L}_n = \tilde{L}_0 + \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \cdots + \tilde{X}_n - 2n.$$

La ruina del jugador ocurre después del n-ésimo juego, es decir, la cola se vacía después del n-ésimo juego, entonces sea T definida como

$$T = min\left\{\tilde{L}_n = 0\right\}$$

Si $\tilde{L}_0 = 0$, entonces claramente $T = 0$. En este sentido T puede interpretarse como la longitud del periodo de tiempo que el servidor ocupa para dar servicio en la cola, comenzando con $\tilde{L}_0$ grupos de usuarios presentes en la cola, quienes arribaron conforme a un proceso dado por $\tilde{P}(z)$.

Sea $g_{n,k}$ la probabilidad del evento de que el jugador no caiga en ruina antes del n-ésimo juego, y que además tenga un capital de k unidades antes del n-ésimo juego, es decir,
Dada $n \in \{1, 2, \dots, \}$ y $k \in \{0, 1, 2, \dots, \}$

$$g_{n,k} := P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1, \dots, n, \tilde{L}_n = k\right\}$$

la cual además se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
g_{n,k} &= P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1, \dots, n, \tilde{L}_n = k\right\} = \sum_{j=1}^{k+1} g_{n-1,j} P\left\{\tilde{X}_n = k - j + 1\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1\right\} = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1, Y_n = l\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1 | Y_n = l\right\} P\left\{Y_n = l\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n = k - j - l + 1\right\} P\left\{Y_n = l\right\}
\end{aligned}$$

es decir

$$g_{n,k} = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n = k - j - l + 1\right\} P\left\{Y_n = l\right\} \tag{33.55.2}$$

además

$$g_{0,k} = P\left\{\tilde{L}_0 = k\right\}. \tag{33.55.3}$$

Se definen las siguientes FGP:

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k} z^k, \text{ para } n = 0, 1, \dots, \tag{33.55.4}$$

$$G(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z) w^n. \tag{33.55.5}$$

En particular para $k = 0$,

$$g_{n,0} = G_n(0) = P\left\{\tilde{L}_j > 0, \text{ para } j < n, \text{ y } \tilde{L}_n = 0\right\} = P\left\{T = n\right\},$$

además

$$G(0, w) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(0) w^n = \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{T = n\right\} w^n = \mathbb{E}\left[w^T\right]$$

la cuál resulta ser la FGP del tiempo de ruina T.

Proposición 33.61 *Sean $G_n(z)$ y $G(z, w)$ definidas como en (33.80.4) y (33.80.5) respectivamente, entonces*

$$G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z). \tag{33.55.6}$$

Además

$$G(z, w) = \frac{zF(z) - wP(z)G(0, w)}{z - wR(z)}, \tag{33.55.7}$$

con un único polo en el círculo unitario, además, el polo es de la forma $z = \theta(w)$ y satisface que

i) $\tilde{\theta}(1) = 1$,

ii) $\tilde{\theta}^{(1)}(1) = \frac{1}{1-\tilde{\mu}}$,

iii) $\tilde{\theta}^{(2)}(1) = \frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2} + \frac{\tilde{\sigma}}{(1-\tilde{\mu})^3}$.

Finalmente, además se cumple que

$$\mathbb{E}\left[w^T\right] = G(0,w) = F\left[\tilde{\theta}(w)\right]. \tag{33.55.8}$$

Multiplicando las ecuaciones (33.80.2) y (33.80.3) por el término z^k*:*

$$\begin{aligned}
g_{n,k}z^k &= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-j-l+1\}P\{Y_n = l\}z^k,\\
g_{0,k}z^k &= P\left\{\tilde{L}_0 = k\right\}z^k,
\end{aligned}$$

ahora sumamos sobre k

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k}z^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-j-l+1\}P\{Y_n = l\}z^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-(j+l-1)\}P\{Y_n = l\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+(j+l-1)-(j+l-1)} \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-(j+l-1)\}P\{Y_n = l\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}z^{j-1}P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}P\{Y_n = l\}z^l\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{k=j+l-1}^{\infty} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}P\{Y_n = l\}z^l\\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{l=1}^{j}\sum_{k=j+l-1}^{\infty} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}P\{Y_n = l\}z^l\\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}P\{Y_n = l\}z^l
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}\sum_{l=1}^{j} P\{Y_n = l\}z^l\\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{l=1}^{\infty} P\{Y_n = l\}z^l \sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}\\
&= \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z)\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}\\
&= \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z)P(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z),
\end{aligned}$$

es decir la ecuación (33.80.4) se puede reescribir como

$$G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z). \tag{33.55.9}$$

Por otra parte recordemos la ecuación (33.80.4)

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k}z^k, \text{ entonces } \frac{G_n(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} g_{n,k}z^{k-1},$$

Por lo tanto utilizando la ecuación (33.80.9):

$$
\begin{aligned}
G(z,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z)\,w^n = G_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(z)\,w^n = F(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[G_n(z) - G_n(0)\right] w^n \frac{\tilde{P}(z)}{z} \\
&= F(z) + \frac{w}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left[G_n(z) - G_n(0)\right] w^{n-1} \tilde{P}(z)
\end{aligned}
$$

es decir

$$
G(z,w) = F(z) + \frac{w}{z}\left[G(z,w) - G(0,w)\right] \tilde{P}(z),
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
G(z,w) = F(z) + \frac{w}{z}\left[G(z,w) - G(0,w)\right]\tilde{P}(z) &= F(z) + \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\,G(z,w) - \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\,G(0,w) \\
&\Leftrightarrow \\
G(z,w)\left\{1 - \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\right\} &= F(z) - \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\,G(0,w),
\end{aligned}
$$

por lo tanto,

$$
G(z,w) = \frac{zF(z) - w\tilde{P}(z)\,G(0,w)}{1 - w\tilde{P}(z)}. \tag{33.55.10}
$$

Ahora $G(z,w)$ *es analítica en* $|z| = 1$. *Sean* z, w *tales que* $|z| = 1$ *y* $|w| \leq 1$, *como* $\tilde{P}(z)$ *es FGP*

$$
|z - \left(z - w\tilde{P}(z)\right)| < |z| \Leftrightarrow |w\tilde{P}(z)| < |z|
$$

es decir, se cumplen las condiciones del Teorema de Rouché y por tanto, z *y* $z - w\tilde{P}(z)$ *tienen el mismo número de ceros en* $|z| = 1$. *Sea* $z = \tilde{\theta}(w)$ *la solución única de* $z - w\tilde{P}(z)$, *es decir*

$$
\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) = 0, \tag{33.55.11}
$$

con $|\tilde{\theta}(w)| < 1$. *Cabe hacer mención que* $\tilde{\theta}(w)$ *es la FGP para el tiempo de ruina cuando* $\tilde{L}_0 = 1$. *Considerando la ecuación (33.80.11)*

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)|_{w=1} - \frac{\partial}{\partial w}\left\{w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}|_{w=1} = 0 \\
&\tilde{\theta}^{(1)}(w)|_{w=1} - \frac{\partial}{\partial w}w\left\{\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}|_{w=1} - w\frac{\partial}{\partial w}\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)|_{w=1} = 0 \\
&\tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) - w\left\{\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial\tilde{\theta}(w)} \cdot \frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}|_{w=1}\right\} = 0 \\
&\tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right) \cdot \tilde{\theta}^{(1)}(1) = 0
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right) \cdot \tilde{\theta}^{(1)}(1) = \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) \\
&\tilde{\theta}^{(1)}(1)\left(1 - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\right) = \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) \\
&\tilde{\theta}^{(1)}(1) = \frac{\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{\left(1 - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\right)} = \frac{1}{1 - \tilde{\mu}}.
\end{aligned}
$$

Ahora determinemos el segundo momento de $\tilde{\theta}(w)$, *nuevamente consideremos la ecuación (33.80.11):*

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\} = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}\right\} = 0
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)-\frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\} &= \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)-\frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}-\left[\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+w\frac{\partial}{\partial w}R\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}-\left[\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+w\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial w}\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}\right]\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\frac{\partial}{\partial w}\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)-\frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial\tilde{\theta}(w)}\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\\
&- w\frac{\partial\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w)-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\frac{\partial\tilde{\theta}^{(1)}(w)}{\partial w}\\
&= \tilde{\theta}^{(2)}(w)-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\\
&- w\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\left(\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right)^2-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(2)}(w)\\
&= \tilde{\theta}^{(2)}(w)-2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\\
&- w\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\left(\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right)^2-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(2)}(w)\\
&= \tilde{\theta}^{(2)}(w)\left[1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]-\tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(2)}(w)\left[1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right] &- \tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]=0\\
\tilde{\theta}^{(2)}(w) &= \frac{\tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2R^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}\\
\tilde{\theta}^{(2)}(w) &= \frac{\tilde{\theta}^{(1)}(w)w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}+\frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}
\end{aligned}
$$

si evaluamos la expresión anterior en $w=1$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(2)}(1) &= \frac{\left(\tilde{\theta}^{(1)}(1)\right)^2\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}+\frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(1)\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}=\frac{\left(\tilde{\theta}^{(1)}(1)\right)^2\tilde{P}^{(2)}(1)}{1-\tilde{P}^{(1)}(1)}+\frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(1)\tilde{P}^{(1)}(1)}{1-\tilde{P}^{(1)}(1)}\\
&= \frac{\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}}\right)^2\tilde{P}^{(2)}(1)}{1-\tilde{\mu}}+\frac{2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}}\right)\tilde{\mu}}{1-\tilde{\mu}}=\frac{\tilde{P}^{(2)}(1)}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{2\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}=\frac{\sigma^2-\tilde{\mu}+\tilde{\mu}^2}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{2\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}\\
&= \frac{\sigma^2-\tilde{\mu}+\tilde{\mu}^2+2\tilde{\mu}(1-\tilde{\mu})}{(1-\tilde{\mu})^3}
\end{aligned}
$$

es decir

$$
\tilde{\theta}^{(2)}(1) = \frac{\sigma^2+\tilde{\mu}-\tilde{\mu}^2}{(1-\tilde{\mu})^3}=\frac{\sigma^2}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{\tilde{\mu}(1-\tilde{\mu})}{(1-\tilde{\mu})^3}=\frac{\sigma^2}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}.
$$

Corolario 33.11 *El tiempo de ruina del jugador tiene primer y segundo momento dados por*

$$
\mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{1-\tilde{\mu}} \qquad (33.55.12)
$$

$$
Var[T] = \frac{Var\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^3}. \qquad (33.55.13)
$$

33.56. Procesos de Llegadas a las colas en la RSVC

Se definen los procesos de llegada de los usuarios a cada una de las colas dependiendo de la llegada del servidor pero del sistema al cuál no pertenece la cola en cuestión:
Para el sistema 1 y el servidor del segundo sistema

$$F_{i,j}\left(z_i;\zeta_j\right)=\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\zeta_j)}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[L_i\left(\zeta_j\right)=k\right]z_i^k,\ para\ i,j=1,2.$$

Ahora se definen para el segundo sistema y el servidor del primero

$$\hat{F}_{i,j}\left(w_i;\tau_j\right)=\mathbb{E}\left[w_i^{\hat{L}_i(\tau_j)}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\hat{L}_i\left(\tau_j\right)=k\right]w_i^k,\ para\ i,j=1,2.$$

Ahora, con lo anterior definamos la FGP conjunta para el segundo sistema;

$$\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_j)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_j)}\right]=\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_j)}\right]\mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2(\tau_j)}\right]=\hat{F}_{1,j}\left(w_1;\tau_j\right)\hat{F}_{2,j}\left(w_2;\tau_j\right)=\hat{F}_j\left(w_1,w_2;\tau_j\right).$$

Con respecto al sistema 1 se tiene la FGP conjunta con respecto al servidor del otro sistema:

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_j)}z_2^{L_2(\zeta_j)}\right]=\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_j)}\right]\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\zeta_j)}\right]=F_{1,j}\left(z_1;\zeta_j\right)F_{2,j}\left(z_2;\zeta_j\right)=F_j\left(z_1,z_2;\zeta_j\right).$$

Ahora analicemos la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas, entonces se define la PGF conjunta al tiempo t para los tiempos de visita del servidor en cada una de las colas, para comenzar a dar servicio, definidos anteriormente al tiempo $t=\{\tau_1,\tau_2,\zeta_1,\zeta_2\}$:

$$F_j\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)=\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{2}z_i^{L_i(\tau_j)}\prod_{i=1}^{2}w_i^{\hat{L}_i(\tau_j)}\right]\tag{33.56.1}$$

$$\hat{F}_j\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)=\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{2}z_i^{L_i(\zeta_j)}\prod_{i=1}^{2}w_i^{\hat{L}_i(\zeta_j)}\right]\tag{33.56.2}$$

para $j=1,2$. Entonces, con la finalidad de encontrar el número de usuarios presentes en el sistema cuando el servidor deja de atender una de las colas de cualquier sistema se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]=\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]\\ =\ &\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)+X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)+Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)+\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)+\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]\end{aligned}$$

utilizando la ecuacion dada (33.81.1), luego

$$\begin{aligned}=\ &\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]\\ =\ &\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right\}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\end{aligned}$$

Aplicando la ecuación (33.80.1)

$$=\ \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]$$

dado que los arribos a cada una de las colas son independientes, podemos separar la esperanza para los procesos de llegada a Q_1 y Q_2 en τ_1
Recordando que $\tilde{X}_2\left(z_2\right)=X_2\left(z_2\right)+Y_2\left(z_2\right)$ se tiene

$$\begin{aligned}=\ &\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\ =\ &\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{\tilde{P}_2\left(z_2\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\hat{P}_1\left(w_1\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\hat{P}_2\left(w_2\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\ =\ &\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right\}^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)^{L_1(\tau_1)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1)\\
&\equiv F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right)
\end{aligned}$$

Las igualdades anteriores son ciertas pues el número de usuarios que llegan a $\hat{Q}_2$ durante el intervalo $[\tau_1,\overline{\tau}_1]$ aún no han sido atendidos por el servidor del sistema 2 y por tanto aún no pueden pasar al sistema 1 por Q_2. Por tanto el número de usuarios que pasan de $\hat{Q}_2$ a Q_2 en el intervalo de tiempo $[\tau_1,\overline{\tau}_1]$ depende de la política de traslado entre los dos sistemas, conforme a la sección anterior.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right] &= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right) && (33.56.3)\\
&= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1) && (33.56.4)
\end{aligned}$$

Utilizando un razonamiento análogo para $\overline{\tau}_2$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)+X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)+\hat{X}_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)+\hat{X}_2(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}z_1^{X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}z_1^{X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}P_1(z_1)^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\hat{P}_1(w_1)^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\hat{P}_2(w_2)^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]
\end{aligned}$$

utlizando la proposición relacionada con la ruina del jugador

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}\left\{P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right\}^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)^{L_2(\tau_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
&= F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2)
\end{aligned}$$

entonces se define

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right] &= F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), w_1, w_2\right) && (33.56.5)\\
&\equiv F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2) && (33.56.6)
\end{aligned}$$

Ahora para $\overline{\zeta}_1$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_1^{X_1(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}z_2^{X_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}z_2^{Y_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[z_1^{X_1(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[P_1(z_1)^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1}\tilde{P}_2(z_2)^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1}\hat{P}_2(w_2)^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[\left\{P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right\}^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right)^{\hat{L}_1(\zeta_1)}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right]\\
&= F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right)
\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right] &= \hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right) && (33.56.7)\\
&= F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right) && (33.56.8)
\end{aligned}$$

Finalmente para $\overline{\zeta}_2$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right]=\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}\right]\\
=&\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_1^{X_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}z_2^{X_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}z_2^{Y_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}\right]\\
=&\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[z_1^{X_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\right]\\
=&\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[P_1(z_1)^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}\tilde{P}_2(z_2)^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}\hat{P}(w_1)^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\right]\\
=&\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\left\{P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}(w_1)\right\}^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}\right]\\
=&\ \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}(w_1)\right)^{\hat{L}_2\zeta_2}\right]\\
=&\ F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right]
\end{aligned}$$

es decir

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right]=\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right) \tag{33.56.9}$$

$$=F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right) \tag{33.56.10}$$

33.57. Ecuaciones Recursivas para la R.S.V.C.

Con lo desarrollado hasta ahora podemos encontrar las ecuaciones recursivas que modelan la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (R.S.V.C):

$$\begin{aligned}
F_2(z_1,z_2,w_1,w_2)&=R_1(z_1,z_2,w_1,w_2)\,\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]\\
F_1(z_1,z_2,w_1,w_2)&=R_2(z_1,z_2,w_1,w_2)\,\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]\\
\hat{F}_2(z_1,z_2,w_1,w_2)&=\hat{R}_1(z_1,z_2,w_1,w_2)\,\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right]\\
\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1,w_2)&=\hat{R}_2(z_1,z_2,w_1,w_2)\,\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right]
\end{aligned}$$

que son equivalentes a las siguientes ecuaciones

$$F_2(z_1,z_2,w_1,w_2)=R_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2,w_1,w_2\right) \tag{33.57.1}$$

$$F_1(z_1,z_2,w_1,w_2)=R_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),w_1,w_2\right) \tag{33.57.2}$$

$$\hat{F}_2(z_1,z_2,w_1,w_2)=\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right) \tag{33.57.3}$$

$$\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1,w_2)=\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right) \tag{33.57.4}$$

33.57.1. Tiempos de Traslado del Servidor

Para

$$R_1(\mathbf{z},\mathbf{w})=R_1\left((P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.57.5}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial R_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}=R_1^{(1)}(1)\,P_1^{(1)}(1)=r_1\mu_1, && \frac{\partial R_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}=R_1^{(1)}(1)\,\tilde{P}_2^{(1)}(1)=r_1\tilde{\mu}_2,\\
&\frac{\partial R_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}=R_1^{(1)}(1)\,\hat{P}_1^{(1)}(1)=r_1\hat{\mu}_1, && \frac{\partial R_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}=R_1^{(1)}(1)\,\hat{P}_2^{(1)}(1)=r_1\hat{\mu}_2,
\end{aligned}$$

Análogamente se tiene

$$R_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)=R_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right) \tag{33.57.6}$$

$$\begin{array}{ll}\frac{\partial R_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}=R_2^{(1)}\left(1\right)P_1^{(1)}\left(1\right)=r_2\mu_1, & \frac{\partial R_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}=R_2^{(1)}\left(1\right)\tilde{P}_2^{(1)}\left(1\right)=r_2\tilde{\mu}_2,\\ \frac{\partial R_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}=R_2^{(1)}\left(1\right)\hat{P}_1^{(1)}\left(1\right)=r_2\hat{\mu}_1, & \frac{\partial R_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}=R_2^{(1)}\left(1\right)\hat{P}_2^{(1)}\left(1\right)=r_2\hat{\mu}_2,\end{array}$$

Para el segundo sistema:

$$\hat{R}_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)=\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right) \tag{33.57.7}$$

$$\begin{array}{ll}\frac{\partial \hat{R}_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}=\hat{R}_1^{(1)}\left(1\right)P_1^{(1)}\left(1\right)=\hat{r}_1\mu_1, & \frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}=\hat{R}_1^{(1)}\left(1\right)\tilde{P}_2^{(1)}\left(1\right)=\hat{r}_1\tilde{\mu}_2,\\ \frac{\partial \hat{R}_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}=\hat{R}_1^{(1)}\left(1\right)\hat{P}_1^{(1)}\left(1\right)=\hat{r}_1\hat{\mu}_1, & \frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}=\hat{R}_1^{(1)}\left(1\right)\hat{P}_2^{(1)}\left(1\right)=\hat{r}_1\hat{\mu}_2,\end{array}$$

Finalmente

$$\hat{R}_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)=\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right) \tag{33.57.8}$$

$$\begin{array}{ll}\frac{\partial \hat{R}_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}=\hat{R}_2^{(1)}\left(1\right)P_1^{(1)}\left(1\right)=\hat{r}_2\mu_1, & \frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}=\hat{R}_2^{(1)}\left(1\right)\tilde{P}_2^{(1)}\left(1\right)=\hat{r}_2\tilde{\mu}_2,\\ \frac{\partial \hat{R}_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}=\hat{R}_2^{(1)}\left(1\right)\hat{P}_1^{(1)}\left(1\right)=\hat{r}_2\hat{\mu}_1, & \frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}=\hat{R}_2^{(1)}\left(1\right)\hat{P}_2^{(1)}\left(1\right)=\hat{r}_2\hat{\mu}_2.\end{array}$$

33.57.2. Usuarios presentes en la cola

Hagamos lo correspondiente con las siguientes expresiones obtenidas en la sección anterior: Recordemos que

$$F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2,w_1,w_2\right)=F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2;\tau_1\right)$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2,w_1,w_2\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\ \frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2,w_1,w_2\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial \theta_1}{\partial \tilde{P}_2}\cdot\frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial F_1}{\partial z_2}\\ \frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2,w_1,w_2\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial \theta_1}{\partial \hat{P}_1}\cdot\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial w_1}+\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_1}\\ \frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2,w_1,w_2\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial \theta_1}{\partial \hat{P}_2}\cdot\frac{\partial \hat{P}_2}{\partial w_2}+\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_2}\end{aligned}$$

para τ_2*:*

$$F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_1,w_2\right)=F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2;\tau_2\right)$$

al igual que antes

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_1,w_2\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z_2}+\frac{\partial F_2}{\partial z_1}\\ \frac{\partial F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_1,w_2\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\ \frac{\partial F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_1,w_2\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial \hat{P}_1}\cdot\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial w_1}+\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial w_1}\\ \frac{\partial F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_1,w_2\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial \hat{P}_2}\cdot\frac{\partial \hat{P}_2}{\partial w_2}+\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial w_2}\end{aligned}$$

Ahora para el segundo sistema

$$\hat{F}_1\left(z_1, z_2, \hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right) = F_1(z_1, z_2; \zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{F}_1\left(z_1, z_2, \hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_1}\cdot\frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z_1}+\frac{\partial F_1}{\partial z_1}\\
\frac{\partial \hat{F}_1\left(z_1, z_2, \hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_1}\cdot\frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial \tilde{P}_2}\cdot\frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial F_1}{\partial z_2}\\
\frac{\partial \hat{F}_1\left(z_1, z_2, \hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\
\frac{\partial \hat{F}_1\left(z_1, z_2, \hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_1}\cdot\frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial \hat{P}_2}\cdot\frac{\partial \hat{P}_2}{\partial w_2}+\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_2}
\end{aligned}$$

Finalmente para ζ_2

$$\hat{F}_2\left(z_1, z_2, w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right) = F_2(z_1, z_2; \zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right]$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{F}_2\left(z_1, z_2, w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z_1}+\frac{\partial F_2}{\partial z_1}\\
\frac{\partial \hat{F}_2\left(z_1, z_2, w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial \tilde{P}_2}\cdot\frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial F_2}{\partial z_2}\\
\frac{\partial \hat{F}_2\left(z_1, z_2, w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial \hat{P}_1}\cdot\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial w_1}+\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial w_1}\\
\frac{\partial \hat{F}_2\left(z_1, z_2, w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0
\end{aligned}$$

33.57.3. Ecuaciones Recursivas

Entonces, de todo lo desarrollado hasta ahora se tienen las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_1\mu_1\\
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= = r_1\tilde{\mu}_2 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2 + f_1(2)\\
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_1\hat{\mu}_1 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{1,1}(1)\\
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_1\hat{\mu}_2 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1)\\
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_2\mu_1 + f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\mu_1 + f_2(1)\\
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_2\tilde{\mu}_2\\
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_2\hat{\mu}_1 + f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1)\\
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_2\hat{\mu}_2 + f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_1\mu_1 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1 + F^{(1)}_{1,1}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_1\mu_2 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,1}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_1\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(2)\\
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_2\mu_1 + \hat{f}_2(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1 + F^{(1)}_{1,2}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,2}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_2\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_2\hat{\mu}_2
\end{aligned}
$$

Es decir, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
f_2(1) &= r_1\mu_1\\
f_1(2) &= r_2\tilde{\mu}_2\\
f_2(2) &= r_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\left(\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+f_1(2)=\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2+r_2\tilde{\mu}_2\\
&= \left(r_1+r_2+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2=\left(r+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2\\
f_2(3) &= r_1\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\left(\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\hat{F}^{(1)}_{1,1}(1)=\hat{\mu}_1\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}\\
f_2(4) &= r_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\hat{F}^{(1)}_{2,1}(1)=\hat{\mu}_2\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_1}\\
f_1(1) &= r_2\mu_1+\mu_1\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+r_1\mu_1=\mu_1\left(r_1+r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\\
&= \mu_1\left(r+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\\
f_1(3) &= r_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\hat{F}^{(1)}_{1,2}(1)=\hat{\mu}_1\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}\\
f_1(4) &= r_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\hat{F}^{(1)}_{2,2}(1)=\hat{\mu}_2\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2}\\
\hat{f}_1(4) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_2\\
\hat{f}_2(3) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
\hat{f}_1(1) &= \hat{r}_2\mu_1+\mu_1\left(\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)+F^{(1)}_{1,2}(1)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2}\\
\hat{f}_1(2) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)+F^{(1)}_{2,2}(1)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}\\
\hat{f}_1(3) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\left(\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)+\hat{f}_2(3)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
&= \left(\hat{r}_1+\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1=\left(\hat{r}+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1\\
\hat{f}_2(1) &= \hat{r}_1\mu_1+\mu_1\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)+F^{(1)}_{1,1}(1)=\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1}\\
\hat{f}_2(2) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)+F^{(1)}_{2,1}(1)=\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1}\\
\hat{f}_2(4) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)+\hat{f}_1(4)=\hat{r}_1\hat{\mu}_2+\hat{r}_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\\
&= \left(\hat{r}+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
\begin{array}{lll}
f_1(1)=\mu_1\left(r+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) & f_1(2)=r_2\tilde{\mu}_2 & f_1(3)=\hat{\mu}_1\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}\\
f_1(4)=\hat{\mu}_2\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2} & f_2(1)=r_1\mu_1 & f_2(2)=\left(r+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2\\
f_2(3)=\hat{\mu}_1\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} & f_2(4)=\hat{\mu}_2\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_1} & \hat{f}_1(1)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2}\\
\hat{f}_1(2)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2} & \hat{f}_1(3)=\left(\hat{r}+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 & \hat{f}_1(4)=\hat{r}_2\hat{\mu}_2\\
\hat{f}_2(1)=\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1} & \hat{f}_2(2)=\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1} & \hat{f}_2(3)=\hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
 & \hat{f}_2(4)=\left(\hat{r}+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 &
\end{array}
$$

33.57.4. Solución del Sistema de Ecuaciones Lineales

A saber, se puede demostrar que la solución del sistema de ecuaciones está dado por las siguientes expresiones, donde

$$\mu=\mu_1+\tilde{\mu}_2\ ,\ \hat{\mu}=\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\ ,\ r=r_1+r_2\ \ y\ \hat{r}=\hat{r}_1+\hat{r}_2$$

entonces

$$
\begin{array}{lll}
f_1(1) = r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu} & f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) & f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)\\
f_2(2) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu} & f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right) & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right)\\
\hat{f}_1(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) & \hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2} & \hat{f}_1(3) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}\\
\hat{f}_2(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) & \hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1} & \hat{f}_2(4) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}
\end{array}
$$

A saber

$$
\begin{aligned}
f_1(3) &= \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2} = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2} = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}\\
&= \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu} + \frac{1}{\mu_2}\right) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1(4) &= \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2} = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2} = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}\\
&= \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu} + \frac{1}{\mu_2}\right) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(3) &= \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}\\
&= \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu} + \frac{1}{\mu_1}\right) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(4) &= \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\mu_1} = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}\\
&= \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu} + \frac{1}{\mu_1}\right) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_1(1) &= \mu_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2} = \mu_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_2}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2} = \mu_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_1}{\mu_2}\\
&= \mu_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\mu_2}{1-\hat{\mu}} + \frac{1}{\hat{\mu}_2}\right) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2} + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2} = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_2}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2} = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_2(1) &= \mu_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1} = \mu_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_1}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1} = \mu_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1}\\
&= \mu_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}} + \frac{1}{\hat{\mu}_1}\right) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1} + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\tilde{\mu}_1}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1} = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_1}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1} = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1}
$$

33.58. Resultado Principal

Sean $\mu_1, \mu_2, \check{\mu}_2, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ y $\tilde{\mu}_2 = \mu_2 + \check{\mu}_2$ los valores esperados de los proceso definidos anteriormente, y sean $r_1, r_2, \hat{r}_1$ y $\hat{r}_2$ los valores esperado s de los tiempos de traslado del servidor entre las colas para cada uno de los sistemas de visitas cíclicas. Si se definen $\mu = \mu_1 + \tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2$, y $r = r_1 + r_2$ y $\hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$, entonces se tiene el siguiente resultado.

Teorema 33.71 *Supongamos que $\mu < 1$, $\hat{\mu} < 1$, entonces, el número de usuarios presentes en cada una de las colas que conforman la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas cuando uno de los servidores visita a alguna de ellas está dada por la solución del Sistema de Ecuaciones Lineales presentados arriba cuyas expresiones damos a continuación:*

$$
\begin{array}{lll}
f_1(1) = r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}, & f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2, & f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right), \\
f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right), & f_2(1) = r_1\mu_1, & f_2(2) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}, \\
f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right), & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right), & \hat{f}_1(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right), \\
\hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}, & \hat{f}_1(3) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}, & \hat{f}_1(4) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2, \\
\hat{f}_2(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right), & \hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\tilde{\mu}_2}{\hat{\mu}_1}, & \hat{f}_2(3) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1, \\
 & \hat{f}_2(4) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}. &
\end{array}
$$

33.59. Segundos Momentos

Para poder determinar los segundos momentos para los tiempos de traslado del servidor es necesaria la siguiente proposición:

Proposición 33.62 *Sea $f(g(x)h(y))$ función continua tal que tiene derivadas parciales mixtas de segundo orden, entonces se tiene lo siguiente:*

$$\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) = \frac{\partial f(g(x)h(y))}{\partial x} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y)$$

por tanto

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) = \frac{\partial^2}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right)^2 \cdot h^2(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2} \cdot h(y) \tag{33.59.1}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) = \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial h(y)}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(g(x)h(y)) \cdot g(x) \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y))\right\}$$

Demostración 33.11

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial f(g(x)h(y))}{\partial x} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y)\right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y))\right\} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2} \cdot h(y) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2} \cdot h(y) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right)^2 \cdot h^2(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2} \cdot h(y).
\end{aligned}
$$

Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial f(g(x)h(y))}{\partial x} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y)\right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y))\right\} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial h(y)}{y} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial h(y)}{\partial y} \cdot g(x) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial h(y)}{\partial y} \\
&= \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial h(y)}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(g(x)h(y)) \cdot g(x) \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y))\right\}
\end{aligned}
$$

Utilizando la proposición anterior (Proposiciíon 33.91)se tiene el siguiente resultado que me dice como calcular los segundos momentos para los procesos de traslado del servidor:

Proposición 33.63 *Sea R_i la Función Generadora de Probabilidades para el número de arribos a cada una de las colas de la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas definidas como en (33.83.4). Entonces las derivadas parciales están dadas por las siguientes expresiones:*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_i^2} &= \left(\frac{\partial P_i(z_i)}{\partial z_i}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial^2 z_i}\\
&+ \left(\frac{\partial P_i(z_i)}{\partial z_i}\right)^2\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_i}
\end{aligned}
$$

y además

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_2\partial z_1} &= \frac{\partial\tilde{P}_2(z_2)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1(z_1)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_2\partial z_1}\\
&+ \frac{\partial\tilde{P}_2(z_2)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1(z_1)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial w_i\partial z_1} &= \frac{\partial\hat{P}_i(w_i)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1(z_1)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial w_i\partial z_1}\\
&+ \frac{\partial\hat{P}_i(w_i)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1(z_1)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_1},
\end{aligned}
$$

finalmente

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial w_i\partial z_2} &= \frac{\partial\hat{P}_i(w_i)}{\partial w_i}\cdot\frac{\partial\tilde{P}_2(z_2)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial w_i\partial z_2}\\
&+ \frac{\partial\hat{P}_i(w_i)}{\partial w_i}\cdot\frac{\partial\tilde{P}_2(z_2)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_2},
\end{aligned}
$$

para $i = 1, 2$.

33.59.1. Sistema de Ecuaciones Lineales para los Segundos Momentos

En el apéndice (33.66) se demuestra que las ecuaciones para las ecuaciones parciales mixtas están dadas por:

$$
\begin{aligned}
f_1(1,1) &= r_2 P_1^{(2)}(1) + \mu_1^2 R_2^{(2)}(1) + 2\mu_1 r_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right) + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}P_1^{(2)} f_2(2) + \mu_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2)\\
&+ \frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(1,2) + \frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2,2) + f_2(1,2)\right) + f_2(1,1),\\
f_1(2,1) &= \mu_1 r_2\tilde{\mu}_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right),\\
f_1(3,1) &= \mu_1\hat{\mu}_1 r_2 + \mu_1\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right) + \mu_1 r_2\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\\
&+ \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2)\\
&+ +\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(1,2),\\
f_1(4,1) &= \mu_1\hat{\mu}_2 r_2 + \mu_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + \mu_1 r_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right)\\
&+ \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + f_2(1)\right) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2^{(1,2)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1(1,2) &= \mu_1\tilde{\mu}_2 r_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right),\\
f_1(2,2) &= \tilde{\mu}_2^2 R_2^{(2)}(1) + r_2\tilde{P}_2^{(2)}(1),\\
f_1(3,2) &= \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 r_2 + \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1),\\
f_1(4,2) &= \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_2 + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1),\\
f_1(1,3) &= \mu_1\hat{\mu}_1 r_2 + \mu_1\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2) + r_2\mu_1\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\\
&+ r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right) + \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(1) + f_2(1)\right)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2,2) + f_2^{(1,2)}\right),\\
f_1(2,3) &= \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1),\\
f_1(3,3) &= \hat{\mu}_1^2 R_2^{(2)}(1) + r_2\hat{P}_1^{(2)}(1) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \hat{\mu}_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2) + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_1^{(2)}(1) f_2(2)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2,2) + 2r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + 2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \hat{f}_{2,1}^{(2)}(1),\\
f_1(4,3) &= r_2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2) + r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \hat{f}_2(1,2),\\
f_1(1,4) &= r_2\mu_1\hat{\mu}_2 + \mu_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2) + r_2\mu_1\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\\
&+ r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right) + \hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2,2) + f_2(1,2)\right),\\
f_1(2,4) &= r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1),\\
f_1(3,4) &= r_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_2^{(2)}(1) f_2(2) + r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \hat{f}_2^{(2)}(1,2),\\
f_1(4,4) &= \hat{\mu}_2^2 R_2^{(2)}(1) + r_2\hat{P}_2^{(2)}(1) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \hat{\mu}_2^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2) + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}(1) f_2(2)\\
&+ 2r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + 2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + \hat{f}_{2,2}^{(2)}(1),\\
f_2(1,1) &= r_1 P_1^{(2)}(1) + \mu_1^2 R_1^{(2)}(1),\\
f_2(2,1) &= \mu_1\tilde{\mu}_2 r_1 + \mu_1\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1} f_1(1) + f_1(2)\right),\\
f_2(3,1) &= r_1\mu_1\hat{\mu}_1 + \mu_1\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1) + r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1} f_1(1) + r_1\mu_1\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1),\\
f_2(4,1) &= \mu_1\hat{\mu}_2 r_1 + \mu_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\mu_1\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1) + r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1} f_1(1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2\left(1,2\right) &= r_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+f_1(2)\right),\\
f_2\left(2,2\right) &= \tilde{\mu}_2^2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)+2r_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+f_1(2)\right)+f_1(2,2)+\tilde{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1(1)\\
&+ \frac{1}{1-\mu_1}\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)f_1(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,2)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,1)+f_1(1,2)\right),\\
f_2\left(3,2\right) &= \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1r_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_1r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+f_1(2)\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1)\\
&+ \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+f_1(2)\right)\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1(1)+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1,2)\\
&+ \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1f_1(1,1),\\
f_2\left(4,2\right) &= \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2r_1+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1)+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_2r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+f_1(2)\right)\\
&+ \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+f_1(2)\right)\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,2)\\
&+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2f_1(1,1),\\
f_2\left(1,3\right) &= r_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1R_1^{(2)}(1)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)+r_1\mu_1\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1),\\
f_2\left(2,3\right) &= r_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1R_1^{(2)}\left(1\right)+\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+r_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1(1)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,1}(1)\\
&+ r_1\hat{\mu}_1\left(f_1(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right)++\left(f_1(2)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right)\hat{F}_{1,1}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\left(f_1(1,2)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,1)\right),\\
f_2\left(3,3\right) &= \hat{\mu}_1^2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+2r_1\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_1^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1(1)+2r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1)\\
&+ \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)f_1(1)+2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)\hat{F}_{1,1}(1)+\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\right)^2f_1(1,1)+\hat{f}_{1,1}^{(2)}(1),\\
f_2\left(4,3\right) &= r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_{1,2}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_{1,1}(1)\\
&+ \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1(1)+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)\hat{F}_{1,2}(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_{1,1}(1)f_1(1)\\
&+ \hat{f}_1^{(2)}(1,2)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2f_1(2,2),\\
f_2\left(1,4\right) &= r_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\mu_1\hat{F}_{1,2}(1)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1),\\
f_2\left(2,4\right) &= r_1\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,2}(1)+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1(1)\\
&+ r_1\hat{\mu}_2\left(f_1(2)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right)+\left(f_1(2)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right)\hat{F}_{1,2}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(f_1(1,2)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,1)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2\left(3,4\right) &= r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_{1,2}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1(1)\\
&+ +\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\hat{F}_{1,2}(1)f_1(1)+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_{1,1}(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_{1,1}(1)f_1(1)+\hat{f}_1^{(2)}(1,2)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2f_1(1,1),\\
f_2\left(4,4\right) &= \hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)+2r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+\hat{f}_{1,2}^{(2)}(1)+2r_1\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1(1)\\
&+ \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)f_1(1)+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\hat{F}_{1,2}(1)+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\right)^2f_1(1,1),\\
\hat{f}_1\left(1,1\right) &= \hat{r}_2P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}P_1^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_2(2)+\mu_1^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_2(2)\\
&+ \left(\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)+2\hat{r}_2\mu_1F_{2,1}(1)+2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1)+F_{2,1}^{(2)}(1),\\
\hat{f}_1\left(2,1\right) &= \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\mu_1F_{2,2}(1)+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_2(2)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(2)+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_{2,1}(1)\\
&+ \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1)+f_{2,1}^{(2)}(1),\\
\hat{f}_1\left(3,1\right) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,1}(1)+\hat{r}_2\mu_1\hat{f}_2(1)\\
&+ F_{2,1}(1)\hat{f}_2(1)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1\left(4,1\right) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,1}(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1),\\
\hat{f}_1\left(1,2\right) &= \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\mu_1\hat{r}_2F_{2,2}(1)+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_2(2)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(2)+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)\\
&+ \hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_{2,1}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1)+f_2^{(2)}(1,2),\\
\hat{f}_1\left(2,2\right) &= \hat{r}_2\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_{2,2}(1)+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+f_{2,2}^{(2)}(1)\\
&+ \frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_2(2)+\tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_2(2)+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(2)+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2),\\
\hat{f}_1\left(3,2\right) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,2}(1)+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2(1)+F_{2,2}(1)\hat{f}_2(1)\\
&+ \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1\left(4,2\right) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,2}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_2(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(1)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{f}_2(2,2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_1(1,3) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,1}(1)+\hat{r}_2\mu_1\hat{f}_2(1)\\
&+ F_{2,1}(1)\hat{f}_2(1)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1(2,3) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,2}(1)+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2(1)\\
&+ F_{2,2}(1)\hat{f}_2(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1(3,3) &= \hat{r}_2\hat{P}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{f}_2(1)+\hat{f}_2(1,1),\\
\hat{f}_1(4,3) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{f}_2(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1(1,4) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,1}(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1),\\
\hat{f}_1(2,4) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,2}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,2}(1)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2),\\
\hat{f}_1(3,4) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{f}_2(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1(4,4) &= \hat{r}_2P_2^{(2)}(1)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)\\
&+ \hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2),\\
\hat{f}_2(,1) &= \hat{r}_1P_1^{(2)}(1)+\mu_1^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\mu_1F_{1,1}(1)+2\hat{r}_1\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}P_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)\\
&+ \mu_1^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1^{(}1)F_{1,1}(1)+f_{1,1}^{(2)}(1)+\left(\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1^{(1,1)},\\
\hat{f}_2(2,1) &= \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\mu_1F_{1,2}(1)+\tilde{\mu}_2\hat{r}_1F_{1,1}(1)+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ 2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,2}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,1}(1)\\
&+ f_1^{(2)}(1,2)+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),\\
\hat{f}_2(3,1) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,1}(1)+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1(1),\\
\hat{f}_2(4,1) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_{1,1}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\hat{r}_1\mu_1\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+F_{1,1}(1)\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)\\
&+ \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{f}_1(1,2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,1)\right),\\
\hat{f}_2(1,2) &= \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\mu_1F_{1,2}(1)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_{1,1}(1)+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ 2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,2}(1)\\
&+ \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,1}(1)+f_1^{(2)}(1,2)+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_2(2,2) &= \hat{r}_1\tilde{P}_2^{(2)}(1)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_{1,2}(1)+f_{1,2}^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}F_{1,2}(1)\hat{f}_1(1)+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),\\
\hat{f}_2(3,2) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,2}(1)+\hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1),\\
\hat{f}_2(4,2) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)F_{1,2}(1)+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ \hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)\\
&+ F_{1,2}(1)\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{f}_1(1,2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,1)\right),\\
\hat{f}_2(1,3) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,1}(1)+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1),\\
\hat{f}_2(2,3) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,2}(1)+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1),\\
\hat{f}_2(3,3) &= \hat{r}_1\hat{P}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_1^{(2)}(1),\\
\hat{f}_2(4,3) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right),\\
\hat{f}_2(1,4) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_{1,1}(1)+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\hat{r}_1\mu_1\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)\\
&+ F_{1,1}(1)\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)\\
&+ \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2)+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),\\
\hat{f}_2(2,4) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_{1,2}(1)+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+F_{1,2}(1)\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),\\
\hat{f}_2(3,4) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right),\\
\hat{f}_2(4,4) &= \hat{r}_1\hat{P}_2^{(2)}(1)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\hat{\mu}_2\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+\hat{f}_1(2,2)\\
&+ \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{f}_1(1,2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,1)\right).
\end{aligned}
$$

33.60. Medidas de Desempeño

Definición 33.20 *Sea L_i^* el número de usuarios cuando el servidor visita la cola Q_i para dar servicio, para $i=1,2$.*

Entonces

Proposición 33.64 *Para la cola Q_i, $i=1,2$, se tiene que el número de usuarios presentes al momento de ser visitada por el servidor está dado por*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= f_i(i) &(33.60.1)\\
Var\left[L_i^*\right] &= f_i(i,i)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. &(33.60.2)
\end{aligned}
$$

Definición 33.21 *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo, bajo condiciones de estabilidad.*

$$C_i(z)=\mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$$

Definición 33.22 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo.*

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$$

Proposición 33.65 *Para los tiempos de intervisita del servidor I_i, se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I_i] &= \frac{f_i(i)}{\mu_i},\\ Var[I_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).\end{aligned}$$

Proposición 33.66 *Para los tiempos que ocupa el servidor para atender a los usuarios presentes en la cola Q_i, con FGP denotada por S_i, se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{1-\mu_i},\\ Var[S_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{(1-\mu_i)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^3}\end{aligned}$$

Proposición 33.67 *Para la duración de los ciclos C_i se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i]\,\mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)}\\ Var[C_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}.\end{aligned}$$

Apéndice A

a)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\ =\;& r_2P_1^{(2)}(1)+\mu_1^2R_2^{(2)}(1)+2\mu_1r_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{1,0)}\right)+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}P_1^{(2)}F_2^{(0,1)}+\mu_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}\\ +\;&\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}+\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right)+F_2^{(2,0)}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\ =\;&\mu_1r_2\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right).\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\ =\;&\mu_1\hat{\mu}_1r_2+\mu_1\hat{\mu}_1R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\mu_1r_2\hat{F}_2^{(1,0)}\\ +\;&\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}\\ +\;&\mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\ =\;&\mu_1\hat{\mu}_2r_2+\mu_1\hat{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1r_2\hat{F}_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\\ +\;&\hat{F}_2^{(1,0)}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}\\ +\;&\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}.\end{aligned}$$

e)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\ & \mu_1\tilde{\mu}_2 r_2+\mu_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right).
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\ & \tilde{\mu}_2^2 R_2^{(2)}(1)+r_2\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right).
\end{aligned}
$$

g)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\ & \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 r_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\ & \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}.
\end{aligned}
$$

i)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\ & \mu_1\hat{\mu}_1 r_2+\mu_1\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+\ & r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+r_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\hat{F}_2^{(1,0)}\\
+\ & \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right).
\end{aligned}
$$

j)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\ & \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

k)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\ & \hat{\mu}_1^2 R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+2r_2\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+\ & \frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+2r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

l)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\ & r_2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\ & \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

m)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\ & r_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+r_2\mu_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\ & r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\hat{F}_2^{(0,1)}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right).
\end{aligned}
$$

n)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\quad& r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}.
\end{aligned}$$

ñ)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\quad& r_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\quad& \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\quad& \hat{\mu}_2^2R_2^{(2)}(1)+r_2\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)+2r_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+\quad& 2r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\quad& r_1P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2R_1^{(2)}\left(1\right).
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\quad& \mu_1\tilde{\mu}_2r_1+\mu_1\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right).
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\quad& r_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\quad& \mu_1\hat{\mu}_2r_1+\mu_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\quad& r_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right).
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\quad& \tilde{\mu}_2^2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)+2r_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)+F_1^{(0,2)}+\tilde{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+\quad& \frac{1}{1-\mu_1}\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(2,0)}+F_1^{(1,1)}\right).
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1 r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;& \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}\\
+\;& \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_1+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2 r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\\
+\;& \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}\\
+\;& \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}\left(1\right)+\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}+r_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_2^{(1,0)}\\
+\;& r_1\hat{\mu}_1\left(F_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\left(F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{2,0)}\right).
\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \hat{\mu}_1^2 R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+2r_1\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+\;& 2r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}+\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+\hat{F}_1^{(1,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

m)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

n)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
=\;& r_1\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\\
+\;& \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}+r_1\hat{\mu}_2\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\right)+\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\right)\hat{F}_1^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

ñ)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
=\;& r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(0,1)}F_1^{(1,0)}+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+\hat{F}_1^{(1,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

o)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
=\;& \hat{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\hat{P}_2^{(2)}(1)+2r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+\hat{F}_1^{(0,2)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}\\
+\;& \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_2^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(0,1)}+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

a)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2P_1^{(2)}(1)+\mu_1^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}P_1^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \left(\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+2\hat{r}_2\mu_1F_2^{(1,0)}+2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\mu_1F_2^{(0,1)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(1,0)}+\hat{r}_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(1,0)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\mu_1\hat{r}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

f)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\tilde{P}_2^{(2)}(1)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{P}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+F_2^{(0,2)}+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(1,0)}+\hat{r}_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(1,0)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\hat{P}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

m)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

n)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

ñ)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2P_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+&\quad \left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_1\mu_1F_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}P_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1^2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+&\quad 2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(2,0)}+\left(\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\mu_1F_1^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{r}_1F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+&\quad \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(1,1)}\\
+&\quad \mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+&\quad \hat{r}_1\mu_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+F_1^{(1,0)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\mu_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+&\quad \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(1,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_1^{(0,1)}+F_1^{(0,2)}+2\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+&\quad \tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}F^{(0,1)}\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

g)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ & \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+F_1^{(0,1)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+ & \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

i)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

j)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

k)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_1\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right).
\end{aligned}
$$

l)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right).
\end{aligned}
$$

m)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\mu_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+ & F_1^{(1,0)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}\\
+ & \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

n)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+ & F_1^{(0,1)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}\\
+ & \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

ñ)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right).
\end{aligned}
$$

o)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
= & \hat{r}_1\hat{P}_2^{(2)}(1)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\hat{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\hat{F}_1^{(0,2)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ & \hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones que determinan los segundos momentos de las longitudes de las colas de los dos sistemas se pueden ver en este sitio

Apéndice B

Distribución para los usuarios de traslado

Se puede demostrar que

$$\frac{d^k}{dy}\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu-y}\right)=\frac{k!}{(\lambda+\mu)^k} \tag{33.60.3}$$

Proposición 33.68 *Sea τ variable aleatoria no negativa con distribución exponencial con media μ, y sea $L(t)$ proceso Poisson con parámetro λ. Entonces*

$$\mathbb{P}\{L(\tau)=k\}=f_{L(\tau)}(k)=\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k. \tag{33.60.4}$$

Además

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[L(\tau)] &= \frac{\lambda}{\mu} && (33.60.5)\\
\mathbb{E}\left[(L(\tau))^2\right] &= \frac{\lambda}{\mu}\left(2\frac{\lambda}{\mu}+1\right) && (33.60.6)\\
V[L(\tau)] &= \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right). && (33.60.7)
\end{aligned}
$$

A saber, para k fijo se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\{L(\tau)=k\} &= \mathbb{P}\{L(\tau)=k,\tau\in(0,\infty)\}\\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}\{L(\tau)=k,\tau=y\}f_\tau(y)\,dy=\int_0^\infty \mathbb{P}\{L(y)=k\}f_\tau(y)\,dy\\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda y}}{k!}(\lambda y)^k\left(\mu e^{-\mu y}\right)dy=\frac{\lambda^k\mu}{k!}\int_0^\infty y^k e^{-(\mu+\lambda)y}dy\\
&= \frac{\lambda^k\mu}{(\lambda+\mu)\,k!}\int_0^\infty y^k(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)y}dy=\frac{\lambda^k\mu}{(\lambda+\mu)\,k!}\int_0^\infty y^k f_Y(y)\,dy\\
&= \frac{\lambda^k\mu}{(\lambda+\mu)\,k!}\mathbb{E}\left[Y^k\right]=\frac{\lambda^k\mu}{(\lambda+\mu)\,k!}\frac{d^k}{dy}\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu-y}\right)|_{y=0}\\
&= \frac{\lambda^k\mu}{(\lambda+\mu)\,k!}\frac{k!}{(\lambda+\mu)^k}=\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k.
\end{aligned}
$$

Además

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}\{L(\tau)=k\} &= \sum_{k=0}^\infty\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\sum_{k=0}^\infty\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\\
&= \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}\right)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\right)\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

determinemos primero la esperanza de $L(\tau)$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L\left(\tau\right)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}\left\{L\left(\tau\right)=k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k}\\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k} = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k-1}\\
&= \frac{\mu\lambda}{\left(\lambda+\mu\right)^{2}}\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}\right)^{2} = \frac{\mu\lambda}{\left(\lambda+\mu\right)^{2}}\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\right)^{2}\\
&= \frac{\lambda}{\mu}.
\end{aligned}
$$

Ahora su segundo momento:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(L\left(\tau\right)\right)^{2}\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^{2}\mathbb{P}\left\{L\left(\tau\right)=k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^{2}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k}\\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\sum_{k=0}^{\infty} k^{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k} = \frac{\mu\lambda}{\left(\lambda+\mu\right)^{2}}\sum_{k=2}^{\infty}\left(k-1\right)^{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k-2}\\
&= \frac{\mu\lambda}{\left(\lambda+\mu\right)^{2}}\left(\frac{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+1}{\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}-1\right)^{3}}\right) = \frac{\mu\lambda}{\left(\lambda+\mu\right)^{2}}\left(-\frac{\frac{2\lambda+\mu}{\lambda+\mu}}{\left(-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{3}}\right)\\
&= \frac{\mu\lambda}{\left(\lambda+\mu\right)^{2}}\left(\frac{2\lambda+\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\right)^{3} = \frac{\lambda\left(2\lambda+\mu\right)}{\mu^{2}}\\
&= \frac{\lambda}{\mu}\left(2\frac{\lambda}{\mu}+1\right).
\end{aligned}
$$

y por tanto

$$
\begin{aligned}
V\left[L\left(\tau\right)\right] &= \frac{\lambda\left(2\lambda+\mu\right)}{\mu^{2}} - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2} = \frac{\lambda^{2}+\mu\lambda}{\mu^{2}}\\
&= \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right).
\end{aligned}
$$

Ahora, determinemos la distribución del número de usuarios que pasan de $\hat{Q}_2$ a Q_2 considerando dos políticas de traslado en específico:

a*) Solamente pasa un usuario,*

b*) Se permite el paso de k usuarios,*

una vez que son atendidos por el servidor en $\hat{Q}_2$.

Política de un solo usuario: *Sea R_2 el número de usuarios que llegan a $\hat{Q}_2$ al tiempo t, sea R_1 el número de usuarios que pasan de $\hat{Q}_2$ a Q_2 al tiempo t.*

A saber:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[R_1\right] &= \sum_{y\geq 0}\mathbb{P}\left[R_2=y\right]\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right]\\
&= \sum_{y\geq 0}\mathbb{P}\left[R_2=y\right]\sum_{x\geq 0}x\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=y\right]\\
&= \sum_{y\geq 0}\sum_{x\geq 0}x\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=y\right]\mathbb{P}\left[R_2=y\right].
\end{aligned}
$$

Determinemos

$$
\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right] = \sum_{x\geq 0}x\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=y\right]. \tag{33.60.8}
$$

supongamos que $y=0$, entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=0\right] &= 1,\\
\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=0\right] &= 0, \text{ para cualquier } x\geq 1,
\end{aligned}
$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=0\right]=0.$$

Para $y=1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=1\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1=1|R_2=1\right] &= 1,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=1\right]=1.$$

Para $y>1$*:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2\geq 1\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1=1|R_2\geq 1\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1>1|R_2\geq 1\right] &= 0,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right]=1,\ \textit{para cualquier } y>1.$$

es decir

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right]=1,\ \textit{para cualquier } y\geq 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[R_1\right] &= \sum_{y\geq 0}\sum_{x\geq 0}x\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=y\right]\mathbb{P}\left[R_2=y\right]=\sum_{y\geq 0}\sum_{x}\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right]\mathbb{P}\left[R_2=y\right]\\ &= \sum_{y\geq 0}\mathbb{P}\left[R_2=y\right]=\sum_{y\geq 1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}=1.\end{aligned}$$

Además para $k\in Z^+$

$$\begin{aligned}f_{R_1}(k) &= \mathbb{P}\left[R_1=k\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=n\right]\mathbb{P}\left[R_2=n\right]\\ &= \mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\ &+ \mathbb{P}\left[R_1=k|R_2>1\right]\mathbb{P}\left[R_2>1\right],\end{aligned}$$

donde para

$k=0$**:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=0\right]=\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\ +\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2>1\right]\mathbb{P}\left[R_2>1\right]=\mathbb{P}\left[R_2=0\right].\end{aligned}$$

$k=1$**:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=1\right]=\mathbb{P}\left[R_1=1|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=1|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\ +\mathbb{P}\left[R_1=1|R_2>1\right]\mathbb{P}\left[R_2>1\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2=n\right].\end{aligned}$$

$k=2$**:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=2\right]=\mathbb{P}\left[R_1=2|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=2|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\ +\mathbb{P}\left[R_1=2|R_2>1\right]\mathbb{P}\left[R_2>1\right]=0.\end{aligned}$$

$k=j$**:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=j\right]=\mathbb{P}\left[R_1=j|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=j|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\ +\mathbb{P}\left[R_1=j|R_2>1\right]\mathbb{P}\left[R_2>1\right]=0.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}f_{R_1}(0) &= \mathbb{P}\left[R_2=0\right]\\ f_{R_1}(1) &= \sum_{n\geq 1}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2=n\right]\\ f_{R_1}(j) &= 0,\ \textit{para } j>1.\end{aligned}$$

Política de k usuarios: *Al igual que antes, para $y \in Z^{+}$ fijo*

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = y\right] = \sum_x x\mathbb{P}\left[R_1 = x|R_2 = y\right].$$

Entonces, si tomamos diversos valore para y:

$y = 0$*:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 0\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = x|R_2 = 0\right] &= 0,\ \textit{para cualquier } x \geq 1,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = 0\right] = 0.$$

Para $y = 1$*,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 1\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 1\right] &= 1,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = 1\right] = 1.$$

Para $y = 2$*,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 2\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 2\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 2\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 3|R_2 = 2\right] &= 0,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = 2\right] = 3.$$

Para $y = 3$*,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 3\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 3\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 3\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 3|R_2 = 3\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 4|R_2 = 3\right] &= 0,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = 3\right] = 6.$$

En general, para $k \geq 0$*,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = k\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = j|R_2 = k\right] &= 1,\ \textit{para } 1 \leq j \leq k,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = j|R_2 = k\right] &= 0,\ \textit{para } j > k,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = k\right] = \frac{k\left(k+1\right)}{2}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[R_1\right] &= \sum_y \mathbb{E}\left[R_1|R_2 = y\right]\mathbb{P}\left[R_2 = y\right]\\ &= \sum_y \mathbb{P}\left[R_2 = y\right]\frac{y\left(y+1\right)}{2} = \sum_{y\geq 1}\left(\frac{y\left(y+1\right)}{2}\right)\frac{\left(\lambda t\right)^y}{y!}e^{-\lambda t}\\ &= \frac{\lambda t}{2}e^{-\lambda t}\sum_{y\geq 1}\left(y+1\right)\frac{\left(\lambda t\right)^{y-1}}{\left(y-1\right)!} = \frac{\lambda t}{2}e^{-\lambda t}\left(e^{\lambda t}\left(\lambda t + 2\right)\right)\\ &= \frac{\lambda t\left(\lambda t + 2\right)}{2},\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{E}\left[R_1\right] = \frac{\lambda t\left(\lambda t + 2\right)}{2}. \tag{33.60.9}$$

Además para $k \in Z^+$ fijo

$$\begin{aligned}
f_{R_1}\left(k\right) &= \mathbb{P}\left[R_1 = k\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = n\right]\mathbb{P}\left[R_2 = n\right]\\
&= \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = 0\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\
&+ \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = 2\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 2\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = j\right]\mathbb{P}\left[R_2 = j\right] + \cdots +
\end{aligned}$$

donde para

$k = 0$**:**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = 0\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 0\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\
+\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = j\right]\mathbb{P}\left[R_2 = j\right] = \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right].
\end{aligned}$$

$k = 1$**:**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = 1\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 0\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\
+\mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = j\right]\mathbb{P}\left[R_2 = j\right]\\
= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2 = n\right].
\end{aligned}$$

$k = 2$**:**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = 2\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 0\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\
+\mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 2\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 2\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = j\right]\mathbb{P}\left[R_2 = j\right]\\
= \sum_{n=2}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2 = n\right].
\end{aligned}$$

En general

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = k\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = 0\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\
+\mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = 2\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 2\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = k\right]\mathbb{P}\left[R_2 = k\right]\\
= \sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2 = n\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f_{R_1}\left(k\right) = \mathbb{P}\left[R_1 = k\right] = \sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2 = n\right].$$

Objetivos Principales

- *Encontrar las ecuaciones que modelan el comportamiento de una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC) con propiedades similares.*
- *Encontrar expresiones analíticas para las longitudes de las colas al momento en que el servidor llega a una de ellas para comenzar a dar servicio, así como de sus segundos momentos.*
- *Determinar las principales medidas de Desempeño para la RSVC tales como: Número de usuarios presentes en cada una de las colas del sistema cuando uno de los servidores está presente atendiendo, Tiempos que transcurre entre las visitas del servidor a la misma cola.*

33.61. Descripción de una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas

Consideremos una red de sistema de visitas cíclicas conformada por dos sistemas de visitas cíclicas, cada una con dos colas independientes, donde además se permite el intercambio de usuarios entre los dos sistemas en la segunda cola de cada uno de ellos.

Supóngase además que los arribos de los usuarios ocurren conforme a un proceso Poisson con tasa de llegada μ_1 y μ_2 para el sistema 1, mientras que para el sistema 2, lo hacen conforme a un proceso Poisson con tasa $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ respectivamente.

El traslado de un sistema a otro ocurre de manera que los tiempos entre llegadas de los usuarios a la cola dos del sistema 1 provenientes del sistema 2, se distribuye de manera exponencial con parámetro $\check{\mu}_2$.

Se considerarán intervalos de tiempo de la forma $[t, t+1]$. Los usuarios arriban por paquetes de manera independiente del resto de las colas. Se define el grupo de usuarios que llegan a cada una de las colas del sistema 1, caracterizadas por Q_1 y Q_2 respectivamente, en el intervalo de tiempo $[t, t+1]$ por $X_1(t), X_2(t)$. De igual manera se definen los procesos $\hat{X}_1(t), \hat{X}_2(t)$ para las colas del sistema 2, denotadas por $\hat{Q}_1$ y $\hat{Q}_2$ respectivamente.

Para el número de usuarios que se trasladan del sistema 2 al sistema 1, de la cola $\hat{Q}_2$ a la cola Q_2, en el intervalo de tiempo $[t, t+1]$, se define el proceso $Y_2(t)$.

El uso de la Función Generadora de Probabilidades (FGP's) nos permite determinar las Funciones de Distribución de Probabilidades Conjunta de manera indirecta sin necesidad de hacer uso de las propiedades de las distribuciones de probabilidad de cada uno de los procesos que intervienen en la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas.

En lo que respecta al servidor, en términos de los tiempos de visita a cada una de las colas, se definen las variables aleatorias τ_1, τ_2 para Q_1, Q_2 respectivamente; y ζ_1, ζ_2 para $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ del sistema 2. A los tiempos en que el servidor termina de atender en las colas $Q_1, Q_2, \hat{Q}_1, \hat{Q}_2$, se les denotará por $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$ respectivamente.

Los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por $\tau_2 - \overline{\tau}_1, \tau_1 - \overline{\tau}_2$ y $\zeta_2 - \overline{\zeta}_1, \zeta_1 - \overline{\zeta}_2$ para el sistema 1 y el sistema 2, respectivamente.

Cada uno de estos procesos con su respectiva FGP. Además, para cada una de las colas en cada sistema, el número de usuarios al tiempo en que llega el servidor a dar servicio está dado por el número de usuarios presentes en la cola al tiempo t, más el número de usuarios que llegan a la cola en el intervalo de tiempo $[\tau_i, \overline{\tau}_i]$.
Una vez definidas las Funciones Generadoras de Probabilidades Conjuntas se construyen las ecuaciones recursivas que permiten obtener la información sobre la longitud de cada una de las colas, al momento en que uno de los servidores llega a una de las colas para dar servicio, basándose en la información que se tiene sobre su llegada a la cola inmediata anterior.

33.61.1. Funciones Generadoras de Probabilidades

Para cada uno de los procesos de llegada a las colas $X_1, X_2, \hat{X}_1, \hat{X}_2$ y Y_2, con $\tilde{X}_2 = X_2 + Y_2$ anteriores se define su Función Generadora de Probabilidades (FGP):

$$\begin{aligned} P_1(z_1) &= \mathbb{E}\left[z_1^{X_1(t)}\right], \quad P_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{X_2(t)}\right], \quad \check{P}_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{Y_2(t)}\right], \\ \hat{P}_1(w_1) &= \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{X}_1(t)}\right], \quad \hat{P}_2(w_2) = \mathbb{E}\left[w_2^{\hat{X}_2(t)}\right], \quad \tilde{P}_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{\tilde{X}_2(t)}\right]. \end{aligned}$$

Con primer momento definidos por

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mathbb{E}\left[X_1(t)\right] = P_1^{(1)}(1), \quad \mu_2 = \mathbb{E}\left[X_2(t)\right] = P_2^{(1)}(1), \\ \check{\mu}_2 &= \mathbb{E}\left[Y_2(t)\right] = \check{P}_2^{(1)}(1), \quad \hat{\mu}_1 = \mathbb{E}\left[\hat{X}_1(t)\right] = \hat{P}_1^{(1)}(1), \\ \hat{\mu}_2 &= \mathbb{E}\left[\hat{X}_2(t)\right] = \hat{P}_2^{(1)}(1), \quad \tilde{\mu}_2 = \mathbb{E}\left[\tilde{X}_2(t)\right] = \tilde{P}_2^{(1)}(1). \end{aligned}$$

En lo que respecta al servidor, en términos de los tiempos de visita a cada una de las colas, se denotarán por $B_1(t), B_2(t)$ los procesos correspondientes a las variables aleatorias τ_1, τ_2 para Q_1, Q_2 respectivamente; y $\hat{B}_1(t), \hat{B}_2(t)$ con parámetros ζ_1, ζ_2 para $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ del sistema 2. Y a los tiempos en que el servidor termina de atender en las colas $Q_1, Q_2, \hat{Q}_1, \hat{Q}_2$, se les denotará por $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$ respectivamente. Entonces, los tiempos de servicio están dados por las diferencias $\overline{\tau}_1 - \tau_1, \overline{\tau}_2 - \tau_2$ para Q_1, Q_2, y $\overline{\zeta}_1 - \zeta_1, \overline{\zeta}_2 - \zeta_2$ para $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ respectivamente.
Sus procesos se definen por:

$$\begin{aligned} S_1(z_1) &= \mathbb{E}\left[z_1^{\overline{\tau}_1 - \tau_1}\right], \quad S_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_1^{\overline{\tau}_2 - \tau_2}\right], \\ \hat{S}_1(w_1) &= \mathbb{E}\left[w_1^{\overline{\zeta}_1 - \zeta_1}\right], \quad \hat{S}_2(w_2) = \mathbb{E}\left[w_2^{\overline{\zeta}_2 - \zeta_2}\right], \end{aligned}$$

con primer momento dado por:

$$s_1 = \mathbb{E}\left[\overline{\tau}_1 - \tau_1\right], \quad s_2 = \mathbb{E}\left[\overline{\tau}_2 - \tau_2\right], \quad \hat{s}_1 = \mathbb{E}\left[\overline{\zeta}_1 - \zeta_1\right], \quad \hat{s}_2 = \mathbb{E}\left[\overline{\zeta}_2 - \zeta_2\right].$$

Análogamente los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por $\tau_2 - \overline{\tau}_1, \tau_1 - \overline{\tau}_2$ y $\zeta_2 - \overline{\zeta}_1, \zeta_1 - \overline{\zeta}_2$ para el sistema 1 y el sistema 2, respectivamente.
La FGP para estos tiempos de traslado están dados por

$$
\begin{array}{ll}
R_1\left(z_1\right) = \mathbb{E}\left[z_1^{\tau_2 - \overline{\tau}_1}\right], & R_2\left(z_2\right) = \mathbb{E}\left[z_2^{\tau_1 - \overline{\tau}_2}\right], \\
\hat{R}_1\left(w_1\right) = \mathbb{E}\left[w_1^{\zeta_2 - \overline{\zeta}_1}\right], & \hat{R}_2\left(w_2\right) = \mathbb{E}\left[w_2^{\zeta_1 - \overline{\zeta}_2}\right],
\end{array}
$$

y al igual que como se hizo con anterioridad

$$
\begin{array}{ll}
r_1 = R_1^{(1)}\left(1\right) = \mathbb{E}\left[\tau_2 - \overline{\tau}_1\right], & r_2 = R_2^{(1)}\left(1\right) = \mathbb{E}\left[\tau_1 - \overline{\tau}_2\right], \\
\hat{r}_1 = \hat{R}_1^{(1)}\left(1\right) = \mathbb{E}\left[\zeta_2 - \overline{\zeta}_1\right], & \hat{r}_2 = \hat{R}_2^{(1)}\left(1\right) = \mathbb{E}\left[\zeta_1 - \overline{\zeta}_2\right].
\end{array}
$$

Se definen los procesos de conteo para el número de usuarios en cada una de las colas al tiempo t, $L_1\left(t\right), L_2\left(t\right)$, para $H_1\left(t\right), H_2\left(t\right)$ del sistema 1, respectivamente. Y para el segundo sistema, se tienen los procesos $\hat{L}_1\left(t\right), \hat{L}_2\left(t\right)$ para $\hat{H}_1\left(t\right), \hat{H}_2\left(t\right)$, respectivamente, es decir,

$$
H_1\left(t\right) = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(t)}\right], \quad H_2\left(t\right) = \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(t)}\right], \quad \hat{H}_1\left(t\right) = \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(t)}\right], \quad \hat{H}_2\left(t\right) = \mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2(t)}\right].
$$

Por lo dicho anteriormente se tiene que el número de usuarios presentes en los tiempos $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$, es cero, es decir, $L_i\left(\overline{\tau_i}\right) = 0$, y $\hat{L}_i\left(\overline{\zeta_i}\right) = 0$ para i=1,2 para cada uno de los dos sistemas.
Para cada una de las colas en cada sistema, el número de usuarios al tiempo en que llega el servidor a dar servicio está dado por el número de usuarios presentes en la cola al tiempo $t = \tau_i, \zeta_i$, más el número de usuarios que llegan a la cola en el intervalo de tiempo $\left[\tau_i, \overline{\tau}_i\right], \left[\zeta_i, \overline{\zeta}_i\right]$, es decir

$$
\begin{array}{ll}
L_1\left(\overline{\tau}_1\right) = L_1\left(\tau_1\right) + X_1\left(\overline{\tau}_1 - \tau_1\right), & \hat{L}_1\left(\overline{\tau}_1\right) = \hat{L}_1\left(\tau_1\right) + \hat{X}_1\left(\overline{\tau}_1 - \tau_1\right), \\
\hat{L}_2\left(\overline{\tau}_1\right) = \hat{L}_2\left(\tau_1\right) + \hat{X}_2\left(\overline{\tau}_1 - \tau_1\right). &
\end{array}
$$

En el caso específico de Q_2, además, hay que considerar el número de usuarios que pasan del sistema 2 al sistema 1, a traves de $\hat{Q}_2$ mientras el servidor en Q_2 está ausente, es decir:

$$
L_2\left(\overline{\tau}_1\right) = L_2\left(\tau_1\right) + X_2\left(\overline{\tau}_1 - \tau_1\right) + Y_2\left(\overline{\tau}_1 - \tau_1\right). \tag{33.61.1}
$$

33.61.2. El problema de la ruina del jugador

Supongamos que se tiene un jugador que cuenta con un capital inicial de $\tilde{L}_0 \geq 0$ unidades, esta persona realiza una serie de dos juegos simultáneos e independientes de manera sucesiva, dichos eventos son independientes e idénticos entre sí para cada realización.

La ganancia en el n-ésimo juego es

$$
\tilde{X}_n = X_n + Y_n
$$

unidades de las cuales se resta una cuota de 1 unidad por cada juego simultáneo, es decir, se restan dos unidades por cada juego realizado.

En términos de la teoría de colas puede pensarse como el número de usuarios que llegan a una cola vía dos procesos de arribo distintos e independientes entre sí.
Su Función Generadora de Probabilidades (FGP) está dada por

$$
F\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{L}_0}\right]
$$

$$
\tilde{P}\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{X}_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n + Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n} z^{Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right]\mathbb{E}\left[z^{Y_n}\right] = P\left(z\right)\check{P}\left(z\right),
$$

entonces

$$
\tilde{\mu} \quad = \quad \mathbb{E}\left[\tilde{X}_n\right] = \tilde{P}\left[z\right] < 1.
$$

Sea $\tilde{L}_n$ el capital remanente después del n-ésimo juego. Entonces

$$
\tilde{L}_n \quad = \quad \tilde{L}_0 + \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \cdots + \tilde{X}_n - 2n.
$$

La ruina del jugador ocurre después del n-ésimo juego, es decir, la cola se vacía después del n-ésimo juego, entonces sea T definida como

$$T = min\left\{\tilde{L}_n = 0\right\}$$

Si $\tilde{L}_0 = 0$, entonces claramente $T = 0$. En este sentido T puede interpretarse como la longitud del periodo de tiempo que el servidor ocupa para dar servicio en la cola, comenzando con $\tilde{L}_0$ grupos de usuarios presentes en la cola, quienes arribaron conforme a un proceso dado por $\tilde{P}(z)$.

Sea $g_{n,k}$ la probabilidad del evento de que el jugador no caiga en ruina antes del n-ésimo juego, y que además tenga un capital de k unidades antes del n-ésimo juego, es decir,
Dada $n \in \{1, 2, \ldots, \}$ y $k \in \{0, 1, 2, \ldots, \}$

$$g_{n,k} := P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1, \ldots, n, \tilde{L}_n = k\right\}$$

la cual además se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
g_{n,k} &= P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1, \ldots, n, \tilde{L}_n = k\right\} = \sum_{j=1}^{k+1} g_{n-1,j} P\left\{\tilde{X}_n = k - j + 1\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1\right\} = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1, Y_n = l\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1 | Y_n = l\right\} P\left\{Y_n = l\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n = k - j - l + 1\right\} P\left\{Y_n = l\right\}
\end{aligned}$$

es decir

$$g_{n,k} = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n = k - j - l + 1\right\} P\left\{Y_n = l\right\} \qquad (33.61.2)$$

además

$$g_{0,k} = P\left\{\tilde{L}_0 = k\right\}. \qquad (33.61.3)$$

Se definen las siguientes FGP:

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k} z^k, \text{ para } n = 0, 1, \ldots, \qquad (33.61.4)$$

$$G(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z) w^n. \qquad (33.61.5)$$

En particular para $k = 0$,

$$g_{n,0} = G_n(0) = P\left\{\tilde{L}_j > 0, \text{ para } j < n, \text{ y } \tilde{L}_n = 0\right\} = P\left\{T = n\right\},$$

además

$$G(0, w) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(0) w^n = \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{T = n\right\} w^n = \mathbb{E}\left[w^T\right]$$

la cuál resulta ser la FGP del tiempo de ruina T.

Proposición 33.69 *Sean $G_n(z)$ y $G(z, w)$ definidas como en (33.80.4) y (33.80.5) respectivamente, entonces*

$$G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z). \qquad (33.61.6)$$

Además

$$G(z, w) = \frac{zF(z) - wP(z)G(0, w)}{z - wR(z)}, \qquad (33.61.7)$$

con un único polo en el círculo unitario, además, el polo es de la forma $z = \theta(w)$ y satisface que

i) $\tilde{\theta}(1) = 1$,

ii) $\tilde{\theta}^{(1)}(1) = \frac{1}{1-\tilde{\mu}}$,

iii) $\tilde{\theta}^{(2)}(1) = \frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2} + \frac{\tilde{\sigma}}{(1-\tilde{\mu})^3}$.

Finalmente, además se cumple que

$$\mathbb{E}\left[w^T\right] = G(0,w) = F\left[\tilde{\theta}(w)\right]. \tag{33.61.8}$$

Multiplicando las ecuaciones (33.80.2) y (33.80.3) por el término z^k*:*

$$\begin{aligned}
g_{n,k}z^k &= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\left\{X_n = k-j-l+1\right\}P\left\{Y_n = l\right\}z^k,\\
g_{0,k}z^k &= P\left\{\tilde{L}_0 = k\right\}z^k,
\end{aligned}$$

ahora sumamos sobre k

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k}z^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\left\{X_n = k-j-l+1\right\}P\left\{Y_n = l\right\}z^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^k\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\}P\left\{Y_n = l\right\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+(j+l-1)-(j+l-1)}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\}P\left\{Y_n = l\right\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}z^{j-1}P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\}z^{k-(j+l-1)}P\left\{Y_n = l\right\}z^l\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{k=j+l-1}^{\infty} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\}z^{k-(j+l-1)}P\left\{Y_n = l\right\}z^l\\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{l=1}^{j}\sum_{k=j+l-1}^{\infty} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\}z^{k-(j+l-1)}P\left\{Y_n = l\right\}z^l\\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\}z^{k-(j+l-1)}P\left\{Y_n = l\right\}z^l
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\}z^{k-(j+l-1)}\sum_{l=1}^{j} P\left\{Y_n = l\right\}z^l\\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j}z^{j-1}\sum_{l=1}^{\infty} P\left\{Y_n = l\right\}z^l\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\}z^{k-(j+l-1)}\\
&= \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z)\sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\}z^{k-(j+l-1)}\\
&= \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z)P(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z),
\end{aligned}$$

es decir la ecuación (33.80.4) se puede reescribir como

$$G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z). \tag{33.61.9}$$

Por otra parte recordemos la ecuación (33.80.4)

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k}z^k, \text{ entonces } \frac{G_n(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} g_{n,k}z^{k-1},$$

Por lo tanto utilizando la ecuación (33.80.9):

$$\begin{aligned}
G(z,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z)\, w^n = G_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(z)\, w^n = F(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[G_n(z) - G_n(0)\right] w^n \frac{\tilde{P}(z)}{z} \\
&= F(z) + \frac{w}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left[G_n(z) - G_n(0)\right] w^{n-1} \tilde{P}(z)
\end{aligned}$$

es decir

$$G(z,w) = F(z) + \frac{w}{z}\left[G(z,w) - G(0,w)\right]\tilde{P}(z),$$

entonces

$$\begin{aligned}
G(z,w) = F(z) + \frac{w}{z}\left[G(z,w) - G(0,w)\right]\tilde{P}(z) &= F(z) + \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\, G(z,w) - \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\, G(0,w) \\
&\Leftrightarrow \\
G(z,w)\left\{1 - \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\right\} &= F(z) - \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\, G(0,w),
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$G(z,w) = \frac{zF(z) - w\tilde{P}(z)\, G(0,w)}{1 - w\tilde{P}(z)}. \tag{33.61.10}$$

Ahora $G(z,w)$ es analítica en $|z| = 1$. Sean z, w tales que $|z| = 1$ y $|w| \leq 1$, como $\tilde{P}(z)$ es FGP

$$|z - \left(z - w\tilde{P}(z)\right)| < |z| \Leftrightarrow |w\tilde{P}(z)| < |z|$$

es decir, se cumplen las condiciones del Teorema de Rouché y por tanto, z y $z - w\tilde{P}(z)$ tienen el mismo número de ceros en $|z| = 1$. Sea $z = \tilde{\theta}(w)$ la solución única de $z - w\tilde{P}(z)$, es decir

$$\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) = 0, \tag{33.61.11}$$

con $|\tilde{\theta}(w)| < 1$. Cabe hacer mención que $\tilde{\theta}(w)$ es la FGP para el tiempo de ruina cuando $\tilde{L}_0 = 1$. Considerando la ecuación (33.80.11)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)|_{w=1} - \frac{\partial}{\partial w}\left\{w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}|_{w=1} = 0 \\
&\tilde{\theta}^{(1)}(w)|_{w=1} - \frac{\partial}{\partial w}w\left\{\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}|_{w=1} - w\frac{\partial}{\partial w}\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)|_{w=1} = 0 \\
&\tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) - w\left\{\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial\tilde{\theta}(w)} \cdot \frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}|_{w=1}\right\} = 0 \\
&\tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right) \cdot \tilde{\theta}^{(1)}(1) = 0
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
&\tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right) \cdot \tilde{\theta}^{(1)}(1) = \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) \\
&\tilde{\theta}^{(1)}(1)\left(1 - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\right) = \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) \\
&\tilde{\theta}^{(1)}(1) = \frac{\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{\left(1 - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\right)} = \frac{1}{1 - \tilde{\mu}}.
\end{aligned}$$

Ahora determinemos el segundo momento de $\tilde{\theta}(w)$, nuevamente consideremos la ecuación (33.80.11):

$$\begin{aligned}
&\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\} = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}\right\} = 0
\end{aligned}$$

luego

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)-\frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\} &= \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)-\frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}-\left[\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+w\frac{\partial}{\partial w}R\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}-\left[\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+w\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial w}\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}\right]\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\frac{\partial}{\partial w}\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)-\frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial\tilde{\theta}(w)}\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\\
&- w\frac{\partial\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w)-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\frac{\partial\tilde{\theta}^{(1)}(w)}{\partial w}\\
&= \tilde{\theta}^{(2)}(w)-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\\
&- w\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\left(\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right)^2-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(2)}(w)\\
&= \tilde{\theta}^{(2)}(w)-2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\\
&- w\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\left(\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right)^2-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(2)}(w)\\
&= \tilde{\theta}^{(2)}(w)\left[1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]-\tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(2)}(w)\left[1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right] &- \tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]=0\\
\tilde{\theta}^{(2)}(w) &= \frac{\tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2R^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}\\
\tilde{\theta}^{(2)}(w) &= \frac{\tilde{\theta}^{(1)}(w)w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}+\frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}
\end{aligned}
$$

si evaluamos la expresión anterior en $w=1$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(2)}(1) &= \frac{\left(\tilde{\theta}^{(1)}(1)\right)^2\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}+\frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(1)\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}=\frac{\left(\tilde{\theta}^{(1)}(1)\right)^2\tilde{P}^{(2)}(1)}{1-\tilde{P}^{(1)}(1)}+\frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(1)\tilde{P}^{(1)}(1)}{1-\tilde{P}^{(1)}(1)}\\
&= \frac{\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}}\right)^2\tilde{P}^{(2)}(1)}{1-\tilde{\mu}}+\frac{2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}}\right)\tilde{\mu}}{1-\tilde{\mu}}=\frac{\tilde{P}^{(2)}(1)}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{2\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}=\frac{\sigma^2-\tilde{\mu}+\tilde{\mu}^2}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{2\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}\\
&= \frac{\sigma^2-\tilde{\mu}+\tilde{\mu}^2+2\tilde{\mu}(1-\tilde{\mu})}{(1-\tilde{\mu})^3}
\end{aligned}
$$

es decir

$$
\tilde{\theta}^{(2)}(1) = \frac{\sigma^2+\tilde{\mu}-\tilde{\mu}^2}{(1-\tilde{\mu})^3}=\frac{\sigma^2}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{\tilde{\mu}(1-\tilde{\mu})}{(1-\tilde{\mu})^3}=\frac{\sigma^2}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}.
$$

Corolario 33.12 *El tiempo de ruina del jugador tiene primer y segundo momento dados por*

$$
\mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{1-\tilde{\mu}} \tag{33.61.12}
$$

$$
Var[T] = \frac{Var\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^3}. \tag{33.61.13}
$$

33.62. Procesos de Llegadas a las colas en la RSVC

Se definen los procesos de llegada de los usuarios a cada una de las colas dependiendo de la llegada del servidor pero del sistema al cuál no pertenece la cola en cuestión:
Para el sistema 1 y el servidor del segundo sistema

$$F_{i,j}\left(z_i;\zeta_j\right)=\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\zeta_j)}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[L_i\left(\zeta_j\right)=k\right]z_i^k,\ \textit{para } i,j=1,2.$$

Ahora se definen para el segundo sistema y el servidor del primero

$$\hat{F}_{i,j}\left(w_i;\tau_j\right) = \mathbb{E}\left[w_i^{\hat{L}_i(\tau_j)}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\hat{L}_i\left(\tau_j\right)=k\right]w_i^k,\ \textit{para } i,j=1,2.$$

Ahora, con lo anterior definamos la FGP conjunta para el segundo sistema;

$$\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_j)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_j)}\right] = \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_j)}\right]\mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2(\tau_j)}\right]=\hat{F}_{1,j}\left(w_1;\tau_j\right)\hat{F}_{2,j}\left(w_2;\tau_j\right)=\hat{F}_j\left(w_1,w_2;\tau_j\right).$$

Con respecto al sistema 1 se tiene la FGP conjunta con respecto al servidor del otro sistema:

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_j)}z_2^{L_2(\zeta_j)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_j)}\right]\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\zeta_j)}\right]=F_{1,j}\left(z_1;\zeta_j\right)F_{2,j}\left(z_2;\zeta_j\right)=F_j\left(z_1,z_2;\zeta_j\right).$$

Ahora analicemos la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas, entonces se define la PGF conjunta al tiempo t para los tiempos de visita del servidor en cada una de las colas, para comenzar a dar servicio, definidos anteriormente al tiempo $t=\{\tau_1,\tau_2,\zeta_1,\zeta_2\}$:

$$F_j\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{2}z_i^{L_i(\tau_j)}\prod_{i=1}^{2}w_i^{\hat{L}_i(\tau_j)}\right] \tag{33.62.1}$$

$$\hat{F}_j\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{2}z_i^{L_i(\zeta_j)}\prod_{i=1}^{2}w_i^{\hat{L}_i(\zeta_j)}\right] \tag{33.62.2}$$

para $j=1,2$. Entonces, con la finalidad de encontrar el número de usuarios presentes en el sistema cuando el servidor deja de atender una de las colas de cualquier sistema se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]=\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]\\ =\ &\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)+X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)+Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)+\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)+\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]\end{aligned}$$

utilizando la ecuacion dada (33.81.1), luego

$$\begin{aligned}&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right\}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\end{aligned}$$

Aplicando la ecuación (33.80.1)

$$= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]$$

dado que los arribos a cada una de las colas son independientes, podemos separar la esperanza para los procesos de llegada a Q_1 y Q_2 en τ_1
Recordando que $\tilde{X}_2\left(z_2\right)=X_2\left(z_2\right)+Y_2\left(z_2\right)$ se tiene

$$\begin{aligned}&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{\tilde{P}_2\left(z_2\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\hat{P}_1\left(w_1\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\hat{P}_2\left(w_2\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right\}^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\end{aligned}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)^{L_1(\tau_1)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1)\\
&\equiv F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right)
\end{aligned}
$$

Las igualdades anteriores son ciertas pues el número de usuarios que llegan a $\hat{Q}_2$ durante el intervalo $[\tau_1,\overline{\tau}_1]$ aún no han sido atendidos por el servidor del sistema 2 y por tanto aún no pueden pasar al sistema 1 por Q_2. Por tanto el número de usuarios que pasan de $\hat{Q}_2$ a Q_2 en el intervalo de tiempo $[\tau_1,\overline{\tau}_1]$ depende de la política de traslado entre los dos sistemas, conforme a la sección anterior.

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right] &= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right) && (33.62.3)\\
&= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1) && (33.62.4)
\end{aligned}
$$

Utilizando un razonamiento análogo para $\overline{\tau}_2$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)+X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)+\hat{X}_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)+\hat{X}_2(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}z_1^{X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}z_1^{X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}P_1(z_1)^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\hat{P}_1(w_1)^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\hat{P}_2(w_2)^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]
\end{aligned}
$$

utlizando la proposición relacionada con la ruina del jugador

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}\left\{P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right\}^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)^{L_2(\tau_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
&= F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2)
\end{aligned}
$$

entonces se define

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right] &= F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), w_1, w_2\right) && (33.62.5)\\
&\equiv F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2) && (33.62.6)
\end{aligned}
$$

Ahora para $\overline{\zeta}_1$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_1^{X_1(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}z_2^{X_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}z_2^{Y_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[z_1^{X_1(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[P_1(z_1)^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1}\tilde{P}_2(z_2)^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1}\hat{P}_2(w_2)^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[\left\{P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right\}^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right)^{\hat{L}_1(\zeta_1)}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right]\\
&= F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right)
\end{aligned}
$$

es decir

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right] &= \hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right) && (33.62.7)\\
&= F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right) && (33.62.8)
\end{aligned}
$$

Finalmente para $\overline{\zeta}_2$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)} z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)} z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}\right] \\
= & \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)} z_1^{X_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)} z_2^{L_2(\zeta_2)} z_2^{X_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)} z_2^{Y_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)} w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)} w_1^{\hat{X}_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}\right] \\
= & \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)} z_2^{L_2(\zeta_2)}\right] \mathbb{E}\left[z_1^{X_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)} z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)} w_1^{\hat{X}_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)} w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\right] \\
= & \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)} z_2^{L_2(\zeta_2)}\right] \mathbb{E}\left[P_1(z_1)^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2} \tilde{P}_2(z_2)^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2} \hat{P}(w_1)^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2} w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\right] \\
= & \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)} z_2^{L_2(\zeta_2)}\right] \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)} \left\{P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \hat{P}(w_1)\right\}^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}\right] \\
= & \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)} z_2^{L_2(\zeta_2)}\right] \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)} \hat{\theta}_2 \left(P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \hat{P}(w_1)\right)^{\hat{L}_2\zeta_2}\right] \\
= & F_2(z_1, z_2; \zeta_2) \hat{F}_2\left(w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1)\right)\right]
\end{aligned}$$

es decir

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)} z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right] = \hat{F}_2\left(z_1, z_2, w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1)\right)\right) \quad (33.62.9)$$

$$= F_2(z_1, z_2; \zeta_2) \hat{F}_2\left(w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1)\right)\right) \quad (33.62.10)$$

33.63. Ecuaciones Recursivas para la R.S.V.C.

Con lo desarrollado hasta ahora podemos encontrar las ecuaciones recursivas que modelan la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (R.S.V.C):

$$\begin{aligned}
F_2(z_1, z_2, w_1, w_2) &= R_1(z_1, z_2, w_1, w_2) \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right] \\
F_1(z_1, z_2, w_1, w_2) &= R_2(z_1, z_2, w_1, w_2) \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)} z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right] \\
\hat{F}_2(z_1, z_2, w_1, w_2) &= \hat{R}_1(z_1, z_2, w_1, w_2) \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)} z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right] \\
\hat{F}_1(z_1, z_2, w_1, w_2) &= \hat{R}_2(z_1, z_2, w_1, w_2) \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)} z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)} w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)} w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right]
\end{aligned}$$

que son equivalentes a las siguientes ecuaciones

$$F_2(z_1, z_2, w_1, w_2) = R_1\left(P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \prod_{i=1}^{2} \hat{P}_i(w_i)\right) F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right) \quad (33.63.1)$$

$$F_1(z_1, z_2, w_1, w_2) = R_2\left(P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \prod_{i=1}^{2} \hat{P}_i(w_i)\right) F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2)\right), w_1, w_2\right) \quad (33.63.2)$$

$$\hat{F}_2(z_1, z_2, w_1, w_2) = \hat{R}_1\left(P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \prod_{i=1}^{2} \hat{P}_i(w_i)\right) \hat{F}_1\left(z_1, z_2, \hat{\theta}_1\left(P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_2(w_2)\right), w_2\right) \quad (33.63.3)$$

$$\hat{F}_1(z_1, z_2, w_1, w_2) = \hat{R}_2\left(P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \prod_{i=1}^{2} \hat{P}_i(w_i)\right) \hat{F}_2\left(z_1, z_2, w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1)\right)\right) \quad (33.63.4)$$

33.63.1. Tiempos de Traslado del Servidor

Para

$$R_1(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = R_1\left((P_1(z_1) \tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2)\right) \quad (33.63.5)$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial R_1(\mathbf{z}, \mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = R_1^{(1)}(1) P_1^{(1)}(1) = r_1\mu_1, \quad \frac{\partial R_1(\mathbf{z}, \mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = R_1^{(1)}(1) \tilde{P}_2^{(1)}(1) = r_1\tilde{\mu}_2, \\
&\frac{\partial R_1(\mathbf{z}, \mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = R_1^{(1)}(1) \hat{P}_1^{(1)}(1) = r_1\hat{\mu}_1, \quad \frac{\partial R_1(\mathbf{z}, \mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = R_1^{(1)}(1) \hat{P}_2^{(1)}(1) = r_1\hat{\mu}_2,
\end{aligned}$$

Análogamente se tiene

$$R_2(\mathbf{z},\mathbf{w}) = R_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.63.6}$$

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial R_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = R_2^{(1)}(1)P_1^{(1)}(1) = r_2\mu_1, & \frac{\partial R_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = R_2^{(1)}(1)\tilde{P}_2^{(1)}(1) = r_2\tilde{\mu}_2,\\
\frac{\partial R_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = R_2^{(1)}(1)\hat{P}_1^{(1)}(1) = r_2\hat{\mu}_1, & \frac{\partial R_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = R_2^{(1)}(1)\hat{P}_2^{(1)}(1) = r_2\hat{\mu}_2,
\end{array}$$

Para el segundo sistema:

$$\hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w}) = \hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.63.7}$$

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_1^{(1)}(1)P_1^{(1)}(1) = \hat{r}_1\mu_1, & \frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_1^{(1)}(1)\tilde{P}_2^{(1)}(1) = \hat{r}_1\tilde{\mu}_2,\\
\frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_1^{(1)}(1)\hat{P}_1^{(1)}(1) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1, & \frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_1^{(1)}(1)\hat{P}_2^{(1)}(1) = \hat{r}_1\hat{\mu}_2,
\end{array}$$

Finalmente

$$\hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w}) = \hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.63.8}$$

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_2^{(1)}(1)P_1^{(1)}(1) = \hat{r}_2\mu_1, & \frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_2^{(1)}(1)\tilde{P}_2^{(1)}(1) = \hat{r}_2\tilde{\mu}_2,\\
\frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_2^{(1)}(1)\hat{P}_1^{(1)}(1) = \hat{r}_2\hat{\mu}_1, & \frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \hat{R}_2^{(1)}(1)\hat{P}_2^{(1)}(1) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2.
\end{array}$$

33.63.2. Usuarios presentes en la cola

Hagamos lo correspondiente con las siguientes expresiones obtenidas en la sección anterior: Recordemos que

$$F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right) = F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2\right)\hat{F}_1(w_1, w_2;\tau_1)$$

entonces

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} & = & 0\\
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} & = & \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial \theta_1}{\partial \tilde{P}_2}\cdot\frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial z_2} + \frac{\partial F_1}{\partial z_2}\\
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} & = & \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial \theta_1}{\partial \hat{P}_1}\cdot\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial w_1} + \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_1}\\
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} & = & \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial \theta_1}{\partial \hat{P}_2}\cdot\frac{\partial \hat{P}_2}{\partial w_2} + \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_2}
\end{array}$$

para τ_2*:*

$$F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), w_1, w_2\right) = F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1, w_2;\tau_2)$$

al igual que antes

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\partial F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), w_1, w_2\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} & = & \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z_2} + \frac{\partial F_2}{\partial z_1}\\
\frac{\partial F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), w_1, w_2\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} & = & 0\\
\frac{\partial F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), w_1, w_2\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} & = & \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial \hat{P}_1}\cdot\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial w_1} + \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial w_1}\\
\frac{\partial F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), w_1, w_2\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} & = & \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial \hat{P}_2}\cdot\frac{\partial \hat{P}_2}{\partial w_2} + \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial w_2}
\end{array}$$

Ahora para el segundo sistema

$$\hat{F}_1\left(z_1, z_2, \hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right), w_2\right) = F_1\left(z_1, z_2; \zeta_1\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right), w_2\right)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{F}_1\left(z_1, z_2, \hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right), w_2\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_1}\cdot\frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z_1} + \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\\
\frac{\partial \hat{F}_1\left(z_1, z_2, \hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right), w_2\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_1}\cdot\frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial \tilde{P}_2}\cdot\frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial z_2} + \frac{\partial F_1}{\partial z_2}\\
\frac{\partial \hat{F}_1\left(z_1, z_2, \hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right), w_2\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\
\frac{\partial \hat{F}_1\left(z_1, z_2, \hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right), w_2\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_1}\cdot\frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial \hat{P}_2}\cdot\frac{\partial \hat{P}_2}{\partial w_2} + \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_2}
\end{aligned}$$

Finalmente para ζ_2

$$\hat{F}_2\left(z_1, z_2, w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right) \quad = \quad F_2\left(z_1, z_2; \zeta_2\right)\hat{F}_2\left(w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right]$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{F}_2\left(z_1, z_2, w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z_1} + \frac{\partial F_2}{\partial z_1}\\
\frac{\partial \hat{F}_2\left(z_1, z_2, w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial \tilde{P}_2}\cdot\frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial z_2} + \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\\
\frac{\partial \hat{F}_2\left(z_1, z_2, w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial \hat{P}_1}\cdot\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial w_1} + \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial w_1}\\
\frac{\partial \hat{F}_2\left(z_1, z_2, w_1, \hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0
\end{aligned}$$

33.63.3. Ecuaciones Recursivas

Entonces, de todo lo desarrollado hasta ahora se tienen las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_1\mu_1\\
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= = r_1\tilde{\mu}_2 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2 + f_1(2)\\
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_1\hat{\mu}_1 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{1,1}(1)\\
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_1\hat{\mu}_2 + f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1)\\
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_2\mu_1 + f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\mu_1 + f_2(1)\\
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_2\tilde{\mu}_2\\
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_2\hat{\mu}_1 + f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{F}^{(1)}_{2,1}(1)\\
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= r_2\hat{\mu}_2 + f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{F}^{(1)}_{2,2}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_1\mu_1 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1 + F^{(1)}_{1,1}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_1\mu_2 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,1}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_1\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 + \hat{f}_1(2)\\
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_2\mu_1 + \hat{f}_2(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1 + F^{(1)}_{1,2}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + F^{(1)}_{2,2}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_2\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{f}_2(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{r}_2\hat{\mu}_2
\end{aligned}
$$

Es decir, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
f_2(1) &= r_1\mu_1\\
f_1(2) &= r_2\tilde{\mu}_2\\
f_2(2) &= r_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\left(\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+f_1(2)=\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2+r_2\tilde{\mu}_2\\
&= \left(r_1+r_2+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2=\left(r+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2\\
f_2(3) &= r_1\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\left(\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\hat{F}^{(1)}_{1,1}(1)=\hat{\mu}_1\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}\\
f_2(4) &= r_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\hat{F}^{(1)}_{2,1}(1)=\hat{\mu}_2\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_1}\\
f_1(1) &= r_2\mu_1+\mu_1\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+r_1\mu_1=\mu_1\left(r_1+r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\\
&= \mu_1\left(r+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\\
f_1(3) &= r_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\hat{F}^{(1)}_{1,2}(1)=\hat{\mu}_1\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}\\
f_1(4) &= r_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\hat{F}^{(1)}_{2,2}(1)=\hat{\mu}_2\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2}\\
\hat{f}_1(4) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_2\\
\hat{f}_2(3) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
\hat{f}_1(1) &= \hat{r}_2\mu_1+\mu_1\left(\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)+F^{(1)}_{1,2}(1)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2}\\
\hat{f}_1(2) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)+F^{(1)}_{2,2}(1)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}\\
\hat{f}_1(3) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\left(\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)+\hat{f}_2(3)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
&= \left(\hat{r}_1+\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1=\left(\hat{r}+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1\\
\hat{f}_2(1) &= \hat{r}_1\mu_1+\mu_1\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)+F^{(1)}_{1,1}(1)=\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1}\\
\hat{f}_2(2) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)+F^{(1)}_{2,1}(1)=\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1}\\
\hat{f}_2(4) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)+\hat{f}_1(4)=\hat{r}_1\hat{\mu}_2+\hat{r}_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\\
&= \left(\hat{r}+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
\begin{array}{lll}
f_1(1)=\mu_1\left(r+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) & f_1(2)=r_2\tilde{\mu}_2 & f_1(3)=\hat{\mu}_1\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}\\
f_1(4)=\hat{\mu}_2\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2} & f_2(1)=r_1\mu_1 & f_2(2)=\left(r+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2\\
f_2(3)=\hat{\mu}_1\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} & f_2(4)=\hat{\mu}_2\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_1} & \hat{f}_1(1)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2}\\
\hat{f}_1(2)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2} & \hat{f}_1(3)=\left(\hat{r}+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 & \hat{f}_1(4)=\hat{r}_2\hat{\mu}_2\\
\hat{f}_2(1)=\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1} & \hat{f}_2(2)=\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1} & \hat{f}_2(3)=\hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
 & \hat{f}_2(4)=\left(\hat{r}+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2 &
\end{array}
$$

33.63.4. Solución del Sistema de Ecuaciones Lineales

A saber, se puede demostrar que la solución del sistema de ecuaciones está dado por las siguientes expresiones, donde

$$\mu=\mu_1+\tilde{\mu}_2\ ,\ \hat{\mu}=\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\ ,\ r=r_1+r_2\ \text{y}\ \hat{r}=\hat{r}_1+\hat{r}_2$$

entonces

$$
\begin{array}{lll}
f_1(1) = r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu} & f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) & f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) \\
f_2(2) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu} & f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right) & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right) \\
\hat{f}_1(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) & \hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2} & \hat{f}_1(3) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}} \\
\hat{f}_2(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) & \hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1} & \hat{f}_2(4) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}
\end{array}
$$

A saber

$$
\begin{aligned}
f_1(3) &= \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2} = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2} = \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2} \\
&= \hat{\mu}_1\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu} + \frac{1}{\mu_2}\right) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1(4) &= \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2} = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2} = \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2} \\
&= \hat{\mu}_2\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu} + \frac{1}{\mu_2}\right) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(3) &= \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} = \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} \\
&= \hat{\mu}_1\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu} + \frac{1}{\mu_1}\right) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(4) &= \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\mu_1} = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}}{1-\mu_1}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} = \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right) + \frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1} \\
&= \hat{\mu}_2\left(r_1 + \frac{r\mu_1}{1-\mu} + \frac{1}{\mu_1}\right) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + \frac{r\mu_1}{1-\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_1(1) &= \mu_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\tilde{\mu}_2}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2} = \mu_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_2}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2} = \mu_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_1}{\mu_2} \\
&= \mu_1\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\mu_2}{1-\hat{\mu}} + \frac{1}{\hat{\mu}_2}\right) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2} + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2} = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_2}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2} = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_2(1) &= \mu_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1} = \mu_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_1}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1} = \mu_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1} \\
&= \mu_1\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}} + \frac{1}{\hat{\mu}_1}\right) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1} + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\tilde{\mu}_1}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1} = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_1}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1} = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1}
$$

33.64. Resultado Principal

Sean $\mu_1, \mu_2, \check{\mu}_2, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ y $\tilde{\mu}_2 = \mu_2 + \check{\mu}_2$ los valores esperados de los proceso definidos anteriormente, y sean $r_1, r_2, \hat{r}_1$ y $\hat{r}_2$ los valores esperado s de los tiempos de traslado del servidor entre las colas para cada uno de los sistemas de visitas cíclicas. Si se definen $\mu = \mu_1 + \tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2$, y $r = r_1 + r_2$ y $\hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$, entonces se tiene el siguiente resultado.

Teorema 33.72 *Supongamos que $\mu < 1$, $\hat{\mu} < 1$, entonces, el número de usuarios presentes en cada una de las colas que conforman la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas cuando uno de los servidores visita a alguna de ellas está dada por la solución del Sistema de Ecuaciones Lineales presentados arriba cuyas expresiones damos a continuación:*

$$
\begin{array}{lll}
f_1(1) = r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}, & f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2, & f_1(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right), \\
f_1(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right), & f_2(1) = r_1\mu_1, & f_2(2) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}, \\
f_2(3) = \hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right), & f_2(4) = \hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right), & \hat{f}_1(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right), \\
\hat{f}_1(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}, & \hat{f}_1(3) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}, & \hat{f}_1(4) = \hat{r}_2\hat{\mu}_2, \\
\hat{f}_2(1) = \mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right), & \hat{f}_2(2) = \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\tilde{\mu}_2}{\hat{\mu}_1}, & \hat{f}_2(3) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1, \\
 & \hat{f}_2(4) = \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}. &
\end{array}
$$

33.65. Segundos Momentos

Para poder determinar los segundos momentos para los tiempos de traslado del servidor es necesaria la siguiente proposición:

Proposición 33.70 *Sea $f(g(x)h(y))$ función continua tal que tiene derivadas parciales mixtas de segundo orden, entonces se tiene lo siguiente:*

$$\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) = \frac{\partial f(g(x)h(y))}{\partial x} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y)$$

por tanto

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) = \frac{\partial^2}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right)^2 \cdot h^2(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2} \cdot h(y) \quad (33.65.1)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) = \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial h(y)}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot g(x) \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y))\right\}$$

Demostración 33.12

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial f(g(x)h(y))}{\partial x} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y)\right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y))\right\} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2} \cdot h(y) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2} \cdot h(y) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right)^2 \cdot h^2(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2} \cdot h(y).
\end{aligned}
$$

Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial f(g(x)h(y))}{\partial x} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y)\right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y))\right\} \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial h(y)}{y} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial y\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial h(y)}{\partial y} \cdot g(x) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial h(y)}{\partial y} \\
&= \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial h(y)}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} f(g(x)h(y)) \cdot g(x) \cdot h(y) + \frac{\partial}{\partial x} f(g(x)h(y))\right\}
\end{aligned}
$$

Utilizando la proposición anterior (Proposiciíon 33.91)se tiene el siguiente resultado que me dice como calcular los segundos momentos para los procesos de traslado del servidor:

Proposición 33.71 *Sea R_i la Función Generadora de Probabilidades para el número de arribos a cada una de las colas de la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas definidas como en (33.83.4). Entonces las derivadas parciales están dadas por las siguientes expresiones:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_i^2} &= \left(\frac{\partial P_i(z_i)}{\partial z_i}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial^2 z_i}\\
&+ \left(\frac{\partial P_i(z_i)}{\partial z_i}\right)^2\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_i}
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_2\partial z_1} &= \frac{\partial\tilde{P}_2(z_2)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1(z_1)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_2\partial z_1}\\
&+ \frac{\partial\tilde{P}_2(z_2)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1(z_1)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial w_i\partial z_1} &= \frac{\partial\hat{P}_i(w_i)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1(z_1)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial w_i\partial z_1}\\
&+ \frac{\partial\hat{P}_i(w_i)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1(z_1)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_1},
\end{aligned}$$

finalmente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial w_i\partial z_2} &= \frac{\partial\hat{P}_i(w_i)}{\partial w_i}\cdot\frac{\partial\tilde{P}_2(z_2)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial w_i\partial z_2}\\
&+ \frac{\partial\hat{P}_i(w_i)}{\partial w_i}\cdot\frac{\partial\tilde{P}_2(z_2)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_2},
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$.

33.65.1. Sistema de Ecuaciones Lineales para los Segundos Momentos

En el apéndice (33.66) se demuestra que las ecuaciones para las ecuaciones parciales mixtas están dadas por:

$$\begin{aligned}
f_1(1,1) &= r_2P_1^{(2)}(1)+\mu_1^2R_2^{(2)}(1)+2\mu_1 r_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+f_2(1)\right)+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}P_1^{(2)}f_2(2)+\mu_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)f_2(2)\\
&+ \frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(1,2)+\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2,2)+f_2(1,2)\right)+f_2(1,1),\\
f_1(2,1) &= \mu_1 r_2\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+f_2(1)\right),\\
f_1(3,1) &= \mu_1\hat{\mu}_1 r_2+\mu_1\hat{\mu}_1R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+f_2(1)\right)+\mu_1 r_2\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\\
&+ \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+f_2(1)\right)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+\mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)f_2(2)+\mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2f_2(2,2)\\
&+ +\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(1,2),\\
f_1(4,1) &= \mu_1\hat{\mu}_2 r_2+\mu_1\hat{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+\mu_1 r_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)+r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+f_2(1)\right)\\
&+ \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+f_2(1)\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+\mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)f_2(2)+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2f_2(2,2)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2^{(1,2)},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_1(1,2) &= \mu_1\tilde{\mu}_2 r_2+\mu_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+f_2(1)\right),\\
f_1(2,2) &= \tilde{\mu}_2^2 R_2^{(2)}(1)+r_2\tilde{P}_2^{(2)}(1),\\
f_1(3,2) &= \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 r_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1),\\
f_1(4,2) &= \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1),\\
f_1(1,3) &= \mu_1\hat{\mu}_1 r_2+\mu_1\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+\mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)f_2(2)+r_2\mu_1\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\\
&+ r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+f_2(1)\right)+\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(1)+f_2(1)\right)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2,2)+f_2^{(1,2)}\right),\\
f_1(2,3) &= \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1),\\
f_1(3,3) &= \hat{\mu}_1^2 R_2^{(2)}(1)+r_2\hat{P}_1^{(2)}(1)+2r_2\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+\hat{\mu}_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)f_2(2)+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_1^{(2)}(1)f_2(2)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2,2)+2r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)+2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)+\hat{f}_{2,1}^{(2)}(1),\\
f_1(4,3) &= r_2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)f_2(2)+r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2)+r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)+\hat{f}_2(1,2),\\
f_1(1,4) &= r_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+\mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)f_2(2)+r_2\mu_1\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\\
&+ r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+f_2(1)\right)+\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+f_2(1)\right)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2,2)+f_2(1,2)\right),\\
f_1(2,4) &= r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1),\\
f_1(3,4) &= r_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_2^{(2)}(1)f_2(2)+r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2)+r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)+\hat{f}_2^{(2)}(1,2),\\
f_1(4,4) &= \hat{\mu}_2^2 R_2^{(2)}(1)+r_2\hat{P}_2^{(2)}(1)+2r_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+\hat{\mu}_2^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)f_2(2)+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}(1)f_2(2)\\
&+ 2r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2)+\hat{f}_{2,2}^{(2)}(1),\\
f_2(1,1) &= r_1 P_1^{(2)}(1)+\mu_1^2 R_1^{(2)}(1),\\
f_2(2,1) &= \mu_1\tilde{\mu}_2 r_1+\mu_1\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1)+r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+f_1(2)\right),\\
f_2(3,1) &= r_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)+r_1\mu_1\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1),\\
f_2(4,1) &= \mu_1\hat{\mu}_2 r_1+\mu_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}(1)+r_1\mu_1\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(1,2) &= r_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+f_1(2)\right),\\
f_2(2,2) &= \tilde{\mu}_2^2R_1^{(2)}(1)+r_1\tilde{P}_2^{(2)}(1)+2r_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+f_1(2)\right)+f_1(2,2)+\tilde{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1)\\
&+ \frac{1}{1-\mu_1}\tilde{P}_2^{(2)}(1)f_1(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,2)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,1)+f_1(1,2)\right),\\
f_2(3,2) &= \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1r_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1R_1^{(2)}(1)+r_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_1r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+f_1(2)\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1)\\
&+ \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+f_1(2)\right)\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}(1)f_1(1)+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1,2)\\
&+ \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1f_1(1,1),\\
f_2(4,2) &= \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2r_1+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1)+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_2r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+f_1(2)\right)\\
&+ \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+f_1(2)\right)\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,2)\\
&+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2f_1(1,1),\\
f_2(1,3) &= r_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1R_1^{(2)}(1)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)+r_1\mu_1\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1),\\
f_2(2,3) &= r_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1R_1^{(2)}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+r_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,1}(1)\\
&+ r_1\hat{\mu}_1\left(f_1(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right)++\left(f_1(2)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right)\hat{F}_{1,1}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\left(f_1(1,2)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,1)\right),\\
f_2(3,3) &= \hat{\mu}_1^2R_1^{(2)}(1)+r_1\hat{P}_1^{(2)}(1)+2r_1\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_1^2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1)+2r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1)\\
&+ \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_1^{(2)}(1)f_1(1)+2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)\hat{F}_{1,1}(1)+\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\right)^2f_1(1,1)+\hat{f}_{1,1}^{(2)}(1),\\
f_2(4,3) &= r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_{1,2}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_{1,1}(1)\\
&+ \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1)+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)\hat{F}_{1,2}(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_{1,1}(1)f_1(1)\\
&+ \hat{f}_1^{(2)}(1,2)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2f_1(2,2),\\
f_2(1,4) &= r_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\mu_1\hat{F}_{1,2}(1)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1),\\
f_2(2,4) &= r_1\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,2}(1)+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1)\\
&+ r_1\hat{\mu}_2\left(f_1(2)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right)+\left(f_1(2)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right)\hat{F}_{1,2}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(f_1(1,2)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,1)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(3,4) &= r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_{1,2}(1) + \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1} f_1(1) + 2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1} f_1(1) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1) f_1(1)\\
&+ +\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\hat{F}_{1,2}(1) f_1(1) + r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_{1,1}(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_{1,1}(1) f_1(1) + \hat{f}_1^{(2)}(1,2) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(1,1),\\
f_2(4,4) &= \hat{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\hat{P}_2^{(2)}(1) + 2r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)} + \hat{f}_{1,2}^{(2)}(1) + 2r_1\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\mu_1} f_1(1) + \hat{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}(1) f_1(1)\\
&+ \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_2^{(2)}(1) f_1(1) + 2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1} f_1(1)\hat{F}_{1,2}(1) + \left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(1,1),\\
\hat{f}_1(1,1) &= \hat{r}_2 P_1^{(2)}(1) + \mu_1^2\hat{R}_2^{(2)}(1) + 2\hat{r}_2\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + \frac{1}{1-\hat{\mu}_2} P_1^{(2)}(1)\hat{f}_2(2) + \mu_1^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)\\
&+ \left(\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 \hat{f}_2(2,2) + 2\hat{r}_2\mu_1 F_{2,1}(1) + 2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) F_{2,1}(1) + F_{2,1}^{(2)}(1),\\
\hat{f}_1(2,1) &= \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1) + \hat{r}_2\mu_1 F_{2,2}(1) + \frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + 2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2) + \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2} F_{2,2}(1)\hat{f}_2(2) + \mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 \hat{f}_2(2,2) + \hat{r}_2\tilde{\mu}_2 F_{2,1}(1)\\
&+ \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) F_{2,1}(1) + f_{2,1}^{(2)}(1),\\
\hat{f}_1(3,1) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1 + \mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1) + \hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + \hat{r}_2\hat{\mu}_1 F_{2,1}(1) + \hat{r}_2\mu_1\hat{f}_2(1)\\
&+ F_{2,1}(1)\hat{f}_2(1) + \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1(4,1) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2 + \mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + 2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 \hat{f}_2(2,2) + \hat{r}_2\hat{\mu}_2 F_{2,1}(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) F_{2,1}(1),\\
\hat{f}_1(1,2) &= \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1) + \mu_1\hat{r}_2 F_{2,2}(1) + \frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + 2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2) + \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2} F_{2,2}(1)\hat{f}_2(2) + \mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 \hat{f}_2(2,2)\\
&+ \hat{r}_2\tilde{\mu}_2 F_{2,1}(1) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) F_{2,1}(1) + f_2^{(2)}(1,2),\\
\hat{f}_1(2,2) &= \hat{r}_2\tilde{P}_2^{(2)}(1) + \tilde{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}(1) + 2\hat{r}_2\tilde{\mu}_2 F_{2,2}(1) + 2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + f_{2,2}^{(2)}(1)\\
&+ \frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2) + \tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2) + 2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2} F_{2,2}(1)\hat{f}_2(2) + \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2 \hat{f}_2(2,2),\\
\hat{f}_1(3,2) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1) + \hat{r}_2\hat{\mu}_1 F_{2,2}(1) + \hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2(1) + F_{2,2}(1)\hat{f}_2(1)\\
&+ \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1(4,2) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1) + \hat{r}_2\hat{\mu}_2 F_{2,2}(1) + \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + 2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2} F_{2,2}(1)\hat{f}_2(1) + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{f}_2(2,2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_1\left(1,3\right) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,1}(1)+\hat{r}_2\mu_1\hat{f}_2(1)\\
&+ F_{2,1}(1)\hat{f}_2(1)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1\left(2,3\right) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,2}(1)+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2(1)\\
&+ F_{2,2}(1)\hat{f}_2(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1\left(3,3\right) &= \hat{r}_2\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{f}_2(1)+\hat{f}_2(1,1),\\
\hat{f}_1\left(4,3\right) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{f}_2(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1\left(1,4\right) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_2(2)+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,1}(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1),\\
\hat{f}_1\left(2,4\right) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,2}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_2(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,2}(1)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2),\\
\hat{f}_1\left(3,4\right) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{f}_2(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2),\\
\hat{f}_1\left(4,4\right) &= \hat{r}_2P_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_2(2)\\
&+ \hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_2(2)+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2),\\
\hat{f}_2\left(,1\right) &= \hat{r}_1P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_1\mu_1F_{1,1}(1)+2\hat{r}_1\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}P_1^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_1(1)\\
&+ \mu_1^2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_1(1)+2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1^{(}1)F_{1,1}(1)+f_{1,1}^{(2)}(1)+\left(\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1^{(1,1)},\\
\hat{f}_2\left(2,1\right) &= \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\mu_1F_{1,2}(1)+\tilde{\mu}_2\hat{r}_1F_{1,1}(1)+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ 2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_1(1)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,2}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,1}(1)\\
&+ f_1^{(2)}(1,2)+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),\\
\hat{f}_2\left(3,1\right) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,1}(1)+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1(1),\\
\hat{f}_2\left(4,1\right) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_{1,1}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_1(1)+\hat{r}_1\mu_1\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+F_{1,1}(1)\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)\\
&+ \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{f}_1(1,2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,1)\right),\\
\hat{f}_2\left(1,2\right) &= \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\mu_1F_{1,2}(1)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_{1,1}(1)+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ 2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{f}_1(1)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,2}(1)\\
&+ \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,1}(1)+f_1^{(2)}(1,2)+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}_2(2,2) &= \hat{r}_1\tilde{P}_2^{(2)}(1)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_{1,2}(1)+f_{1,2}^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}F_{1,2}(1)\hat{f}_1(1)+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),\\
\hat{f}_2(3,2) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,2}(1)+\hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1),\\
\hat{f}_2(4,2) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)F_{1,2}(1)+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ \hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)\\
&+ F_{1,2}(1)\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{f}_1(1,2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,1)\right),\\
\hat{f}_2(1,3) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,1}(1)+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1),\\
\hat{f}_2(2,3) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,2}(1)+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1),\\
\hat{f}_2(3,3) &= \hat{r}_1\hat{P}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_1^{(2)}(1),\\
\hat{f}_2(4,3) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right),\\
\hat{f}_2(1,4) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_{1,1}(1)+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\hat{r}_1\mu_1\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)\\
&+ F_{1,1}(1)\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)\\
&+ \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2)+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),\\
\hat{f}_2(2,4) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_{1,2}(1)+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+F_{1,2}(1)\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\
&+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1),\\
\hat{f}_2(3,4) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right),\\
\hat{f}_2(4,4) &= \hat{r}_1\hat{P}_2^{(2)}(1)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\hat{\mu}_2\left(\hat{f}_1(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)+\hat{f}_1(2,2)\\
&+ \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{f}_1(1,2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,1)\right).
\end{aligned}$$

33.66. Medidas de Desempeño

Definición 33.23 *Sea L_i^* el número de usuarios cuando el servidor visita la cola Q_i para dar servicio, para $i=1,2$.*

Entonces

Proposición 33.72 *Para la cola Q_i, $i=1,2$, se tiene que el número de usuarios presentes al momento de ser visitada por el servidor está dado por*

$$\mathbb{E}\left[L_i^*\right] = f_i(i) \tag{33.66.1}$$

$$Var\left[L_i^*\right] = f_i(i,i)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. \tag{33.66.2}$$

Definición 33.24 *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo, bajo condiciones de estabilidad.*

$$C_i(z)=\mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$$

Definición 33.25 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo.*

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$$

Proposición 33.73 *Para los tiempos de intervisita del servidor I_i, se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I_i] &= \frac{f_i(i)}{\mu_i},\\ Var[I_i] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2}f_i(i).\end{aligned}$$

Proposición 33.74 *Para los tiempos que ocupa el servidor para atender a los usuarios presentes en la cola Q_i, con FGP denotada por S_i, se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{1-\mu_i},\\ Var[S_i] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^3}\end{aligned}$$

Proposición 33.75 *Para la duración de los ciclos C_i se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i]\,\mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)}\\ Var[C_i] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}.\end{aligned}$$

Apéndice A

a)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\ =\;& r_2P_1^{(2)}(1) + \mu_1^2R_2^{(2)}(1) + 2\mu_1 r_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)} + F_2^{1,0)}\right) + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}P_1^{(2)}F_2^{(0,1)} + \mu_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)\,F_2^{(0,1)}\\ +\;& \frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)} + \frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)} + F_2^{(1,1)}\right) + F_2^{(2,0)}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\ =\;& \mu_1 r_2\tilde{\mu}_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2R_2^{(2)}(1) + r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)} + F_2^{(1,0)}\right).\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\ =\;& \mu_1\hat{\mu}_1r_2 + \mu_1\hat{\mu}_1R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)} + r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)} + F_2^{(1,0)}\right) + \mu_1r_2\hat{F}_2^{(1,0)}\\ +\;& \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)} + F_2^{(1,0)}\right)\hat{F}_2^{(1,0)} + \frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)} + \mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)\,F_2^{(0,1)}\\ +\;& \mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)} + \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\ =\;& \mu_1\hat{\mu}_2r_2 + \mu_1\hat{\mu}_2R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)} + \mu_1r_2\hat{F}_2^{(0,1)} + r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)} + F_2^{(1,0)}\right)\\ +\;& \hat{F}_2^{(1,0)}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)} + F_2^{(1,0)}\right) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)} + \mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)\,F_2^{(0,1)} + \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}\\ +\;& \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}.\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
=\;& \mu_1\tilde{\mu}_2 r_2+\mu_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right).
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
=\;& \tilde{\mu}_2^2 R_2^{(2)}(1)+r_2\tilde{P}_2^{(2)}(1).
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
=\;& \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 r_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
=\;& \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}.
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
=\;& \mu_1\hat{\mu}_1 r_2+\mu_1\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}\\
+\;& r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+r_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\hat{F}_2^{(1,0)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right).
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
=\;& \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
=\;& \hat{\mu}_1^2 R_2^{(2)}(1)+r_2\hat{P}_1^{(2)}(1)+2r_2\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_1^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+2r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
=\;& r_2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

m)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
=\;& r_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}+r_2\mu_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\hat{F}_2^{(0,1)}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right).
\end{aligned}$$

n)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
=\quad& r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}.
\end{aligned}
$$

ñ)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
=\quad& r_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\quad& \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

o)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2)\right)\\
=\quad& \hat{\mu}_2^2R_2^{(2)}(1)+r_2\hat{P}_2^{(2)}(1)+2r_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}(1)F_2^{(0,1)}\\
+\quad& 2r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}
$$

a)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
=\quad& r_1P_1^{(2)}(1)+\mu_1^2R_1^{(2)}(1).
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
=\quad& \mu_1\tilde{\mu}_2r_1+\mu_1\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right).
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
=\quad& r_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1R_1^{(2)}(1)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
=\quad& \mu_1\hat{\mu}_2r_1+\mu_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
=\quad& r_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right).
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
=\quad& \tilde{\mu}_2^2R_1^{(2)}(1)+r_1\tilde{P}_2^{(2)}(1)+2r_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)+F_1^{(0,2)}+\tilde{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}\\
+\quad& \frac{1}{1-\mu_1}\tilde{P}_2^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(2,0)}+F_1^{(1,1)}\right).
\end{aligned}
$$

g)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1 r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ & \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}\\
+ & \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_1+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2 r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\\
+ & \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}\\
+ & \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

i)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & r_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1R_1^{(2)}(1)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

j)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & r_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1R_1^{(2)}\left(1\right)+\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}+r_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_2^{(1,0)}\\
+ & r_1\hat{\mu}_1\left(F_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ & \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\left(F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

k)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \hat{\mu}_1^2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+2r_1\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+ & 2r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}+\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

l)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+ & \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+\hat{F}_1^{(1,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

m)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & r_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

n)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
=\;& r_1\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\\
+\;& \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}+r_1\hat{\mu}_2\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\right)+\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\right)\hat{F}_1^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}$$

ñ)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
=\;& r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(0,1)}F_1^{(1,0)}+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+\hat{F}_1^{(1,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
=\;& \hat{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\hat{P}_2^{(2)}(1)+2r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+\hat{F}_1^{(0,2)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}\\
+\;& \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_2^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(0,1)}+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2P_1^{(2)}(1)+\mu_1^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}P_1^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \left(\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+2\hat{r}_2\mu_1F_2^{(1,0)}+2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\mu_1F_2^{(0,1)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(1,0)}+\hat{r}_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(1,0)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\mu_1\hat{r}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\tilde{P}_2^{(2)}(1)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{P}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+&\quad \tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+F_2^{(0,2)}+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+&\quad \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(1,0)}+\hat{r}_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(1,0)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\hat{P}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

m)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+&\quad \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

n)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+&\quad \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

ñ)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= \; & \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

o)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\right)\\
= \; & \hat{r}_2P_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+ \; & \left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}
$$

a)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= \; & \hat{r}_1P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_1\mu_1F_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}P_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1^2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ \; & 2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(2,0)}+\left(\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= \; & \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\mu_1F_1^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{r}_1F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ \; & \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(1,1)}\\
+ \; & \mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= \; & \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= \; & \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ \; & \hat{r}_1\mu_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+F_1^{(1,0)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= \; & \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\mu_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ \; & \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(1,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= \; & \hat{r}_1\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_1^{(0,1)}+F_1^{(0,2)}+2\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ \; & \tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}F^{(0,1)}\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

g)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+&\quad \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+F_1^{(0,1)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+&\quad \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right).
\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right).
\end{aligned}$$

m)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\mu_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+&\quad F_1^{(1,0)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}\\
+&\quad \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

n)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+&\quad F_1^{(0,1)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}\\
+&\quad \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

ñ)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right).
\end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_1\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_1\hat{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\hat{F}_1^{(0,2)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ & \hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}$$

Las ecuaciones que determinan los segundos momentos de las longitudes de las colas de los dos sistemas se pueden ver en este sitio

Apéndice B

33.66.1. Distribución para los usuarios de traslado

Ahora, determinemos la distribución del número de usuarios que pasan de $\hat{Q}_2$ a Q_2 considerando dos políticas de traslado en específico:

a) *Solamente pasa un usuario,*

b) *Se permite el paso de k usuarios,*

una vez que son atendidos por el servidor en $\hat{Q}_2$.

Política de un solo usuario: *Sea R_2 el número de usuarios que llegan a $\hat{Q}_2$ al tiempo t, sea R_1 el número de usuarios que pasan de $\hat{Q}_2$ a Q_2 al tiempo t.*

A saber:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[R_1\right] &= \sum_{y\geq0}\mathbb{P}\left[R_2=y\right]\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right]\\
&= \sum_{y\geq0}\mathbb{P}\left[R_2=y\right]\sum_{x\geq0}x\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=y\right]\\
&= \sum_{y\geq0}\sum_{x\geq0}x\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=y\right]\mathbb{P}\left[R_2=y\right].
\end{aligned}$$

Determinemos

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right]=\sum_{x\geq0}x\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=y\right]. \tag{33.66.3}$$

supongamos que $y=0$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=0\right] &= 1,\\
\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=0\right] &= 0, \text{ para cualquier } x\geq1,
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=0\right]=0.$$

Para $y=1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=1\right] &= 0,\\
\mathbb{P}\left[R_1=1|R_2=1\right] &= 1,
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=1\right]=1.$$

Para $y>1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2\geq1\right] &= 0,\\
\mathbb{P}\left[R_1=1|R_2\geq1\right] &= 1,\\
\mathbb{P}\left[R_1>1|R_2\geq1\right] &= 0,
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right]=1, \text{ para cualquier } y>1.$$

es decir

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right]=1,\ \textit{para cualquier } y\geq 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[R_1\right] &= \sum_{y\geq 0}\sum_{x\geq 0}x\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=y\right]\mathbb{P}\left[R_2=y\right]=\sum_{y\geq 0}\sum_{x}\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right]\mathbb{P}\left[R_2=y\right]\\ &= \sum_{y\geq 0}\mathbb{P}\left[R_2=y\right]=\sum_{y\geq 1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}=1.\end{aligned}$$

Además para $k\in Z^{+}$

$$\begin{aligned}f_{R_1}(k) &= \mathbb{P}\left[R_1=k\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=n\right]\mathbb{P}\left[R_2=n\right]\\ &= \mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\ &+ \mathbb{P}\left[R_1=k|R_2>1\right]\mathbb{P}\left[R_2>1\right],\end{aligned}$$

donde para

$k=0$**:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=0\right]=\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\ +\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2>1\right]\mathbb{P}\left[R_2>1\right]=\mathbb{P}\left[R_2=0\right].\end{aligned}$$

$k=1$**:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=1\right]=\mathbb{P}\left[R_1=1|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=1|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\ +\mathbb{P}\left[R_1=1|R_2>1\right]\mathbb{P}\left[R_2>1\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2=n\right].\end{aligned}$$

$k=2$**:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=2\right]=\mathbb{P}\left[R_1=2|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=2|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\ +\mathbb{P}\left[R_1=2|R_2>1\right]\mathbb{P}\left[R_2>1\right]=0.\end{aligned}$$

$k=j$**:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=j\right]=\mathbb{P}\left[R_1=j|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=j|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\ +\mathbb{P}\left[R_1=j|R_2>1\right]\mathbb{P}\left[R_2>1\right]=0.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}f_{R_1}(0) &= \mathbb{P}\left[R_2=0\right]\\ f_{R_1}(1) &= \sum_{n\geq 1}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2=n\right]\\ f_{R_1}(j) &= 0,\ \textit{para } j>1.\end{aligned}$$

Política de k usuarios: *Al igual que antes, para* $y\in Z^{+}$ *fijo*

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right]=\sum_{x}x\mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=y\right].$$

Entonces, si tomamos diversos valore para y*:*

$y=0$*:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=0\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1=x|R_2=0\right] &= 0,\ \textit{para cualquier } x\geq 1,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=0\right]=0.$$

Para $y=1$*,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=1\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1=1|R_2=1\right] &= 1,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=1\right]=1.$$

Para $y = 2$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = 0 | R_2 = 2\right] &= 0,\\
\mathbb{P}\left[R_1 = 1 | R_2 = 2\right] &= 1,\\
\mathbb{P}\left[R_1 = 2 | R_2 = 2\right] &= 1,\\
\mathbb{P}\left[R_1 = 3 | R_2 = 2\right] &= 0,
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1 | R_2 = 2\right] = 3.$$

Para $y = 3$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = 0 | R_2 = 3\right] &= 0,\\
\mathbb{P}\left[R_1 = 1 | R_2 = 3\right] &= 1,\\
\mathbb{P}\left[R_1 = 2 | R_2 = 3\right] &= 1,\\
\mathbb{P}\left[R_1 = 3 | R_2 = 3\right] &= 1,\\
\mathbb{P}\left[R_1 = 4 | R_2 = 3\right] &= 0,
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1 | R_2 = 3\right] = 6.$$

En general, para $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = 0 | R_2 = k\right] &= 0,\\
\mathbb{P}\left[R_1 = j | R_2 = k\right] &= 1, \text{ para } 1 \leq j \leq k,\\
\mathbb{P}\left[R_1 = j | R_2 = k\right] &= 0, \text{ para } j > k,
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1 | R_2 = k\right] = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[R_1\right] &= \sum_y \mathbb{E}\left[R_1 | R_2 = y\right] \mathbb{P}\left[R_2 = y\right]\\
&= \sum_y \mathbb{P}\left[R_2 = y\right] \frac{y(y+1)}{2} = \sum_{y \geq 1} \left(\frac{y(y+1)}{2}\right) \frac{(\lambda t)^y}{y!} e^{-\lambda t}\\
&= \frac{\lambda t}{2} e^{-\lambda t} \sum_{y \geq 1} (y+1) \frac{(\lambda t)^{y-1}}{(y-1)!} = \frac{\lambda t}{2} e^{-\lambda t} \left(e^{\lambda t} (\lambda t + 2)\right)\\
&= \frac{\lambda t(\lambda t + 2)}{2},
\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{E}\left[R_1\right] = \frac{\lambda t(\lambda t + 2)}{2}. \tag{33.66.4}$$

Además para $k \in Z^+$ *fijo*

$$\begin{aligned}
f_{R_1}(k) &= \mathbb{P}\left[R_1 = k\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = n\right] \mathbb{P}\left[R_2 = n\right]\\
&= \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = 0\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\
&+ \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = 2\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 2\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = j\right] \mathbb{P}\left[R_2 = j\right] + \cdots +
\end{aligned}$$

donde para

$k = 0$**:**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = 0\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 0 | R_2 = 0\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 0 | R_2 = 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\
+ \mathbb{P}\left[R_1 = 0 | R_2 = j\right] \mathbb{P}\left[R_2 = j\right] = \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right].
\end{aligned}$$

$k = 1$**:**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = 1\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 1 | R_2 = 0\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 1 | R_2 = 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\
+ \mathbb{P}\left[R_1 = 1 | R_2 = 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 1\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = 1 | R_2 = j\right] \mathbb{P}\left[R_2 = j\right]\\
= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[R_2 = n\right].
\end{aligned}$$

$k = 2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 2\right] &= \mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 0\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\ &+\mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 2\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 2\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = j\right]\mathbb{P}\left[R_2 = j\right]\\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2 = n\right].\end{aligned}$$

En general

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = k\right] &= \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = 0\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\ &+\mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = 2\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 2\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = k\right]\mathbb{P}\left[R_2 = k\right]\\ &= \sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2 = n\right].\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f_{R_1}(k) = \mathbb{P}\left[R_1 = k\right] = \sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2 = n\right].$$

Objetivos Principales

- *Encontrar las ecuaciones que modelan el comportamiento de una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC) con propiedades similares.*
- *Encontrar expresiones analíticas para las longitudes de las colas al momento en que el servidor llega a una de ellas para comenzar a dar servicio, así como de sus segundos momentos.*
- *Determinar las principales medidas de Desempeño para la RSVC tales como: Número de usuarios presentes en cada una de las colas del sistema cuando uno de los servidores está presente atendiendo, Tiempos que transcurre entre las visitas del servidor a la misma cola.*

33.67. Descripción de una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas

Consideremos una red de sistema de visitas cíclicas conformada por dos sistemas de visitas cíclicas, cada una con dos colas independientes, donde además se permite el intercambio de usuarios entre los dos sistemas en la segunda cola de cada uno de ellos.

Supóngase además que los arribos de los usuarios ocurren conforme a un proceso Poisson con tasa de llegada μ_1 y μ_2 para el sistema 1, mientras que para el sistema 2, lo hacen conforme a un proceso Poisson con tasa $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ respectivamente.

El traslado de un sistema a otro ocurre de manera que los tiempos entre llegadas de los usuarios a la cola dos del sistema 1 provenientes del sistema 2, se distribuye de manera exponencial con parámetro $\check{\mu}_2$.

Se considerarán intervalos de tiempo de la forma $[t, t+1]$. Los usuarios arriban por paquetes de manera independiente del resto de las colas. Se define el grupo de usuarios que llegan a cada una de las colas del sistema 1, caracterizadas por Q_1 y Q_2 respectivamente, en el intervalo de tiempo $[t, t+1]$ por $X_1(t), X_2(t)$. De igual manera se definen los procesos $\hat{X}_1(t), \hat{X}_2(t)$ para las colas del sistema 2, denotadas por $\hat{Q}_1$ y $\hat{Q}_2$ respectivamente.

Para el número de usuarios que se trasladan del sistema 2 al sistema 1, de la cola $\hat{Q}_2$ a la cola Q_2, en el intervalo de tiempo $[t, t+1]$, se define el proceso $Y_2(t)$.

El uso de la Función Generadora de Probabilidades (FGP's) nos permite determinar las Funciones de Distribución de Probabilidades Conjunta de manera indirecta sin necesidad de hacer uso de las propiedades de las distribuciones de probabilidad de cada uno de los procesos que intervienen en la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas.

En lo que respecta al servidor, en términos de los tiempos de visita a cada una de las colas, se definen las variables aleatorias τ_1, τ_2 para Q_1, Q_2 respectivamente; y ζ_1, ζ_2 para $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ del sistema 2. A los tiempos en que el servidor termina de atender en las colas $Q_1, Q_2, \hat{Q}_1, \hat{Q}_2$, se les denotará por $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$ respectivamente.

Los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por $\tau_2 - \overline{\tau}_1, \tau_1 - \overline{\tau}_2$ y $\zeta_2 - \overline{\zeta}_1, \zeta_1 - \overline{\zeta}_2$ para el sistema 1 y el sistema 2, respectivamente.

Cada uno de estos procesos con su respectiva FGP. Además, para cada una de las colas en cada sistema, el número de usuarios al tiempo en que llega el servidor a dar servicio está dado por el número de usuarios presentes en la cola al tiempo t, más el número de usuarios que llegan a la cola en el intervalo de tiempo $[\tau_i, \overline{\tau}_i]$.
Una vez definidas las Funciones Generadoras de Probabilidades Conjuntas se construyen las ecuaciones recursivas que permiten obtener la información sobre la longitud de cada una de las colas, al momento en que uno de los servidores llega a una de las colas para dar servicio, basándose en la información que se tiene sobre su llegada a la cola inmediata anterior.

33.67.1. Funciones Generadoras de Probabilidades

Para cada uno de los procesos de llegada a las colas $X_1, X_2, \hat{X}_1, \hat{X}_2$ *y* Y_2, *con* $\tilde{X}_2 = X_2 + Y_2$ *anteriores se define su Función Generadora de Probabilidades (FGP):*

$$\begin{aligned} P_1(z_1) &= \mathbb{E}\left[z_1^{X_1(t)}\right], \quad P_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{X_2(t)}\right], \quad \check{P}_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{Y_2(t)}\right], \\ \hat{P}_1(w_1) &= \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{X}_1(t)}\right], \quad \hat{P}_2(w_2) = \mathbb{E}\left[w_2^{\hat{X}_2(t)}\right], \quad \tilde{P}_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{\tilde{X}_2(t)}\right]. \end{aligned}$$

Con primer momento definidos por

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mathbb{E}[X_1(t)] = P_1^{(1)}(1), \quad \mu_2 = \mathbb{E}[X_2(t)] = P_2^{(1)}(1), \\ \check{\mu}_2 &= \mathbb{E}[Y_2(t)] = \check{P}_2^{(1)}(1), \quad \hat{\mu}_1 = \mathbb{E}\left[\hat{X}_1(t)\right] = \hat{P}_1^{(1)}(1), \\ \hat{\mu}_2 &= \mathbb{E}\left[\hat{X}_2(t)\right] = \hat{P}_2^{(1)}(1), \quad \tilde{\mu}_2 = \mathbb{E}\left[\tilde{X}_2(t)\right] = \tilde{P}_2^{(1)}(1). \end{aligned}$$

En lo que respecta al servidor, en términos de los tiempos de visita a cada una de las colas, se denotarán por $B_1(t), B_2(t)$ *los procesos correspondientes a las variables aleatorias* τ_1, τ_2 *para* Q_1, Q_2 *respectivamente; y* $\hat{B}_1(t), \hat{B}_2(t)$ *con parámetros* ζ_1, ζ_2 *para* $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ *del sistema 2. Y a los tiempos en que el servidor termina de atender en las colas* $Q_1, Q_2, \hat{Q}_1, \hat{Q}_2$, *se les denotará por* $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$ *respectivamente. Entonces, los tiempos de servicio están dados por las diferencias* $\overline{\tau}_1 - \tau_1, \overline{\tau}_2 - \tau_2$ *para* Q_1, Q_2, *y* $\overline{\zeta}_1 - \zeta_1, \overline{\zeta}_2 - \zeta_2$ *para* $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ *respectivamente.*
Sus procesos se definen por:

$$\begin{aligned} S_1(z_1) &= \mathbb{E}\left[z_1^{\overline{\tau}_1 - \tau_1}\right], \quad S_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_1^{\overline{\tau}_2 - \tau_2}\right], \\ \hat{S}_1(w_1) &= \mathbb{E}\left[w_1^{\overline{\zeta}_1 - \zeta_1}\right], \quad \hat{S}_2(w_2) = \mathbb{E}\left[w_2^{\overline{\zeta}_2 - \zeta_2}\right], \end{aligned}$$

con primer momento dado por:

$$s_1 = \mathbb{E}[\overline{\tau}_1 - \tau_1], \quad s_2 = \mathbb{E}[\overline{\tau}_2 - \tau_2], \quad \hat{s}_1 = \mathbb{E}\left[\overline{\zeta}_1 - \zeta_1\right], \quad \hat{s}_2 = \mathbb{E}\left[\overline{\zeta}_2 - \zeta_2\right].$$

Análogamente los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por $\tau_2 - \overline{\tau}_1, \tau_1 - \overline{\tau}_2$ *y* $\zeta_2 - \overline{\zeta}_1, \zeta_1 - \overline{\zeta}_2$ *para el sistema 1 y el sistema 2, respectivamente.*
La FGP para estos tiempos de traslado están dados por

$$\begin{aligned} R_1(z_1) &= \mathbb{E}\left[z_1^{\tau_2 - \overline{\tau}_1}\right], \quad R_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{\tau_1 - \overline{\tau}_2}\right], \\ \hat{R}_1(w_1) &= \mathbb{E}\left[w_1^{\zeta_2 - \overline{\zeta}_1}\right], \quad \hat{R}_2(w_2) = \mathbb{E}\left[w_2^{\zeta_1 - \overline{\zeta}_2}\right], \end{aligned}$$

y al igual que como se hizo con anterioridad

$$\begin{aligned} r_1 &= R_1^{(1)}(1) = \mathbb{E}[\tau_2 - \overline{\tau}_1], \quad r_2 = R_2^{(1)}(1) = \mathbb{E}[\tau_1 - \overline{\tau}_2], \\ \hat{r}_1 &= \hat{R}_1^{(1)}(1) = \mathbb{E}\left[\zeta_2 - \overline{\zeta}_1\right], \quad \hat{r}_2 = \hat{R}_2^{(1)}(1) = \mathbb{E}\left[\zeta_1 - \overline{\zeta}_2\right]. \end{aligned}$$

Se definen los procesos de conteo para el número de usuarios en cada una de las colas al tiempo t, $L_1(t), L_2(t)$, *para* $H_1(t), H_2(t)$ *del sistema 1, respectivamente. Y para el segundo sistema, se tienen los procesos* $\hat{L}_1(t), \hat{L}_2(t)$ *para* $\hat{H}_1(t), \hat{H}_2(t)$, *respectivamente, es decir,*

$$H_1(t) = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(t)}\right], \quad H_2(t) = \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(t)}\right], \quad \hat{H}_1(t) = \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(t)}\right], \quad \hat{H}_2(t) = \mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2(t)}\right].$$

Por lo dicho anteriormente se tiene que el número de usuarios presentes en los tiempos $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$, *es cero, es decir,* $L_i(\overline{\tau_i}) = 0$, *y* $\hat{L}_i\left(\overline{\zeta_i}\right) = 0$ *para i=1,2 para cada uno de los dos sistemas.*

Para cada una de las colas en cada sistema, el número de usuarios al tiempo en que llega el servidor a dar servicio está dado por el número de usuarios presentes en la cola al tiempo $t = \tau_i, \zeta_i$*, más el número de usuarios que llegan a la cola en el intervalo de tiempo* $[\tau_i, \overline{\tau}_i], \left[\zeta_i, \overline{\zeta}_i\right]$*, es decir*

$$\begin{aligned}&L_1(\overline{\tau}_1) = L_1(\tau_1) + X_1(\overline{\tau}_1 - \tau_1), \quad \hat{L}_1(\overline{\tau}_1) = \hat{L}_1(\tau_1) + \hat{X}_1(\overline{\tau}_1 - \tau_1),\\ &\hat{L}_2(\overline{\tau}_1) = \hat{L}_2(\tau_1) + \hat{X}_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1).\end{aligned}$$

En el caso específico de Q_2*, además, hay que considerar el número de usuarios que pasan del sistema 2 al sistema 1, a traves de* $\hat{Q}_2$ *mientras el servidor en* Q_2 *está ausente, es decir:*

$$L_2(\overline{\tau}_1) = L_2(\tau_1) + X_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1) + Y_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1). \tag{33.67.1}$$

33.67.2. La ruina del jugador

Supongamos que se tiene un jugador que cuenta con un capital inicial de $\tilde{L}_0 \geq 0$ *unidades, esta persona realiza una serie de dos juegos simultáneos e independientes de manera sucesiva, dichos eventos son independientes e idénticos entre sí para cada realización.*

La ganancia en el n*-ésimo juego es*

$$\tilde{X}_n = X_n + Y_n$$

unidades de las cuales se resta una cuota de 1 unidad por cada juego simultáneo, es decir, se restan dos unidades por cada juego realizado.

En términos de la teoría de colas puede pensarse como el número de usuarios que llegan a una cola vía dos procesos de arribo distintos e independientes entre sí.

Su Función Generadora de Probabilidades (FGP) está dada por

$$F(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{L}_0}\right]$$

$$\tilde{P}(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{X}_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n+Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n} z^{Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right]\mathbb{E}\left[z^{Y_n}\right] = P(z)\check{P}(z),$$

entonces

$$\tilde{\mu} \quad = \quad \mathbb{E}\left[\tilde{X}_n\right] = \tilde{P}[z] < 1.$$

Sea $\tilde{L}_n$ *el capital remanente después del* n*-ésimo juego. Entonces*

$$\tilde{L}_n \quad = \quad \tilde{L}_0 + \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \cdots + \tilde{X}_n - 2n.$$

La ruina del jugador ocurre después del n*-ésimo juego, es decir, la cola se vacía después del* n*-ésimo juego, entonces sea* T *definida como*

$$T \quad = \quad min\left\{\tilde{L}_n = 0\right\}$$

Si $\tilde{L}_0 = 0$*, entonces claramente* $T = 0$*. En este sentido* T *puede interpretarse como la longitud del periodo de tiempo que el servidor ocupa para dar servicio en la cola, comenzando con* $\tilde{L}_0$ *grupos de usuarios presentes en la cola, quienes arribaron conforme a un proceso dado por* $\tilde{P}(z)$.

Sea $g_{n,k}$ *la probabilidad del evento de que el jugador no caiga en ruina antes del* n*-ésimo juego, y que además tenga un capital de* k *unidades antes del* n*-ésimo juego, es decir,*

Dada $n \in \{1, 2, \ldots, \}$ *y* $k \in \{0, 1, 2, \ldots, \}$

$$g_{n,k} := P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1, \ldots, n, \tilde{L}_n = k\right\}$$

la cual además se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
g_{n,k} &= P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1, \ldots, n, \tilde{L}_n = k\right\} = \sum_{j=1}^{k+1} g_{n-1,j} P\left\{\tilde{X}_n = k - j + 1\right\}\\
&= \sum_{j=1}^{k+1} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1\right\} = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1, Y_n = l\right\}\\
&= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1 | Y_n = l\right\} P\left\{Y_n = l\right\}\\
&= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n = k - j - l + 1\right\} P\left\{Y_n = l\right\}
\end{aligned}$$

es decir

$$g_{n,k}=\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j}g_{n-1,j}P\left\{X_n=k-j-l+1\right\}P\left\{Y_n=l\right\} \tag{33.67.2}$$

además

$$g_{0,k}=P\left\{\tilde{L}_0=k\right\}. \tag{33.67.3}$$

Se definen las siguientes FGP:

$$G_n\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}g_{n,k}z^k,\ \ para\ n=0,1,\ldots, \tag{33.67.4}$$

$$G\left(z,w\right)=\sum_{n=0}^{\infty}G_n\left(z\right)w^n. \tag{33.67.5}$$

En particular para $k=0$*,*

$$g_{n,0}=G_n\left(0\right)=P\left\{\tilde{L}_j>0,\ \ para\ j<n,\ \ y\ \tilde{L}_n=0\right\}=P\left\{T=n\right\},$$

además

$$G\left(0,w\right)=\sum_{n=0}^{\infty}G_n\left(0\right)w^n=\sum_{n=0}^{\infty}P\left\{T=n\right\}w^n=\mathbb{E}\left[w^T\right]$$

la cuál resulta ser la FGP del tiempo de ruina T*.*

Proposición 33.76 *Sean* $G_n\left(z\right)$ *y* $G\left(z,w\right)$ *definidas como en (33.80.4) y (33.80.5) respectivamente, entonces*

$$G_n\left(z\right)=\frac{1}{z}\left[G_{n-1}\left(z\right)-G_{n-1}\left(0\right)\right]\tilde{P}\left(z\right). \tag{33.67.6}$$

Además

$$G\left(z,w\right)=\frac{zF\left(z\right)-wP\left(z\right)G\left(0,w\right)}{z-wR\left(z\right)}, \tag{33.67.7}$$

con un único polo en el círculo unitario, además, el polo es de la forma $z=\theta\left(w\right)$ *y satisface que*

i) $\tilde{\theta}\left(1\right)=1$*,*

ii) $\tilde{\theta}^{(1)}\left(1\right)=\frac{1}{1-\tilde{\mu}}$*,*

iii) $\tilde{\theta}^{(2)}\left(1\right)=\frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}+\frac{\tilde{\sigma}}{(1-\tilde{\mu})^3}$*.*

Finalmente, además se cumple que

$$\mathbb{E}\left[w^T\right]=G\left(0,w\right)=F\left[\tilde{\theta}\left(w\right)\right]. \tag{33.67.8}$$

Multiplicando las ecuaciones (33.80.2) y (33.80.3) por el término z^k*:*

$$\begin{aligned}
g_{n,k}z^k &= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j}g_{n-1,j}P\left\{X_n=k-j-l+1\right\}P\left\{Y_n=l\right\}z^k,\\
g_{0,k}z^k &= P\left\{\tilde{L}_0=k\right\}z^k,
\end{aligned}$$

ahora sumamos sobre k

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}g_{n,k}z^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j}g_{n-1,j}P\left\{X_n=k-j-l+1\right\}P\left\{Y_n=l\right\}z^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j}g_{n-1,j}P\left\{X_n=k-(j+l-1)\right\}P\left\{Y_n=l\right\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}z^{k+(j+l-1)-(j+l-1)}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j}g_{n-1,j}P\left\{X_n=k-(j+l-1)\right\}P\left\{Y_n=l\right\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j}g_{n-1,j}z^{j-1}P\left\{X_n=k-(j+l-1)\right\}z^{k-(j+l-1)}P\left\{Y_n=l\right\}z^l
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} z^{j-1} \sum_{k=j+l-1}^{\infty} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)} P\left\{Y_n = l\right\} z^l \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j} z^{j-1} \sum_{l=1}^{j}\sum_{k=j+l-1}^{\infty} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)} P\left\{Y_n = l\right\} z^l \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j} z^{j-1} \sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)} P\left\{Y_n = l\right\} z^l \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j} z^{j-1} \sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)} \sum_{l=1}^{j} P\left\{Y_n = l\right\} z^l \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j} z^{j-1} \sum_{l=1}^{\infty} P\left\{Y_n = l\right\} z^l \sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)} \\
&= \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z) \sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)} \\
&= \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z) P(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z),
\end{aligned}$$

es decir la ecuación (33.80.4) se puede reescribir como

$$G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z). \tag{33.67.9}$$

Por otra parte recordemos la ecuación (33.80.4)

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k} z^k, \text{ entonces } \frac{G_n(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} g_{n,k} z^{k-1},$$

Por lo tanto utilizando la ecuación (33.80.9):

$$\begin{aligned}
G(z,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z) w^n = G_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(z) w^n \\
&= F(z) + \sum_{n=0}^{\infty}\left[G_n(z) - G_n(0)\right] w^n \frac{\tilde{P}(z)}{z} \\
&= F(z) + \frac{w}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left[G_n(z) - G_n(0)\right] w^{n-1}\tilde{P}(z)
\end{aligned}$$

es decir

$$G(z,w) = F(z) + \frac{w}{z}\left[G(z,w) - G(0,w)\right]\tilde{P}(z),$$

entonces

$$\begin{aligned}
G(z,w) &= F(z) + \frac{w}{z}\left[G(z,w) - G(0,w)\right]\tilde{P}(z) \\
&= F(z) + \frac{w}{z}\tilde{P}(z) G(z,w) - \frac{w}{z}\tilde{P}(z) G(0,w) \\
&\Leftrightarrow \\
G(z,w)\left\{1 - \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\right\} &= F(z) - \frac{w}{z}\tilde{P}(z) G(0,w),
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$G(z,w) = \frac{zF(z) - w\tilde{P}(z) G(0,w)}{1 - w\tilde{P}(z)}. \tag{33.67.10}$$

Ahora $G(z,w)$ *es analítica en* $|z| = 1$.
Sean z, w *tales que* $|z| = 1$ *y* $|w| \leq 1$, *como* $\tilde{P}(z)$ *es FGP*

$$|z - \left(z - w\tilde{P}(z)\right)| < |z| \Leftrightarrow |w\tilde{P}(z)| < |z|$$

es decir, se cumplen las condiciones del Teorema de Rouché y por tanto, z *y* $z - w\tilde{P}(z)$ *tienen el mismo número de ceros en* $|z| = 1$. *Sea* $z = \tilde{\theta}(w)$ *la solución única de* $z - w\tilde{P}(z)$, *es decir*

$$\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) = 0, \tag{33.67.11}$$

con $|\tilde{\theta}(w)| < 1$. *Cabe hacer mención que* $\tilde{\theta}(w)$ *es la FGP para el tiempo de ruina cuando* $\tilde{L}_0 = 1$. *Considerando la ecuación (33.80.11)*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)|_{w=1} - \frac{\partial}{\partial w}\left\{w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}|_{w=1} = 0\\
&\tilde{\theta}^{(1)}(w)|_{w=1} - \frac{\partial}{\partial w}w\left\{\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}|_{w=1} - w\frac{\partial}{\partial w}\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)|_{w=1} = 0\\
&\tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) - w\left\{\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial\tilde{\theta}(w)}\cdot\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}|_{w=1}\right\} = 0\\
&\tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\cdot\tilde{\theta}^{(1)}(1) = 0
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\cdot\tilde{\theta}^{(1)}(1) &= \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\\
\tilde{\theta}^{(1)}(1)\left(1 - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\right) &= \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\\
\tilde{\theta}^{(1)}(1) = \frac{\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{\left(1 - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\right)} &= \frac{1}{1-\tilde{\mu}}.
\end{aligned}$$

Ahora determinemos el segundo momento de $\tilde{\theta}(w)$, *nuevamente consideremos la ecuación (33.80.11):*

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) &= 0\\
\frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\} &= 0\\
\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}\right\} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w) - \frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w) - \frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\}\\
=\ &\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w} - \left[\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) + w\frac{\partial}{\partial w}R\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\}\\
=\ &\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w} - \left[\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) + w\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial w}\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}\right]\right\}\\
=\ &\frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}^{(1)}(w) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right\}\\
=\ &\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w) - \frac{\partial}{\partial w}\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) - \frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=\ &\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w) - \frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial\tilde{\theta}(w)}\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w} - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\\
-\ &w\frac{\partial\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w) - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\frac{\partial\tilde{\theta}^{(1)}(w)}{\partial w}\\
=\ &\tilde{\theta}^{(2)}(w) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\\
-\ &w\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\left(\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right)^2 - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(2)}(w)\\
=\ &\tilde{\theta}^{(2)}(w) - 2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\\
-\ &w\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\left(\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right)^2 - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(2)}(w)\\
=\ &\tilde{\theta}^{(2)}(w)\left[1 - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right] - \tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right) + 2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(2)}(w)\left[1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right] &- \tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]=0\\
\tilde{\theta}^{(2)}(w) &= \frac{\tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2R^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}\\
\tilde{\theta}^{(2)}(w) &= \frac{\tilde{\theta}^{(1)}(w)\,w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}+\frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}
\end{aligned}$$

si evaluamos la expresión anterior en $w=1$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(2)}(1) &= \frac{\left(\tilde{\theta}^{(1)}(1)\right)^2\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}+\frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(1)\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}\\
&= \frac{\left(\tilde{\theta}^{(1)}(1)\right)^2\tilde{P}^{(2)}(1)}{1-\tilde{P}^{(1)}(1)}+\frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(1)\tilde{P}^{(1)}(1)}{1-\tilde{P}^{(1)}(1)}\\
&= \frac{\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}}\right)^2\tilde{P}^{(2)}(1)}{1-\tilde{\mu}}+\frac{2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}}\right)\tilde{\mu}}{1-\tilde{\mu}}=\frac{\tilde{P}^{(2)}(1)}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{2\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}
\end{aligned}$$

luego

$$= \frac{\sigma^2-\tilde{\mu}+\tilde{\mu}^2}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{2\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}=\frac{\sigma^2-\tilde{\mu}+\tilde{\mu}^2+2\tilde{\mu}(1-\tilde{\mu})}{(1-\tilde{\mu})^3}$$

es decir

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(2)}(1) &= \frac{\sigma^2+\tilde{\mu}-\tilde{\mu}^2}{(1-\tilde{\mu})^3}=\frac{\sigma^2}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{\tilde{\mu}(1-\tilde{\mu})}{(1-\tilde{\mu})^3}\\
&= \frac{\sigma^2}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}.
\end{aligned}$$

Corolario 33.13 *El tiempo de ruina del jugador tiene primer y segundo momento dados por*

$$\mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{1-\tilde{\mu}} \tag{33.67.12}$$

$$Var[T] = \frac{Var\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^3}. \tag{33.67.13}$$

Ahora, determinemos la distribución del número de usuarios que pasan de $\hat{Q}_2$ a Q_2 considerando dos políticas de traslado en específico:

a*) Solamente pasa un usuario,*

b*) Se permite el paso de k usuarios,*

una vez que son atendidos por el servidor en $\hat{Q}_2$.

Política de un solo usuario: *Sea R_2 el número de usuarios que llegan a $\hat{Q}_2$ al tiempo t, sea R_1 el número de usuarios que pasan de $\hat{Q}_2$ a Q_2 al tiempo t.*

A saber:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[R_1] &= \sum_{y\geq 0}\mathbb{P}[R_2=y]\,\mathbb{E}[R_1|R_2=y]\\
&= \sum_{y\geq 0}\mathbb{P}[R_2=y]\sum_{x\geq 0}x\mathbb{P}[R_1=x|R_2=y]\\
&= \sum_{y\geq 0}\sum_{x\geq 0}x\mathbb{P}[R_1=x|R_2=y]\,\mathbb{P}[R_2=y].
\end{aligned}$$

Determinemos

$$\mathbb{E}[R_1|R_2=y]=\sum_{x\geq 0}x\mathbb{P}[R_1=x|R_2=y]. \tag{33.67.14}$$

supongamos que $y = 0$*, entonces*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0 | R_2 = 0\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = x | R_2 = 0\right] &= 0, \text{ para cualquier } x \geq 1,\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[R_1 | R_2 = 0\right] = 0.$$

Para $y = 1$*,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0 | R_2 = 1\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 1 | R_2 = 1\right] &= 1,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1 | R_2 = 1\right] = 1.$$

Para $y > 1$*:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0 | R_2 \geq 1\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 1 | R_2 \geq 1\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 > 1 | R_2 \geq 1\right] &= 0,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1 | R_2 = y\right] = 1, \text{ para cualquier } y > 1.$$

es decir

$$\mathbb{E}\left[R_1 | R_2 = y\right] = 1, \text{ para cualquier } y \geq 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[R_1\right] &= \sum_{y \geq 0} \sum_{x \geq 0} x \mathbb{P}\left[R_1 = x | R_2 = y\right] \mathbb{P}\left[R_2 = y\right] = \sum_{y \geq 0} \sum_{x} \mathbb{E}\left[R_1 | R_2 = y\right] \mathbb{P}\left[R_2 = y\right]\\ &= \sum_{y \geq 0} \mathbb{P}\left[R_2 = y\right] = \sum_{y \geq 1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = 1.\end{aligned}$$

Además para $k \in Z^+$

$$\begin{aligned}f_{R_1}(k) &= \mathbb{P}\left[R_1 = k\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = n\right] \mathbb{P}\left[R_2 = n\right]\\ &= \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = 0\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 = 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\ &+ \mathbb{P}\left[R_1 = k | R_2 > 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 > 1\right],\end{aligned}$$

donde para

$k = 0$**:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 0 | R_2 = 0\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 0 | R_2 = 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\ + \mathbb{P}\left[R_1 = 0 | R_2 > 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 > 1\right] = \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right].\end{aligned}$$

$k = 1$**:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 1\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 1 | R_2 = 0\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 1 | R_2 = 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\ + \mathbb{P}\left[R_1 = 1 | R_2 > 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 > 1\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[R_2 = n\right].\end{aligned}$$

$k = 2$**:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 2\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 2 | R_2 = 0\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 2 | R_2 = 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\ + \mathbb{P}\left[R_1 = 2 | R_2 > 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 > 1\right] = 0.\end{aligned}$$

$k = j$**:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = j\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = j | R_2 = 0\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = j | R_2 = 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\ + \mathbb{P}\left[R_1 = j | R_2 > 1\right] \mathbb{P}\left[R_2 > 1\right] = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}f_{R_1}(0) &= \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right]\\ f_{R_1}(1) &= \sum_{n \geq 1}^{\infty} \mathbb{P}\left[R_2 = n\right]\\ f_{R_1}(j) &= 0, \text{ para } j > 1.\end{aligned}$$

Política de k usuarios: *Al igual que antes, para $y \in Z^{+}$ fijo*

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = y\right] = \sum_{x} x\mathbb{P}\left[R_1 = x|R_2 = y\right].$$

Entonces, si tomamos diversos valore para y:

$y = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 0\right] &= 1,\\
\mathbb{P}\left[R_1 = x|R_2 = 0\right] &= 0, \text{ para cualquier } x \geq 1,
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = 0\right] = 0.$$

Para $y = 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 1\right] &= 0,\\
\mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 1\right] &= 1,
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = 1\right] = 1.$$

Para $y = 2$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 2\right] &= 0,\\
\mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 2\right] &= 1,\\
\mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 2\right] &= 1,\\
\mathbb{P}\left[R_1 = 3|R_2 = 2\right] &= 0,
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = 2\right] = 3.$$

Para $y = 3$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 3\right] &= 0,\\
\mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 3\right] &= 1,\\
\mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 3\right] &= 1,\\
\mathbb{P}\left[R_1 = 3|R_2 = 3\right] &= 1,\\
\mathbb{P}\left[R_1 = 4|R_2 = 3\right] &= 0,
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = 3\right] = 6.$$

En general, para $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = k\right] &= 0,\\
\mathbb{P}\left[R_1 = j|R_2 = k\right] &= 1, \text{ para } 1 \leq j \leq k,\\
\mathbb{P}\left[R_1 = j|R_2 = k\right] &= 0, \text{ para } j > k,
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = k\right] = \frac{k\left(k+1\right)}{2}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[R_1\right] &= \sum_{y} \mathbb{E}\left[R_1|R_2 = y\right]\mathbb{P}\left[R_2 = y\right]\\
&= \sum_{y} \mathbb{P}\left[R_2 = y\right]\frac{y\left(y+1\right)}{2} = \sum_{y\geq 1}\left(\frac{y\left(y+1\right)}{2}\right)\frac{\left(\lambda t\right)^{y}}{y!}e^{-\lambda t}\\
&= \frac{\lambda t}{2}e^{-\lambda t}\sum_{y\geq 1}\left(y+1\right)\frac{\left(\lambda t\right)^{y-1}}{\left(y-1\right)!} = \frac{\lambda t}{2}e^{-\lambda t}\left(e^{\lambda t}\left(\lambda t+2\right)\right)\\
&= \frac{\lambda t\left(\lambda t+2\right)}{2},
\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{E}\left[R_1\right] = \frac{\lambda t\left(\lambda t + 2\right)}{2}. \tag{33.67.15}$$

Además para $k \in Z^{+}$ fijo

$$\begin{aligned}
f_{R_1}(k) &= \mathbb{P}\left[R_1 = k\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = n\right]\mathbb{P}\left[R_2 = n\right]\\
&= \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = 0\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\
&+ \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = 2\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 2\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = j\right]\mathbb{P}\left[R_2 = j\right] + \cdots +
\end{aligned}$$

donde para

$k = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = 0\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 0\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\
+\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = j\right]\mathbb{P}\left[R_2 = j\right] = \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right].
\end{aligned}$$

$k = 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = 1\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 0\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\
+\mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = j\right]\mathbb{P}\left[R_2 = j\right]\\
= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2 = n\right].
\end{aligned}$$

$k = 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = 2\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 0\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\
+\mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 2\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 2\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = j\right]\mathbb{P}\left[R_2 = j\right]\\
= \sum_{n=2}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2 = n\right].
\end{aligned}$$

En general

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1 = k\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = 0\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\
+\mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = 2\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 2\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = k\right]\mathbb{P}\left[R_2 = k\right]\\
= \sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2 = n\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f_{R_1}(k) = \mathbb{P}\left[R_1 = k\right] = \sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2 = n\right].$$

33.68. Descripción de una Red de S.V.C.

Se definen los procesos de llegada de los usuarios a cada una de las colas dependiendo de la llegada del servidor pero del sistema al cuál no pertenece la cola en cuestión:
Para el sistema 1 y el servidor del segundo sistema

$$\begin{aligned}
F_{1,1}\left(z_1;\zeta_1\right) &= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[L_1\left(\zeta_1\right) = k\right]z_1^k\\
F_{2,1}\left(z_2;\zeta_1\right) &= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\zeta_1)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[L_2\left(\zeta_1\right) = k\right]z_2^k\\
F_{1,2}\left(z_1;\zeta_2\right) &= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[L_1\left(\zeta_2\right) = k\right]z_1^k\\
F_{2,2}\left(z_2;\zeta_2\right) &= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\zeta_2)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[L_2\left(\zeta_2\right) = k\right]z_2^k
\end{aligned}$$

Ahora se definen para el segundo sistema y el servidor del primero

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{1,1}(w_1;\tau_1) &= \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\hat{L}_1(\tau_1)=k\right]w_1^k\\
\hat{F}_{2,1}(w_2;\tau_1) &= \mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\hat{L}_2(\tau_1)=k\right]w_2^k\\
\hat{F}_{1,2}(w_1;\tau_2) &= \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\hat{L}_1(\tau_2)=k\right]w_1^k\\
\hat{F}_{2,2}(w_2;\tau_2) &= \mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\hat{L}_2(\tau_2)=k\right]w_2^k
\end{aligned}$$

Ahora, con lo anterior definamos la FGP conjunta para el segundo sistema y τ_1*:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right] &= \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}\right]\mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]=\hat{F}_{1,1}(w_1;\tau_1)\hat{F}_{2,1}(w_2;\tau_1)\\
&= \hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1).
\end{aligned}$$

hagamos lo mismo para τ_2

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right] &= \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]=\hat{F}_{1,2}(w_1;\tau_2)\hat{F}_{2,2}(w_2;\tau_2)\\
&= \hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2).
\end{aligned}$$

Con respecto al sistema 1 se tiene la FGP conjunta con respecto a ζ_1*:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}\right] &= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]=F_{1,1}(z_1;\zeta_1)F_{2,1}(z_2;\zeta_1)\\
&= F_1(z_1,z_2;\zeta_1).
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right] &= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\zeta_2)}\right]=F_{1,2}(z_1;\zeta_2)F_{2,2}(z_2;\zeta_2)\\
&= F_2(z_1,z_2;\zeta_2).
\end{aligned}$$

Ahora analicemos la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas, entonces se define la PGF conjunta al tiempo t para los tiempos de visita del servidor en cada una de las colas, para comenzar a dar servicio, definidos anteriormente al tiempo $t=\{\tau_1,\tau_2,\zeta_1,\zeta_2\}$*:*

$$F_1(z_1,z_2,w_1,w_2) = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_1)}z_2^{L_2(\tau_1)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right] \tag{33.68.1}$$

$$F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}z_2^{L_2(\tau_2)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right] \tag{33.68.2}$$

$$\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1,w_2) = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}w_1^{\hat{L}_1(\zeta_1)}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right] \tag{33.68.3}$$

$$\hat{F}_2(z_1,z_2,w_1,w_2) = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_2)}\right] \tag{33.68.4}$$

Entonces, con la finalidad de encontrar el número de usuarios presentes en el sistema cuando el servidor deja de atender una de las colas de cualquier sistema se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]=\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]\\
=\;& \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)+X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)+Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)+\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)+\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]
\end{aligned}$$

utilizando la ecuacion dada (33.81.1), luego

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right\}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]
\end{aligned}$$

Aplicando la ecuación (33.80.1)

$$= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]$$

dado que los arribos a cada una de las colas son independientes, podemos separar la esperanza para los procesos de llegada a Q_1 y Q_2 en τ_1
Recordando que $\tilde{X}_2(z_2) = X_2(z_2) + Y_2(z_2)$ se tiene

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{\tilde{P}_2(z_2)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\hat{P}_1(w_1)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\hat{P}_2(w_2)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right\}^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)^{L_1(\tau_1)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z2\right)\hat{F}_1(w_1, w_2; \tau_1)\\
&\equiv F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right)
\end{aligned}$$

Las igualdades anteriores son ciertas pues el número de usuarios que llegan a $\hat{Q}_2$ durante el intervalo $[\tau_1, \overline{\tau}_1]$ aún no han sido atendidos por el servidor del sistema 2 y por tanto aún no pueden pasar al sistema 1 por Q_2. Por tanto el número de usuarios que pasan de $\hat{Q}_2$ a Q_2 en el intervalo de tiempo $[\tau_1, \overline{\tau}_1]$ depende de la política de traslado entre los dos sistemas, conforme a la sección anterior.

Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right] = F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), z_2, w_1, w_2\right) \tag{33.68.5}$$

Utilizando un razonamiento análogo para $\overline{\tau}_2$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right] = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)+X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)+\hat{X}_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)+\hat{X}_2(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}z_1^{X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}z_1^{X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}P_1(z_1)^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\hat{P}_1(w_1)^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\hat{P}_2(w_2)^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]
\end{aligned}$$

utlizando la proposición relacionada con la ruina del jugador

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}\left\{P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right\}^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)^{L_2(\tau_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
&= F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1, w_2; \tau_2)
\end{aligned}$$

entonces se define

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right] = F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right), w_1, w_2\right) \tag{33.68.6}$$

$$\equiv F_2\left(z_1, \tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1, w_2; \tau_2) \tag{33.68.7}$$

Ahora para $\overline{\zeta}_1$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right]=\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right]\\
=&\quad\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_1^{X_1(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}z_2^{X_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}z_2^{Y_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}\right]\\
=&\quad\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[z_1^{X_1(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right]\\
=&\quad\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[P_1(z_1)^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1}\tilde{P}_2(z_2)^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1}\hat{P}_2(w_2)^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right]\\
=&\quad\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[\left\{P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right\}^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right]\\
=&\quad\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right)^{\hat{L}_1(\zeta_1)}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right]\\
=&\quad F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)
\end{aligned}
$$

es decir

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right]&=\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)\\
&=\quad F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2\right.\right.
\end{aligned}
$$

Finalmente para $\overline{\zeta}_2$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right]=\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}\right]\\
=&\quad\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_1^{X_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}z_2^{X_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}z_2^{Y_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}\right]\\
=&\quad\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[z_1^{X_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\right]\\
=&\quad\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[P_1(z_1)^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}\tilde{P}_2(z_2)^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}\hat{P}(w_1)^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\right]\\
=&\quad\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\left\{P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}(w_1)\right\}^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}\right]\\
=&\quad\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}(w_1)\right)^{\hat{L}_2\zeta_2}\right]\\
=&\quad F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right]
\end{aligned}
$$

33.69. Ecuaciones Recursivas para la R.S.V.C.

es decir

$$
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right]=\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right) \tag{33.69.1}
$$

$$
=F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right] \tag{33.69.2}
$$

(33.69.3)

Con lo desarrollado hasta ahora podemos encontrar las ecuaciones recursivas que modelan la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (R.S.V.C):

$$
\begin{aligned}
F_2(z_1,z_2,w_1,w_2)&=R_1(z_1,z_2,w_1,w_2)\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]\\
F_1(z_1,z_2,w_1,w_2)&=R_2(z_1,z_2,w_1,w_2)\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]\\
\hat{F}_2(z_1,z_2,w_1,w_2)&=\hat{R}_1(z_1,z_2,w_1,w_2)\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right]
\end{aligned}
$$

y finalmente

$$
\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1,w_2)=\hat{R}_2(z_1,z_2,w_1,w_2)\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right]
$$

que son equivalentes a las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} F_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) &= R_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)\\ & F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2,w_1,w_2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) &= R_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)\\ & F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_1,w_2\right) \end{aligned}$$

33.69.1. Tiempos de Traslado del Servidor

$$\begin{aligned} \hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) &= \hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)\\ & \hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) &= \hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)\\ & \hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Para

$$R_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)=R_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right) \tag{33.69.4}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= R_1^{(1)}\left(1\right)P_1^{(1)}\left(1\right)=r_1\mu_1,\\ \frac{\partial R_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= R_1^{(1)}\left(1\right)\tilde{P}_2^{(1)}\left(1\right)=r_1\tilde{\mu}_2,\\ \frac{\partial R_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= R_1^{(1)}\left(1\right)\hat{P}_1^{(1)}\left(1\right)=r_1\hat{\mu}_1,\\ \frac{\partial R_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= R_1^{(1)}\left(1\right)\hat{P}_2^{(1)}\left(1\right)=r_1\hat{\mu}_2, \end{aligned}$$

Análogamente se tiene

$$R_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)=R_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right) \tag{33.69.5}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= R_2^{(1)}\left(1\right)P_1^{(1)}\left(1\right)=r_2\mu_1,\\ \frac{\partial R_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= R_2^{(1)}\left(1\right)\tilde{P}_2^{(1)}\left(1\right)=r_2\tilde{\mu}_2,\\ \frac{\partial R_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= R_2^{(1)}\left(1\right)\hat{P}_1^{(1)}\left(1\right)=r_2\hat{\mu}_1,\\ \frac{\partial R_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= R_2^{(1)}\left(1\right)\hat{P}_2^{(1)}\left(1\right)=r_2\hat{\mu}_2, \end{aligned}$$

Para el segundo sistema:

$$\hat{R}_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)=\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right) \tag{33.69.6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{R}_1^{(1)}(1)\,P_1^{(1)}(1)=\hat{r}_1\mu_1,\\
\frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{R}_1^{(1)}(1)\,\tilde{P}_2^{(1)}(1)=\hat{r}_1\tilde{\mu}_2,\\
\frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{R}_1^{(1)}(1)\,\hat{P}_1^{(1)}(1)=\hat{r}_1\hat{\mu}_1,\\
\frac{\partial \hat{R}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{R}_1^{(1)}(1)\,\hat{P}_2^{(1)}(1)=\hat{r}_1\hat{\mu}_2,
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})=\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\,\tilde{P}_2(z_2)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right) \tag{33.69.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{R}_2^{(1)}(1)\,P_1^{(1)}(1)=\hat{r}_2\mu_1,\\
\frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{R}_2^{(1)}(1)\,\tilde{P}_2^{(1)}(1)=\hat{r}_2\tilde{\mu}_2,\\
\frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{R}_2^{(1)}(1)\,\hat{P}_1^{(1)}(1)=\hat{r}_2\hat{\mu}_1,\\
\frac{\partial \hat{R}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{R}_2^{(1)}(1)\,\hat{P}_2^{(1)}(1)=\hat{r}_2\hat{\mu}_2.
\end{aligned}$$

33.69.2. Usuarios presentes en la cola

Hagamos lo correspondiente con las siguientes expresiones obtenidas en la sección anterior: Recordemos que

$$\begin{aligned}
F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right),z_2,w_1,w_2\right) &= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right),z2\right)\\
&\quad \hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1)
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right),z_2,w_1,w_2\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right),z_2,w_1,w_2\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial \theta_1}{\partial \tilde{P}_2}\cdot\frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial F_1}{\partial z_2}\\
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right),z_2,w_1,w_2\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial \theta_1}{\partial \hat{P}_1}\cdot\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial w_1}+\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_1}\\
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right),z_2,w_1,w_2\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial \theta_1}{\partial \hat{P}_2}\cdot\frac{\partial \hat{P}_2}{\partial w_2}+\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_2}
\end{aligned}$$

para τ_2:

$$\begin{aligned}
F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right),w_1,w_2\right) &= F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\\
&\quad \hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2)
\end{aligned}$$

al igual que antes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right),w_1,w_2\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z_2}+\frac{\partial F_2}{\partial z_1}\\
\frac{\partial F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right),w_1,w_2\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\
\frac{\partial F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right),w_1,w_2\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial \hat{P}_1}\cdot\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial w_1}+\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial w_1}\\
\frac{\partial F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\,\hat{P}_1(w_1)\,\hat{P}_2(w_2)\right),w_1,w_2\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial \hat{P}_2}\cdot\frac{\partial \hat{P}_2}{\partial w_2}+\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial w_2}
\end{aligned}$$

Ahora para el segundo sistema

$$\begin{aligned}\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right) &= F_1\left(z_1,z_2;\zeta_1\right)\\ &\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_1}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_1}{\partial P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z_1}+\frac{\partial F_1}{\partial z_1}\\ \frac{\partial\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_1}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_1}{\partial\tilde{P}_2}\cdot\frac{\partial\tilde{P}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial F_1}{\partial z_2}\\ \frac{\partial\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\ \frac{\partial\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_1}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_1}{\partial\hat{P}_2}\cdot\frac{\partial\hat{P}_2}{\partial w_2}+\frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_2}\end{aligned}$$

Finalmente para ζ_2

$$\begin{aligned}\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right) &= F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\\ &\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right]\end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_2}{\partial P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z_1}+\frac{\partial F_2}{\partial z_1}\\ \frac{\partial\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_2}{\partial\tilde{P}_2}\cdot\frac{\partial\tilde{P}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial F_2}{\partial z_2}\\ \frac{\partial\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_2}{\partial\hat{P}_1}\cdot\frac{\partial\hat{P}_1}{\partial w_1}+\frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_1}\\ \frac{\partial\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\end{aligned}$$

33.69.3. Ecuaciones Recursivas

Entonces, de todo lo desarrollado hasta ahora se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial R_1}{\partial z_1}+\frac{\partial F_1}{\partial z_1}=r_1\mu_1\\ \frac{\partial F_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial R_1}{\partial z_2}+\frac{\partial F_1}{\partial z_2}=r_1\tilde{\mu}_2+f_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2+f_1\left(2\right)\\ \frac{\partial F_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial R_1}{\partial w_1}+\frac{\partial F_1}{\partial w_1}=r_1\hat{\mu}_1+f_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_1+\hat{F}^{(1)}_{1,1}\left(1\right)\\ \frac{\partial F_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial R_1}{\partial w_2}+\frac{\partial F_1}{\partial w_2}=r_1\hat{\mu}_2+f_1\left(1\right)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_2+\hat{F}^{(1)}_{2,1}\left(1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial R_2}{\partial z_1}+\frac{\partial F_2}{\partial z_1}=r_2\mu_1+f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\mu_1+f_2\left(1\right)\\ \frac{\partial F_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial R_2}{\partial z_2}+\frac{\partial F_2}{\partial z_2}=r_2\tilde{\mu}_2\\ \frac{\partial F_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial R_2}{\partial w_1}+\frac{\partial F_2}{\partial w_1}=r_2\hat{\mu}_1+f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1+\hat{F}^{(1)}_{2,1}\left(1\right)\\ \frac{\partial F_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial R_2}{\partial w_2}+\frac{\partial F_2}{\partial w_2}=r_2\hat{\mu}_2+f_2\left(2\right)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_2+\hat{F}^{(1)}_{2,2}\left(1\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial \hat{R}_1}{\partial z_1}+\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial z_1}=\hat{r}_1\mu_1+\hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1+F_{1,1}^{(1)}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial \hat{R}_1}{\partial z_2}+\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial z_2}=\hat{r}_1\mu_2+\hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2+F_{2,1}^{(1)}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial \hat{R}_1}{\partial w_1}+\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_1}=\hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
\frac{\partial \hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial \hat{R}_1}{\partial w_2}+\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial w_2}=\hat{r}_1\hat{\mu}_2+\hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2+\hat{f}_1(2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial \hat{R}_2}{\partial z_1}+\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial z_1}=\hat{r}_2\mu_1+\hat{f}_2(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1+F_{1,2}^{(1)}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial \hat{R}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial z_2}=\hat{r}_2\tilde{\mu}_2+\hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2+F_{2,2}^{(1)}(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial \hat{R}_2}{\partial w_1}+\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial w_1}=\hat{r}_2\hat{\mu}_1+\hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1+\hat{f}_2(1)\\
\frac{\partial \hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial \hat{R}_2}{\partial w_2}+\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial w_2}=\hat{r}_2\hat{\mu}_2
\end{aligned}
$$

Es decir, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
f_2(1) &= r_1\mu_1\\
f_1(2) &= r_2\tilde{\mu}_2\\
f_2(2) &= r_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\left(\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+f_1(2)=\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2+r_2\tilde{\mu}_2\\
&= \left(r_1+r_2+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2=\left(r+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2\\
f_2(3) &= r_1\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\left(\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1)=\hat{\mu}_1\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}\\
f_2(4) &= r_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)=\hat{\mu}_2\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1(1) &= r_2\mu_1+\mu_1\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+r_1\mu_1=\mu_1\left(r_1+r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\\
&= \mu_1\left(r+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\\
f_1(3) &= r_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1)=\hat{\mu}_1\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}\\
f_1(4) &= r_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)=\hat{\mu}_2\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2}\\
\hat{f}_1(4) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_2\\
\hat{f}_2(3) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
\hat{f}_1(1) &= \hat{r}_2\mu_1+\mu_1\left(\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)+F_{1,2}^{(1)}(1)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_1(2) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right) + F^{(1)}_{2,2}(1) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2 + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}\\
\hat{f}_1(3) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_1\left(\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right) + \hat{f}_2(3) = \left(\hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 + \hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
&= \left(\hat{r}_1 + \hat{r}_2 + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1 = \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1\\
\hat{f}_2(1) &= \hat{r}_1\mu_1 + \mu_1\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right) + F^{(1)}_{1,1}(1) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1 + \frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1}\\
\hat{f}_2(2) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right) + F^{(1)}_{2,1}(1) = \left(\hat{r}_1 + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2 + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1}\\
\hat{f}_2(4) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right) + \hat{f}_1(4) = \hat{r}_1\hat{\mu}_2 + \hat{r}_2\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\\
&= \left(\hat{r} + \frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2
\end{aligned}
$$

33.69.4. Solución del Sistema de Ecuaciones Lineales

A saber, se puede demostrar que la solución del sistema de ecuaciones está dado por las siguientes expresiones, donde

$$\mu = \mu_1 + \tilde{\mu}_2\ ,\ \hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2\ ,\ r = r_1 + r_2\ y\ \hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$$

entonces

$$
\begin{aligned}
f_1(1) &= r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}\\
f_2(2) &= r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1(3) &= \hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)\\
f_1(4) &= \hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2} + r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(3) &= \hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right)\\
f_2(4) &= \hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1} + r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_2(4) &= \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}\\
\hat{f}_1(3) &= \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_1(1) &= \mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right)\\
\hat{f}_1(2) &= \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}\\
\hat{f}_2(1) &= \mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1} + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right)\\
\hat{f}_2(2) &= \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1 + \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right) + \frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_1}
\end{aligned}
$$

A saber

$$
\begin{aligned}
f_1(3) &= \hat{\mu}_1\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}=\hat{\mu}_1\left(r_2+\frac{r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}\\
&= \hat{\mu}_1\left(r_2+\frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}=\hat{\mu}_1\left(r_2+\frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}+\frac{1}{\mu_2}\right)\\
&= \hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2}+\frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1(4) &= \hat{\mu}_2\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2}=\hat{\mu}_2\left(r_2+\frac{r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2}\\
&= \hat{\mu}_2\left(r_2+\frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}=\hat{\mu}_2\left(r_2+\frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}+\frac{1}{\mu_2}\right)\\
&= \hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2}+\frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(3) &= \hat{\mu}_1\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}=\hat{\mu}_1\left(r_1+\frac{r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}\\
&= \hat{\mu}_1\left(r_1+\frac{r\mu_1}{1-\mu}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}=\hat{\mu}_1\left(r_1+\frac{r\mu_1}{1-\mu}+\frac{1}{\mu_1}\right)\\
&= \hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1}+\frac{r\mu_1}{1-\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(4) &= \hat{\mu}_2\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_1}=\hat{\mu}_2\left(r_1+\frac{r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}\\
&= \hat{\mu}_2\left(r_1+\frac{r\mu_1}{1-\mu}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}=\hat{\mu}_2\left(r_1+\frac{r\mu_1}{1-\mu}+\frac{1}{\mu_1}\right)\\
&= \hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1}+\frac{r\mu_1}{1-\mu}\right)
\end{aligned}
$$

A saber

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_1(1) &= \mu_1\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2}=\mu_1\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_2}\right)+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2}\\
&= \mu_1\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right)+\frac{\mu_1}{\mu_2}=\mu_1\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{r}\mu_2}{1-\hat{\mu}}+\frac{1}{\hat{\mu}_2}\right)\\
&= \mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2}+\frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_1(2) &= \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}=\tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_2}\right)+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}\\
&= \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right)+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_2(1) &= \mu_1\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1}=\mu_1\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_1}\right)+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1}\\
&= \mu_1\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right)+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1}=\mu_1\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}+\frac{1}{\hat{\mu}_1}\right)\\
&= \mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1}+\frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_2(2) &= \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\tilde{\mu}_1}\right)+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1}=\tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_1}\right)+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1}\\
&= \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right)+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1}
\end{aligned}
$$

33.70. Segundos Momentos

Para poder determinar los segundos momentos para los tiempos de traslado del servidor es necesario enunciar y demostrar la siguiente proposición:

Proposición 33.77 *Sea $f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)$ función continua tal que tiene derivadas parciales mixtas de segundo orden, entonces se tiene lo siguiente:*

$$\frac{\partial}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)=\frac{\partial f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial g\left(x\right)}{\partial x}\cdot h\left(y\right)$$

por tanto

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right) = \frac{\partial^{2}}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\cdot\left(\frac{\partial g\left(x\right)}{\partial x}\right)^{2}\cdot h^{2}\left(y\right)+\frac{\partial}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\cdot\frac{\partial g^{2}\left(x\right)}{\partial x^{2}}\cdot h\left(y\right) \tag{33.70.1}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right) = \frac{\partial g\left(x\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial h\left(y\right)}{\partial y}\left\{\frac{\partial^{2}}{\partial y\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\cdot g\left(x\right)\cdot h\left(y\right)+\frac{\partial}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\right\}$$

Demostración 33.13

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial g\left(x\right)}{\partial x}\cdot h\left(y\right)\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\right\}\cdot\frac{\partial g\left(x\right)}{\partial x}\cdot h\left(y\right)+\frac{\partial}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\cdot\frac{\partial g^{2}\left(x\right)}{\partial x^{2}}\cdot h\left(y\right)\\
&= \frac{\partial^{2}}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\cdot\frac{\partial g\left(x\right)}{\partial x}\cdot h\left(y\right)\cdot\frac{\partial g\left(x\right)}{\partial x}\cdot h\left(y\right)+\frac{\partial}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\cdot\frac{\partial g^{2}\left(x\right)}{\partial x^{2}}\cdot h\left(y\right)\\
&= \frac{\partial^{2}}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\cdot\left(\frac{\partial g\left(x\right)}{\partial x}\right)^{2}\cdot h^{2}\left(y\right)+\frac{\partial}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\cdot\frac{\partial g^{2}\left(x\right)}{\partial x^{2}}\cdot h\left(y\right).\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial g\left(x\right)}{\partial x}\cdot h\left(y\right)\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\right\}\cdot\frac{\partial g\left(x\right)}{\partial x}\cdot h\left(y\right)+\frac{\partial}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\cdot\frac{\partial g\left(x\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial h\left(y\right)}{y}\\
&= \frac{\partial^{2}}{\partial y\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\cdot\frac{\partial h\left(y\right)}{\partial y}\cdot g\left(x\right)\cdot\frac{\partial g\left(x\right)}{\partial x}\cdot h\left(y\right)+\frac{\partial}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\cdot\frac{\partial g\left(x\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial h\left(y\right)}{\partial y}\\
&= \frac{\partial g\left(x\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial h\left(y\right)}{\partial y}\left\{\frac{\partial^{2}}{\partial y\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\cdot g\left(x\right)\cdot h\left(y\right)+\frac{\partial}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\right\}\end{aligned}$$

Para la siguiente proposición es necesario utilizar el resultado (33.91)

Proposición 33.78 *Sea R_i la Función Generadora de Probabilidades para el número de arribos a cada una de las colas de la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas definidas como en (33.83.4). Entonces las derivadas parciales están dadas por las siguientes expresiones:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2}R_{i}\left(P_{1}\left(z_{1}\right)\tilde{P}_{2}\left(z_{2}\right)\hat{P}_{1}\left(w_{1}\right)\hat{P}_{2}\left(w_{2}\right)\right)}{\partial z_{i}^{2}} &= \left(\frac{\partial P_{i}\left(z_{i}\right)}{\partial z_{i}}\right)^{2}\cdot\frac{\partial^{2}R_{i}\left(P_{1}\left(z_{1}\right)\tilde{P}_{2}\left(z_{2}\right)\hat{P}_{1}\left(w_{1}\right)\hat{P}_{2}\left(w_{2}\right)\right)}{\partial^{2}z_{i}}\\
&+ \left(\frac{\partial P_{i}\left(z_{i}\right)}{\partial z_{i}}\right)^{2}\cdot\frac{\partial R_{i}\left(P_{1}\left(z_{1}\right)\tilde{P}_{2}\left(z_{2}\right)\hat{P}_{1}\left(w_{1}\right)\hat{P}_{2}\left(w_{2}\right)\right)}{\partial z_{i}}\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2}R_{i}\left(P_{1}\left(z_{1}\right)\tilde{P}_{2}\left(z_{2}\right)\hat{P}_{1}\left(w_{1}\right)\hat{P}_{2}\left(w_{2}\right)\right)}{\partial z_{2}\partial z_{1}} &= \frac{\partial\tilde{P}_{2}\left(z_{2}\right)}{\partial z_{2}}\cdot\frac{\partial P_{1}\left(z_{1}\right)}{\partial z_{1}}\cdot\frac{\partial^{2}R_{i}\left(P_{1}\left(z_{1}\right)\tilde{P}_{2}\left(z_{2}\right)\hat{P}_{1}\left(w_{1}\right)\hat{P}_{2}\left(w_{2}\right)\right)}{\partial z_{2}\partial z_{1}}\\
&+ \frac{\partial\tilde{P}_{2}\left(z_{2}\right)}{\partial z_{2}}\cdot\frac{\partial P_{1}\left(z_{1}\right)}{\partial z_{1}}\cdot\frac{\partial R_{i}\left(P_{1}\left(z_{1}\right)\tilde{P}_{2}\left(z_{2}\right)\hat{P}_{1}\left(w_{1}\right)\hat{P}_{2}\left(w_{2}\right)\right)}{\partial z_{1}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial w_i \partial z_1} &= \frac{\partial \hat{P}_i(w_i)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1(z_1)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial w_i \partial z_1}\\ &+ \frac{\partial \hat{P}_i(w_i)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1(z_1)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_1},\end{aligned}$$

finalmente

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial w_i \partial z_2} &= \frac{\partial \hat{P}_i(w_i)}{\partial w_i}\cdot\frac{\partial \tilde{P}_2(z_2)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial w_i \partial z_2}\\ &+ \frac{\partial \hat{P}_i(w_i)}{\partial w_i}\cdot\frac{\partial \tilde{P}_2(z_2)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)}{\partial z_2},\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$.

33.70.1. Sistema de Ecuaciones Lineales para los Segundos Momentos

En el apéndice A se demuestra que las ecuaciones para las ecuaciones parciales mixtas están dadas por:

a)

$$\begin{aligned}f_1(1,1) &= r_2 P_1^{(2)}(1) + \mu_1^2 R_2^{(2)}(1) + 2\mu_1 r_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right) + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2} P_1^{(2)} f_2(2)\\ &+ \mu_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2) + \frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(1,2) + \frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2,2) + f_2(1,2)\right) + f_2(1,1).\end{aligned}$$

b)

$$f_1(2,1) = \mu_1 r_2\tilde{\mu}_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right).$$

c)

$$\begin{aligned}f_1(3,1) &= \mu_1\hat{\mu}_1 r_2 + \mu_1\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right) + \mu_1 r_2\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\\ &+ \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2)\\ &+ \mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(1,2).\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}f_1(4,1) &= \mu_1\hat{\mu}_2 r_2 + \mu_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \mu_1 r_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right)\\ &+ \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2)\\ &+ \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2^{(1,2)}.\end{aligned}$$

e)

$$f_1(1,2) = \mu_1\tilde{\mu}_2 r_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right).$$

f)

$$f_1(2,2) = \tilde{\mu}_2^2 R_2^{(2)}(1) + r_2\tilde{P}_2^{(2)}(1).$$

g)

$$f_1(3,2) = \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 r_2 + \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1).$$

h)

$$f_1(4,2) = \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_2 + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1).$$

i)

$$\begin{aligned} f_1(1,3) &= \mu_1\hat{\mu}_1 r_2 + \mu_1\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2)\\ &+ r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right) + r_2\mu_1\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(1) + f_2(1)\right)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\\ &+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2,2) + f_2^{(1,2)}\right). \end{aligned}$$

j)

$$f_1(2,3) = \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1).$$

k)

$$\begin{aligned} f_1(3,3) &= \hat{\mu}_1^2 R_2^{(2)}(1) + r_2\hat{P}_1^{(2)}(1) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \hat{\mu}_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2) + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_1^{(2)}(1) f_2(2)\\ &+ \frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2,2) + 2r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + 2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \hat{f}_{2,1}^{(2)}(1). \end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned} f_1(4,3) &= r_2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2)\\ &+ r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\\ &+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \hat{f}_2(1,2). \end{aligned}$$

m)

$$\begin{aligned} f_1(1,4) &= r_2\mu_1\hat{\mu}_2 + \mu_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2)\\ &+ r_2\mu_1\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right) + \hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right)\\ &+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2,2) + f_2(1,2)\right). \end{aligned}$$

n)

$$f_1(2,4) = r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1).$$

ñ)

$$\begin{aligned} f_1(3,4) &= r_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_2^{(2)}(1) f_2(2)\\ &+ r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\\ &+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \hat{f}_2^{(2)}(1,2). \end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned} f_1(4,4) &= \hat{\mu}_2^2 R_2^{(2)}(1) + r_2\hat{P}_2^{(2)}(1) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \hat{\mu}_2^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2) + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}(1) f_2(2)\\ &+ 2r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + 2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + \hat{f}_{2,2}^{(2)}(1). \end{aligned}$$

p)

$$f_2(1,1) = r_1 P_1^{(2)}(1) + \mu_1^2 R_1^{(2)}(1).$$

q)

$$f_2(2,1) = \mu_1\tilde{\mu}_2 r_1 + \mu_1\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1} f_1(1) + f_1(2)\right).$$

r)

$$f_2(3,1) = r_1\mu_1\hat{\mu}_1 + \mu_1\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1) + r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1} f_1(1) + r_1\mu_1\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1).$$

s)

$$f_2\left(4,1\right) = \mu_1\hat{\mu}_2 r_1 + \mu_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}\left(1\right) + r_1\mu_1\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1) + r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1).$$

t)

$$f_2\left(1,2\right) = r_1\mu_1\tilde{\mu}_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}\left(1\right) + r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right).$$

u)

$$\begin{aligned} f_2\left(2,2\right) &= \tilde{\mu}_2^2 R_1^{(2)}\left(1\right) + r_1\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right) + 2r_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right) + f_1(2,2) \\ &+ \tilde{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1(1) + \frac{1}{1-\mu_1}\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)f_1(1) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,2) \\ &+ \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,1) + f_1(1,2)\right). \end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned} f_2\left(3,2\right) &= \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_1 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}\left(1\right) + r_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_1 r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right) + r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1) \\ &+ \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right)\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1) + \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1) + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1(1) + \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1,2) \\ &+ \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 f_1(1,1). \end{aligned}$$

w)

$$\begin{aligned} f_2\left(4,2\right) &= \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_1 + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1) + r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_2 r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right) \\ &+ \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right)\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1) + \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,2) \\ &+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(1,1). \end{aligned}$$

x)

$$f_2\left(1,3\right) = r_1\mu_1\hat{\mu}_1 + \mu_1\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1) + r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1) + r_1\mu_1\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1).$$

y)

$$\begin{aligned} f_2\left(2,3\right) &= r_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}\left(1\right) + \frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + r_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1(1) \\ &+ r_1\hat{\mu}_1\left(f_1(1) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right) + r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,1}(1) + \left(f_1(2) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right)\hat{F}_{1,1}(1) \\ &+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\left(f_1(1,2) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,1)\right). \end{aligned}$$

z)

$$\begin{aligned} f_2\left(3,3\right) &= \hat{\mu}_1^2 R_1^{(2)}\left(1\right) + r_1\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right) + 2r_1\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_1^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1(1) \\ &+ \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)f_1(1) + 2r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1) + 2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)\hat{F}_{1,1}(1) \\ &+ \left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(1,1) + \hat{f}_{1,1}^{(2)}(1). \end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned} f_2\left(4,3\right) &= r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}\left(1\right) + r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_{1,2}(1) + \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + 2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) \\ &+ \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1(1) + \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)\hat{F}_{1,2}(1) + r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_{1,1}(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_{1,1}(1)f_1(1) \\ &+ \hat{f}_1^{(2)}(1,2) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(2,2). \end{aligned}$$

)

$$f_2\left(1,4\right) = r_1\mu_1\hat{\mu}_2 + \mu_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}\left(1\right) + r_1\mu_1\hat{F}_{1,2}(1) + r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1).$$

)

$$\begin{aligned}
f_2(2,4) &= r_1\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,2}(1)+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\\
&+ \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1)+r_1\hat{\mu}_2\left(f_1(2)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right)+\left(f_1(2)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right)\hat{F}_{1,2}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(f_1(1,2)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,1)\right).
\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}
f_2(3,4) &= r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_{1,2}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\\
&+ \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1)+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\hat{F}_{1,2}(1)f_1(1)+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_{1,1}(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_{1,1}(1)f_1(1)\\
&+ \hat{f}_1^{(2)}(1,2)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(1,1).
\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}
f_2(4,4) &= \hat{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\hat{P}_2^{(2)}(1)+2r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+\hat{f}_{1,2}^{(2)}(1)+2r_1\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\mu_1}f_1(1)+\hat{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1)\\
&+ \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_2^{(2)}(1)f_1(1)+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\hat{F}_{1,2}(1)+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(1,1).
\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1(1,1) &= \hat{r}_2P_1^{(2)}(1)+\mu_1^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}P_1^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)+\mu_1^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)\\
&+ \left(\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)+2\hat{r}_2\mu_1F_{2,1}(1)+2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1)+F_{2,1}^{(2)}(1).
\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1(2,1) &= \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\mu_1F_{2,2}(1)+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(2)+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_{2,1}(1)\\
&+ \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1)+f_{2,1}^{(2)}(1).
\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1(3,1) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,1}(1)+\hat{r}_2\mu_1\hat{f}_2(1)\\
&+ F_{2,1}(1)\hat{f}_2(1)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2).
\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1(4,1) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,1}(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1).
\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1(1,2) &= \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\mu_1\hat{r}_2F_{2,2}(1)+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(2)+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)\\
&+ \hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_{2,1}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1)+f_2^{(2)}(1,2).
\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1(2,2) &= \hat{r}_2\tilde{P}_2^{(2)}(1)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_{2,2}(1)+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\
&+ \frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)+\tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(2)\\
&+ f_{2,2}^{(2)}(1)+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2).
\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(3,2) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,2}(1)+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2(1)+F_{2,2}(1)\hat{f}_2(1)\\&+ \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2).\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(4,2) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,2}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\&+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(1)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{f}_2(2,2).\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(1,3) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,1}(1)+\hat{r}_2\mu_1\hat{f}_2(1)\\&+ F_{2,1}(1)\hat{f}_2(1)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2).\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(2,3) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,2}(1)+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2(1)\\&+ F_{2,2}(1)\hat{f}_2(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2).\end{aligned}$$

)

$$\hat{f}_1(3,3) = \hat{r}_2\hat{P}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{f}_2(1)+\hat{f}_2(1,1).$$

)

$$\hat{f}_1(4,3) = \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{f}_2(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2).$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(1,4) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\&+ \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,1}(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1).\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(2,4) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,2}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\&+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,2}(1)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2).\end{aligned}$$

)

$$\hat{f}_1(3,4) = \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{f}_2(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2).$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(4,4) &= \hat{r}_2P_2^{(2)}(1)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)\\&+ \hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2).\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_2(,1) &= \hat{r}_1P_1^{(2)}(1)+\mu_1^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\mu_1F_{1,1}(1)+2\hat{r}_1\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}P_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)\\&+ \mu_1^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1^(1)F_{1,1}(1)+f_{1,1}^{(2)}(1)+\left(\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1^{(1,1)}.\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_2(2,1) &= \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\mu_1F_{1,2}(1)+\tilde{\mu}_2\hat{r}_1F_{1,1}(1)+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\&+ 2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,2}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,1}(1)\\&+ f_1^{(2)}(1,2)+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1).\end{aligned}$$

)

$$\hat{f}_2(3,1) = \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1 + \mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,1}(1) + \hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1(1).$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_2(4,1) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2 + \mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_2F_{1,1}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\ &+ \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + \hat{r}_1\mu_1\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right) + F_{1,1}(1)\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)\\ &+ \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{f}_1(1,2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,1)\right).\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_2(1,2) &= \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\mu_1F_{1,2}(1) + \hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_{1,1}(1) + \frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\ &+ 2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,2}(1)\\ &+ \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,1}(1) + f_1^{(2)}(1,2) + \mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1).\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_2(2,2) &= \hat{r}_1\tilde{P}_2^{(2)}(1) + \tilde{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}(1) + 2\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_{1,2}(1) + f_{1,2}^{(2)}(1) + 2\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\ &+ \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + \tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + 2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}F_{1,2}(1)\hat{f}_1(1) + \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1).\end{aligned}$$

)

$$\hat{f}_2(3,2) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,2}(1) + \hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1).$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_2(4,2) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)F_{1,2}(1) + \frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\ &+ \hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)\\ &+ F_{1,2}(1)\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{f}_1(1,2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,1)\right).\end{aligned}$$

)

$$\hat{f}_2(1,3) = \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1 + \mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,1}(1) + \hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1).$$

)

$$\hat{f}_2(2,3) = \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,2}(1) + \hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1).$$

)

$$\hat{f}_2(3,3) = \hat{r}_1\hat{P}_1^{(2)}(1) + \hat{\mu}_1^2\hat{R}_1^{(2)}(1).$$

)

$$\hat{f}_2(4,3) = \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right).$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_2(1,4) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2 + \mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_2F_{1,1}(1) + \hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \hat{r}_1\mu_1\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)\\ &+ F_{1,1}(1)\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)\\ &+ \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2) + \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1).\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_2(2,4) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_2 F_{1,2}(1) + \hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\ &+ \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right) + F_{1,2}(1)\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right) + \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\ &+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2) + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1).\end{aligned}$$

)

$$\hat{f}_2(3,4) = \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right).$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_2(4,4) &= \hat{r}_1\hat{P}_2^{(2)}(1) + \hat{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}(1) + 2\hat{r}_1\hat{\mu}_2\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right) + \hat{f}_1(2,2)\\ &+ \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + \hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2)\\ &+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{f}_1(1,2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,1)\right).\end{aligned}$$

33.71. Tiempos de Ciclo e Intervisita

Definición 33.26 *Sea L_i^* el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\mathbb{E}[L_i^*] = f_i(i) \tag{33.71.1}$$
$$Var[L_i^*] = f_i(i,i) + \mathbb{E}[L_i^*] - \mathbb{E}[L_i^*]^2. \tag{33.71.2}$$

Definición 33.27 *El tiempo de Ciclo C_i es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 33.28 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}S_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right] = F_i(\theta(z)),\\ F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\ P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\ F_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right], \theta_i(z) - zP_i\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{1-\mu_i},\\ Var[S_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{(1-\mu_i)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^3}\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var[L_i^*] = f_i(i,i) + f_i(i) - f_i(i)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i(z) = I_i[P_i(z)]$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_i^*] &= \mu_i \mathbb{E}[I_i] \\ Var[L_i^*] &= \mu_i^2 Var[I_i] + \sigma^2 \mathbb{E}[I_i] \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},$$

además

$$Var[I_i] = \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).$$

Si $C_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$ el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i(z) = I_i[\theta_i(z)],$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i]\,\mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{\mu_i} \frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)} \\ Var[C_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2 (1-\mu_i)^2}. \end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_i] &= \mu_i \mathbb{E}[C_i], \\ \mathbb{E}[I_i] &= (1-\mu_i)\,\mathbb{E}[C_i] \end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \ldots, L_N(t)]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j(\tau_i(m)) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}[C_i]$ como

$$\mathbb{E}[C_i] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}[M_i]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}[C_i] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N}\mu_k<1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i]<\infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right]\\ \mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right]=z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right]=\frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{1-I_i[P_i(z)]}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\ &- \frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\ &- \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2}\\ &+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\ &+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z \rightarrow 1^{+}$:

$$Q_{i}^{(1)}(z) = \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{dQ_{i}(z)}{dz} = \lim_{z\rightarrow 1} \frac{(1-F_{i}(z))P_{i}(z)}{\mathbb{E}[C_{i}](1-P_{i}(z))(P_{i}(z)-z)} \tag{33.71.3}$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)P_{i}(z)F_{i}^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_{i}](1-P_{i}(z))(P_{i}(z)-z)} \tag{33.71.4}$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)(1-F_{i}(z))P_{i}(z)\left(P_{i}^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_{i}](1-P_{i}(z))(P_{i}(z)-z)^{2}} \tag{33.71.5}$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)(1-F_{i}(z))P_{i}^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_{i}](1-P_{i}(z))(P_{i}(z)-z)} \tag{33.71.6}$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)(1-F_{i}(z))P_{i}(z)P_{i}^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_{i}](1-P_{i}(z))^{2}(P_{i}(z)-z)} \tag{33.71.7}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{(1-F_{i}(z))P_{i}(z)}{(1-P_{i}(z))(P_{i}(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{\frac{d}{dz}[(1-F_{i}(z))P_{i}(z)]}{\frac{d}{dz}[(1-P_{i}(z))(-z+P_{i}(z))]}\\ &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{-P_{i}(z)F_{i}^{'}(z)+(1-F_{i}(z))P_{i}^{'}(z)}{(1-P_{i}(z))\left(-1+P_{i}^{'}(z)\right)-(-z+P_{i}(z))P_{i}^{'}(z)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)P_{i}(z)F_{i}^{'}(z)}{(1-P_{i}(z))(P_{i}(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)P_{i}(z)F_{i}^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}[(1-P_{i}(z))(P_{i}(z)-z)]}\\ &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{-P_{i}(z)F_{i}^{'}(z)+(1-z)F_{i}^{'}(z)P_{i}^{'}(z)+(1-z)P_{i}(z)F_{i}^{''}(z)}{(1-P_{i}(z))\left(-1+P_{i}^{'}(z)\right)-(-z+P_{i}(z))P_{i}^{'}(z)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)(1-F_{i}(z))P_{i}(z)\left(P_{i}^{'}(z)-1\right)}{(1-P_{i}(z))(P_{i}(z)-z)^{2}} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)(1-F_{i}(z))P_{i}(z)\left(P_{i}^{'}(z)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_{i}(z))(P_{i}(z)-z)^{2}\right]}\\ = \lim_{z\rightarrow 1^{+}} &\frac{-(1-F_{i}(z))P_{i}(z)\left(-1+P_{i}^{'}(z)\right)-(1-z)P_{i}(z)F_{i}^{'}(z)\left(-1+P_{i}^{'}(z)\right)}{2(1-P_{i}(z))(-z+P_{i}(z))\left(-1+P_{i}^{'}(z)\right)-(-z+P_{i}(z))^{2}P_{i}^{'}(z)}\\ + \lim_{z\rightarrow 1^{+}} &\frac{+(1-z)(1-F_{i}(z))\left(-1+P_{i}^{'}(z)\right)P_{i}^{'}(z)}{2(1-P_{i}(z))(-z+P_{i}(z))\left(-1+P_{i}^{'}(z)\right)-(-z+P_{i}(z))^{2}P_{i}^{'}(z)}\\ + \lim_{z\rightarrow 1^{+}} &\frac{+(1-z)(1-F_{i}(z))P_{i}(z)P_{i}^{''}(z)}{2(1-P_{i}(z))(-z+P_{i}(z))\left(-1+P_{i}^{'}(z)\right)-(-z+P_{i}(z))^{2}P_{i}^{'}(z)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)(1-F_{i}(z))P_{i}^{'}(z)}{(1-P_{i}(z))(P_{i}(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)(1-F_{i}(z))P_{i}^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}[(1-P_{i}(z))(P_{i}(z)-z)]}\\ = \lim_{z\rightarrow 1^{+}} &\frac{-(1-F_{i}(z))P_{i}^{'}(z)-(1-z)F_{i}^{'}(z)P_{i}^{'}(z)+(1-z)(1-F_{i}(z))P_{i}^{''}(z)}{(1-P_{i}(z))\left(-1+P_{i}^{'}(z)\right)-(-z+P_{i}(z))P_{i}^{'}(z)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)(1-F_{i}(z))P_{i}(z)P_{i}^{'}(z)}{(1-P_{i}(z))^{2}(P_{i}(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}} \frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)(1-F_{i}(z))P_{i}(z)P_{i}^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_{i}(z))^{2}(P_{i}(z)-z)\right]}\\ = \lim_{z\rightarrow 1^{+}} &\frac{-(1-F_{i}(z))P_{i}(z)P_{i}^{'}(z)-(1-z)P_{i}(z)F_{i}^{'}(z)P_{i}'[z]}{(1-P_{i}(z))^{2}\left(-1+P_{i}^{'}(z)\right)-2(1-P_{i}(z))(-z+P_{i}(z))P_{i}^{'}(z)}\\ + \lim_{z\rightarrow 1^{+}} &\frac{(1-z)(1-F_{i}(z))P_{i}^{'}(z)^{2}+(1-z)(1-F_{i}(z))P_{i}(z)P_{i}^{''}(z)}{(1-P_{i}(z))^{2}\left(-1+P_{i}^{'}(z)\right)-2(1-P_{i}(z))(-z+P_{i}(z))P_{i}^{'}(z)}\end{aligned}$$

33.71.1. Longitudes de la Cola en cualquier tiempo

Sea $V_{i}(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_{i}]}\frac{I_{i}(z)-1}{z-P_{i}(z)}$

$$\frac{\partial V_i(z)}{\partial z} = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left[\frac{I_i'(z)(z-P_i(z))}{z-P_i(z)} - \frac{(I_i(z)-1)(1-P_i'(z))}{(z-P_i(z))^2}\right]$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$U_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)} \cdot \frac{I_i(z)-1}{1-z}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}V_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\right)\frac{I_i(z)-1}{1-z} + \frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\frac{d}{dz}\left(\frac{I_i(z)-1}{1-z}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{-P_i(z)(z-P_i(z))-(1-P_i(z))\left(1-P_i'(z)\right)}{(z-P_i(z))^2}\cdot\frac{I_i(z)-1}{1-z}\right\}\\
&+ \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\cdot\frac{I_i'(z)(1-z)+(I_i(z)-1)}{(1-z)^2}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_i(z)}{\partial z} &= \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])}{(1-z)^2\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])} + \frac{(1-P_i[z])I_i'[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])} - \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])(1-P'[z])}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])^2}\\
&- \frac{(-1+I_i[z])P_i'[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}
\end{aligned}$$

33.72. Procesos de Renovación y Regenerativos

Definición 33.29 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{33.72.1}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 33.30 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 33.5 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

33.72.1. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\
T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},
\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 33.79 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Nota 33.6 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N\left(t\right)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución G, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$

Teorema 33.73 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{33.72.2}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{33.72.3}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N /t) la cumple.*

Corolario 33.14 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$t^{-1} N\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{33.72.4}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\left\{Z\left(t\right) : t \geq 0\right\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N\left(t\right)$

Definición 33.31 *Para el proceso* $\left\{Z\left(t\right) : t \geq 0\right\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z\left(t\right)$ *en el intervalo* $\left(T_{n-1}, T_n\right]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} \left|Z\left(t\right) - Z\left(T_{n-1}\right)\right|$$

Teorema 33.74 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) = a, \text{ c.s.} \tag{33.72.5}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{33.72.6}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 33.15 *Si* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación, y* $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{33.72.7}$$

33.72.2. Función de Renovación

Supóngase que $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación con distribución F con media finita* μ*.*

Definición 33.32 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso* $N\left(t\right)$*, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = 1\!\!1\left(t \geq 0\right)$*.*

Proposición 33.80 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces* $U\left(t\right)$ *también tiene densidad, para* $t > 0$*, y es* $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$*. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 33.33 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 33.81 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 33.7 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 33.75 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 33.16 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 33.34 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \; t \geq 0, \tag{33.72.8}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 33.82 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 33.76 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

33.72.3. Teorema Principal de Renovación

Nota 33.8 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 33.77 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) \, ds.$$

Proposición 33.83 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 33.35 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 33.84 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t), \text{ donde } h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 33.78 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

33.72.4. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t):t\geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_{+}$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_{n}=T_{n}-T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 33.36 *Para el proceso $\{(N(t),X(t)):t\geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1},T_{n})$ están descritas por*

$$\zeta_{n}=\left(\xi_{n},\{X(T_{n-1}+t):0\leq t<\xi_{n}\}\right)$$

Este ζ_{n} es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_{n} si sus segmentos ζ_{n} son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 33.1 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_{n}, entonces $X(t)=f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_{n}, para cualquier función $f:\tilde{S}\rightarrow S$.*

Observación 33.2 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 33.37 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X=\{X(t):t\geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_{1}>0$ tal que*

i) $\{X(t+R_{1}):t\geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t):t<R_{1}\},\}$

ii) $\{X(t+R_{1}):t\geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t):t>0\}$

Llamamos a R_{1} tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_{1})\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_{2}, independiente de R_{1} pero con la misma distribución que R_{1}. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_{n}\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_{k}\equiv R_{1}+R_{2}+\cdots+R_{k}$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 33.9 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 33.38 *Para x fijo y para cada $t\geq 0$, sea $I_{x}(t)=1$ si $X(t)\leq x$, $I_{x}(t)=0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{\infty}X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty}\leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{\infty}I_{x}(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{R_{1}}X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}\left[R_{1}\right]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 33.10 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_{e}=\{X_{e}(t)\}$, donde X_{e} es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

33.72.5. Procesos Regenerativos Estacionarios

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones que ocurren en $[0, t]$.
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 33.39 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 33.40 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 33.79 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

33.73. Tiempo de Ciclo Promedio

Consideremos una cola de la red de sistemas de visitas cíclicas fija, Q_l.
Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (34.422), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_l es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 33.41 *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 33.42 *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 33.43 *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

En nuestra notación $V(t) \equiv C_i$ y $X_i = C_i^{(m)}$ para nuestra segunda definición, mientras que para la primera la notación es: $X(t) \equiv C_i$ y $R_i \equiv C_i^{(m)}$.

33.74. Expresion de las Parciales mixtas para F_1 y F_2

a*)*

$$\frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} F_1 \left(\theta_1 \left(\tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2), z_2\right)\right) |_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

b)

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

c)

$$\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

d)

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

e)

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

f)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= f_1\left(2,2\right)+\frac{1}{1-\mu_1}\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)\\ + \quad \tilde{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1\left(1,2\right)+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}\right)^2 f_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1\left(1\right)\\ + \quad \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1\left(1,2\right)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1\left(1\right)\\ + \quad \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1\left(1,2\right)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

i)

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

j)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1\left(2\right)\\ + \quad \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(2\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1\left(2,1\right)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)\\ + \quad \hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 f_1\left(1\right)\\ + \quad \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1\left(1\right)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

m)

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

n)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1\left(1\right)\\ + \quad \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1\left(2,1\right)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1\left(2,2\right)\end{aligned}$$

ñ)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1\left(1\right)\\ + \quad \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_2^{(2)}\left(w_2\right)f_1\left(1\right)\\ + \quad \hat{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+\left(\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

p)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}P_1^{(2)}\left(1\right)f_2\left(2\right)+f_2\left(1,1\right)\\ + \quad \mu_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)f_2\left(2\right)+\mu_1\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)+\left(\mu_1\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right)+\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)\end{aligned}$$

q)

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

r)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(2\right)\\ + \quad \mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)f_2\left(2\right)+\mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)\end{aligned}$$

s)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(2\right)\\ + \quad \mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)f_2\left(2\right)+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)\end{aligned}$$

t)

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0;$$

u)

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

v)

$$\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

w)

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

x)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}P_1^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)+\mu_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)\\ &+ \mu_1\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)+\left(\mu_1\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right)\\ &+ \mu_1\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)+f_2\left(1,1\right)\end{aligned}$$

y)

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

z)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \mu_1\hat{\mu}_1\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)+\mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)\\ &+ \mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)+\hat{\mu}_1\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)\\ &+ \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right)\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \mu_1\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\frac{\partial}{\partial z_1}F_2\left(1\right)+\mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)\\ &+ \hat{\mu}_2\mu_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right)+\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)\end{aligned}$$

)

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)\\ &+ \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right)\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)+\hat{\mu}_2^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)\\ &+ \left(\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right)\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}P_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)+\mu_1^2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)\\ &+ \mu_1^2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \mu_1\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_2\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)\\ &+ \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)\\ &+ \mu_1\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{f}_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

)

$$\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \mu_1\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)\\ &+ \mu_1\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}f_1\left(1,2\right)+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \mu_1\tilde{\mu}_2\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1(1,1)+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1(1,1)\\
&+ \mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1)
\end{aligned}
$$

)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1(1,1)+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1(1,1)\\
&+ \tilde{\mu}_2^2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1)
\end{aligned}
$$

)

$$
\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0
$$

)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1(1,1)+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1(1,1)\\
&+ \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_2\hat{f}_1(1,2)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1)
\end{aligned}
$$

)

$$
\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0
$$

)

$$
\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0
$$

)

$$
\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0
$$

)

$$
\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0
$$

)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \mu_1\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1(1,1)+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1(1,1)\\
&+ \mu_1\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2)+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
=\;& P_1(z_1)\hat{P}_2'(w_2)\hat{\theta}_1'\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right)\tilde{P}_2'(z_2)\hat{F}_1^{(1,0)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right),w_2\right)\\
+\;& P_1(z_1)^2\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2'(w_2)\tilde{P}_2'(z_2)\hat{\theta}_1''\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right),w_2\right)\\
+\;& P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\hat{\theta}_1'\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right)\tilde{P}_2'(z_2)\hat{F}_1^{(1,1)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right),w_2\right)\\
+\;& P_1(z_1)^2\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2'(w_2)\hat{\theta}_1'\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right)^2\tilde{P}_2'(z_2)\hat{F}_1^{(2,0)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right),w_2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
=\;&\hat{F}_1^{(0,2)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right),w_2\right)\\
+\;&P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{\theta}_1'\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{P}_2''(w_2)\hat{F}_1^{(1,0)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right),w_2\right)\\
+\;&P_1(z_1)^2\tilde{P}_2(z_2)^2\hat{P}_2'(w_2)^2\hat{\theta}_1''\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right),w_2\right)\\
+\;&P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2'(w_2)\hat{\theta}_1'\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right)\\
+\;&P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2'(w_2)\hat{\theta}_1'\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{F}_1^{(1,1)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right),w_2\right)\\
+\;&P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2'(w_2)\hat{\theta}_1'\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2'(w_2)\hat{\theta}_1'\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right)\\
&\hat{F}_1^{(2,0)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right),w_2\right)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
=\;&P_1(w_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)P_1''(z_1)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;&P_1(w_1)^2\tilde{P}_2(z_2)^2P_1'(z_1)^2\hat{\theta}_2''\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;&P_1(w_1)^2\tilde{P}_2(z_2)^2P_1'(z_1)^2\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
=\;&P_1(w_1)P_1'(z_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\tilde{P}_2'(z_2)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;&P_1(w_1)^2P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)P_1'(z_1)\tilde{P}_2'(z_2)\hat{\theta}_2''\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;&P_1(w_1)^2P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)P_1'(z_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)^2\tilde{P}_2'(z_2)\hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
=\;&\tilde{P}_2(z_2)P_1'(w_1)P_1'(z_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;&P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)^2P_1'(w_1)P_1'(z_1)\hat{\theta}_2''\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;&P_1(w_1)\tilde{P}_2(z_2)P_1'(z_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)P_1'(w_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\\
&\hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;&P_1(w_1)\tilde{P}_2(z_2)P_1'(z_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{F}_2^{(1,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\quad=\quad 0
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
=\;&P_1(w_1)P_1'(z_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\tilde{P}_2'(z_2)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;&P_1(w_1)^2P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)P_1'(z_1)\tilde{P}_2'(z_2)\hat{\theta}_2''\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;&P_1(w_1)^2P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)P_1'(z_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)^2\tilde{P}_2'(z_2)\hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
=\;&P_1(w_1)^2P_1(z_1)^2\tilde{P}_2'(z_2)^2\hat{\theta}_2''\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;&P_1(w_1)P_1(z_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\tilde{P}_2''(z_2)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;&P_1(w_1)^2P_1(z_1)^2\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)^2\tilde{P}_2'(z_2)^2\hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
= \quad & P_1\left(z_1\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \quad & P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)^2\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{\theta}_2''\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \quad & P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\\
& \hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \quad & P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{F}_2^{(1,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
= \quad & \tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)P_1'\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \quad & P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)^2P_1'\left(w_1\right)P_1'\left(z_1\right)\hat{\theta}_2''\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \quad & P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)^2P_1'\left(w_1\right)P_1'\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \quad & P_1\left(w_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(1,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
= \quad & P_1\left(z_1\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \quad & P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)^2\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{\theta}_2''\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \quad & P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)^2\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)^2\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \quad & P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{F}_2^{(1,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
= \quad & P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)P_1''\left(w_1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \quad & P_1\left(z_1\right)^2\tilde{P}_2\left(z_2\right)^2P_1'\left(w_1\right)^2\hat{\theta}_2''\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \quad & P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(1,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \quad & P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\\
& \hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \quad & P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(1,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \quad & \hat{F}_2^{(2,0)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

a)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= \;& r_2P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2R_2^{(2)}\left(1\right)+2\mu_1r_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{1,0)}\right)+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}P_1^{(2)}F_2^{(0,1)}+\mu_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+ \;& \frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}+\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right)+F_2^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= \;& \mu_1r_2\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right).
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= \;& \mu_1\hat{\mu}_1r_2+\mu_1\hat{\mu}_1R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\mu_1r_2\hat{F}_2^{(1,0)}\\
+ \;& \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+ \;& \mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= \;& \mu_1\hat{\mu}_2r_2+\mu_1\hat{\mu}_2R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1r_2\hat{F}_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\\
+ \;& \hat{F}_2^{(1,0)}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}\\
+ \;& \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= \;& \mu_1\tilde{\mu}_2r_2+\mu_1\tilde{\mu}_2R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right).
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= \;& \tilde{\mu}_2^2R_2^{(2)}(1)+r_2\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right).
\end{aligned}
$$

g)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= \;& \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2r_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= \;& \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2r_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}.
\end{aligned}
$$

i)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= \;& \mu_1\hat{\mu}_1r_2+\mu_1\hat{\mu}_1R_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+ \;& r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+r_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\hat{F}_2^{(1,0)}\\
+ \;& \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right).
\end{aligned}
$$

j)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

k)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ \hat{\mu}_1^2 R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+2r_2\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+&\ \frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+2r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

l)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ r_2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+&\ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

m)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ r_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+r_2\mu_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+&\ r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\hat{F}_2^{(0,1)}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right).
\end{aligned}
$$

n)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}.
\end{aligned}
$$

ñ)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ r_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+&\ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

o)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ \hat{\mu}_2^2 R_2^{(2)}(1)+r_2\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)+2r_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+&\ 2r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}
$$

a)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ r_1 P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2 R_1^{(2)}\left(1\right).
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ \mu_1\tilde{\mu}_2 r_1+\mu_1\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1)+r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right).
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= \quad & r_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1R_1^{(2)}(1)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= \quad & \mu_1\hat{\mu}_2r_1+\mu_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= \quad & r_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right).
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= \quad & \tilde{\mu}_2^2R_1^{(2)}(1)+r_1\tilde{P}_2^{(2)}(1)+2r_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)+F_1^{(0,2)}+\tilde{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}\\
+ \quad & \frac{1}{1-\mu_1}\tilde{P}_2^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(2,0)}+F_1^{(1,1)}\right).
\end{aligned}
$$

g)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= \quad & \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1r_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1R_1^{(2)}(1)+r_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ \quad & \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}\\
+ \quad & \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= \quad & \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2r_1+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}(1)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\\
+ \quad & \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)F_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}\\
+ \quad & \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

i)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= \quad & r_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1R_1^{(2)}(1)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

j)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1(z_1)\bar{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_1(w_1,w_2)\right)\\
= \quad & r_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1R_1^{(2)}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}+r_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)F_2^{(1,0)}\\
+ \quad & r_1\hat{\mu}_1\left(F_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ \quad & \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\left(F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

k)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ \hat{\mu}_1^2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+2r_1\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+&\ 2r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}+\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

l)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+&\ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+\hat{F}_1^{(1,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

m)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ r_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

n)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ r_1\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\\
+&\ \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+r_1\hat{\mu}_2\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\right)+\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\right)\hat{F}_1^{(0,1)}\\
+&\ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

ñ)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+&\ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(0,1)}F_1^{(1,0)}+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+\hat{F}_1^{(1,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

o)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=&\ \hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)+2r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+\hat{F}_1^{(0,2)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+&\ \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(0,1)}+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

a)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\ \hat{r}_2P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}P_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+&\ \left(\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+2\hat{r}_2\mu_1F_2^{(1,0)}+2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=&\ \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\mu_1F_2^{(0,1)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+&\ \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

c)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(1,0)}+\hat{r}_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(1,0)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\mu_1\hat{r}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\tilde{P}_2^{(2)}(1)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{P}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+F_2^{(0,2)}+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(1,0)}+\hat{r}_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(1,0)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_2\hat{P}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.\end{aligned}$$

m)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+&\quad \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}.\end{aligned}$$

n)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+&\quad \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.\end{aligned}$$

ñ)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.\end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\right)\\
=&\quad \hat{r}_2P_2^{(2)}(1)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+&\quad \left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.\end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1P_1^{(2)}(1)+\mu_1^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\mu_1F_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}P_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+&\quad 2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(2,0)}+\left(\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\mu_1F_1^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{r}_1F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+&\quad \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(1,1)}\\
+&\quad \mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=&\quad \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
= {}& \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ {}& \hat{r}_1\mu_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+F_1^{(1,0)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
= {}& \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\mu_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ {}& \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(1,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
= {}& \hat{r}_1\tilde{P}_2^{(2)}(1)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_1^{(0,1)}+F_1^{(0,2)}+2\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ {}& \tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}F^{(0,1)}\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
= {}& \hat{r}_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
= {}& \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)F_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ {}& \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+F_1^{(0,1)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+ {}& \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
= {}& \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
= {}& \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
= {}& \hat{r}_1\hat{P}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_1^{(2)}(1).
\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
= {}& \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right).
\end{aligned}$$

m)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
= \;& \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\mu_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+ \;& F_1^{(1,0)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}\\
+ \;& \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

n)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
= \;& \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+ \;& F_1^{(0,1)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}\\
+ \;& \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

ñ)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
= \;& \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right).
\end{aligned}
$$

o)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
= \;& \hat{r}_1\hat{P}_2^{(2)}(1)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\hat{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\hat{F}_1^{(0,2)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ \;& \hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

Resultado Principal

Sean $\mu_1,\mu_2,\tilde{\mu}_2,\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2$ y $\tilde{\mu}_2=\mu_2+\tilde{\mu}_2$ los valores esperados de los proceso definidos anteriormente, y sean $r_1,r_2,\hat{r}_1$ y $\hat{r}_2$ los valores esperado s de los tiempos de traslado del servidor entre las colas para cada uno de los sistemas de visitas cíclicas. Si se definen $\mu=\mu_1+\tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu}=\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2$, y $r=r_1+r_2$ y $\hat{r}=\hat{r}_1+\hat{r}_2$, entonces se tiene el siguiente resultado.

Teorema 33.80 *Supongamos que $\mu<1$, $\hat{\mu}<1$, entonces, el número de usuarios presentes en cada una de las colas que conforman la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas cuando uno de los servidores visita a alguna de ellas está dada por la solución del Sistema de Ecuaciones Lineales presentados arriba cuyas expresiones damos a continuación:*

$$
\begin{array}{lll}
f_1(1)=r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}, & f_1(2)=r_2\tilde{\mu}_2, & f_1(3)=\hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2}+r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right),\\
f_1(4)=\hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2}+r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right), & f_2(1)=r_1\mu_1, & f_2(2)=r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu},\\
f_2(3)=\hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1}+r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right), & f_2(4)=\hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1}+r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right), & \hat{f}_1(1)=\mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2}+\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right),\\
\hat{f}_1(2)=\tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2+\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right)+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}, & \hat{f}_1(3)=\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}, & \hat{f}_1(4)=\hat{r}_2\hat{\mu}_2,\\
\hat{f}_2(1)=\mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1}+\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right), & \hat{f}_2(2)=\tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1+\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right)+\frac{\tilde{\mu}_2}{\hat{\mu}_1}, & \hat{f}_2(3)=\hat{r}_1\hat{\mu}_1,\\
 & \hat{f}_2(4)=\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}. &
\end{array}
$$

Las ecuaciones que determinan los segundos momentos de las longitudes de las colas de los dos sistemas se pueden ver en este sitio

Medidas de Desempeño

Definición 33.44 *Sea L_i^*el número de usuarios cuando el servidor visita la cola Q_i para dar servicio, para $i=1,2$.*

Entonces

Proposición 33.85 *Para la cola Q_i, $i = 1, 2$, se tiene que el número de usuarios presentes al momento de ser visitada por el servidor está dado por*

$$\mathbb{E}\left[L_i^*\right] = f_i\left(i\right) \quad (33.74.1)$$
$$Var\left[L_i^*\right] = f_i\left(i, i\right) + \mathbb{E}\left[L_i^*\right] - \mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. \quad (33.74.2)$$

Definición 33.45 *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo, bajo condiciones de estabilidad.*

$$C_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)}\right]$$

Definición 33.46 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo.*

$$I_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)}\right]$$

Proposición 33.86 *Para los tiempos de intervisita del servidor I_i, se tiene que*

$$\mathbb{E}\left[I_i\right] = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i},$$
$$Var\left[I_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i\left(i\right).$$

Proposición 33.87 *Para los tiempos que ocupa el servidor para atender a los usuarios presentes en la cola Q_i, con FGP denotada por S_i, se tiene que*

$$\mathbb{E}\left[S_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1 - \mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{1 - \mu_i},$$
$$Var\left[S_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\left(1 - \mu_i\right)^2} + \frac{\sigma^2 \mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\left(1 - \mu_i\right)^3}$$

Proposición 33.88 *Para la duración de los ciclos C_i se tiene que*

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \mathbb{E}\left[I_i\right] \mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i} \frac{1}{1 - \mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1 - \mu_i\right)}$$
$$Var\left[C_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1 - \mu_i\right)^2}.$$

Conjeturas

Definición 33.47 *Dada una cola Q_i, sea $\mathcal{L} = \left\{L_1\left(t\right), L_2\left(t\right), \hat{L}_1\left(t\right), \hat{L}_2\left(t\right)\right\}$ las longitudes de todas las colas de la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas. Supóngase que el servidor visita Q_i, si $L_i\left(t\right) = 0$ y $\hat{L}_i\left(t\right) = 0$ para $i = 1, 2$, entonces los elementos de $\mathcal{L}$ son puntos regenerativos.*

Definición 33.48 *Un ciclo regenerativo es el intervalo de tiempo que ocurre entre dos puntos regenerativos sucesivos, $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$.*

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $\left[L_1\left(t\right), L_2\left(t\right), \ldots, L_N\left(t\right)\right]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j\left(\tau_i\left(m\right)\right) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}\left[C_i\right]$ como

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i\left(z\right)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i\left(z\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i\left(t\right)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i\left(z\right)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right]\\
&= \frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i\left(z\right)} = \frac{1-I_i\left[P_i\left(z\right)\right]}{1-P_i\left(z\right)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}
Q_i\left(z\right) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i\left(z\right)}{P_i\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}\\
&= \frac{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}{f_i\left(i\right)}\cdot\frac{1-F_i\left(z\right)}{P_i\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}
\end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))\,P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2}\\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}
\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z\rightarrow 1^+$:

$$\begin{aligned}
Q_i^{(1)}(z) &= lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{dQ_i(z)}{dz} && (33.74.3)\\
&= lim_{z\rightarrow 1}\frac{(1-F_i(z))\,P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} && (33.74.4)\\
&- lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} && (33.74.5)\\
&- lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} && (33.74.6)\\
&+ lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} && (33.74.7)\\
&+ lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(nz))\,P_i(z)\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} && (33.74.8)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-F_i(z))\,P_i(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} = lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-F_i(z))\,P_i(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\right]}$$

$$= lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{-P_i(z)\,F_i^{'}(z)+(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))\,P_i^{'}(z)}$$

$$lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} = lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)\right]}$$

$$= lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{-P_i(z)\,F_i^{'}(z)+(1-z)F_i^{'}(z)\,P_i^{'}(z)+(1-z)P_i(z)\,F_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))\,P_i^{'}(z)}$$

$$\begin{aligned}
& lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2}\\
=\; & lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2\right]}\\
=\; & lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{-(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(1-z)P_i(z)\,F_i^{'}(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2\,P_i^{'}(z)}\\
+\; & lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{+(1-z)(1-F_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)P_i^{'}(z)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2\,P_i^{'}(z)}\\
+\; & lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{+(1-z)(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{''}(z)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2\,P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} = lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)\right]}$$

$$= lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{-(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)-(1-z)F_i^{'}(z)\,P_i^{'}(z)+(1-z)(1-F_i(z))\,P_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))\,P_i^{'}(z)}$$

$$
\begin{aligned}
& lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}\\
= & lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
= & lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}'[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+ & lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

Longitudes de la Cola en cualquier tiempo

Sea $V_{i}\left(z\right)=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{z-P_{i}\left(z\right)}$

$$
\frac{\partial V_{i}\left(z\right)}{\partial z} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left[\frac{I_{i}{'}\left(z\right)\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}-\frac{\left(I_{i}\left(z\right)-1\right)\left(1-P_{i}{'}\left(z\right)\right)}{\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}}\right]
$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$
U_{i}\left(z\right)=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\cdot\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}V_{i}\left(z\right) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\right)\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}+\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\frac{d}{dz}\left(\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left\{\frac{-P_{i}\left(z\right)\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)-\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(1-P_{i}^{'}\left(z\right)\right)}{\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}}\cdot\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}\right\}\\
&+ \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left\{\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\cdot\frac{I_{i}^{'}\left(z\right)\left(1-z\right)+\left(I_{i}\left(z\right)-1\right)}{\left(1-z\right)^{2}}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_{i}\left(z\right)}{\partial z} &= \frac{(-1+I_{i}[z])(1-P_{i}[z])}{(1-z)^{2}\mathbb{E}[I_{i}](z-P_{i}[z])}+\frac{(1-P_{i}[z])I_{i}^{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_{i}](z-P_{i}[z])}\\
&- \frac{(-1+I_{i}[z])(1-P_{i}[z])\left(1-P{'}[z]\right)}{(1-z)\mathbb{E}[I_{i}](z-P_{i}[z])^{2}}-\frac{(-1+I_{i}[z])P_{i}{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_{i}](z-P_{i}[z])}
\end{aligned}
$$

33.75. Sistemas de Visitas Cíclicas

33.76. Definiciones

Se considerarán intervalos de tiempo de la forma $\left[t,t+1\right]$. *Los usuarios arriban por paquetes de manera independiente del resto de las colas. Se define el grupo de usuarios que llegan a cada una de las colas del sistema 1, caracterizadas por* Q_{1} *y* Q_{2} *respectivamente, en el intervalo de tiempo* $\left[t,t+1\right]$ *por* $X_{1}\left(t\right),X_{2}\left(t\right)$. *Para cada uno de los procesos anteriores se define su Función Generadora de Probabilidades (PGF):*

$$
P_{1}\left(z_{1}\right)=\mathbb{E}\left[z_{1}^{X_{1}\left(t\right)}\right],\quad P_{2}\left(z_{2}\right)=\mathbb{E}\left[z_{2}^{X_{2}\left(t\right)}\right].
$$

Con primer momento definidos por

$$
\begin{aligned}
\mu_{1} &= \mathbb{E}\left[X_{1}\left(t\right)\right]=P_{1}^{(1)}\left(1\right),\\
\mu_{2} &= \mathbb{E}\left[X_{2}\left(t\right)\right]=P_{2}^{(1)}\left(1\right).
\end{aligned}
$$

En lo que respecta al servidor, en términos de los tiempos de visita a cada una de las colas, se denotarán por τ_1, τ_2 para Q_1, Q_2 respectivamente; y a los tiempos en que el servidor termina de atender en las colas Q_1, Q_2, se les denotará por $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2$ respectivamente. Entonces, los tiempos de servicio están dados por las diferencias $\overline{\tau}_1 - \tau_1, \overline{\tau}_2 - \tau_2$ para Q_1, Q_2. Análogamente los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por $\tau_2 - \overline{\tau}_1, \tau_1 - \overline{\tau}_2$.

La FGP para estos tiempos de traslado están dados por

$$R_1(z_1) = \mathbb{E}\left[z_1^{\tau_2 - \overline{\tau}_1}\right], \quad R_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{\tau_1 - \overline{\tau}_2}\right],$$

y al igual que como se hizo con anterioridad

$$r_1 = R_1^{(1)}(1) = \mathbb{E}\left[\tau_2 - \overline{\tau}_1\right], \quad r_2 = R_2^{(1)}(1) = \mathbb{E}\left[\tau_1 - \overline{\tau}_2\right],$$

Sean α_1, α_2 el número de usuarios que arriban en grupo a la cola Q_1 y Q_2 respectivamente. Sus PGF's están definidas como

$$A_1(z) = \mathbb{E}\left[z^{\alpha_1(t)}\right], \quad A_2(z) = \mathbb{E}\left[z^{\alpha_2(t)}\right].$$

Su primer momento está dado por

$$\lambda_1 = \mathbb{E}\left[\alpha_1(t)\right] = A_1^{(1)}(1), \quad \lambda_2 = \mathbb{E}\left[\alpha_2(t)\right] = A_2^{(1)}(1).$$

Sean β_1, β_2 el número de usuarios que arriban en el grupo α_1, α_2 a la cola Q_1 y Q_2, respectivamente, de igual manera se definen sus PGF's

$$B_1(z) = \mathbb{E}\left[z^{\beta_1(t)}\right], \quad B_2(z) = \mathbb{E}\left[z^{\beta_2(t)}\right],$$

con

$$b_1 = \mathbb{E}\left[\beta_1(t)\right] = B_1^{(1)}(1), \quad b_2 = \mathbb{E}\left[\beta_2(t)\right] = B_2^{(1)}(1).$$

La distribución para el número de grupos que arriban al sistema en cada una de las colas se definen por:

$$P_1(z_1) = A_1\left[B_1(z_1)\right] = \mathbb{E}\left[B_1(z_1)^{\alpha_1(t)}\right], \quad P_2(z_1) = A_1\left[B_1(z_1)\right] = \mathbb{E}\left[B_1(z_1)^{\alpha_1(t)}\right],$$

entonces

$$\begin{aligned} P_1^{(1)}(1) &= \mathbb{E}\left[\alpha_1(t) B_1^{(1)}(1)\right] = B_1^{(1)}(1)\,\mathbb{E}\left[\alpha_1(t)\right] = \lambda_1 b_1 \\ P_2^{(1)}(1) &= \mathbb{E}\left[\alpha_2(t) B_2^{(1)}(1)\right] = B_2^{(1)}(1)\,\mathbb{E}\left[\alpha_2(t)\right] = \lambda_2 b_2. \end{aligned}$$

33.77. La ruina del jugador

Supongamos que se tiene un jugador que cuenta con un capital inicial de $L_0 \geq 0$ unidades, esta persona realiza una seria de juegos de manera sucesiva, dichos eventos son independientes e idénticos.

La ganancia en el n-ésimo juego es X_n unidades de las cuales se resta una cuota de 1 unidad por cada juego. Su PGF está dada por

$$\begin{aligned} F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right] \\ P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right] \\ \mu &= \mathbb{E}\left[X_n\right] < 1. \end{aligned}$$

Sea L_n el capital remanente después del n-ésimo juego. Entonces

$$L_n = L_0 + X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n.$$

La ruina del jugador ocurre después del n-ésimo juego:

$$T = min\left\{L_n = 0\right\}$$

Si $L_0 = 0$ entonces claramente $T = 0$. En este sentido T es la longitud del periodo de ocuapción del servidor comenzando con L_0 grupos de usuarios que llegan a la cola conforme a un proceso dado por $P(z)$.

Sea $g_{n,k}$ la probabilidad del evento de que el jugador no caiga en la ruina antes del n-ésimo juego, y que tenga un capital de k unidades antes del n-ésimo juego, es decir

Dada $n \in \{1, 2, \ldots, \}$ y $k \in \{0, 1, 2, \ldots, \}$

$$g_{n,k} = P\left\{L_j > 0, j = 1, \ldots, n, L_n = k\right\} \tag{33.77.1}$$

la cual además se puede escribir como

$$g_{n,k} = P\left\{L_j > 0, j = 1, \ldots, n, L_n = k\right\} = \sum_{j=1}^{k+1} g_{n-1,j} P\left\{X_n = k - j + 1\right\} \tag{33.77.2}$$

y

$$g_{0,k} = P\left\{L_0 = k\right\} \tag{33.77.3}$$

Se definen las siguientes PGF

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k} z^k, \text{ para } n = 0, 1, \ldots,$$

$$G(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z) w^n \tag{33.77.4}$$

En particular para $k = 0$

$$g_{n,0} = G_n(0) = P\left\{L_j > 0, \text{ para } j < n, \text{ y } L_n = 0\right\} = P\left\{T = n\right\},$$

además

$$G(0, w) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(0) w^n = \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{T = n\right\} w^n = \mathbb{E}\left[w^T\right]$$

la cuál por lo anterior es la PGF del tiempo de ruina T.

Proposición 33.89 *Sean $G_n(z)$ y $G(z, w)$ definidas como en 33.77.4 y 33.77.4 respectivamente, entonces*

$$G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right] P(z). \tag{33.77.5}$$

Además

$$G(z, w) = \frac{zF(z) - wP(z) G(0, w)}{z - wP(z)}, \tag{33.77.6}$$

con un único polo en el círculo unitario, además, el polo es de la forma $z = \theta(w)$ y satisface que

i) $\theta(1) = 1$,

ii) $\theta^{(1)}(1) = \frac{1}{1-\mu}$,

Finalmente, además se cumple que

$$\mathbb{E}\left[w^T\right] = G(0, w) = F\left[\theta(w)\right]. \tag{33.77.7}$$

Corolario 33.17 *El tiempo de ruina del jugador tiene primer y segundo momento dados por*

$$\mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}[L_0]}{1 - \mu} \tag{33.77.8}$$

$$Var[T] = \frac{Var[L_0]}{(1-\mu)^2} + \frac{\sigma^2 \mathbb{E}[L_0]}{(1-\mu)^3}. \tag{33.77.9}$$

33.78. Funciones Generadoras de Probabilidad Conjunta

De lo desarrollado hasta ahora se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}\right]=\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}\right]=\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)+X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]\\
=&\ \mathbb{E}\left[\left\{z_2^{L_2(\tau_1)}\right\}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{z_2^{L_2(\tau_1)}\right\}\left\{P_2\left(z_2\right)\right\}^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right]\\
=&\ \mathbb{E}\left[\left\{z_2^{L_2(\tau_1)}\right\}\left\{\theta_1\left(P_2\left(z_2\right)\right)\right\}^{L_1(\tau_1)}\right]=F_1\left(\theta_1\left(P_2\left(z_2\right)\right),z_2\right)
\end{aligned}$$

es decir

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}\right]=F_1\left(\theta_1\left(P_2\left(z_2\right)\right),z_2\right). \tag{33.78.1}$$

Procediendo de manera análoga para $\overline{\tau}_2$*:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}\right]&=\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}\right]=\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)+X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{z_1^{L_1(\tau_2)}\right\}\left\{z_1^{X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right\}\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\left\{z_1^{L_1(\tau_2)}\right\}\left\{P_1\left(z_1\right)\right\}^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{z_1^{L_1(\tau_2)}\right\}\left\{\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\right)\right\}^{L_2(\tau_2)}\right]\\
&=F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}\right]=F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\right)\right) \tag{33.78.2}$$

Ahora, para el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}_1,\tau_2]$ *y* $[\overline{\tau}_2,\tau_1]$*, los arribos de los usuarios modifican el número de usuarios que llegan a las colas, es decir, los procesos* $L_1(t)$ *y* $L_2(t)$*. La PGF para el número de arribos a todas las estaciones durante el intervalo* $[\overline{\tau}_1,\tau_2]$ *cuya distribución está especificada por la distribución compuesta* $R_1(\mathbf{z}),R_2(\mathbf{z})$*:*

$$\begin{aligned}
R_1(\mathbf{z})=R_1\left(\prod_{i=1}^{2}P\left(z_i\right)\right)=\mathbb{E}\left[\left\{\prod_{i=1}^{2}P\left(z_i\right)\right\}^{\tau_2-\overline{\tau}_1}\right]\\
R_2(\mathbf{z})=R_2\left(\prod_{i=1}^{2}P\left(z_i\right)\right)=\mathbb{E}\left[\left\{\prod_{i=1}^{2}P\left(z_i\right)\right\}^{\tau_1-\overline{\tau}_2}\right]
\end{aligned}$$

Dado que los eventos en $[\tau_1,\overline{\tau}_1]$ *y* $[\overline{\tau}_1,\tau_2]$ *son independientes, la PGF conjunta para el número de usuarios en el sistema al tiempo* $t=\tau_2$ *la PGF conjunta para el número de usuarios en el sistema están dadas por*

$$\begin{aligned}
F_1(\mathbf{z})&=R_2\left(\prod_{i=1}^{2}P\left(z_i\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\right)\right)\\
F_2(\mathbf{z})&=R_1\left(\prod_{i=1}^{2}P\left(z_i\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(P_2\left(z_2\right)\right),z_2\right)
\end{aligned}$$

Entonces debemos de determinar las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
f_1(1)=\tfrac{\partial F_1(\mathbf{z})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1},\quad f_1(2)=\tfrac{\partial F_1(\mathbf{z})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1},\\
f_2(1)=\tfrac{\partial F_2(\mathbf{z})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1},\quad f_2(2)=\tfrac{\partial F_2(\mathbf{z})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_1(\mathbf{z})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1}&=R_1^{(1)}(1)\,P_1^{(1)}(1)\\
\frac{\partial R_1(\mathbf{z})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1}&=R_1^{(1)}(1)\,P_2^{(1)}(1)\\
\frac{\partial R_2(\mathbf{z})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1}&=R_2^{(1)}(1)\,P_1^{(1)}(1)\\
\frac{\partial R_2(\mathbf{z})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1}&=R_2^{(1)}(1)\,P_2^{(1)}(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_1}F_1\left(\theta_1\left(P_2\left(z_2\right)\right),z_2\right) &= 0\\
\frac{\partial}{\partial z_2}F_1\left(\theta_1\left(P_2\left(z_2\right)\right),z_2\right) &= \frac{\partial F_1}{\partial z_2}+\frac{\partial F_1}{\partial z_1}\theta_1^{(1)}P_2^{(1)}\left(1\right)\\
\frac{\partial}{\partial z_1}F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\right)\right) &= \frac{\partial F_2}{\partial z_1}+\frac{\partial F_2}{\partial z_2}\theta_2^{(1)}P_1^{(1)}\left(1\right)\\
\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\right)\right) &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto de las dos secciones anteriores se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial z_1} &= \frac{\partial R_2}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1}+\frac{\partial F_2}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1}=R_2^{(1)}\left(1\right)P_1^{(1)}\left(1\right)+f_2\left(1\right)+f_2\left(2\right)\theta_2^{(1)}\left(1\right)P_1^{(1)}\left(1\right)\\
\frac{\partial F_1}{\partial z_2} &= \frac{\partial R_2}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1}+\frac{\partial F_2}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1}=R_2^{(1)}\left(1\right)P_2^{(1)}\left(1\right)\\
\frac{\partial F_2}{\partial z_1} &= \frac{\partial R_1}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1}+\frac{\partial F_1}{\partial z_1}|_{\mathbf{z}=1}=R_1^{(1)}\left(1\right)P_1^{(1)}\left(1\right)\\
\frac{\partial F_2}{\partial z_2} &= \frac{\partial R_1}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1}+\frac{\partial F_1}{\partial z_2}|_{\mathbf{z}=1}=R_1^{(1)}\left(1\right)P_2^{(1)}\left(1\right)+f_1\left(1\right)\theta_1^{(1)}\left(1\right)P_2^{(1)}\left(1\right)
\end{aligned}$$

El cual se puede escribir en forma equivalente:

$$\begin{aligned}
f_1\left(1\right) &= r_2\mu_1+f_2\left(1\right)+f_2\left(2\right)\frac{\mu_1}{1-\mu_2}\\
f_1\left(2\right) &= r_2\mu_2\\
f_2\left(1\right) &= r_1\mu_1\\
f_2\left(2\right) &= r_1\mu_2+f_1\left(2\right)+f_1\left(1\right)\frac{\mu_2}{1-\mu_1}
\end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned}
f_1\left(1\right) &= \mu_1\left[r_2+\frac{f_2\left(2\right)}{1-\mu_2}\right]+f_2\left(1\right)\\
f_2\left(2\right) &= \mu_2\left[r_1+\frac{f_1\left(1\right)}{1-\mu_1}\right]+f_1\left(2\right)
\end{aligned}$$

Resolviendo para $f_1\left(1\right)$*:*

$$\begin{aligned}
f_1\left(1\right) &= r_2\mu_1+f_2\left(1\right)+f_2\left(2\right)\frac{\mu_1}{1-\mu_2}=r_2\mu_1+r_1\mu_1+f_2\left(2\right)\frac{\mu_1}{1-\mu_2}\\
&= \mu_1\left(r_2+r_1\right)+f_2\left(2\right)\frac{\mu_1}{1-\mu_2}=\mu_1\left(r+\frac{f_2\left(2\right)}{1-\mu_2}\right),
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
f_2\left(2\right) &= \mu_2\left(r_1+\frac{f_1\left(1\right)}{1-\mu_1}\right)+f_1\left(2\right)=\mu_2\left(r_1+\frac{f_1\left(1\right)}{1-\mu_1}\right)+r_2\mu_2\\
&= \mu_2\left[r_1+r_2+\frac{f_1\left(1\right)}{1-\mu_1}\right]=\mu_2\left[r+\frac{f_1\left(1\right)}{1-\mu_1}\right]\\
&= \mu_2 r+\mu_1\left(r+\frac{f_2\left(2\right)}{1-\mu_2}\right)\frac{\mu_2}{1-\mu_1}\\
&= \mu_2 r+\mu_2\frac{r\mu_1}{1-\mu_1}+f_2\left(2\right)\frac{\mu_1\mu_2}{\left(1-\mu_1\right)\left(1-\mu_2\right)}\\
&= \mu_2\left(r+\frac{r\mu_1}{1-\mu_1}\right)+f_2\left(2\right)\frac{\mu_1\mu_2}{\left(1-\mu_1\right)\left(1-\mu_2\right)}\\
&= \mu_2\left(\frac{r}{1-\mu_1}\right)+f_2\left(2\right)\frac{\mu_1\mu_2}{\left(1-\mu_1\right)\left(1-\mu_2\right)}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
f_2(2) - f_2(2)\frac{\mu_1\mu_2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)} &= \mu_2\left(\frac{r}{1-\mu_1}\right)\\
f_2(2)\left(1-\frac{\mu_1\mu_2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}\right) &= \mu_2\left(\frac{r}{1-\mu_1}\right)\\
f_2(2)\left(\frac{1-\mu_1-\mu_2+\mu_1\mu_2-\mu_1\mu_2}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}\right) &= \mu_2\left(\frac{r}{1-\mu_1}\right)\\
f_2(2)\left(\frac{1-\mu}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}\right) &= \mu_2\left(\frac{r}{1-\mu_1}\right)
\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
f_2(2) &= \frac{r\frac{\mu_2}{1-\mu_1}}{\frac{1-\mu}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}} = \frac{r\mu_2(1-\mu_1)(1-\mu_2)}{(1-\mu_1)(1-\mu)}\\
&= \frac{\mu_2(1-\mu_2)}{1-\mu}r = r\mu_2\frac{1-\mu_2}{1-\mu}.
\end{aligned}$$

es decir

$$f_2(2) = r\mu_2\frac{1-\mu_2}{1-\mu}. \tag{33.78.3}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
f_1(1) &= \mu_1 r + f_2(2)\frac{\mu_1}{1-\mu_2} = \mu_1 r + \left(\frac{\mu_2(1-\mu_2)}{1-\mu}r\right)\frac{\mu_1}{1-\mu_2}\\
&= \mu_1 r + \mu_1 r\left(\frac{\mu_2}{1-\mu}\right) = \mu_1 r\left[1+\frac{\mu_2}{1-\mu}\right]\\
&= r\mu_1\frac{1-\mu_1}{1-\mu}
\end{aligned}$$

33.79. Definiciones

- *Consideremos una red de sistema de visitas cíclicas conformada por dos sistemas de visitas cíclicas, cada una con dos colas independientes, donde además se permite el intercambio de usuarios entre los dos sistemas en la segunda cola de cada uno de ellos.*
- *Supóngase además que los arribos de los usuarios ocurren conforme a un proceso Poisson con tasa de llegada μ_1 y μ_2 para el sistema 1, mientras que para el sistema 2, lo hacen conforme a un proceso Poisson con tasa $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ respectivamente.*

El traslado de un sistema a otro ocurre de manera que los tiempos entre llegadas de los usuarios a la cola dos del sistema 1 provenientes del sistema 2, se distribuye de manera exponencial con parámetro $\check{\mu}_2$.

Se considerarán intervalos de tiempo de la forma $[t, t+1]$. Los usuarios arriban por paquetes de manera independiente del resto de las colas. Se define el grupo de usuarios que llegan a cada una de las colas del sistema 1, caracterizadas por Q_1 y Q_2 respectivamente, en el intervalo de tiempo $[t, t+1]$ por $X_1(t), X_2(t)$. De igual manera se definen los procesos $\hat{X}_1(t), \hat{X}_2(t)$ para las colas del sistema 2, denotadas por $\hat{Q}_1$ y $\hat{Q}_2$ respectivamente.

Para el número de usuarios que se trasladan del sistema 2 al sistema 1, de la cola $\hat{Q}_2$ a la cola Q_2, en el intervalo de tiempo $[t, t+1]$, se define el proceso $Y_2(t)$.

33.80. La ruina del jugador

Supongamos que se tiene un jugador que cuenta con un capital inicial de $\tilde{L}_0 \geq 0$ unidades, esta persona realiza una serie de dos juegos simultáneos e independientes de manera sucesiva, dichos eventos son independientes e idénticos entre sí para cada realización.

La ganancia en el n-ésimo juego es

$$\tilde{X}_n = X_n + Y_n \tag{33.80.1}$$

unidades de las cuales se resta una cuota de 1 unidad por cada juego simultáneo, es decir, se restan dos unidades por cada juego realizado.

En términos de la teoría de colas puede pensarse como el número de usuarios que llegan a una cola vía dos procesos de arribo distintos e independientes entre sí.
Su Función Generadora de Probabilidades (FGP) está dada por

$$\begin{aligned} F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\tilde{L}_0}\right] \\ \tilde{P}(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\tilde{X}_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n+Y_n}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[z^{X_n} z^{Y_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right]\mathbb{E}\left[z^{Y_n}\right] \\ &= P(z)\check{P}(z) \end{aligned}$$

entonces

$$\tilde{\mu} = \mathbb{E}\left[\tilde{X}_n\right] = \tilde{P}[z] < 1.$$

Sea $\tilde{L}_n$ el capital remanente después del n-ésimo juego. Entonces

$$\tilde{L}_n = \tilde{L}_0 + \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \cdots + \tilde{X}_n - 2n.$$

La ruina del jugador ocurre después del n-ésimo juego, es decir, la cola se vacía después del n-ésimo juego, entonces sea T definida como

$$T = min\left\{\tilde{L}_n = 0\right\}$$

Si $\tilde{L}_0 = 0$, entonces claramente $T = 0$. En este sentido T puede interpretarse como la longitud del periodo de tiempo que el servidor ocupa para dar servicio en la cola, comenzando con $\tilde{L}_0$ grupos de usuarios presentes en la cola, quienes arribaron conforme a un proceso dado por $\tilde{P}(z)$.

Sea $g_{n,k}$ la probabilidad del evento de que el jugador no caiga en ruina antes del n-ésimo juego, y que además tenga un capital de k unidades antes del n-ésimo juego, es decir,
Dada $n \in \{1, 2, \ldots,\}$ y $k \in \{0, 1, 2, \ldots,\}$

$$g_{n,k} := P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1, \ldots, n, \tilde{L}_n = k\right\}$$

la cual además se puede escribir como:

$$\begin{aligned} g_{n,k} &= P\left\{\tilde{L}_j > 0, j = 1, \ldots, n, \tilde{L}_n = k\right\} = \sum_{j=1}^{k+1} g_{n-1,j} P\left\{\tilde{X}_n = k - j + 1\right\} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1\right\} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1, Y_n = l\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n + Y_n = k - j + 1 | Y_n = l\right\} P\left\{Y_n = l\right\} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n = k - j - l + 1\right\} P\left\{Y_n = l\right\} \end{aligned}$$

es decir

$$g_{n,k} = \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} P\left\{X_n = k - j - l + 1\right\} P\left\{Y_n = l\right\} \tag{33.80.2}$$

además

$$g_{0,k} = P\left\{\tilde{L}_0 = k\right\}. \tag{33.80.3}$$

Se definen las siguientes FGP:

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k} z^k, \text{ para } n = 0, 1, \ldots, \tag{33.80.4}$$

$$G(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z) w^n. \tag{33.80.5}$$

En particular para $k = 0$,

$$g_{n,0} = G_n(0) = P\left\{\tilde{L}_j > 0,\ \text{para } j < n,\ y\ \tilde{L}_n = 0\right\} = P\{T = n\},$$

además

$$G(0,w) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(0) w^n = \sum_{n=0}^{\infty} P\{T = n\} w^n = \mathbb{E}\left[w^T\right]$$

la cuál resulta ser la FGP del tiempo de ruina T.

Proposición 33.90 *Sean $G_n(z)$ y $G(z,w)$ definidas como en (33.80.4) y (33.80.5) respectivamente, entonces*

$$G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z). \tag{33.80.6}$$

Además

$$G(z,w) = \frac{zF(z) - wP(z)G(0,w)}{z - wR(z)}, \tag{33.80.7}$$

con un único polo en el círculo unitario, además, el polo es de la forma $z = \theta(w)$ y satisface que

i) $\tilde{\theta}(1) = 1,$

ii) $\tilde{\theta}^{(1)}(1) = \frac{1}{1-\tilde{\mu}},$

iii) $\tilde{\theta}^{(2)}(1) = \frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2} + \frac{\tilde{\sigma}}{(1-\tilde{\mu})^3}.$

Finalmente, además se cumple que

$$\mathbb{E}\left[w^T\right] = G(0,w) = F\left[\tilde{\theta}(w)\right]. \tag{33.80.8}$$

Multiplicando las ecuaciones (33.80.2) y (33.80.3) por el término z^k:

$$\begin{aligned}
g_{n,k}z^k &= \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-j-l+1\}P\{Y_n = l\}z^k,\\
g_{0,k}z^k &= P\left\{\tilde{L}_0 = k\right\}z^k,
\end{aligned}$$

ahora sumamos sobre k

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k}z^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-j-l+1\}P\{Y_n = l\}z^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-(j+l-1)\}P\{Y_n = l\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+(j+l-1)-(j+l-1)} \sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}P\{X_n = k-(j+l-1)\}P\{Y_n = l\}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j}z^{j-1}P\{X_n = k-(j+l-1)\}z^{k-(j+l-1)}P\{Y_n = l\}z^l
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} g_{n-1,j} z^{j-1} \sum_{k=j+l-1}^{\infty} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)} P\left\{Y_n = l\right\} z^l \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j} z^{j-1} \sum_{l=1}^{j}\sum_{k=j+l-1}^{\infty} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)} P\left\{Y_n = l\right\} z^l \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j} z^{j-1} \sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)} P\left\{Y_n = l\right\} z^l \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j} z^{j-1} \sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)} \sum_{l=1}^{j} P\left\{Y_n = l\right\} z^l \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} g_{n-1,j} z^{j-1} \sum_{l=1}^{\infty} P\left\{Y_n = l\right\} z^l \sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)} \\
&= \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z) \sum_{k=j+l-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{j} P\left\{X_n = k-(j+l-1)\right\} z^{k-(j+l-1)} \\
&= \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z) P(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z),
\end{aligned}$$

es decir la ecuación (33.80.4) se puede reescribir como

$$G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z). \tag{33.80.9}$$

Por otra parte recordemos la ecuación (33.80.4)

$$G_n(z) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k} z^k, \text{ entonces } \frac{G_n(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} g_{n,k} z^{k-1},$$

Por lo tanto utilizando la ecuación (33.80.9):

$$\begin{aligned}
G(z,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z) w^n = G_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(z) w^n \\
&= F(z) + \sum_{n=0}^{\infty}\left[G_n(z) - G_n(0)\right] w^n \frac{\tilde{P}(z)}{z} \\
&= F(z) + \frac{w}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left[G_n(z) - G_n(0)\right] w^{n-1}\tilde{P}(z)
\end{aligned}$$

es decir

$$G(z,w) \quad = \quad F(z) + \frac{w}{z}\left[G(z,w) - G(0,w)\right]\tilde{P}(z),$$

entonces

$$\begin{aligned}
G(z,w) &= F(z) + \frac{w}{z}\left[G(z,w) - G(0,w)\right]\tilde{P}(z) \\
&= F(z) + \frac{w}{z}\tilde{P}(z) G(z,w) - \frac{w}{z}\tilde{P}(z) G(0,w) \\
&\Leftrightarrow \\
G(z,w)\left\{1 - \frac{w}{z}\tilde{P}(z)\right\} &= F(z) - \frac{w}{z}\tilde{P}(z) G(0,w),
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$G(z,w) = \frac{zF(z) - w\tilde{P}(z) G(0,w)}{1 - w\tilde{P}(z)}. \tag{33.80.10}$$

Ahora $G(z,w)$ *es analítica en* $|z| = 1$.
Sean z, w *tales que* $|z| = 1$ *y* $|w| \leq 1$, *como* $\tilde{P}(z)$ *es FGP*

$$|z - \left(z - w\tilde{P}(z)\right)| < |z| \Leftrightarrow |w\tilde{P}(z)| < |z|$$

es decir, se cumplen las condiciones del Teorema de Rouché y por tanto, z y $z - w\tilde{P}(z)$ tienen el mismo número de ceros en $|z| = 1$. Sea $z = \tilde{\theta}(w)$ la solución única de $z - w\tilde{P}(z)$, es decir

$$\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) = 0, \tag{33.80.11}$$

con $|\tilde{\theta}(w)| < 1$. Cabe hacer mención que $\tilde{\theta}(w)$ es la FGP para el tiempo de ruina cuando $\tilde{L}_0 = 1$. Considerando la ecuación (33.80.11)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w)|_{w=1} - \frac{\partial}{\partial w}\left\{w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}|_{w=1} = 0\\
&\tilde{\theta}^{(1)}(w)|_{w=1} - \frac{\partial}{\partial w}w\left\{\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}|_{w=1} - w\frac{\partial}{\partial w}\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)|_{w=1} = 0\\
&\tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) - w\left\{\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial\tilde{\theta}(w)}\cdot\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}|_{w=1}\right\} = 0\\
&\tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\cdot\tilde{\theta}^{(1)}(1) = 0
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(1)}(1) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\cdot\tilde{\theta}^{(1)}(1) &= \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\\
\tilde{\theta}^{(1)}(1)\left(1 - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\right) &= \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\\
\tilde{\theta}^{(1)}(1) = \frac{\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{\left(1 - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)\right)} &= \frac{1}{1-\tilde{\mu}}.
\end{aligned}$$

Ahora determinemos el segundo momento de $\tilde{\theta}(w)$, nuevamente consideremos la ecuación (33.80.11):

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) &= 0\\
\frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\} &= 0\\
\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}(w) - w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right\}\right\} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w) - \frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}(w) - \frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\}\\
= &\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w} - \left[\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) + w\frac{\partial}{\partial w}R\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]\right\}\\
= &\frac{\partial}{\partial w}\left\{\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w} - \left[\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) + w\frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial w}\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w}\right]\right\}\\
= &\frac{\partial}{\partial w}\left\{\tilde{\theta}^{(1)}(w) - \tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right\}\\
= &\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w) - \frac{\partial}{\partial w}\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right) - \frac{\partial}{\partial w}\left[w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= &\frac{\partial}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w) - \frac{\partial\tilde{P}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial\tilde{\theta}(w)}\frac{\partial\tilde{\theta}(w)}{\partial w} - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\\
- &w\frac{\partial\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{\partial w}\tilde{\theta}^{(1)}(w) - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\frac{\partial\tilde{\theta}^{(1)}(w)}{\partial w}\\
= &\tilde{\theta}^{(2)}(w) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w) - \tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\\
- &w\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\left(\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right)^2 - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(2)}(w)\\
= &\tilde{\theta}^{(2)}(w) - 2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(1)}(w)\\
- &w\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\left(\tilde{\theta}^{(1)}(w)\right)^2 - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\tilde{\theta}^{(2)}(w)\\
= &\tilde{\theta}^{(2)}(w)\left[1 - w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right] - \tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right) + 2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]
\end{aligned}$$

luego

$$
\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(2)}(w)\left[1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right] &- \tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]=0\\
\tilde{\theta}^{(2)}(w) &= \frac{\tilde{\theta}^{(1)}(w)\left[w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)+2R^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)\right]}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}\\
\tilde{\theta}^{(2)}(w) &= \frac{\tilde{\theta}^{(1)}(w)w\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}+\frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(w)\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}{1-w\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(w)\right)}
\end{aligned}
$$

si evaluamos la expresión anterior en $w=1$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(2)}(1) &= \frac{\left(\tilde{\theta}^{(1)}(1)\right)^2\tilde{P}^{(2)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}+\frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(1)\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}{1-\tilde{P}^{(1)}\left(\tilde{\theta}(1)\right)}\\
&= \frac{\left(\tilde{\theta}^{(1)}(1)\right)^2\tilde{P}^{(2)}(1)}{1-\tilde{P}^{(1)}(1)}+\frac{2\tilde{\theta}^{(1)}(1)\tilde{P}^{(1)}(1)}{1-\tilde{P}^{(1)}(1)}\\
&= \frac{\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}}\right)^2\tilde{P}^{(2)}(1)}{1-\tilde{\mu}}+\frac{2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}}\right)\tilde{\mu}}{1-\tilde{\mu}}=\frac{\tilde{P}^{(2)}(1)}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{2\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}
\end{aligned}
$$

luego

$$
=\frac{\sigma^2-\tilde{\mu}+\tilde{\mu}^2}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{2\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}=\frac{\sigma^2-\tilde{\mu}+\tilde{\mu}^2+2\tilde{\mu}(1-\tilde{\mu})}{(1-\tilde{\mu})^3}
$$

es decir

$$
\begin{aligned}
\tilde{\theta}^{(2)}(1) &= \frac{\sigma^2+\tilde{\mu}-\tilde{\mu}^2}{(1-\tilde{\mu})^3}=\frac{\sigma^2}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{\tilde{\mu}(1-\tilde{\mu})}{(1-\tilde{\mu})^3}\\
&= \frac{\sigma^2}{(1-\tilde{\mu})^3}+\frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2}.
\end{aligned}
$$

Corolario 33.18 *El tiempo de ruina del jugador tiene primer y segundo momento dados por*

$$
\mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{1-\tilde{\mu}} \tag{33.80.12}
$$

$$
Var[T] = \frac{Var\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[\tilde{L}_0\right]}{(1-\tilde{\mu})^3}. \tag{33.80.13}
$$

33.81. Funciones Generadoras de Probabilidades

Para cada uno de los procesos de llegada a las colas $X_1, X_2, \hat{X}_1.\hat{X}_2$ y Y_2 anteriores se define su Función Generadora de Probabilidades (PGF):

$$
\begin{aligned}
P_1(z_1) &= \mathbb{E}\left[z_1^{X_1(t)}\right],\\
P_2(z_2) &= \mathbb{E}\left[z_2^{X_2(t)}\right],\\
\check{P}_2(z_2) &= \mathbb{E}\left[z_2^{Y_2(t)}\right],\\
\hat{P}_1(w_1) &= \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{X}_1(t)}\right],\\
\hat{P}_2(w_2) &= \mathbb{E}\left[w_2^{\hat{X}_2(t)}\right].
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\tilde{P}_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{\tilde{X}_2(t)}\right]
$$

Con primer momento definidos por

$$
\begin{aligned}
\mu_1 &= \mathbb{E}\left[X_1(t)\right] = P_1^{(1)}(1),\\
\mu_2 &= \mathbb{E}\left[X_2(t)\right] = P_2^{(1)}(1),\\
\check{\mu}_2 &= \mathbb{E}\left[Y_2(t)\right] = \check{P}_2^{(1)}(1),\\
\hat{\mu}_1 &= \mathbb{E}\left[\hat{X}_1(t)\right] = \hat{P}_1^{(1)}(1),\\
\hat{\mu}_2 &= \mathbb{E}\left[\hat{X}_2(t)\right] = \hat{P}_2^{(1)}(1),\\
\tilde{\mu}_2 &= \mathbb{E}\left[\tilde{X}_2(t)\right] = \tilde{P}_2^{(1)}(1).
\end{aligned}
$$

En lo que respecta al servidor, en términos de los tiempos de visita a cada una de las colas, se denotarán por $B_1(t), B_2(t)$ *los procesos correspondientes a las variables aleatorias* τ_1, τ_2 *para* Q_1, Q_2 *respectivamente; y* $\hat{B}_1(t), \hat{B}_2(t)$ *con parámetros* ζ_1, ζ_2 *para* $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ *del sistema 2. Y a los tiempos en que el servidor termina de atender en las colas* $Q_1, Q_2, \hat{Q}_1, \hat{Q}_2$*, se les denotará por* $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$ *respectivamente. Entonces, los tiempos de servicio están dados por las diferencias* $\overline{\tau}_1 - \tau_1, \overline{\tau}_2 - \tau_2$ *para* Q_1, Q_2*, y* $\overline{\zeta}_1 - \zeta_1, \overline{\zeta}_2 - \zeta_2$ *para* $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ *respectivamente.*
Sus procesos se definen por:

$$
\begin{aligned}
S_1(z_1) &= \mathbb{E}\left[z_1^{\overline{\tau}_1 - \tau_1}\right],\\
S_2(z_2) &= \mathbb{E}\left[z_1^{\overline{\tau}_2 - \tau_2}\right],\\
\hat{S}_1(w_1) &= \mathbb{E}\left[w_1^{\overline{\zeta}_1 - \zeta_1}\right],\\
\hat{S}_2(w_2) &= \mathbb{E}\left[w_2^{\overline{\zeta}_2 - \zeta_2}\right],
\end{aligned}
$$

con primer momento dado por:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \mathbb{E}\left[\overline{\tau}_1 - \tau_1\right],\\
s_2 &= \mathbb{E}\left[\overline{\tau}_2 - \tau_2\right],\\
\hat{s}_1 &= \mathbb{E}\left[\overline{\zeta}_1 - \zeta_1\right],\\
\hat{s}_2 &= \mathbb{E}\left[\overline{\zeta}_2 - \zeta_2\right],
\end{aligned}
$$

Análogamente los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por $\tau_2 - \overline{\tau}_1, \tau_1 - \overline{\tau}_2$ *y* $\zeta_2 - \overline{\zeta}_1, \zeta_1 - \overline{\zeta}_2$ *para el sistema 1 y el sistema 2, respectivamente.*
La FGP para estos tiempos de traslado están dados por

$$
\begin{aligned}
R_1(z_1) &= \mathbb{E}\left[z_1^{\tau_2 - \overline{\tau}_1}\right],\\
R_2(z_2) &= \mathbb{E}\left[z_2^{\tau_1 - \overline{\tau}_2}\right],\\
\hat{R}_1(w_1) &= \mathbb{E}\left[w_1^{\zeta_2 - \overline{\zeta}_1}\right],\\
\hat{R}_2(w_2) &= \mathbb{E}\left[w_2^{\zeta_1 - \overline{\zeta}_2}\right],
\end{aligned}
$$

y al igual que como se hizo con anterioridad

$$
\begin{aligned}
r_1 &= R_1^{(1)}(1) = \mathbb{E}\left[\tau_2 - \overline{\tau}_1\right],\\
r_2 &= R_2^{(1)}(1) = \mathbb{E}\left[\tau_1 - \overline{\tau}_2\right],\\
\hat{r}_1 &= \hat{R}_1^{(1)}(1) = \mathbb{E}\left[\zeta_2 - \overline{\zeta}_1\right],\\
\hat{r}_2 &= \hat{R}_2^{(1)}(1) = \mathbb{E}\left[\zeta_1 - \overline{\zeta}_2\right].
\end{aligned}
$$

Se definen los procesos de conteo para el número de usuarios en cada una de las colas al tiempo t*,* $L_1(t), L_2(t)$*, para* $H_1(t), H_2(t)$ *del sistema 1, respectivamente. Y para el segundo sistema, se tienen los procesos* $\hat{L}_1(t), \hat{L}_2(t)$ *para* $\hat{H}_1(t), \hat{H}_2(t)$*, respectivamente, es decir,*

$$\begin{aligned}
H_1(t) &= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(t)}\right], \\
H_2(t) &= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(t)}\right], \\
\hat{H}_1(t) &= \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(t)}\right], \\
\hat{H}_2(t) &= \mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2(t)}\right].
\end{aligned}$$

Por lo dicho anteriormente se tiene que el número de usuarios presentes en los tiempos $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$, *es cero, es decir,* $L_i(\overline{\tau_i}) = 0$, *y* $\hat{L}_i\left(\overline{\zeta_i}\right) = 0$ *para i=1,2 para cada uno de los dos sistemas.*

Para cada una de las colas en cada sistema, el número de usuarios al tiempo en que llega el servidor a dar servicio está dado por el número de usuarios presentes en la cola al tiempo $t = \tau_i, \zeta_i$, *más el número de usuarios que llegan a la cola en el intervalo de tiempo* $[\tau_i, \overline{\tau}_i], \left[\zeta_i, \overline{\zeta}_i\right]$, *es decir*

$$L_1(\overline{\tau}_1) = L_1(\tau_1) + X_1(\overline{\tau}_1 - \tau_1), \tag{33.81.1}$$

$$\hat{L}_1(\overline{\tau}_1) = \hat{L}_1(\tau_1) + \hat{X}_1(\overline{\tau}_1 - \tau_1), \tag{33.81.2}$$

$$\hat{L}_2(\overline{\tau}_1) = \hat{L}_2(\tau_1) + \hat{X}_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1). \tag{33.81.3}$$

En el caso específico de Q_2, *además, hay que considerar el número de usuarios que pasan del sistema 2 al sistema 1, a traves de* $\hat{Q}_2$ *mientras el servidor en* Q_2 *está ausente, es decir:*

$$L_2(\overline{\tau}_1) = L_2(\tau_1) + X_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1) + Y_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1). \tag{33.81.4}$$

Ahora, determinemos la distribución del número de usuarios que pasan de $\hat{Q}_2$ *a* Q_2 *considerando dos políticas de traslado en específico:*

a*) Solamente pasa un usuario,*

b*) Se permite el paso de* k *usuarios,*

una vez que son atendidos por el servidor en $\hat{Q}_2$.

Política de un solo usuario: *Sea* R_2 *el número de usuarios que llegan a* $\hat{Q}_2$ *al tiempo* t, *sea* R_1 *el número de usuarios que pasan de* $\hat{Q}_2$ *a* Q_2 *al tiempo* t.

A saber:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[R_1] &= \sum_{y\geq 0} \mathbb{P}[R_2 = y]\,\mathbb{E}[R_1|R_2 = y] \\
&= \sum_{y\geq 0} \mathbb{P}[R_2 = y] \sum_{x\geq 0} x\mathbb{P}[R_1 = x|R_2 = y] \\
&= \sum_{y\geq 0}\sum_{x\geq 0} x\mathbb{P}[R_1 = x|R_2 = y]\,\mathbb{P}[R_2 = y].
\end{aligned}$$

Determinemos

$$\mathbb{E}[R_1|R_2 = y] = \sum_{x\geq 0} x\mathbb{P}[R_1 = x|R_2 = y]. \tag{33.81.5}$$

supongamos que $y = 0$, *entonces*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[R_1 = 0|R_2 = 0] &= 1, \\
\mathbb{P}[R_1 = x|R_2 = 0] &= 0, \text{ para cualquier } x \geq 1,
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}[R_1|R_2 = 0] = 0.$$

Para $y = 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[R_1 = 0|R_2 = 1] &= 0, \\
\mathbb{P}[R_1 = 1|R_2 = 1] &= 1,
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}[R_1|R_2 = 1] = 1.$$

Para $y > 1$*:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 \geq 1\right] &= 0,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 \geq 1\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 > 1|R_2 \geq 1\right] &= 0,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = y\right] = 1, \text{ para cualquier } y > 1.$$

es decir

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = y\right] = 1, \text{ para cualquier } y \geq 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[R_1\right] &= \sum_{y\geq 0}\sum_{x\geq 0} x\mathbb{P}\left[R_1 = x|R_2 = y\right]\mathbb{P}\left[R_2 = y\right] = \sum_{y\geq 0}\sum_{x}\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = y\right]\mathbb{P}\left[R_2 = y\right]\\ &= \sum_{y\geq 0}\mathbb{P}\left[R_2 = y\right] = \sum_{y\geq 1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} = 1.\end{aligned}$$

Además para $k \in Z^+$

$$\begin{aligned}f_{R_1}(k) &= \mathbb{P}\left[R_1 = k\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = n\right]\mathbb{P}\left[R_2 = n\right]\\ &= \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = 0\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\ &+ \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 > 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 > 1\right],\end{aligned}$$

donde para

$k = 0$**:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 0\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\ +\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 > 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 > 1\right] = \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right].\end{aligned}$$

$k = 1$**:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 1\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 0\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\ +\mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 > 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 > 1\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2 = n\right].\end{aligned}$$

$k = 2$**:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 2\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 0\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\ +\mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 > 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 > 1\right] = 0.\end{aligned}$$

$k = j$**:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = j\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = j|R_2 = 0\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = j|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\ +\mathbb{P}\left[R_1 = j|R_2 > 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 > 1\right] = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}f_{R_1}(0) &= \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right]\\ f_{R_1}(1) &= \sum_{n\geq 1}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2 = n\right]\\ f_{R_1}(j) &= 0, \text{ para } j > 1.\end{aligned}$$

Política de k usuarios: *Al igual que antes, para* $y \in Z^+$ *fijo*

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2 = y\right] = \sum_{x} x\mathbb{P}\left[R_1 = x|R_2 = y\right].$$

Entonces, si tomamos diversos valore para y*:*

$y = 0$*:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 0\right] &= 1,\\ \mathbb{P}\left[R_1 = x|R_2 = 0\right] &= 0, \text{ para cualquier } x \geq 1,\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=0\right]=0.$$

Para $y=1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=1\right] &= 0,\\
\mathbb{P}\left[R_1=1|R_2=1\right] &= 1,
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=1\right]=1.$$

Para $y=2$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=2\right] &= 0,\\
\mathbb{P}\left[R_1=1|R_2=2\right] &= 1,\\
\mathbb{P}\left[R_1=2|R_2=2\right] &= 1,\\
\mathbb{P}\left[R_1=3|R_2=2\right] &= 0,
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=2\right]=3.$$

Para $y=3$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=3\right] &= 0,\\
\mathbb{P}\left[R_1=1|R_2=3\right] &= 1,\\
\mathbb{P}\left[R_1=2|R_2=3\right] &= 1,\\
\mathbb{P}\left[R_1=3|R_2=3\right] &= 1,\\
\mathbb{P}\left[R_1=4|R_2=3\right] &= 0,
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=3\right]=6.$$

En general, para $k\geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[R_1=0|R_2=k\right] &= 0,\\
\mathbb{P}\left[R_1=j|R_2=k\right] &= 1,\ \textit{para } 1\leq j\leq k,\\
\mathbb{P}\left[R_1=j|R_2=k\right] &= 0,\ \textit{para } j>k,
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[R_1|R_2=k\right]=\frac{k\left(k+1\right)}{2}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[R_1\right] &= \sum_{y}\mathbb{E}\left[R_1|R_2=y\right]\mathbb{P}\left[R_2=y\right]\\
&= \sum_{y}\mathbb{P}\left[R_2=y\right]\frac{y\left(y+1\right)}{2}=\sum_{y\geq 1}\left(\frac{y\left(y+1\right)}{2}\right)\frac{\left(\lambda t\right)^y}{y!}e^{-\lambda t}\\
&= \frac{\lambda t}{2}e^{-\lambda t}\sum_{y\geq 1}\left(y+1\right)\frac{\left(\lambda t\right)^{y-1}}{\left(y-1\right)!}=\frac{\lambda t}{2}e^{-\lambda t}\left(e^{\lambda t}\left(\lambda t+2\right)\right)\\
&= \frac{\lambda t\left(\lambda t+2\right)}{2},
\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{E}\left[R_1\right]=\frac{\lambda t\left(\lambda t+2\right)}{2}. \tag{33.81.6}$$

Además para $k\in Z^{+}$ fijo

$$\begin{aligned}
f_{R_1}\left(k\right) &= \mathbb{P}\left[R_1=k\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=n\right]\mathbb{P}\left[R_2=n\right]\\
&= \mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=0\right]\mathbb{P}\left[R_2=0\right]+\mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=1\right]\mathbb{P}\left[R_2=1\right]\\
&+ \mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=2\right]\mathbb{P}\left[R_2=2\right]+\cdots+\mathbb{P}\left[R_1=k|R_2=j\right]\mathbb{P}\left[R_2=j\right]+\cdots+
\end{aligned}$$

donde para

$k = 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 0\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 0\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\ +\mathbb{P}\left[R_1 = 0|R_2 = j\right]\mathbb{P}\left[R_2 = j\right] = \mathbb{P}\left[R_2 = 0\right].\end{aligned}$$

$k = 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 1\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 0\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\ +\mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = 1|R_2 = j\right]\mathbb{P}\left[R_2 = j\right]\\ = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2 = n\right].\end{aligned}$$

$k = 2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = 2\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 0\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\ +\mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = 2\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 2\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = 2|R_2 = j\right]\mathbb{P}\left[R_2 = j\right]\\ = \sum_{n=2}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2 = n\right].\end{aligned}$$

En general

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[R_1 = k\right] = \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = 0\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 0\right] + \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = 1\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 1\right]\\ +\mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = 2\right]\mathbb{P}\left[R_2 = 2\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[R_1 = k|R_2 = k\right]\mathbb{P}\left[R_2 = k\right]\\ = \sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2 = n\right].\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f_{R_1}(k) = \mathbb{P}\left[R_1 = k\right] = \sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}\left[R_2 = n\right].$$

33.82. Descripción de una Red de S.V.C.

Se definen los procesos de llegada de los usuarios a cada una de las colas dependiendo de la llegada del servidor pero del sistema al cuál no pertenece la cola en cuestión:
Para el sistema 1 y el servidor del segundo sistema

$$\begin{aligned}
F_{1,1}(z_1;\zeta_1) &= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[L_1(\zeta_1) = k\right] z_1^k\\
F_{2,1}(z_2;\zeta_1) &= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\zeta_1)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[L_2(\zeta_1) = k\right] z_2^k\\
F_{1,2}(z_1;\zeta_2) &= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[L_1(\zeta_2) = k\right] z_1^k\\
F_{2,2}(z_2;\zeta_2) &= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\zeta_2)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[L_2(\zeta_2) = k\right] z_2^k
\end{aligned}$$

Ahora se definen para el segundo sistema y el servidor del primero

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{1,1}(w_1;\tau_1) &= \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\hat{L}_1(\tau_1) = k\right] w_1^k\\
\hat{F}_{2,1}(w_2;\tau_1) &= \mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\hat{L}_2(\tau_1) = k\right] w_2^k\\
\hat{F}_{1,2}(w_1;\tau_2) &= \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\hat{L}_1(\tau_2) = k\right] w_1^k\\
\hat{F}_{2,2}(w_2;\tau_2) &= \mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\hat{L}_2(\tau_2) = k\right] w_2^k
\end{aligned}$$

Ahora, con lo anterior definamos la FGP conjunta para el segundo sistema y τ_1*:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right] &= \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}\right]\mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right] = \hat{F}_{1,1}\left(w_1;\tau_1\right)\hat{F}_{2,1}\left(w_2;\tau_1\right)\\ &= \hat{F}_1\left(w_1,w_2;\tau_1\right).\end{aligned}$$

hagamos lo mismo para τ_2

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right] &= \mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right] = \hat{F}_{1,2}\left(w_1;\tau_2\right)\hat{F}_{2,2}\left(w_2;\tau_2\right)\\ &= \hat{F}_2\left(w_1,w_2;\tau_2\right).\end{aligned}$$

Con respecto al sistema 1 se tiene la FGP conjunta con respecto a ζ_1*:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}\right] &= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\zeta_1)}\right] = F_{1,1}\left(z_1;\zeta_1\right)F_{2,1}\left(z_2;\zeta_1\right)\\ &= F_1\left(z_1,z_2;\zeta_1\right).\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right] &= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\zeta_2)}\right] = F_{1,2}\left(z_1;\zeta_2\right)F_{2,2}\left(z_2;\zeta_2\right)\\ &= F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right).\end{aligned}$$

Ahora analicemos la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas, entonces se define la PGF conjunta al tiempo t *para los tiempos de visita del servidor en cada una de las colas, para comenzar a dar servicio, definidos anteriormente al tiempo* $t = \{\tau_1,\tau_2,\zeta_1,\zeta_2\}$*:*

$$F_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_1)}z_2^{L_2(\tau_1)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right] \tag{33.82.1}$$

$$F_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}z_2^{L_2(\tau_2)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right] \tag{33.82.2}$$

$$\hat{F}_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}w_1^{\hat{L}_1(\zeta_1)}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right] \tag{33.82.3}$$

$$\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) = \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_2)}\right] \tag{33.82.4}$$

Entonces, con la finalidad de encontrar el número de usuarios presentes en el sistema cuando el servidor deja de atender una de las colas de cualquier sistema se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right] = \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]\\ =\ &\mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)+X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)+Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)+\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)+\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]\end{aligned}$$

utilizando la ecuacion dada (33.81.1), luego

$$\begin{aligned}&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right\}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\end{aligned}$$

Aplicando la ecuación (33.80.1)

$$= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{z_2^{X_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}z_2^{Y_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]$$

dado que los arribos a cada una de las colas son independientes, podemos separar la esperanza para los procesos de llegada a Q_1 *y* Q_2 *en* τ_1
Recordando que $\tilde{X}_2\left(z_2\right) = X_2\left(z_2\right)+Y_2\left(z_2\right)$ *se tiene*

$$\begin{aligned}&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_1-\tau_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_1-\tau_1)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{\tilde{P}_2\left(z_2\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\hat{P}_1\left(w_1\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\hat{P}_2\left(w_2\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\left\{\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right\}^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[z_2^{L_2(\tau_1)}\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)^{L_1(\tau_1)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_1)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_1)}\right]\\
&= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z2\right)\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1)\\
&\equiv F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2,w_1,w_2\right)
\end{aligned}$$

Las igualdades anteriores son ciertas pues el número de usuarios que llegan a $\hat{Q}_2$ durante el intervalo $[\tau_1,\overline{\tau}_1]$ aún no han sido atendidos por el servidor del sistema 2 y por tanto aún no pueden pasar al sistema 1 por Q_2. Por tanto el número de usuarios que pasan de $\hat{Q}_2$ a Q_2 en el intervalo de tiempo $[\tau_1,\overline{\tau}_1]$ depende de la política de traslado entre los dos sistemas, conforme a la sección anterior.

Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]=F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2,w_1,w_2\right) \tag{33.82.5}$$

Utilizando un razonamiento análogo para $\overline{\tau}_2$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right]=\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)+X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)+\hat{X}_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)+\hat{X}_2(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}z_1^{X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}z_1^{X_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\tau}_2-\tau_2)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\tau}_2-\tau_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}P_1(z_1)^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\hat{P}_1(w_1)^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\hat{P}_2(w_2)^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]
\end{aligned}$$

utlizando la proposición relacionada con la ruina del jugador

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}\left\{P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right\}^{\overline{\tau}_2-\tau_2}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\tau_2)}\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)^{L_2(\tau_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\tau_2)}w_2^{\hat{L}_2(\tau_2)}\right]\\
&= F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2)
\end{aligned}$$

entonces se define

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right]=F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),w_1,w_2\right) \tag{33.82.6}$$

$$\equiv F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2) \tag{33.82.7}$$

Ahora para $\overline{\zeta}_1$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right]=\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_1^{X_1(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}z_2^{X_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}z_2^{Y_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[z_1^{X_1(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}w_2^{\hat{X}_2(\overline{\zeta}_1-\zeta_1)}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[P_1(z_1)^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1}\tilde{P}_2(z_2)^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1}\hat{P}_2(w_2)^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[\left\{P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right\}^{\overline{\zeta}_1-\zeta_1}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_1)}z_2^{L_2(\zeta_1)}\right]\mathbb{E}\left[\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right)^{\hat{L}_1(\zeta_1)}w_2^{\hat{L}_2(\zeta_1)}\right]\\
&= F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)
\end{aligned}$$

es decir

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right]=\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)$$

$$= F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2\right.\right.$$

Finalmente para $\overline{\zeta}_2$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right]=\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}\right]\\
=&\quad\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_1^{X_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}z_2^{X_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}z_2^{Y_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}\right]\\
=&\quad\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[z_1^{X_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}z_2^{\tilde{X}_2(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}w_1^{\hat{X}_1(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)}w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\right]\\
=&\quad\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[P_1\left(z_1\right)^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}\tilde{P}_2\left(z_2\right)^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}\hat{P}\left(w_1\right)^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\right]\\
=&\quad\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\left\{P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}\left(w_1\right)\right\}^{\overline{\zeta}_2-\zeta_2}\right]\\
=&\quad\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\zeta_2)}z_2^{L_2(\zeta_2)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1(\zeta_2)}\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}\left(w_1\right)\right)^{\hat{L}_2\zeta_2}\right]\\
=&\quad F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

33.83. Ecuaciones Recursivas para la R.S.V.C.

es decir

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right]=\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)\tag{33.83.1}$$

$$=F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right]\tag{33.83.2}$$

(33.83.3)

Con lo desarrollado hasta ahora podemos encontrar las ecuaciones recursivas que modelan la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (R.S.V.C):

$$\begin{aligned}
F_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)&=R_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_1)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]\\
F_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)&=R_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_1)}\right]\\
\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)&=\hat{R}_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right]
\end{aligned}$$

y finalmente

$$\hat{F}_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)=\hat{R}_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right]$$

que son equivalentes a las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
F_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)&=&R_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)\\
&&F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2,w_1,w_2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)&=&R_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)\\
&&F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_1,w_2\right)
\end{aligned}$$

33.83.1. Tiempos de Traslado del Servidor

$$\begin{aligned}
\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)&=&\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)\\
&&\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{F}_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) &= \hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)\\ &\quad \hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)\end{aligned}$$

Para

$$R_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)=R_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right) \tag{33.83.4}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= R_1^{(1)}\left(1\right)P_1^{(1)}\left(1\right)=r_1\mu_1,\\ \frac{\partial R_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= R_1^{(1)}\left(1\right)\tilde{P}_2^{(1)}\left(1\right)=r_1\tilde{\mu}_2,\\ \frac{\partial R_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= R_1^{(1)}\left(1\right)\hat{P}_1^{(1)}\left(1\right)=r_1\hat{\mu}_1,\\ \frac{\partial R_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= R_1^{(1)}\left(1\right)\hat{P}_2^{(1)}\left(1\right)=r_1\hat{\mu}_2,\end{aligned}$$

Análogamente se tiene

$$R_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)=R_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right) \tag{33.83.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= R_2^{(1)}\left(1\right)P_1^{(1)}\left(1\right)=r_2\mu_1,\\ \frac{\partial R_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= R_2^{(1)}\left(1\right)\tilde{P}_2^{(1)}\left(1\right)=r_2\tilde{\mu}_2,\\ \frac{\partial R_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= R_2^{(1)}\left(1\right)\hat{P}_1^{(1)}\left(1\right)=r_2\hat{\mu}_1,\\ \frac{\partial R_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= R_2^{(1)}\left(1\right)\hat{P}_2^{(1)}\left(1\right)=r_2\hat{\mu}_2,\end{aligned}$$

Para el segundo sistema:

$$\hat{R}_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)=\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right) \tag{33.83.6}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{R}_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{R}_1^{(1)}\left(1\right)P_1^{(1)}\left(1\right)=\hat{r}_1\mu_1,\\ \frac{\partial \hat{R}_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{R}_1^{(1)}\left(1\right)\tilde{P}_2^{(1)}\left(1\right)=\hat{r}_1\tilde{\mu}_2,\\ \frac{\partial \hat{R}_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{R}_1^{(1)}\left(1\right)\hat{P}_1^{(1)}\left(1\right)=\hat{r}_1\hat{\mu}_1,\\ \frac{\partial \hat{R}_1\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{R}_1^{(1)}\left(1\right)\hat{P}_2^{(1)}\left(1\right)=\hat{r}_1\hat{\mu}_2,\end{aligned}$$

Finalmente

$$\hat{R}_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)=\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right) \tag{33.83.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{R}_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{R}_2^{(1)}\left(1\right)P_1^{(1)}\left(1\right)=\hat{r}_2\mu_1,\\ \frac{\partial \hat{R}_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{R}_2^{(1)}\left(1\right)\tilde{P}_2^{(1)}\left(1\right)=\hat{r}_2\tilde{\mu}_2,\\ \frac{\partial \hat{R}_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{R}_2^{(1)}\left(1\right)\hat{P}_1^{(1)}\left(1\right)=\hat{r}_2\hat{\mu}_1,\\ \frac{\partial \hat{R}_2\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{R}_2^{(1)}\left(1\right)\hat{P}_2^{(1)}\left(1\right)=\hat{r}_2\hat{\mu}_2.\end{aligned}$$

33.83.2. Usuarios presentes en la cola

Hagamos lo correspondiente con las siguientes expresiones obtenidas en la sección anterior: Recordemos que

$$\begin{aligned}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2,w_1,w_2\right) &= F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z2\right)\\ &\quad\hat{F}_1(w_1,w_2;\tau_1)\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2,w_1,w_2\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2,w_1,w_2\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial\theta_1}{\partial\tilde{P}_2}\cdot\frac{\partial\tilde{P}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial F_1}{\partial z_2}\\
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2,w_1,w_2\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial\theta_1}{\partial\hat{P}_1}\cdot\frac{\partial\hat{P}_1}{\partial w_1}+\frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_1}\\
\frac{\partial F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2,w_1,w_2\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial\theta_1}{\partial\hat{P}_2}\cdot\frac{\partial\hat{P}_2}{\partial w_2}+\frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_2}
\end{aligned}$$

para τ_2*:*

$$\begin{aligned}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),w_1,w_2\right) &= F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\right)\\ &\quad\hat{F}_2(w_1,w_2;\tau_2)\end{aligned}$$

al igual que antes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),w_1,w_2\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial\tilde{\theta}_2}{\partial P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z_2}+\frac{\partial F_2}{\partial z_1}\\
\frac{\partial F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),w_1,w_2\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\
\frac{\partial F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),w_1,w_2\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial\tilde{\theta}_2}{\partial\hat{P}_1}\cdot\frac{\partial\hat{P}_1}{\partial w_1}+\frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_1}\\
\frac{\partial F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),w_1,w_2\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial F_2}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial\tilde{\theta}_2}{\partial\hat{P}_2}\cdot\frac{\partial\hat{P}_2}{\partial w_2}+\frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_2}
\end{aligned}$$

Ahora para el segundo sistema

$$\begin{aligned}\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right) &= F_1(z_1,z_2;\zeta_1)\\ &\quad\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_1}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_1}{\partial P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z_1}+\frac{\partial F_1}{\partial z_1}\\
\frac{\partial\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_1}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_1}{\partial\tilde{P}_2}\cdot\frac{\partial\tilde{P}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial F_1}{\partial z_2}\\
\frac{\partial\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\
\frac{\partial\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_1}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_1}{\partial\hat{P}_2}\cdot\frac{\partial\hat{P}_2}{\partial w_2}+\frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_2}
\end{aligned}$$

Finalmente para ζ_2

$$
\begin{aligned}
\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right) &= F_2(z_1,z_2;\zeta_2)\\
&\quad \hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)\Big]
\end{aligned}
$$

por tanto:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_2}{\partial P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z_1}+\frac{\partial F_2}{\partial z_1}\\
\frac{\partial\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_2}{\partial\tilde{P}_2}\cdot\frac{\partial\tilde{P}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial F_2}{\partial z_2}\\
\frac{\partial\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_2}\cdot\frac{\partial\hat{\theta}_2}{\partial\hat{P}_1}\cdot\frac{\partial\hat{P}_1}{\partial w_1}+\frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_1}\\
\frac{\partial\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0
\end{aligned}
$$

33.83.3. Ecuaciones Recursivas

Entonces, de todo lo desarrollado hasta ahora se tienen las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial R_1}{\partial z_1}+\frac{\partial F_1}{\partial z_1}=r_1\mu_1\\
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial R_1}{\partial z_2}+\frac{\partial F_1}{\partial z_2}=r_1\tilde{\mu}_2+f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2+f_1(2)\\
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial R_1}{\partial w_1}+\frac{\partial F_1}{\partial w_1}=r_1\hat{\mu}_1+f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_1+\hat{F}^{(1)}_{1,1}(1)\\
\frac{\partial F_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial R_1}{\partial w_2}+\frac{\partial F_1}{\partial w_2}=r_1\hat{\mu}_2+f_1(1)\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)\hat{\mu}_2+\hat{F}^{(1)}_{2,1}(1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial R_2}{\partial z_1}+\frac{\partial F_2}{\partial z_1}=r_2\mu_1+f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\mu_1+f_2(1)\\
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial R_2}{\partial z_2}+\frac{\partial F_2}{\partial z_2}=r_2\tilde{\mu}_2\\
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial R_2}{\partial w_1}+\frac{\partial F_2}{\partial w_1}=r_2\hat{\mu}_1+f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1+\hat{F}^{(1)}_{2,1}(1)\\
\frac{\partial F_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial R_2}{\partial w_2}+\frac{\partial F_2}{\partial w_2}=r_2\hat{\mu}_2+f_2(2)\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_2+\hat{F}^{(1)}_{2,2}(1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{R}_1}{\partial z_1}+\frac{\partial\hat{F}_1}{\partial z_1}=\hat{r}_1\mu_1+\hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1+F^{(1)}_{1,1}(1)\\
\frac{\partial\hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{R}_1}{\partial z_2}+\frac{\partial\hat{F}_1}{\partial z_2}=\hat{r}_1\mu_2+\hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2+F^{(1)}_{2,1}(1)\\
\frac{\partial\hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{R}_1}{\partial w_1}+\frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_1}=\hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
\frac{\partial\hat{F}_2(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{R}_1}{\partial w_2}+\frac{\partial\hat{F}_1}{\partial w_2}=\hat{r}_1\hat{\mu}_2+\hat{f}_1(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2+\hat{f}_1(2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{R}_2}{\partial z_1}+\frac{\partial\hat{F}_2}{\partial z_1}=\hat{r}_2\mu_1+\hat{f}_2(1)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1+F^{(1)}_{1,2}(1)\\
\frac{\partial\hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial z_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{R}_2}{\partial z_2}+\frac{\partial\hat{F}_2}{\partial z_2}=\hat{r}_2\tilde{\mu}_2+\hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2+F^{(1)}_{2,2}(1)\\
\frac{\partial\hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_1}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{R}_2}{\partial w_1}+\frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_1}=\hat{r}_2\hat{\mu}_1+\hat{f}_2(2)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1+\hat{f}_2(1)\\
\frac{\partial\hat{F}_1(\mathbf{z},\mathbf{w})}{\partial w_2}|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\partial\hat{R}_2}{\partial w_2}+\frac{\partial\hat{F}_2}{\partial w_2}=\hat{r}_2\hat{\mu}_2
\end{aligned}
$$

Es decir, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
f_2(1) &= r_1\mu_1\\
f_1(2) &= r_2\tilde{\mu}_2\\
f_2(2) &= r_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\left(\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+f_1(2)=\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2+r_2\tilde{\mu}_2\\
&= \left(r_1+r_2+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2=\left(r+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)\tilde{\mu}_2\\
f_2(3) &= r_1\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\left(\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\hat{F}^{(1)}_{1,1}(1)=\hat{\mu}_1\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}\\
f_2(4) &= r_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\hat{F}^{(1)}_{2,1}(1)=\hat{\mu}_2\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1(1) &= r_2\mu_1+\mu_1\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+r_1\mu_1=\mu_1\left(r_1+r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\\
&= \mu_1\left(r+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\\
f_1(3) &= r_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\hat{F}^{(1)}_{1,2}(1)=\hat{\mu}_1\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}\\
f_1(4) &= r_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\hat{F}^{(1)}_{2,2}(1)=\hat{\mu}_2\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2}\\
\hat{f}_1(4) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_2\\
\hat{f}_2(3) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
\hat{f}_1(1) &= \hat{r}_2\mu_1+\mu_1\left(\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)+F^{(1)}_{1,2}(1)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\mu_1+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_1(2) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)+F^{(1)}_{2,2}(1)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\tilde{\mu}_2+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}\\
\hat{f}_1(3) &= \hat{r}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\left(\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)+\hat{f}_2(3)=\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\\
&= \left(\hat{r}_1+\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1=\left(\hat{r}+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{\mu}_1\\
\hat{f}_2(1) &= \hat{r}_1\mu_1+\mu_1\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)+F^{(1)}_{1,1}(1)=\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\mu_1+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1}\\
\hat{f}_2(2) &= \hat{r}_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)+F^{(1)}_{2,1}(1)=\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\tilde{\mu}_2+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1}\\
\hat{f}_2(4) &= \hat{r}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)+\hat{f}_1(4)=\hat{r}_1\hat{\mu}_2+\hat{r}_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\left(\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\\
&= \left(\hat{r}+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)\hat{\mu}_2
\end{aligned}
$$

33.83.4. Solución del Sistema de Ecuaciones Lineales

A saber, se puede demostrar que la solución del sistema de ecuaciones está dado por las siguientes expresiones, donde

$$\mu=\mu_1+\tilde{\mu}_2\ ,\ \hat{\mu}=\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\ ,\ r=r_1+r_2\ y\ \hat{r}=\hat{r}_1+\hat{r}_2$$

entonces

$$
\begin{aligned}
f_1(1) &= r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}\\
f_2(2) &= r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
f_1(3) &= \hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2}+r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)\\
f_1(4) &= \hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2}+r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(3) &= \hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1}+r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right)\\
f_2(4) &= \hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1}+r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}_2(4) &= \hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}\\
\hat{f}_1(3) &= \hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1(1) &= \mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2}+\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right)\\
\hat{f}_1(2) &= \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2+\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right)+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}\\
\hat{f}_2(1) &= \mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1}+\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right)\\
\hat{f}_2(2) &= \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1+\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

A saber

$$\begin{aligned}
f_1(3) &= \hat{\mu}_1\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}=\hat{\mu}_1\left(r_2+\frac{r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}\\
&= \hat{\mu}_1\left(r_2+\frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}=\hat{\mu}_1\left(r_2+\frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}+\frac{1}{\mu_2}\right)\\
&= \hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2}+\frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1(4) &= \hat{\mu}_2\left(r_2+\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2}=\hat{\mu}_2\left(r_2+\frac{r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_2}\\
&= \hat{\mu}_2\left(r_2+\frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_2}=\hat{\mu}_2\left(r_2+\frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}+\frac{1}{\mu_2}\right)\\
&= \hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2}+\frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(3) &= \hat{\mu}_1\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}=\hat{\mu}_1\left(r_1+\frac{r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}\\
&= \hat{\mu}_1\left(r_1+\frac{r\mu_1}{1-\mu}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}=\hat{\mu}_1\left(r_1+\frac{r\mu_1}{1-\mu}+\frac{1}{\mu_1}\right)\\
&= \hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1}+\frac{r\mu_1}{1-\mu}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(4) &= \hat{\mu}_2\left(r_1+\frac{f_1(1)}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_1}=\hat{\mu}_2\left(r_1+\frac{r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}}{1-\mu_1}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}\\
&= \hat{\mu}_2\left(r_1+\frac{r\mu_1}{1-\mu}\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_1}=\hat{\mu}_2\left(r_1+\frac{r\mu_1}{1-\mu}+\frac{1}{\mu_1}\right)\\
&= \hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1}+\frac{r\mu_1}{1-\mu}\right)
\end{aligned}$$

A saber

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1(1) &= \mu_1\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2}=\mu_1\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_2}\right)+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_2}\\
&= \mu_1\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right)+\frac{\mu_1}{\mu_2}=\mu_1\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{r}\mu_2}{1-\hat{\mu}}+\frac{1}{\hat{\mu}_2}\right)\\
&= \mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2}+\frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1(2) &= \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{f}_2(4)}{1-\tilde{\mu}_2}\right)+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}=\tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_2}\right)+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}\\
&= \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2+\frac{\hat{r}\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right)+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}_2(1) &= \mu_1\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\hat{\mu}_1}\right)+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1}=\mu_1\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_1}\right)+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1}\\
&= \mu_1\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right)+\frac{\mu_1}{\hat{\mu}_1}=\mu_1\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}+\frac{1}{\hat{\mu}_1}\right)\\
&= \mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1}+\frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}_2(2) &= \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{f}_1(3)}{1-\tilde{\mu}_1}\right)+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1}=\tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}}{1-\hat{\mu}_1}\right)+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1}\\
&= \tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1+\frac{\hat{r}\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right)+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1}
\end{aligned}$$

33.84. Segundos Momentos

Para poder determinar los segundos momentos para los tiempos de traslado del servidor es necesario enunciar y demostrar la siguiente proposición:

Proposición 33.91 *Sea $f(g(x)h(y))$ función continua tal que tiene derivadas parciales mixtas de segundo orden, entonces se tiene lo siguiente:*

$$\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))=\frac{\partial f(g(x)h(y))}{\partial x}\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot h(y)$$

por tanto

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y)) = \frac{\partial^2}{\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right)^2\cdot h^2(y)+\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2}\cdot h(y) \tag{33.84.1}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y)) = \frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot\frac{\partial h(y)}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(g(x)h(y))\cdot g(x)\cdot h(y)+\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\right\}$$

Demostración 33.14

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y)) &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial f(g(x)h(y))}{\partial x}\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot h(y)\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\right\}\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot h(y)+\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2}\cdot h(y)\\
&= \frac{\partial^2}{\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot h(y)\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x}\cdot h(y)+\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2}\cdot h(y)\\
&= \frac{\partial^2}{\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\left(\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right)^2\cdot h^2(y)+\frac{\partial}{\partial x}f(g(x)h(y))\cdot\frac{\partial g^2(x)}{\partial x^2}\cdot h(y).
\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial g\left(x\right)}{\partial x}\cdot h\left(y\right)\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\right\}\cdot\frac{\partial g\left(x\right)}{\partial x}\cdot h\left(y\right)+\frac{\partial}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\cdot\frac{\partial g\left(x\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial h\left(y\right)}{y}\\
&= \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\cdot\frac{\partial h\left(y\right)}{\partial y}\cdot g\left(x\right)\cdot\frac{\partial g\left(x\right)}{\partial x}\cdot h\left(y\right)+\frac{\partial}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\cdot\frac{\partial g\left(x\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial h\left(y\right)}{\partial y}\\
&= \frac{\partial g\left(x\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial h\left(y\right)}{\partial y}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\cdot g\left(x\right)\cdot h\left(y\right)+\frac{\partial}{\partial x}f\left(g\left(x\right)h\left(y\right)\right)\right\}
\end{aligned}
$$

Para la siguiente proposición es necesario utilizar el resultado (33.91)

Proposición 33.92 *Sea R_i la Función Generadora de Probabilidades para el número de arribos a cada una de las colas de la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas definidas como en (33.83.4). Entonces las derivadas parciales están dadas por las siguientes expresiones:*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial z_i^2} &= \left(\frac{\partial P_i\left(z_i\right)}{\partial z_i}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial^2 z_i}\\
&+ \left(\frac{\partial P_i\left(z_i\right)}{\partial z_i}\right)^2\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial z_i}
\end{aligned}
$$

y además

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial z_2\partial z_1} &= \frac{\partial\tilde{P}_2\left(z_2\right)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1\left(z_1\right)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial z_2\partial z_1}\\
&+ \frac{\partial\tilde{P}_2\left(z_2\right)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1\left(z_1\right)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial z_1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial w_i\partial z_1} &= \frac{\partial\hat{P}_i\left(w_i\right)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1\left(z_1\right)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial w_i\partial z_1}\\
&+ \frac{\partial\hat{P}_i\left(w_i\right)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial P_1\left(z_1\right)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial z_1},
\end{aligned}
$$

finalmente

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial w_i\partial z_2} &= \frac{\partial\hat{P}_i\left(w_i\right)}{\partial w_i}\cdot\frac{\partial\tilde{P}_2\left(z_2\right)}{\partial z_2}\cdot\frac{\partial^2 R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial w_i\partial z_2}\\
&+ \frac{\partial\hat{P}_i\left(w_i\right)}{\partial w_i}\cdot\frac{\partial\tilde{P}_2\left(z_2\right)}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial R_i\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)}{\partial z_2},
\end{aligned}
$$

para $i = 1, 2$.

33.85. Sistema de Ecuaciones Lineales para los Segundos Momentos

En el apéndice A se demuestra que las ecuaciones para las ecuaciones parciales mixtas están dadas por:

a*)*

$$
\begin{aligned}
f_1\left(1,1\right) &= r_2 P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2 R_2^{(2)}\left(1\right)+2\mu_1 r_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(2\right)+f_2\left(1\right)\right)+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}P_1^{(2)}f_2\left(2\right)\\
&+ \mu_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)f_2\left(2\right)+\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(1,2)+\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2,2)+f_2(1,2)\right)+f_2(1,1).
\end{aligned}
$$

b*)*

$$
f_1\left(2,1\right) = \mu_1 r_2\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)+f_2(1)\right).
$$

c)

$$
\begin{aligned}
f_1(3,1) &= \mu_1\hat{\mu}_1 r_2 + \mu_1\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right) + \mu_1 r_2 \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\\
&+ \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2)\\
&+ \mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(1,2).
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
f_1(4,1) &= \mu_1\hat{\mu}_2 r_2 + \mu_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \mu_1 r_2 \hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right)\\
&+ \hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2)\\
&+ \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2^{(1,2)}.
\end{aligned}
$$

e)

$$
f_1(1,2) = \mu_1\tilde{\mu}_2 r_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right).
$$

f)

$$
f_1(2,2) = \tilde{\mu}_2^2 R_2^{(2)}(1) + r_2\tilde{P}_2^{(2)}(1).
$$

g)

$$
f_1(3,2) = \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 r_2 + \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1).
$$

h)

$$
f_1(4,2) = \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_2 + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1).
$$

i)

$$
\begin{aligned}
f_1(1,3) &= \mu_1\hat{\mu}_1 r_2 + \mu_1\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2)\\
&+ r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right) + r_2\mu_1\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(1) + f_2(1)\right)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2,2) + f_2^{(1,2)}\right).
\end{aligned}
$$

j)

$$
f_1(2,3) = \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1).
$$

k)

$$
\begin{aligned}
f_1(3,3) &= \hat{\mu}_1^2 R_2^{(2)}(1) + r_2\hat{P}_1^{(2)}(1) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \hat{\mu}_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2) + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_1^{(2)}(1) f_2(2)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2,2) + 2r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + 2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \hat{f}_{2,1}^{(2)}(1).
\end{aligned}
$$

l)

$$
\begin{aligned}
f_1(4,3) &= r_2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2)\\
&+ r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \hat{f}_2(1,2).
\end{aligned}
$$

m)

$$
\begin{aligned}
f_1(1,4) &= r_2\mu_1\hat{\mu}_2 + \mu_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1) f_2(2)\\
&+ r_2\mu_1\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right) + \hat{F}_{2,2}^{(1)}(1)\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1)\right)\\
&+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2,2) + f_2(1,2)\right).
\end{aligned}
$$

n)

$$f_1(2,4) = r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1).$$

ñ)

$$\begin{aligned} f_1(3,4) &= r_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1) + \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_2^{(2)}(1)f_2(2) \\ &+ r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) \\ &+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)\hat{F}_{2,1}^{(1)}(1) + \hat{f}_2^{(2)}(1,2). \end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned} f_1(4,4) &= \hat{\mu}_2^2 R_2^{(2)}(1) + r_2\hat{P}_2^{(2)}(1) + 2r_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2) + \hat{\mu}_2^2\tilde{\theta}_2^{(2)}(1)f_2(2) + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}(1)f_2(2) \\ &+ 2r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + 2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2(2)\hat{F}_{2,2}^{(1)}(1) + \left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + \hat{f}_{2,2}^{(2)}(1). \end{aligned}$$

p)

$$f_2(1,1) = r_1P_1^{(2)}(1) + \mu_1^2 R_1^{(2)}(1).$$

q)

$$f_2(2,1) = \mu_1\tilde{\mu}_2 r_1 + \mu_1\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right).$$

r)

$$f_2(3,1) = r_1\mu_1\hat{\mu}_1 + \mu_1\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1) + r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1) + r_1\mu_1\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1).$$

s)

$$f_2(4,1) = \mu_1\hat{\mu}_2 r_1 + \mu_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\mu_1\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1) + r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1).$$

t)

$$f_2(1,2) = r_1\mu_1\tilde{\mu}_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right).$$

u)

$$\begin{aligned} f_2(2,2) &= \tilde{\mu}_2^2 R_1^{(2)}(1) + r_1\tilde{P}_2^{(2)}(1) + 2r_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right) + f_1(2,2) \\ &+ \tilde{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1) + \frac{1}{1-\mu_1}\tilde{P}_2^{(2)}(1)f_1(1) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,2) \\ &+ \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,1) + f_1(1,2)\right). \end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned} f_2(3,2) &= \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_1 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1) + r_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_1 r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right) + r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1) \\ &+ \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right)\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1) + \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1) + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}(1)f_1(1) + \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1,2) \\ &+ \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 f_1(1,1). \end{aligned}$$

w)

$$\begin{aligned} f_2(4,2) &= \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_1 + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1) + r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_2 r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right) \\ &+ \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + f_1(2)\right)\hat{F}_{1,2}^{(1)}(1) + \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,2) \\ &+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(1,1). \end{aligned}$$

x)

$$f_2(1,3) = r_1\mu_1\hat{\mu}_1 + \mu_1\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1) + r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1) + r_1\mu_1\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1).$$

y)

$$\begin{aligned} f_2(2,3) &= r_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1) + \frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + r_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1)\\ &+ r_1\hat{\mu}_1\left(f_1(1) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right) + r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,1}(1) + \left(f_1(2) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right)\hat{F}_{1,1}(1)\\ &+ \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\left(f_1(1,2) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,1)\right). \end{aligned}$$

z)

$$\begin{aligned} f_2(3,3) &= \hat{\mu}_1^2 R_1^{(2)}(1) + r_1\hat{P}_1^{(2)}(1) + 2r_1\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_1^2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1)\\ &+ \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_1^{(2)}(1)f_1(1) + 2r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_{1,1}^{(1)}(1) + 2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)\hat{F}_{1,1}(1)\\ &+ \left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(1,1) + \hat{f}_{1,1}^{(2)}(1). \end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned} f_2(4,3) &= r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_{1,2}(1) + \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + 2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\\ &+ \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1) + \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1(1)\hat{F}_{1,2}(1) + r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_{1,1}(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_{1,1}(1)f_1(1)\\ &+ \hat{f}_1^{(2)}(1,2) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(2,2). \end{aligned}$$

)

$$f_2(1,4) = r_1\mu_1\hat{\mu}_2 + \mu_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\mu_1\hat{F}_{1,2}(1) + r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1).$$

)

$$\begin{aligned} f_2(2,4) &= r_1\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_{1,2}(1) + \frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\\ &+ \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1) + r_1\hat{\mu}_2\left(f_1(2) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right) + \left(f_1(2) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\right)\hat{F}_{1,2}(1)\\ &+ \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(f_1(1,2) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1,1)\right). \end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned} f_2(3,4) &= r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_{1,2}(1) + \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1) + 2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\\ &+ \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1) + \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\hat{F}_{1,2}(1)f_1(1) + r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_{1,1}(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_{1,1}(1)f_1(1)\\ &+ \hat{f}_1^{(2)}(1,2) + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(1,1). \end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned} f_2(4,4) &= \hat{\mu}_2 R_1^{(2)}(1) + r_1\hat{P}_2^{(2)}(1) + 2r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)} + \hat{f}_{1,2}^{(2)}(1) + 2r_1\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\mu_1}f_1(1) + \hat{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}(1)f_1(1)\\ &+ \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_2^{(2)}(1)f_1(1) + 2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1(1)\hat{F}_{1,2}(1) + \left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\right)^2 f_1(1,1). \end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(1,1) &= \hat{r}_2 P_1^{(2)}(1) + \mu_1^2\hat{R}_2^{(2)}(1) + 2\hat{r}_2\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + \frac{1}{1-\hat{\mu}_2}P_1^{(2)}(1)\hat{f}_2(2) + \mu_1^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)\\ &+ \left(\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2) + 2\hat{r}_2\mu_1 F_{2,1}(1) + 2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1) + F_{2,1}^{(2)}(1). \end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(2,1) &= \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\mu_1F_{2,2}(1)+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\&+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(2)+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_{2,1}(1)\\&+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1)+f_{2,1}^{(2)}(1).\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(3,1) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,1}(1)+\hat{r}_2\mu_1\hat{f}_2(1)\\&+F_{2,1}(1)\hat{f}_2(1)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2).\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(4,1) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)\\&+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,1}(1)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1).\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(1,2) &= \hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\mu_1\hat{r}_2F_{2,2}(1)+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\&+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(2)+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2)\\&+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_{2,1}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1)+f_2^{(2)}(1,2).\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(2,2) &= \hat{r}_2\tilde{P}_2^{(2)}(1)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_{2,2}(1)+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\&+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)+\tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(2)\\&+f_{2,2}^{(2)}(1)+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2).\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(3,2) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,2}(1)+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2(1)+F_{2,2}(1)\hat{f}_2(1)\\&+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2).\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(4,2) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,2}(1)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\&+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_{2,2}(1)\hat{f}_2(1)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{f}_2(2,2).\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(1,3) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,1}(1)+\hat{r}_2\mu_1\hat{f}_2(1)\\&+F_{2,1}(1)\hat{f}_2(1)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2).\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(2,3) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}(1)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_{2,2}(1)+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{f}_2(1)\\&+F_{2,2}(1)\hat{f}_2(1)+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2).\end{aligned}$$

)

$$\hat{f}_1(3,3) = \hat{r}_2\hat{P}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_2^{(2)}(1)+2\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{f}_2(1)+\hat{f}_2(1,1).$$

)

$$\hat{f}_1(4,3) = \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1) + \hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + \hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{f}_2(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2).$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(1,4) &= \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2 + \mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + 2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\ &+ \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2) + \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2) + \hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,1}(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,1}(1).\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(2,4) &= \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1) + \hat{r}_2\hat{\mu}_2F_{2,2}(1) + \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + 2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)\\ &+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2)F_{2,2}(1) + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2).\end{aligned}$$

)

$$\hat{f}_1(3,4) = \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}(1) + \hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + \hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{f}_2(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(1,2).$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(4,4) &= \hat{r}_2P_2^{(2)}(1) + \hat{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}(1) + 2\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{f}_2(2) + \frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2)\\ &+ \hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}(1)\hat{f}_2(2) + \left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{f}_2(2,2).\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_2(,1) &= \hat{r}_1P_1^{(2)}(1) + \mu_1^2\hat{R}_1^{(2)}(1) + 2\hat{r}_1\mu_1F_{1,1}(1) + 2\hat{r}_1\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}P_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1)\\ &+ \mu_1^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + 2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1^{(}1)F_{1,1}(1) + f_{1,1}^{(2)}(1) + \left(\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1^{(1,1)}.\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_2(2,1) &= \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\mu_1F_{1,2}(1) + \tilde{\mu}_2\hat{r}_1F_{1,1}(1) + \frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\ &+ 2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,2}(1) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,1}(1)\\ &+ f_1^{(2)}(1,2) + \mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1).\end{aligned}$$

)

$$\hat{f}_2(3,1) = \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1 + \mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,1}(1) + \hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1(1).$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_2(4,1) &= \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2 + \mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_2F_{1,1}(1) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\ &+ \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + \hat{r}_1\mu_1\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right) + F_{1,1}(1)\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right)\\ &+ \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{f}_1(1,2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,1)\right).\end{aligned}$$

)

$$\begin{aligned}\hat{f}_2(1,2) &= \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2 + \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\mu_1F_{1,2}(1) + \hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_{1,1}(1) + \frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\\ &+ 2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,2}(1)\\ &+ \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)F_{1,1}(1) + f_1^{(2)}(1,2) + \mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1).\end{aligned}$$

)

$$\hat{f}_2(2,2) = \hat{r}_1\tilde{P}_2^{(2)}(1) + \tilde{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}(1) + 2\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_{1,2}(1) + f_{1,2}^{(2)}(1) + 2\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + \tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + 2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}F_{1,2}(1)\hat{f}_1(1) + \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1).$$

)

$$\hat{f}_2(3,2) = \hat{r}_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 + \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,2}(1) + \hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1).$$

)

$$\hat{f}_2(4,2) = \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)F_{1,2}(1) + \frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right) + F_{1,2}(1)\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{f}_1(1,2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,1)\right).$$

)

$$\hat{f}_2(1,3) = \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1 + \mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,1}(1) + \hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1).$$

)

$$\hat{f}_2(2,3) = \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_1F_{1,2}(1) + \hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1).$$

)

$$\hat{f}_2(3,3) = \hat{r}_1\hat{P}_1^{(2)}(1) + \hat{\mu}_1^2\hat{R}_1^{(2)}(1).$$

)

$$\hat{f}_2(4,3) = \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right).$$

)

$$\hat{f}_2(1,4) = \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2 + \mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_2F_{1,1}(1) + \hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \hat{r}_1\mu_1\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right) + F_{1,1}(1)\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right) + \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + \frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2) + \mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1).$$

)

$$\hat{f}_2(2,4) = \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_2F_{1,2}(1) + \hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right) + F_{1,2}(1)\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right) + \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1) + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2) + \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1).$$

)

$$\hat{f}_2(3,4) = \hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1) + \hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right).$$

)

$$\hat{f}_2(4,4) = \hat{r}_1\hat{P}_2^{(2)}(1) + \hat{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}(1) + 2\hat{r}_1\hat{\mu}_2\left(\hat{f}_1(2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1)\right) + \hat{f}_1(2,2) + \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + \hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{f}_1(1) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{f}_1(1,2) + \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,1)\right).$$

33.86. Tiempos de Ciclo e Intervisita

Definición 33.49 *Sea L_i^* el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= f_i\left(i\right) &(33.86.1)\\ Var\left[L_i^*\right] &= f_i\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. &(33.86.2)\end{aligned}$$

Definición 33.50 *El tiempo de Ciclo C_i es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 33.51 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}S_i\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right]=F_i\left(\theta\left(z\right)\right),\\ F\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\ P\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\ F_i\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right],\theta_i\left(z\right)-zP_i\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1-\mu_i}=\frac{f_i\left(i\right)}{1-\mu_i},\\ Var\left[S_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^3}\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var\left[L_i^*\right] = f_i\left(i,i\right)+f_i\left(i\right)-f_i\left(i\right)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t=\tau_i\left(m+1\right)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $\left[\overline{\tau}\left(m\right),\tau_i\left(m+1\right)\right]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z_i\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si

$$I_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i\left(z\right)=I_i\left[P_i\left(z\right)\right]$$

para $i=1,2$, por tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[I_i\right]\\ Var\left[L_i^*\right] &= \mu_i^2Var\left[I_i\right]+\sigma^2\mathbb{E}\left[I_i\right]\end{aligned}$$

para $i=1,2$, por tanto

$$\mathbb{E}\left[I_i\right] = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i},$$

además

$$Var\left[I_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2}-\frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2}f_i\left(i\right).$$

Si $C_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$ *el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que*

$$C_i(z) = I_i[\theta_i(z)],$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i]\,\mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)}\\ Var[C_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_i] &= \mu_i\mathbb{E}[C_i],\\ \mathbb{E}[I_i] &= (1-\mu_i)\,\mathbb{E}[C_i]\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \ldots, L_N(t)]$*. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los* $L_j(\tau_i(m)) = 0$ *para* $i = 1, 2$ *son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.*

Sea M_i *el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea* $C_i^{(m)}$*, para* $m = 1, 2, \ldots, M_i$ *la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio* $\mathbb{E}[C_i]$ *como*

$$\mathbb{E}[C_i] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}[M_i]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ *contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que* $\mathbb{E}[M_i] < \infty$*, además, como* $M_i > 0$*, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que*

$$\mathbb{E}[C_i] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N}\mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i*, el número de usuarios en la cola* $Q_i(z)$ *en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de* $z^{L_i(t)}$ *sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:*

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

M_i *es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con* $\mathbb{E}[M_i] < \infty$*, se sigue del lema de Wald que:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\ \mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{1-I_i\left[P_i(z)\right]}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\ &- \frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\ &- \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2}\\ &+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\ &+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z\rightarrow 1^{+}$:

$$\begin{aligned}Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \lim_{z\rightarrow 1}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &(33.86.3)\\ &- \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &(33.86.4)\\ &- \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} &(33.86.5)\\ &+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &(33.86.6)\\ &+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} &(33.86.7)\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)+\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)+(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}} = \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}\right]}\\
= &\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+ &\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+ &\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} = \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
= &\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} = \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
= &\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+ &\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

33.86.1. Longitudes de la Cola en cualquier tiempo

Sea $V_{i}\left(z\right)=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{z-P_{i}\left(z\right)}$

$$\frac{\partial V_{i}\left(z\right)}{\partial z} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left[\frac{I_{i}{'}\left(z\right)\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}-\frac{\left(I_{i}\left(z\right)-1\right)\left(1-P_{i}{'}\left(z\right)\right)}{\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}}\right]$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$U_{i}\left(z\right)=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\cdot\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}V_{i}\left(z\right) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\right)\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}+\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\frac{d}{dz}\left(\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left\{\frac{-P_{i}\left(z\right)\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)-\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(1-P_{i}^{'}\left(z\right)\right)}{\left(z-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}}\cdot\frac{I_{i}\left(z\right)-1}{1-z}\right\}\\
&+ \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left\{\frac{1-P_{i}\left(z\right)}{z-P_{i}\left(z\right)}\cdot\frac{I_{i}^{'}\left(z\right)\left(1-z\right)+\left(I_{i}\left(z\right)-1\right)}{\left(1-z\right)^{2}}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_i(z)}{\partial z} &= \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])}{(1-z)^2\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])} + \frac{(1-P_i[z])I_i'[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])} - \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])(1-P'[z])}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])^2} \\ &- \frac{(-1+I_i[z])P_i{}'[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}\end{aligned}$$

33.87. Procesos de Renovación

Definición 33.52 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{33.87.1}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 33.53 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 33.11 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

33.87.1. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 33.93 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 33.12 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 33.81 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{33.87.2}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{33.87.3}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 33.19 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{33.87.4}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 33.54 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 33.82 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{33.87.5}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{33.87.6}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 33.20 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{33.87.7}$$

33.87.2. Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 33.55 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 33.94 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 33.56 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 33.95 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 33.13 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 33.83 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 33.21 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1]\,,\ t \geq 0,$$

33.87.3. Función de Renovación

Definición 33.57 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s)\,,\ t \geq 0, \tag{33.87.8}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 33.96 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 33.84 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

33.87.4. Teorema Principal de Renovación

Nota 33.14 *Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 33.85 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 33.97 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,, \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 33.58 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)]\,, \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 33.98 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t)\,, \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]\,.$$

Teorema 33.86 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

33.88. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t): t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ*.*

Definición 33.59 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)): t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t): 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Observación 33.3 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f: \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Observación 33.4 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 33.60 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t): t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t+R_1): t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t): t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1): t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t): t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t+R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X*.*

Nota 33.15 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 33.61 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 33.16 *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_∞

33.88.1. Procesos Regenerativos Estacionarios

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel* A*,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones que ocurren en* $[0,t]$*.*
Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 33.62 *Se define el proceso estacionario, $\{V^{*}(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 33.63 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 33.87 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^{*}(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^{*}(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

33.89. Tiempo de Ciclo Promedio

Consideremos una cola de la red de sistemas de visitas cíclicas fija, Q_l.
Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (34.422), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_l es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 33.64 *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 33.65 *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 33.66 *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

En nuestra notación $V(t) \equiv C_i$ y $X_i = C_i^{(m)}$ para nuestra segunda definición, mientras que para la primera la notación es: $X(t) \equiv C_i$ y $R_i \equiv C_i^{(m)}$.

Expresion de las Parciales mixtas para F_1 y F_2

a*)*

$$\frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} F_1 \left(\theta_1 \left(\tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2), z_2\right)\right) |_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

b*)*

$$\frac{\partial}{\partial z_2} \frac{\partial}{\partial z_1} F_1 \left(\theta_1 \left(\tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2), z_2\right)\right) |_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

c*)*

$$\frac{\partial}{\partial w_1} \frac{\partial}{\partial z_1} F_1 \left(\theta_1 \left(\tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2), z_2\right)\right) |_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

d*)*

$$\frac{\partial}{\partial w_2} \frac{\partial}{\partial z_1} F_1 \left(\theta_1 \left(\tilde{P}_2(z_2) \hat{P}_1(w_1) \hat{P}_2(w_2), z_2\right)\right) |_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

e)

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

f)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= f_1\left(2,2\right)+\frac{1}{1-\mu_1}\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)\\ &+ \tilde{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1\left(1,2\right)+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}\right)^2f_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1\left(1\right)\\ &+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1\left(1,2\right)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2f_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1\left(1\right)\\ &+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1\left(1,2\right)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2f_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

i)

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

j)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1\left(2\right)\\ &+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(2\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}f_1\left(2,1\right)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2f_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)\\ &+ \hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\right)^2f_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2f_1\left(1\right)\\ &+ \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1\left(1\right)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2f_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

m)

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

n)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1\left(1\right)\\ &+ \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1\left(2,1\right)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2f_1\left(2,2\right)\end{aligned}$$

ñ)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}f_1\left(1\right)\\ &+ \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2f_1\left(1,1\right)\end{aligned}$$

o)

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right),z_2\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_2^{(2)}\left(w_2\right)f_1\left(1\right)$$
$$+\quad \hat{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)f_1\left(1\right)+\left(\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2 f_1\left(1,1\right)$$

p)

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}P_1^{(2)}\left(1\right)f_2\left(2\right)+f_2\left(1,1\right)$$
$$+\quad \mu_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)f_2\left(2\right)+\mu_1\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)+\left(\mu_1\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right)+\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)$$

q)

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} \quad = \quad 0$$

r)

$$\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(2\right)$$
$$+\quad \mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)f_2\left(2\right)+\mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right)+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)$$

s)

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = \frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(2\right)$$
$$+\quad \mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)f_2\left(2\right)+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)$$

t)

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} \quad = \quad 0;$$

u)

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} \quad = \quad 0$$

v)

$$\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} \quad = \quad 0$$

w)

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} \quad = \quad 0$$

x)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}P_1^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)+\mu_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)\\ &+ \mu_1\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)+\left(\mu_1\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right)\\ &+ \mu_1\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)+f_2\left(1,1\right)\end{aligned}$$

y)

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} \quad = \quad 0$$

z)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \mu_1\hat{\mu}_1\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)+\mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)\\ &+ \mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)+\hat{\mu}_1\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)\end{aligned}$$

)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)\\
&+ \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right)
\end{aligned}
$$

)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \mu_1\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\frac{\partial}{\partial z_1}F_2\left(1\right)+\mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)\\
&+ \hat{\mu}_2\mu_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right)+\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}f_2\left(1,2\right)
\end{aligned}
$$

)

$$
\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0
$$

)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)\\
&+ \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right)
\end{aligned}
$$

)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)+\hat{\mu}_2^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial z_2}F_2\left(1,1\right)\\
&+ \left(\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2\left(2,2\right)
\end{aligned}
$$

)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}P_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)+\mu_1^2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)\\
&+ \mu_1^2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1\left(1,1\right)
\end{aligned}
$$

)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \mu_1\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_2\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)\\
&+ \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)\\
&+ \mu_1\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{f}_1\left(1,1\right)
\end{aligned}
$$

)

$$
\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0
$$

)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \mu_1\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)\\
&+ \mu_1\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}f_1\left(1,2\right)+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1\left(1,1\right)
\end{aligned}
$$

)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \mu_1\tilde{\mu}_2\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)\\
&+ \mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1\left(1,1\right)
\end{aligned}
$$

)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(1,1\right)\\
&+ \tilde{\mu}_2^2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1\left(1,1\right)
\end{aligned}
$$

)

$$\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1(1,1)+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1(1,1)\\ &+ \frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{\mu}_2\hat{f}_1(1,2)+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1)\end{aligned}$$

)

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

)

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

)

$$\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

)

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= \mu_1\hat{\mu}_2\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1(1,1)+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_1(1,1)\\ &+ \mu_1\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{f}_1(1,2)+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{f}_1(1,1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\ =\;& P_1(z_1)\hat{P}_2'(w_2)\hat{\theta}_1'\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right)\tilde{P}_2'(z_2)\hat{F}_1^{(1,0)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right),w_2\right)\\ +\;& P_1(z_1)^2\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2'(w_2)\tilde{P}_2'(z_2)\hat{\theta}_1''\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right),w_2\right)\\ +\;& P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\hat{\theta}_1'\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right)\tilde{P}_2'(z_2)\hat{F}_1^{(1,1)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right),w_2\right)\\ +\;& P_1(z_1)^2\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2'(w_2)\hat{\theta}_1'\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right)^2\tilde{P}_2'(z_2)\hat{F}_1^{(2,0)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right),w_2\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\ =\;& \hat{F}_1^{(0,2)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right),w_2\right)\\ +\;& P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{\theta}_1'\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{P}_2''(w_2)\hat{F}_1^{(1,0)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right),w_2\right)\\ +\;& P_1(z_1)^2\tilde{P}_2(z_2)^2\hat{P}_2'(w_2)^2\hat{\theta}_1''\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right),w_2\right)\\ +\;& P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2'(w_2)\hat{\theta}_1'\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right)\\ +\;& P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2'(w_2)\hat{\theta}_1'\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{F}_1^{(1,1)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right),w_2\right)\\ +\;& P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2'(w_2)\hat{\theta}_1'\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2'(w_2)\hat{\theta}_1'\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right)\\ & \hat{F}_1^{(2,0)}\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\hat{P}_2(w_2)\tilde{P}_2(z_2)\right),w_2\right)\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
=\;& P_1(w_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)P_1''(z_1)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;& P_1(w_1)^2\tilde{P}_2(z_2)^2P_1'(z_1)^2\hat{\theta}_2''\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;& P_1(w_1)^2\tilde{P}_2(z_2)^2P_1'(z_1)^2\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
=\;& P_1(w_1)P_1'(z_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\tilde{P}_2'(z_2)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;& P_1(w_1)^2P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)P_1'(z_1)\tilde{P}_2'(z_2)\hat{\theta}_2''\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;& P_1(w_1)^2P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)P_1'(z_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)^2\tilde{P}_2'(z_2)\hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
=\;& \tilde{P}_2(z_2)P_1'(w_1)P_1'(z_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;& P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)^2P_1'(w_1)P_1'(z_1)\hat{\theta}_2''\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;& P_1(w_1)\tilde{P}_2(z_2)P_1'(z_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)P_1'(w_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\\
& \hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;& P_1(w_1)\tilde{P}_2(z_2)P_1'(z_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{F}_2^{(1,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} \quad = \quad 0
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
=\;& P_1(w_1)P_1'(z_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\tilde{P}_2'(z_2)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;& P_1(w_1)^2P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)P_1'(z_1)\tilde{P}_2'(z_2)\hat{\theta}_2''\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;& P_1(w_1)^2P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)P_1'(z_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)^2\tilde{P}_2'(z_2)\hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
=\;& P_1(w_1)^2P_1(z_1)^2\tilde{P}_2'(z_2)^2\hat{\theta}_2''\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;& P_1(w_1)P_1(z_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\tilde{P}_2''(z_2)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;& P_1(w_1)^2P_1(z_1)^2\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)^2\tilde{P}_2'(z_2)^2\hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
=\;& P_1(z_1)P_1'(w_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\tilde{P}_2'(z_2)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;& P_1(w_1)P_1(z_1)^2\tilde{P}_2(z_2)P_1'(w_1)\tilde{P}_2'(z_2)\hat{\theta}_2''\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;& P_1(w_1)P_1(z_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\tilde{P}_2'(z_2)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)P_1'(w_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\\
& \hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)\\
+\;& P_1(w_1)P_1(z_1)\hat{\theta}_2'\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\tilde{P}_2'(z_2)\hat{F}_2^{(1,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(w_1)P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
= \;& \tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)P_1'\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \;& P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)^2P_1'\left(w_1\right)P_1'\left(z_1\right)\hat{\theta}_2''\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \;& P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)^2P_1'\left(w_1\right)P_1'\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \;& P_1\left(w_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(1,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
= \;& P_1\left(z_1\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \;& P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)^2\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{\theta}_2''\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \;& P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)^2\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)^2\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \;& P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\tilde{P}_2'\left(z_2\right)\hat{F}_2^{(1,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1}\\
= \;& P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)P_1''\left(w_1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \;& P_1\left(z_1\right)^2\tilde{P}_2\left(z_2\right)^2P_1'\left(w_1\right)^2\hat{\theta}_2''\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \;& P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(1,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \;& P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\\
& \hat{F}_2^{(0,2)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \;& P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)P_1'\left(w_1\right)\hat{\theta}_2'\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\hat{F}_2^{(1,1)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)\\
+ \;& \hat{F}_2^{(2,0)}\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(w_1\right)P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\
\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\
\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\
\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0\\
\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)|_{\mathbf{z},\mathbf{w}=1} &= 0
\end{aligned}$$

33.89.1. Derivadas de Segundo Orden para F_1

Mixtas para z_1:

a)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= \;& r_2P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2R_2^{(2)}\left(1\right)+2\mu_1r_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{1,0)}\right)+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}P_1^{(2)}F_2^{(0,1)}+\mu_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+ \;& \frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}+\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right)+F_2^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \mu_1 r_2\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right).
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \mu_1\hat{\mu}_1 r_2+\mu_1\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\mu_1 r_2\hat{F}_2^{(1,0)}\\
+ & \left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+ & \mu_1\hat{\mu}_1\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \mu_1\hat{\mu}_2 r_2+\mu_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1 r_2\hat{F}_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\\
+ & \hat{F}_2^{(1,0)}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}\\
+ & \frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}
$$

Mixtas para z_2:

e)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \mu_1\tilde{\mu}_2 r_2+\mu_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\tilde{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right).
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \tilde{\mu}_2^2 R_2^{(2)}(1)+r_2\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right).
\end{aligned}
$$

g)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 r_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}.
\end{aligned}
$$

Mixtas para w_1:

i)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \mu_1\hat{\mu}_1 r_2+\mu_1\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+ & r_2\hat{\mu}_1\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+r_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)\hat{F}_2^{(1,0)}\\
+ & \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right).
\end{aligned}
$$

j)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \hat{\mu}_1^2 R_2^{(2)}\left(1\right)+r_2\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+2r_2\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+2r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_2\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

Mixtas para w_2:

m)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+r_2\mu_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& r_2\hat{\mu}_2\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\hat{F}_2^{(0,1)}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+F_2^{(1,0)}\right)+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\left(\frac{\mu_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,2)}+F_2^{(1,1)}\right).
\end{aligned}$$

n)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}(1)+r_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+r_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}.
\end{aligned}$$

ñ)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 R_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+2r_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+r_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_2\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_2\left(z_1,\theta_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \hat{\mu}_2^2 R_2^{(2)}(1)+r_2\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)+2r_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2^2\tilde{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)F_2^{(0,1)}\\
+\;& 2r_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(0,1)}+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2F_2^{(0,2)}+\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

33.89.2. Derivadas de Segundo Orden para F_2

Mixtas para z_1:

a)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_1P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2R_1^{(2)}\left(1\right).
\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \mu_1\tilde{\mu}_2 r_1+\mu_1\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1)+r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right).
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & r_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \mu_1\hat{\mu}_2 r_1+\mu_1\hat{\mu}_2 R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

Mixtas para z_2:

e)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & r_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\mu_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right).
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \tilde{\mu}_2^2 R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)+2r_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)+F_1^{(0,2)}+\tilde{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+ & \frac{1}{1-\mu_1}\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(2,0)}+F_1^{(1,1)}\right).
\end{aligned}
$$

g)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 r_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1 r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ & \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}\\
+ & \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1 F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 r_1+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2 R_1^{(2)}(1)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2 r_1\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\\
+ & \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+F_1^{(0,1)}\right)\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,1)}\\
+ & \left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2 F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

Mixtas para w_1:

i)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
= & r_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1 R_1^{(2)}(1)+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

j)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1R_1^{(2)}\left(1\right)+\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}+r_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_2^{(1,0)}\\
+\;& r_1\hat{\mu}_1\left(F_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\left(F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{2,0)}\right).
\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \hat{\mu}_1^2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+2r_1\frac{\hat{\mu}_1^2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+\;& 2r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}+\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{1,0)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+\hat{F}_1^{(1,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

Mixtas para w_2:

m)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\mu_1\hat{F}_1^{(0,1)}+r_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

n)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_1\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\tilde{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+r_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\\
+\;& \hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+r_1\hat{\mu}_2\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\right)+\left(F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\right)\hat{F}_1^{(0,1)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\left(F_1^{(1,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}$$

ñ)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& r_1\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{\mu}_1\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+\;& \frac{\hat{\mu}_1}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(0,1)}F_1^{(1,0)}+r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+\hat{F}_1^{(1,1)}+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(R_1\left(P_1\left(z_1\right)\bar{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2\right)\right)\\
=\;& \hat{\mu}_2R_1^{(2)}\left(1\right)+r_1\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)+2r_1\hat{\mu}_2\hat{F}_1^{(0,1)}+\hat{F}_1^{(0,2)}+2r_1\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}+\hat{\mu}_2^2\theta_1^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}\\
+\;& \frac{1}{1-\mu_1}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)F_1^{(1,0)}+2\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}F_1^{(1,0)}\hat{F}_1^{(0,1)}+\left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\mu_1}\right)^2F_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

33.89.3. Derivadas de Segundo Orden para $\hat{F}_1$

Mixtas para z_1:

a)
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2P_1^{(2)}\left(1\right)+\mu_1^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}P_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\left(\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+2\hat{r}_2\mu_1F_2^{(1,0)}+2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\mu_1F_2^{(0,1)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(1,0)}+\hat{r}_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(1,0)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

Mixtas para z_2:

e)
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\mu_1\hat{r}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}+F_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\tilde{\mu}_2F_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\tilde{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(0,1)}+F_2^{(0,2)}+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
=\;&\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+\;&\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

Mixtas para w_1:

i)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(1,0)}+\hat{r}_2\mu_1\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(1,0)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_1F_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+F_2^{(0,1)}\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_2\hat{P}_1^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{F}_2^{(1,0)}+\hat{F}_2^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

Mixtas para w_2:

m)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_2\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+ & \mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}+\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

n)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_2\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\hat{\mu}_2F_2^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+2\hat{r}_2\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+ & \frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}F_2^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

ñ)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{r}_2\hat{\mu}_2\hat{F}_2^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(1,1)}.
\end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_2P_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_2^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_2\frac{\hat{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_2}\hat{F}_2^{(0,1)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_2}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}+\hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_2^{(0,1)}\\
+ & \left(\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_2}\right)^2\hat{F}_2^{(0,2)}.
\end{aligned}$$

33.89.4. Derivadas de Segundo Orden para $\hat{F}_2$

Mixtas para z_1:

a)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_1P_1^{(2)}(1)+\mu_1^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\mu_1F_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}P_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;& 2\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(2,0)}+\left(\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\mu_1F_1^{(0,1)}+\tilde{\mu}_2\hat{r}_1F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;& \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(1,1)}\\
+\;& \mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;& \hat{r}_1\mu_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+F_1^{(1,0)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}$$

Mixtas para z_2:

e)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_1\mu_1\tilde{\mu}_2+\mu_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\mu_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+2\hat{r}_1\frac{\mu_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;& \mu_1\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(0,1)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}F_1^{(1,0)}+F_1^{(1,1)}+\mu_1\tilde{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_1\tilde{P}_2^{(2)}(1)+\tilde{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}(1)+2\hat{r}_1\tilde{\mu}_2F_1^{(0,1)}+F_1^{(0,2)}+2\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2^2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\tilde{P}_2^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;& \tilde{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+2\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}F^{(0,1)}\hat{F}_1^{(1,0)}+\left(\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;& \hat{r}_1\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2+\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_1\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

h)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)F_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+\;&\hat{\mu}_2\tilde{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+F_1^{(0,1)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+\;&\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

Mixtas para w_1:

i)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_1+\mu_1\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

j)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}.
\end{aligned}
$$

k)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\hat{P}_1^{(2)}(1)+\hat{\mu}_1^2\hat{R}_1^{(2)}(1).
\end{aligned}
$$

l)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right).
\end{aligned}
$$

Mixtas para w_1:

m)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\mu_1\hat{\mu}_2+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\mu_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+\;&F_1^{(1,0)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\mu_1\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\mu_1\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\mu_1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}\\
+\;&\mu_1\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

n)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_2F_1^{(0,1)}+\hat{r}_1\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\hat{r}_1\tilde{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)\\
+\;&F_1^{(0,1)}\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\frac{\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}+\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\hat{\theta}_1^{(2)}(1)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}\\
+\;&\tilde{\mu}_2\hat{\mu}_2\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\right)^2\hat{F}_1^{(2,0)}.
\end{aligned}
$$

ñ)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right)F_1(z_1,z_2)\right)\\
=\;&\hat{r}_1\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1\hat{R}_1^{(2)}(1)+\hat{r}_1\hat{\mu}_1\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right).
\end{aligned}
$$

o)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial w_2}\left(\hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)F_1\left(z_1,z_2\right)\right)\\
= & \hat{r}_1\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)+\hat{\mu}_2^2\hat{R}_1^{(2)}\left(1\right)+2\hat{r}_1\hat{\mu}_2\left(\hat{F}_1^{(0,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,0)}\right)+\hat{F}_1^{(0,2)}+\frac{1}{1-\hat{\mu}_1}\hat{P}_2^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}\\
+ & \hat{\mu}_2^2\hat{\theta}_1^{(2)}\left(1\right)\hat{F}_1^{(1,0)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\left(\hat{F}_1^{(1,1)}+\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}_1}\hat{F}_1^{(2,0)}\right).
\end{aligned}
$$

Introducción

Un sistema de visitas (Polling System) consiste en una cola a la cuál llegan los usuarios para ser atendidos por uno o varios servidores de acuerdo a una política determinada, en la cual se puede asumir que la manera en que los usuarios llegan a la misma es conforme a un proceso Poisson con tasa de llegada μ. De igual manera se puede asumir que la distribución de los servicios a cada uno de los usuarios presentes en la cola es conforme a una variable aleatoria exponencial. Esto es la base para la conformación de los Sistemas de Visitas Cíclicas, de los cuales es posible obtener sus Funciones Generadoras de Probabilidades, primeros y segundos momentos así como medidas de desempeño que permiten tener una mejor descripción del funcionamiento del sistema en cualquier momento t asumiendo estabilidad.

Objetivos Principales

- *Encontrar las ecuaciones que modelan el comportamiento de una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC) con propiedades similares.*
- *Encontrar expresiones analíticas para las longitudes de las colas al momento en que el servidor llega a una de ellas para comenzar a dar servicio, así como de sus segundos momentos.*
- *Determinar las principales medidas de Desempeño para la RSVC tales como: Número de usuarios presentes en cada una de las colas del sistema cuando uno de los servidores está presente atendiendo, Tiempos que transcurre entre las visitas del servidor a la misma cola.*

Descripción de la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas

El uso de la Función Generadora de Probabilidades (FGP's) nos permite determinar las Funciones de Distribución de Probabilidades Conjunta de manera indirecta sin necesidad de hacer uso de las propiedades de las distribuciones de probabilidad de cada uno de los procesos que intervienen en la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas.

- *Se definen los procesos para los arribos para cada una de las colas:$X_i\left(t\right)$ y $\hat{X}_i\left(t\right)$. Y para los usuarios que se trasladan de un sistema a otro se tiene el proceso $Y\left(t\right)$,*
- *En lo que respecta al servidor, en términos de los tiempos de visita a cada una de las colas, se definen las variables aleatorias τ_1,τ_2 para Q_1,Q_2 respectivamente; y ζ_1,ζ_2 para $\hat{Q}_1,\hat{Q}_2$ del sistema 2.*
- *A los tiempos en que el servidor termina de atender en las colas $Q_1,Q_2,\hat{Q}_1,\hat{Q}_2$, se les denotará por $\overline{\tau}_1,\overline{\tau}_2,\overline{\zeta}_1,\overline{\zeta}_2$ respectivamente.*
- *Los tiempos de traslado del servidor desde el momento en que termina de atender a una cola y llega a la siguiente para comenzar a dar servicio están dados por $\tau_2-\overline{\tau}_1,\tau_1-\overline{\tau}_2$ y $\zeta_2-\overline{\zeta}_1,\zeta_1-\overline{\zeta}_2$ para el sistema 1 y el sistema 2, respectivamente.*

Cada uno de estos procesos con su respectiva FGP. Además, para cada una de las colas en cada sistema, el número de usuarios al tiempo en que llega el servidor a dar servicio está dado por el número de usuarios presentes en la cola al tiempo t, más el número de usuarios que llegan a la cola en el intervalo de tiempo $\left[\tau_i,\overline{\tau}_i\right]$, es decir

$$L_1\left(\overline{\tau}_1\right)=L_1\left(\tau_1\right)+X_1\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right),\hat{L}_i\left(\overline{\tau}_i\right)=\hat{L}_i\left(\tau_i\right)+\hat{X}_i\left(\overline{\tau}_i-\tau_i\right),L_2\left(\overline{\tau}_1\right)=L_2\left(\tau_1\right)+X_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)+Y_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right),$$

Una vez definidas las Funciones Generadoras de Probabilidades Conjuntas se construyen las ecuaciones recursivas que permiten obtener la información sobre la longitud de cada una de las colas, al momento en que uno de los servidores llega a una de las colas para dar servicio, basándose en la información que se tiene sobre su *llegada a la cola inmediata anterior.*

$$
\begin{aligned}
F_2(z_1,z_2,w_1,w_2) &= R_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),z_2,w_1,w_2\right),\\
F_1(z_1,z_2,w_1,w_2) &= R_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1(z_1)\hat{P}_1(w_1)\hat{P}_2(w_2)\right),w_1,w_2\right),\\
\hat{F}_2(z_1,z_2,w_1,w_2) &= \hat{R}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)\hat{F}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_2(w_2)\right),w_2\right),\\
\hat{F}_1(z_1,z_2,w_1,w_2) &= \hat{R}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i(w_i)\right)\hat{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1(z_1)\tilde{P}_2(z_2)\hat{P}_1(w_1)\right)\right).
\end{aligned}
$$

Resultado Principal

Sean $\mu_1,\mu_2,\check{\mu}_2,\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2$ y $\tilde{\mu}_2=\mu_2+\check{\mu}_2$ los valores esperados de los proceso definidos anteriormente, y sean $r_1,r_2,\hat{r}_1$ y $\hat{r}_2$ los valores esperado s de los tiempos de traslado del servidor entre las colas para cada uno de los sistemas de visitas cíclicas. Si se definen $\mu=\mu_1+\tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu}=\hat{\mu}_1+\hat{\mu}_2$, y $r=r_1+r_2$ y $\hat{r}=\hat{r}_1+\hat{r}_2$, entonces se tiene el siguiente resultado.

Teorema 33.88 *Supongamos que $\mu<1$, $\hat{\mu}<1$, entonces, el número de usuarios presentes en cada una de las colas que conforman la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas cuando uno de los servidores visita a alguna de ellas está dada por la solución del Sistema de Ecuaciones Lineales presentados arriba cuyas expresiones damos a continuación:*

$$
\begin{array}{lll}
f_1(1)=r\frac{\mu_1(1-\mu_1)}{1-\mu}, & f_1(2)=r_2\tilde{\mu}_2, & f_1(3)=\hat{\mu}_1\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2}+r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right),\\
f_1(4)=\hat{\mu}_2\left(\frac{r_2\mu_2+1}{\mu_2}+r\frac{\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right), & f_2(1)=r_1\mu_1, & f_2(2)=r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu},\\
f_2(3)=\hat{\mu}_1\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1}+r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right), & f_2(4)=\hat{\mu}_2\left(\frac{r_1\mu_1+1}{\mu_1}+r\frac{\mu_1}{1-\mu}\right), & \hat{f}_1(1)=\mu_1\left(\frac{\hat{r}_2\hat{\mu}_2+1}{\hat{\mu}_2}+\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right),\\
\hat{f}_1(2)=\tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_2+\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2}{1-\hat{\mu}}\right)+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_2}, & \hat{f}_1(3)=\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)}{1-\hat{\mu}}, & \hat{f}_1(4)=\hat{r}_2\hat{\mu}_2,\\
\hat{f}_2(1)=\mu_1\left(\frac{\hat{r}_1\hat{\mu}_1+1}{\hat{\mu}_1}+\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right), & \hat{f}_2(2)=\tilde{\mu}_2\left(\hat{r}_1+\hat{r}\frac{\hat{\mu}_1}{1-\hat{\mu}}\right)+\frac{\mu_2}{\hat{\mu}_1}, & \hat{f}_2(3)=\hat{r}_1\hat{\mu}_1,\\
 & \hat{f}_2(4)=\hat{r}\frac{\hat{\mu}_2(1-\hat{\mu}_2)}{1-\hat{\mu}}. &
\end{array}
$$

Las ecuaciones que determinan los segundos momentos de las longitudes de las colas de los dos sistemas se pueden ver en este sitio

Medidas de Desempeño

Definición 33.67 *Sea L_i^*el número de usuarios cuando el servidor visita la cola Q_i para dar servicio, para $i=1,2$.*

Entonces

Proposición 33.99 *Para la cola Q_i, $i=1,2$, se tiene que el número de usuarios presentes al momento de ser visitada por el servidor está dado por*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[L_i^*] &= f_i(i) \qquad (33.89.1)\\
Var[L_i^*] &= f_i(i,i)+\mathbb{E}[L_i^*]-\mathbb{E}[L_i^*]^2. \qquad (33.89.2)
\end{aligned}
$$

Definición 33.68 *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo, bajo condiciones de estabilidad.*

$$C_i(z)=\mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$$

Definición 33.69 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo.*

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$$

Proposición 33.100 *Para los tiempos de intervisita del servidor I_i, se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[I_i\right] &= \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i},\\ Var\left[I_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2}-\frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2}f_i\left(i\right).\end{aligned}$$

Proposición 33.101 *Para los tiempos que ocupa el servidor para atender a los usuarios presentes en la cola Q_i, con FGP denotada por S_i, se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1-\mu_i}=\frac{f_i\left(i\right)}{1-\mu_i},\\ Var\left[S_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^3}\end{aligned}$$

Proposición 33.102 *Para la duración de los ciclos C_i se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right]=\frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i}=\frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}\\ Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.\end{aligned}$$

Conjeturas

Definición 33.70 *Dada una cola Q_i, sea $\mathcal{L}=\left\{L_1\left(t\right),L_2\left(t\right),\hat{L}_1\left(t\right),\hat{L}_2\left(t\right)\right\}$ las longitudes de todas las colas de la Red de Sistemas de Visitas Cíclicas. Supóngase que el servidor visita Q_i, si $L_i\left(t\right)=0$ y $\hat{L}_i\left(t\right)=0$ para $i=1,2$, entonces los elementos de $\mathcal{L}$ son puntos regenerativos.*

Definición 33.71 *Un ciclo regenerativo es el intervalo de tiempo que ocurre entre dos puntos regenerativos sucesivos, $\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2$.*

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $\left[L_1\left(t\right),L_2\left(t\right),\ldots,L_N\left(t\right)\right]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j\left(\tau_i\left(m\right)\right)=0$ para $i=1,2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m=1,2,\ldots,M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}\left[C_i\right]$ como

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}C_i^{(m)}\right]<\infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$, además, como $M_i>0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}\left[C_i\right]<\infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N}\mu_k<1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i\left(z\right)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\ \mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right]\\ &= \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)} = \frac{1-I_i[P_i(z)]}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\ &- \frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\ &- \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2}\\ &+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\ &+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z \rightarrow 1^{+}$:

$$
\begin{aligned}
Q_i^{(1)}(z) &= lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{dQ_i(z)}{dz} && (33.89.3)\\
&= lim_{z\rightarrow 1}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} && (33.89.4)\\
&- lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} && (33.89.5)\\
&- lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} && (33.89.6)\\
&+ lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} && (33.89.7)\\
&+ lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(nz))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} && (33.89.8)
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
& lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} = lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}[(1-F_i(z))P_i(z)]}{\frac{d}{dz}[(1-P_i(z))(-z+P_i(z))]}\\
= \ & lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_i(z)F_i^{'}(z)+(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} = lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)]}\\
= \ & lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_i(z)F_i^{'}(z)+(1-z)F_i^{'}(z)P_i^{'}(z)+(1-z)P_i(z)F_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2}\\
= \ & lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2\right]}\\
= \ & lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-(1-F_i(z))P_i(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2P_i^{'}(z)}\\
+ \ & lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{+(1-z)(1-F_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)P_i^{'}(z)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2P_i^{'}(z)}\\
+ \ & lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{+(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{''}(z)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} = lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)]}\\
= \ & lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-(1-F_i(z))P_i^{'}(z)-(1-z)F_i^{'}(z)P_i^{'}(z)+(1-z)(1-F_i(z))P_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}\\
= \ & lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)\right]}\\
= \ & lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)-(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)P_i'[z]}{(1-P_i(z))^2\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))P_i^{'}(}
\end{aligned}
$$

$+lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)^2+(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))^2\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}$

33.89.5. Longitudes de la Cola en cualquier tiempo

Sea $V_i\left(z\right)=\frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\frac{I_i(z)-1}{z-P_i(z)}$

$$\frac{\partial V_i\left(z\right)}{\partial z} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\left[\frac{I_i{'}\left(z\right)\left(z-P_i\left(z\right)\right)}{z-P_i\left(z\right)}-\frac{\left(I_i\left(z\right)-1\right)\left(1-P_i{'}\left(z\right)\right)}{\left(z-P_i\left(z\right)\right)^2}\right]$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$U_i\left(z\right)=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-P_i\left(z\right)}{z-P_i\left(z\right)}\cdot\frac{I_i\left(z\right)-1}{1-z}$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}V_i\left(z\right) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1-P_i\left(z\right)}{z-P_i\left(z\right)}\right)\frac{I_i\left(z\right)-1}{1-z}+\frac{1-P_i\left(z\right)}{z-P_i\left(z\right)}\frac{d}{dz}\left(\frac{I_i\left(z\right)-1}{1-z}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\left\{\frac{-P_i\left(z\right)\left(z-P_i\left(z\right)\right)-\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(1-P_i^{'}\left(z\right)\right)}{\left(z-P_i\left(z\right)\right)^2}\cdot\frac{I_i\left(z\right)-1}{1-z}\right\}\\ &+ \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\left\{\frac{1-P_i\left(z\right)}{z-P_i\left(z\right)}\cdot\frac{I_i^{'}\left(z\right)\left(1-z\right)+\left(I_i\left(z\right)-1\right)}{\left(1-z\right)^2}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_i\left(z\right)}{\partial z} &= \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])}{(1-z)^2\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}+\frac{(1-P_i[z])I_i^{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}\\ &- \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])\left(1-P'[z]\right)}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])^2}-\frac{(-1+I_i[z])P_i{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}\end{aligned}$$

CAPÍTULO 34

Thorisson

34.1. Existencia de Tiempos de Regeneración

34.1.1. Procesos Regenerativos: Thorisson

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 34.1 *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.*

Nota 34.1 *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 34.2 *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i := \sigma \{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\}.$$

Definición 34.3 *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 34.1 *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i$ en $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i \left(y \in \prod_{i \in \mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n} \right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i \in \mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 34.4 *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 34.5 *Dos espacios medibles $(E, \mathcal{E})$ y $(G, \mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \to G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 34.6 *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G, \mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 34.2 *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 34.7 *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ es una familia $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s \in \mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E, \mathcal{E})$.*

Definición 34.8 *Un proceso estocástico one-sided contiuous time **(PEOSCT)** es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s \in \mathbb{I}} (E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s \in \mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 34.3 *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 34.4 *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_1} \leq x_1, \ldots, Z_{t_n} \leq x_n\right), x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{34.1.1}$$

Nota 34.5 *Para espacios polacos $(E, \mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 34.9 *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 34.6 *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H, \mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{34.1.2}$$

Nota 34.7 *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ a $(H, \mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H, \mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 34.8 *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H, \mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 34.10 *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0, \infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) . w \in \Omega.$$

Definición 34.11 *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible **(CM)** si el mapeo que toma $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 34.9 *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F} / \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 34.12 *Un PEOSCT con espacio de estados $(H, \mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible **(CCM)** si el mapeo $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 34.10 *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0, \infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w, t) en $(Z(w), t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w), t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 34.13 *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s \in [0, \infty)} : z \in H\right\} = H, \, t \in [0, \infty).$$

Definición 34.14 *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0, \infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)}, \, z \in H.$$

Definición 34.15 *Se dice que un proceso Z es shift-medible **(SM)** si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H}$ medible.*

Nota 34.11 *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 34.12 • *Dado el espacio polaco $(E,\mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0,\infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*

- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 34.13 *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 34.2 *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 34.16 *Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z=(Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S=(S_k)_0^{\infty}$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0\leq S_0<S_1<\cdots\to\infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L,\mathcal{L})$, donde*

$$L=\left\{(s_k)_0^{\infty}\in[0,\infty)^{\{0,1,\dots\}}:s_0<s_1<\cdots\to\infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L}=L\cap\mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.
Así el par (Z,S) es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ en $(H\times L,\mathcal{H}\otimes\mathcal{L})$. El par $\mathcal{H}\otimes\mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H\times L,\mathcal{H}\otimes\mathcal{L})$ en $([0,\infty),\mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 34.17 *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H\times L$ en $H\times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z,(s_k)_0^{\infty}\right)=\theta_t\left(z,\left(s_{n_{t-}+k}-t\right)_0^{\infty}\right)$$

donde $n_{t-}=inf\{n\geq1:s_n\geq t\}$.

Nota 34.14 *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t)\in H\times[0,\infty)$ en $z_t\in E$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 34.18 *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S)=\left(Z^0,S^0\right),n\geq0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $((Z_s)\,s\in[0,S_n),S_0,\dots,S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 34.15 *Si el par (Z,S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1,X_2,\dots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 34.3 *Supóngase que el par (Z,S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**},S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z,S) con periodo d.*

Definición 34.19 *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n\geq1$ y una función $f\in\mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}}f(x)\,dx>0$ con $X_2,X_3,\dots,X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_n\in B)\geq\int_B f(x)\,dx$$

para $B\in\mathcal{B}$.

Definición 34.20 *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S)=\left(Z^0,S^0\right)$ para $n\geq0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0,S_1,\dots,S_n)$ para $n\geq0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 34.16 • *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*

- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 34.17 *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 34.4 *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 34.5 *Supongase que* (Z, S) *es cycle-stationary con* $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. *Sea* U *distribuida uniformemente en* $[0, 1)$ *e independiente de* (Z^0, S^0) *y sea* $\mathbb{P}^*$ *la medida de probabilidad en* $(\Omega, \mathbb{P})$ *definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) *con distribución* $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. *Entonces* $(Z*, S^*)$ *es estacionario,*

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$*, and* S_0^* *es continuo con función distribución* G_∞ *definida por*

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ *y densidad* $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$*, con* $x \geq 0$.

Teorema 34.6 *Sea* Z *un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y* S_0 *y* S_1 *tiempos aleatorios tales que* $0 \leq S_0 < S_1$ *y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{34.1.3}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios* S *tales que*

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{34.1.4}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{34.1.5}$$

Definición 34.21 *Un elemento aleatorio en un espacio medible* $(E, \mathcal{E})$ *en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *a* $(E, \mathcal{E})$*, es decir, para* $A \in \mathcal{E}$*, se tiene que* $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$*, donde* $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.

Nota 34.18 *También se dice que* Y *está soportado por el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y que* Y *es un mapeo medible de* Ω *en* E*, es decir, es* $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ *medible.*

Definición 34.22 *Para cada* $i \in \mathbb{I}$ *sea* P_i *una medida de probabilidad en un espacio medible* $(E_i, \mathcal{E}_i)$. *Se define el espacio producto* $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$*, donde* $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ *es el producto cartesiano de los* E_i*'s, y* $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ *es la* σ*-álgebra producto, es decir, es la* σ*-álgebra más pequeña en* $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ *que hace al* i*-ésimo mapeo proyección en* E_i *medible para toda* $i \in \mathbb{I}$ *es la* σ*-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\}.$$

Definición 34.23 *Un espacio de probabilidad* $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ *es una extensión de otro espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *si* $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ *soporta un elemento aleatorio* $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ *que tienen a* $\mathbb{P}$ *como distribución.*

Teorema 34.7 *Sea* $\mathbb{I}$ *un conjunto de índices arbitrario. Para cada* $i \in \mathbb{I}$ *sea* P_i *una medida de probabilidad en un espacio medible* $(E_i, \mathcal{E}_i)$. *Entonces existe una única medida de probabilidad* $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ *en* $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i)$ *tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i\left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$*, toda* $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ *y todo* $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ *es llamada la medida producto y* $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i\right)$*, es llamado espacio de probabilidad producto.*

Definición 34.24 *Un espacio medible* $(E, \mathcal{E})$ *es Polaco si existe una métrica en* E *tal que* E *es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en* E*, y separable,* E *tienen un subconjunto denso numerable, y tal que* $\mathcal{E}$ *es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 34.25 *Dos espacios medibles* $(E, \mathcal{E})$ *y* $(G, \mathcal{G})$ *son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección* $f : E \to G$ *tal que* f *es* $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ *medible y su inversa* f^{-1} *es* $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ *medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 34.26 *Un espacio medible* $(E, \mathcal{E})$ *es un espacio estándar si es Borel equivalente a* $(G, \mathcal{G})$*, donde* G *es un subconjunto de Borel de* $[0, 1]$ *y* $\mathcal{G}$ *son los subconjuntos de Borel de* G.

Nota 34.19 *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 34.27 *Un proceso estocástico con conjunto de índices* $\mathbb{I}$ *y espacio de estados* $(E, \mathcal{E})$ *es una familia* $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ *donde* $\mathbb{Z}_s$ *son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y todos toman valores en* $(E, \mathcal{E})$.

Definición 34.28 *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices* $\mathbb{I} = [0, \infty)$.

Sea $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ *denota el espacio producto* $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}} (E, \mathcal{E})$. *Vamos a considerar* $\mathbb{Z}$ *como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en* $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ *definido por* $Z(w) = (Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ *y* $w \in \Omega$.

Nota 34.20 *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en* $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. *La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 34.21 *En particular cuando Z toma valores reales, es decir,* $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_1} \leq x_1, \ldots, Z_{t_n} \leq x_n\right), x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{34.1.6}$$

Nota 34.22 *Para espacios polacos* $(E, \mathcal{E})$ *el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 34.29 *Las trayectorias de Z son las realizaciones* $Z(w)$ *para* $w \in \Omega$ *del mapeo aleatorio Z.*

Nota 34.23 *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de* $E^{\mathbb{I}}$. *En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en* $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ *sino en* $(H, \mathcal{H})$, *donde* $\mathcal{H}$ *es la* σ*-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a* $z \in H$ *a* $z_t \in E$ *para* $t \in \mathbb{I}$. *A* $\mathcal{H}$ *se le conoce como la traza de H en* $E^{\mathbb{I}}$, *es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{34.1.7}$$

Nota 34.24 *Z tiene trayectorias con valores en H y cada* Z_t *es un mapeo medible de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *a* $(H, \mathcal{H})$. *Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio* $(H, \mathcal{H})$ *se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 34.25 *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias* $(H, \mathcal{H})$ *es la distribución de Z como un elemento aleatorio en* $(H, \mathcal{H})$. *La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 34.30 *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados* $(E, \mathcal{E})$ *y sea T un tiempo aleatorio en* $[0, \infty)$. *Por* Z_T *se entiende el mapeo con valores en E definido en* Ω *en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) . w \in \Omega.$$

Definición 34.31 *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible (**CM**) si el mapeo que toma* $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ *a* $Z_t(w) \in E$ *es* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ *medible.*

Nota 34.26 *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que* Z_T *es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en* $(w, T(w))$ *es* $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ *medible, mientras que el segundo toma* $(w, T(w))$ *en* $Z_{T(w)}(w)$ *es* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ *medible.*

Definición 34.32 *Un PEOSCT con espacio de estados* $(H, \mathcal{H})$ *es canónicamente conjuntamente medible (**CCM**) si el mapeo* $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ *en* $Z_t \in E$ *es* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ *medible.*

Nota 34.27 *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de* $\Omega \times [0, \infty)$ *a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma* (w, t) *en* $(Z(w), t)$ *es* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ *medible, y el segundo que toma* $(Z(w), t)$ *en* $Z_t(w)$ *es* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ *medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 34.33 *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante (**ISI**) si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s\in[0,\infty)} : z \in H\right\} = H,\ t \in [0, \infty).$$

Definición 34.34 *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift* θ_t, $t \in [0, \infty)$, *de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s\in[0,\infty)},\ z \in H.$$

Definición 34.35 *Se dice que un proceso Z es shift-medible (**SM**) si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma* $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ *en* $\theta_t z \in H$ *es* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H}$ *medible.*

Nota 34.28 *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 34.29

- *Dado el espacio polaco* $(E, \mathcal{E})$ *se tiene el conjunto de trayectorias* $D_E[0, \infty)$ *que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 34.30 *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 34.8 *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 34.36 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^{\infty}$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \rightarrow \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L, \mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{ (s_k)_0^{\infty} \in [0, \infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \rightarrow \infty \right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.
Así el par (Z, S) es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0, \infty), \mathcal{B}[0, \infty))$.

Definición 34.37 *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t \left(z, (s_k)_0^{\infty}\right) = \theta_t \left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^{\infty}\right)$$

donde $n_{t-} = inf \{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 34.31 *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 34.38 *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0, S_n), S_0, \dots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z, S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 34.32 *Si el par (Z, S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \dots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 34.9 *Supóngase que el par (Z, S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z, S) con periodo d.*

Definición 34.39 *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx > 0$ con $X_2, X_3, \dots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\, dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 34.40 *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \dots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z, S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 34.33

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z, S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 34.34 *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 34.10 *Supongase que el par (Z, S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S).*

Teorema 34.11 *Supongase que (Z, S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0, 1)$ e independiente de $\left(Z^0, S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^* \left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*, S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 34.12 *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{34.1.8}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n} (Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{34.1.9}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{34.1.10}$$

Definición 34.41 *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.*

Nota 34.35 *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 34.42 *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}} \mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}} \mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}} \mathcal{E}_i := \sigma \left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 34.43 *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 34.13 *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i \left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}} \mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 34.44 *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 34.45 *Dos espacios medibles $(E, \mathcal{E})$ y $(G, \mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \rightarrow G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 34.46 *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G, \mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 34.36 *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 34.47 *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ es una familia $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E, \mathcal{E})$.*

Definición 34.48 *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}} (E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 34.37 *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 34.38 *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}(Z_{t_1} \leq x_1, \ldots, Z_{t_n} \leq x_n), x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{34.1.11}$$

Nota 34.39 *Para espacios polacos $(E,\mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 34.49 *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 34.40 *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H,\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{34.1.12}$$

Nota 34.41 *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ a $(H,\mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H,\mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 34.42 *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H,\mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 34.50 *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0,\infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) .w \in \Omega.$$

Definición 34.51 *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible **(CM)** si el mapeo que toma $(w,t) \in \Omega \times [0,\infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 34.43 *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w,T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w,T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 34.52 *Un PEOSCT con espacio de estados $(H,\mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible **(CCM)** si el mapeo $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 34.44 *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0,\infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w,t) en $(Z(w),t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w),t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 34.53 *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s\in[0,\infty)} : z \in H\right\} = H,\ t \in [0,\infty).$$

Definición 34.54 *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0,\infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s\in[0,\infty)},\ z \in H.$$

Definición 34.55 *Se dice que un proceso Z es shift-medible **(SM)** si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ medible.*

Nota 34.45 *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 34.46

- *Dado el espacio polaco $(E,\mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0,\infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 34.47 *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 34.14 *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 34.56 *Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L,\mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^\infty \in [0,\infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.
Así el par (Z,S) es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 34.57 *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z,(s_k)_0^{\infty}\right) = \theta_t\left(z,\left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^{\infty}\right)$$

donde $n_{t-} = inf\left\{n \geq 1 : s_n \geq t\right\}$.

Nota 34.48 *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 34.58 *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0,S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0,S_n), S_0,\dots,S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 34.49 *Si el par (Z,S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \dots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 34.15 *Supóngase que el par (Z,S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**},S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z,S) con periodo d.*

Definición 34.59 *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx > 0$ con $X_2, X_3, \dots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\,dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 34.60 *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0,S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0,S_1,\dots,S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 34.50

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 34.51 *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 34.16 *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 34.17 *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0,S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega,\mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*,S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0,S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*,S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}\left[f\left(Z^*,S^*\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0,S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 34.18 *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{34.1.13}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0,S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{34.1.14}$$

$$(Z,S_0,S_1) \text{ depende de } (X_2,X_3,\dots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{34.1.15}$$

Definición 34.61 *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ a $(E,\mathcal{E})$, es decir, para $A\in\mathcal{E}$, se tiene que $\{Y\in A\}\in\mathcal{F}$, donde $\{Y\in A\}:=\{w\in\Omega : Y(w)\in A\}=: Y^{-1}A$.*

Nota 34.52 *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 34.62 *Para cada $i\in\mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i,\mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i):=\left(\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i\in\mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i:=\sigma\left\{\{y : y_i\in A\} : i\in\mathbb{I} \text{ y } A\in\mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 34.63 *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi\in(\Omega,\mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 34.19 *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i\in\mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i,\mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y\in\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i : y_i\in A_{i_1},\dots,y_n\in A_{i_n}\right)=P_{i_1}(A_{i_n})\cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n>0$, toda $i_1,\dots,i_n\in\mathbb{I}$ y todo $A_{i_1}\in\mathcal{E}_{i_1},\dots,A_{i_n}\in\mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i,P_i):=\left(\prod_{i\in\mathbb{I}},E_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 34.64 *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 34.65 *Dos espacios medibles $(E,\mathcal{E})$ y $(G,\mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f:E\rightarrow G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 34.66 *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G,\mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0,1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 34.53 *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 34.67 *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ es una familia $Z=(\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E,\mathcal{E})$.*

Definición 34.68 *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}=[0,\infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right):=\otimes_{s\in\mathbb{I}}(E,\mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w)=(Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w\in\Omega$.

Nota 34.54 *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 34.55 *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E,\mathcal{E})=(\mathbb{R},\mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}(Z_{t_1}\leq x_1,\dots,Z_{t_n}\leq x_n), x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}, t_1,\dots,t_n\in\mathbb{I}, n\geq 1. \tag{34.1.16}$$

Nota 34.56 *Para espacios polacos $(E,\mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 34.69 *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w\in\Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 34.57 *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H,\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z\in H$ a $z_t\in E$ para $t\in\mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H}:=E^{\mathbb{I}}\cap H:=\left\{A\cap H : A\in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{34.1.17}$$

Nota 34.58 *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ a $(H, \mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H, \mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 34.59 *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H, \mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 34.70 *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0, \infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) . w \in \Omega.$$

Definición 34.71 *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible **(CM)** si el mapeo que toma $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 34.60 *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 34.72 *Un PEOSCT con espacio de estados $(H, \mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible **(CCM)** si el mapeo $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 34.61 *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0, \infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w, t) en $(Z(w), t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w), t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 34.73 *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s \in [0, \infty)} : z \in H\right\} = H, \; t \in [0, \infty).$$

Definición 34.74 *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0, \infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)}, \; z \in H.$$

Definición 34.75 *Se dice que un proceso Z es shift-medible **(SM)** si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H}$ medible.*

Nota 34.62 *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 34.63
- *Dado el espacio polaco $(E, \mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0, \infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 34.64 *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 34.20 *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 34.76 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s \in [0, \infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L, \mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^\infty \in [0, \infty)^{\{0,1,\ldots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\ldots\}}$.
Así el par (Z, S) es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0, \infty), \mathcal{B}[0, \infty))$.

Definición 34.77 *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z, (s_k)_0^\infty\right) = \theta_t\left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^\infty\right)$$

donde $n_{t-} = inf\{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 34.65 *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 34.78 *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0, S_n), S_0, \ldots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 34.66 *Si el par (Z,S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 34.21 *Supóngase que el par (Z,S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z,S) con periodo d.*

Definición 34.79 *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx > 0$ con $X_2, X_3, \ldots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\, dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 34.80 *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 34.67

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 34.68 *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 34.22 *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 34.23 *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0, S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*, S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 34.24 *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{34.1.18}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{34.1.19}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{34.1.20}$$

34.2. Procesos Regenerativos

34.2.1. Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [40]

Definición 34.81 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.*

Nota 34.69 *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [40].*

Nota 34.70 *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 34.82 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$
\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\,du,
\end{aligned}
$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$
\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},
$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 34.71 *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*
En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 34.72 *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 34.73 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 34.74 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

34.2.2. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$
\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},
$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración, *y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 34.83 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^{*}(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_{0}^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 34.84 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 34.85 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 34.25 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^{*}(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^{*}(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s) ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t} V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Corolario 34.1 *Sea* $\{V(t), t \geq 0\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E} < \infty$*,* F *es no-aritmética, y para todo* $x \geq 0$*,* $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $[0, \tau]$*, entonces* $V(t)$ *converge en distribución cuando* $t \rightarrow \infty$ *y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_{0}^{X} V(s) ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V(t)$ *cuando* $t \rightarrow \infty$*.*

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Procesos de Renovación

Definición 34.86 *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{34.2.1}$$

para $t \geq 0$*.*

Si se consideran los puntos T_n *como elementos de* $\mathbb{R}_{+}$*, y* $N(t)$ *es el número de puntos en* $\mathbb{R}$*. El proceso denotado por* $\{N(t) : t \geq 0\}$*, denotado por* $N(t)$*, es un proceso puntual en* $\mathbb{R}_{+}$*. Los* T_n *son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual* $N(t)$ *es simple si su número de ocurrencias son distintas:* $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ *casi seguramente.*

Definición 34.87 *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, para* $n \geq 1$*, son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F*, donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$*. Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 34.75 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F*, con* $F(0) = 0$*, para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F*. Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$*, donde* $T_n \rightarrow \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Teorema Principal de Renovación

Nota 34.76 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 34.26 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 34.1 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 34.88 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 34.2 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 34.27 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$.

Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &=& 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.3 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.77 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.28 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.2}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.3}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.2 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.2.4}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.89 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.29 *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{34.2.5}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.6}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.3 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.2.7}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \ \ t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.4 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.78 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.30 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_{n} = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.8}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.9}$$

Es decir, T_{n} satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.4 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t\rightarrow\infty. \tag{34.2.10}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\left\{Z\left(t\right):t\geq0\right\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N\left(t\right)$

Definición 34.90 *Para el proceso $\left\{Z\left(t\right):t\geq0\right\}$ se define la fluctuación máxima de $Z\left(t\right)$ en el intervalo $\left(T_{n-1},T_{n}\right]$:*

$$M_{n}=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_{n}}|Z\left(t\right)-Z\left(T_{n-1}\right)|$$

Teorema 34.31 *Supóngase que $n^{-1}T_{n}\rightarrow\mu$ c.s. cuando $n\rightarrow\infty$, donde $\mu\leq\infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_{n}\right) = a, \text{ c.s.} \tag{34.2.11}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.12}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_{n}=0$ c.s.

Corolario 34.5 *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_{n}\right)-Z\left(T_{n-1}\right),M_{n}\right)$, para $n\geq1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right)\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_{1}\right)-Z\left(T_{0}\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_{1}\right]}, \text{ c.s. cuando } t\rightarrow\infty. \tag{34.2.13}$$

Los tiempos T_{n} están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned}\left\{N\left(t\right)\geq n\right\} &= \left\{T_{n}\leq t\right\}\\ T_{N\left(t\right)}\leq &\;\; t \;\; <T_{N\left(t\right)+1},\end{aligned}$$

además $N\left(T_{n}\right)=n$, y

$$N\left(t\right)=\max\left\{n:T_{n}\leq t\right\}=\min\left\{n:T_{n+1}>t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_{n}\leq t\right\}=F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\left\{N\left(t\right)\geq n\right\} &= \left\{T_{n}\leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right)\leq n\right\} &= 1-F^{\left(n+1\right)\star}\left(t\right)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{N\left(t\right)\geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 34.5 *Para cada $t\geq0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N\left(t\right)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^{m}\right]<\infty$, para $m\geq1$.*

Nota 34.79 *Si el primer tiempo de renovación ξ_{1} no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_{n}, para $n\geq2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_{n} de la n-ésima renovación tiene distribución $G\star F^{\left(n-1\right)\star}\left(t\right)$*

Teorema 34.32 *Para una constante $\mu\leq\infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_{n} = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.14}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.15}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.6 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.2.16}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.91 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.33 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (34.2.17)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (34.2.18)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.7 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.2.19}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.6 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.80 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.34 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (34.2.20)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (34.2.21)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.8 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.2.22}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.92 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.35 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{34.2.23}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.24}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.9 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.2.25}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.7 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.81 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.36 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.26}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.27}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N /t) la cumple.

Corolario 34.10 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.2.28}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.93 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.37 *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (34.2.29)\\ lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (34.2.30)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.11 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.2.31}$$

Función de Renovación

Definición 34.94 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s)\,,\ t \geq 0, \tag{34.2.32}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 34.8 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 34.38 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 34.95 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)\,,\ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 34.9 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 34.96 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t)\,,\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 34.10 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 34.82 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 34.39 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n|T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 34.12 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t) + 1]\,,\ t \geq 0,$$

Definición 34.97 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)\,, \tag{34.2.33}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 34.98 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 34.83 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[35]

Definición 34.99 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)\,, \tag{34.2.34}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 34.100 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 34.84 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.11 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 34.1 (Proceso Poisson) *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 34.85 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.40 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{34.2.35}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{34.2.36}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.13 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \to \infty. \tag{34.2.37}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.101 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.41 *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \ c.s. \tag{34.2.38}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \ c.s. \tag{34.2.39}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.14 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \ c.s. \ cuando \ t \to \infty. \tag{34.2.40}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 34.102 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t),\ t\geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t)=\mathbb{1}(t\geq 0)$.

Proposición 34.12 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t>0$, y es $U^{'}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t)>N(t-)\}=0,\ t\geq 0.$$

Definición 34.103 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha)=\int_{\mathbb{R}_+}e^{-\alpha t}dF(t),\ \alpha\geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F^{n\star}}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F}(\alpha)^n=\frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 34.13 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha)=\frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 34.86 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)]=\lambda t$, para $t\geq 0$.*

Teorema 34.42 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t)=\mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f:\mathbb{R}_+\rightarrow\mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()}f(T_n)\right]=\int_{(0,t]}f(s)\,d\eta(s),\ t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1,X_2,\ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n|T_n=s]=f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)}X_n\right]=\int_{(0,t]}f(s)\,d\eta(s),\ t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 34.15 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right]=\mu\mathbb{E}[N(t)+1],\ t\geq 0,$$

Definición 34.104 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t)=h(t)+\int_{[0,t]}H(t-s)\,dF(s),\ t\geq 0,\tag{34.2.41}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 34.14 *La función $U\star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 34.43 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t)\rightarrow 1/\mu,\ \text{cuando } t\rightarrow\infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 34.105 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t),\ t\geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t)=\mathbb{1}(t\geq 0)$.

Proposición 34.15 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 34.106 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 34.16 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 34.87 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 34.44 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 34.16 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 34.107 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{34.2.42}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 34.17 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 34.45 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 34.88 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 34.46 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 34.18 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 34.108 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 34.19 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t),\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,1\!\!1(T>t)\right].$$

Teorema 34.47 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,1\!\!1(T>t)\right]$.

Nota 34.89 *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 34.48 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds.$$

Proposición 34.20 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t),\ donde\ h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 34.109 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 34.21 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t),\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,1\!\!1(T>t)\right].$$

Teorema 34.49 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,1\!\!1(T>t)\right]$.

Definición 34.110 *Para el proceso $\{(N(t),X(t)):t\geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1},T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n=\left(\xi_n,\{X(T_{n-1}+t):0\leq t<\xi_n\}\right)$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 34.90 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t)=f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f:\tilde{S}\rightarrow S$.*

Nota 34.91 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 34.92 *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t):t\geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 34.111 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 34.93 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 34.50 (Procesos Regenerativos) *Suponga que el proceso*

Definición 34.112 (Renewal Process Trinity) *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- *$A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- *$B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- *$L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 34.94 *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{34.2.43}$$

Ejemplo 34.2 (Tiempos de recurrencia Poisson) *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (34.8.10) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 34.113 *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 34.95 *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 34.22 *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 34.51 *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\,ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 34.96 *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 34.17 *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Procesos Regenerativos

Nota 34.97 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 34.98 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 34.114 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 34.115 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 34.99 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 34.116 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 34.100 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 34.101 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 34.117 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 34.102 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 34.118 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 34.103 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 34.119 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 34.120 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 34.121 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 34.52 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 34.122 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 34.123 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 34.124 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t,w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 34.53 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ*.*

34.2.3. Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i *se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por*

$$\left\{T_1^i, T_2^i, \ldots, T_k^i, \ldots\right\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_i$*. Además se sabe que para*

$$T^* = \min\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

T^* *se distribuye de manera exponencial con parámetro*

$$\mu^* = \sum_{i=1}^4 \mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad y \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min\{\tilde{r}, \hat{r}\},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad y \text{ por tanto} \quad \overline{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \overline{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\overline{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* *tal que en el intervalo* $(0, t^*)$ *no ha llegado ningún usuario, es decir,*

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$*.*

34.2.4. Resultados para Procesos de Salida

34.2.5. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 34.125 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 34.1 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 34.2 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 34.126 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 34.104 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 34.127 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 34.105 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

34.2.6. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[35]

Definición 34.128 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{34.2.44}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 34.129 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 34.106 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.23 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.107 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.54 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.45}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.46}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 34.18 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.2.47}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.130 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.55 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} &(34.2.48)\\
lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} &(34.2.49)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 34.19 *Si* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación, y* $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (34.2.50)
$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación con distribución* F *con media finita* μ.

Definición 34.131 *La función de renovación asociada con la distribución* F*, del proceso* $N\left(t\right)$*, es*

$$
U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \; t \geq 0,
$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = \mathbb{1}\left(t \geq 0\right)$.

Proposición 34.24 *Supóngase que la distribución de inter-renovación* F *tiene densidad* f*. Entonces* $U\left(t\right)$ *también tiene densidad, para* $t > 0$*, y es* $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$*. Además*

$$
\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \; t \geq 0.
$$

Definición 34.132 *La Transformada de Laplace-Stieljes de* F *está dada por*

$$
\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF\left(t\right), \; \alpha \geq 0.
$$

Entonces

$$
\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}\left(\alpha\right)}.
$$

Proposición 34.25 *La Transformada de Laplace* $\hat{U}\left(\alpha\right)$ *y* $\hat{F}\left(\alpha\right)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}\left(\alpha\right) = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$.

Nota 34.108 *Un proceso de renovación* $N\left(t\right)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}\left[U\left(t\right)\right] = \lambda t$*, para* $t \geq 0$.

Teorema 34.56 *Sea* $N\left(t\right)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta\left(t\right) = \mathbb{E}\left[N\left(\right)\right]$ *es finita para cada* t*. Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f\left(T_n\right)\right] = \int_{\left(0,t\right]} f\left(s\right) d\eta\left(s\right), \; t \geq 0,
$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N\left(t\right)$ *tal que* $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f\left(s\right)$*, independiente de* n*. Entonces*

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{\left(0,t\right]} f\left(s\right) d\eta\left(s\right), \; t \geq 0,
$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 34.20 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación* $N\left(t\right)$,

$$
\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}\left[N\left(t\right) + 1\right], \; t \geq 0,
$$

Definición 34.133 *Sea* $h\left(t\right)$ *función de valores reales en* $\mathbb{R}$ *acotada en intervalos finitos e igual a cero para* $t < 0$ *La ecuación de renovación para* $h\left(t\right)$ *y la distribución* F *es*

$$
H\left(t\right) = h\left(t\right) + \int_{\left[0,t\right]} H\left(t - s\right) dF\left(s\right), \; t \geq 0, \quad (34.2.51)
$$

donde $H\left(t\right)$ *es una función de valores reales. Esto es* $H = h + F \star H$*. Decimos que* $H\left(t\right)$ *es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para* $t < 0$.

Proposición 34.26 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 34.57 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 34.134 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 34.27 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 34.135 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 34.28 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 34.109 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 34.58 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 34.21 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 34.136 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \ t \geq 0, \tag{34.2.52}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 34.29 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 34.59 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 34.110 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde b es DRI.*

Teorema 34.60 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 34.30 *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t<0$ *puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\textit{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 34.137 *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\textit{ para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 34.31 *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\textit{ donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 34.61 (Regeneración Cruda) *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$*.*

Nota 34.111 *Una función* $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde b es DRI.*

Teorema 34.62 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 34.32 *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t<0$ *puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\textit{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 34.138 *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\textit{ para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 34.33 *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\textit{ donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 34.63 (Regeneración Cruda) *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$*.*

34.2.7. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 34.139 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 34.3 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 34.4 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 34.140 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 34.112 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 34.141 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 34.113 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

34.2.8. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 34.142 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 34.5 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Observación 34.6 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 34.143 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 34.114 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 34.144 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 34.115 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

34.2.9. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t - s) \in A | X_1 > t - s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración, *y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 34.145 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t + x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 34.146 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 34.147 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 34.64 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

34.2.10. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 34.148 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 34.149 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 34.150 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 34.65 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

34.2.11. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.34 *Para cada* $t \geq 0$, *la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, *para* $m \geq 1$.

Nota 34.116 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n, *para* $n \geq 2$, *a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G, *entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 34.66 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.53}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.54}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 34.22 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$, *entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.2.55}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 34.151 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.67 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \to \mu$ *c.s. cuando* $n \to \infty$, *donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{34.2.56}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.57}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 34.23 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, *para* $n \geq 1$, *son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.2.58}$$

34.2.12. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n *están relacionados con los conteos de* $N(t)$ *por*

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \;\; t \;\; < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, *y*

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.35 *Para cada* $t \geq 0$, *la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, *para* $m \geq 1$.

Nota 34.117 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n, *para* $n \geq 2$, *a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G, *entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 34.68 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{34.2.59}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{34.2.60}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N /t) la cumple.*

Corolario 34.24 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$, *entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \to \infty. \tag{34.2.61}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 34.152 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.69 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \to \mu$ *c.s. cuando* $n \to \infty$, *donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \ c.s. \tag{34.2.62}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \ c.s. \tag{34.2.63}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 34.25 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, *para* $n \geq 1$, *son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \ c.s. \ cuando \ t \to \infty. \tag{34.2.64}$$

34.2.13. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n *están relacionados con los conteos de* $N(t)$ *por*

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq &\ \ t \ < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, *y*

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.36 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.118 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.70 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.65}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.66}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N /t) la cumple.

Corolario 34.26 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.2.67}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.153 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.71 *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{34.2.68}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.69}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.27 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.2.70}$$

34.2.14. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.37 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.119 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.72 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.71}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.72}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 34.28 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.2.73}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.154 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.73 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{34.2.74}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.75}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.29 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.2.76}$$

34.2.15. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 34.155 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^{*}(t), t \geq 0\}$, *para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 34.156 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 34.157 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$, *es una versión de este,* $\{V(t,w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$, S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 34.74 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$. *Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t, *además*

i)

$$\mathbb{E}[V^{*}(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^{*}(0)] < \infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,*entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

34.2.16. Procesos de Renovación

Definición 34.158 *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{34.2.77}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n *como elementos de* $\mathbb{R}_+$, *y* $N(t)$ *es el número de puntos en* $\mathbb{R}$. *El proceso denotado por* $\{N(t) : t \geq 0\}$, *denotado por* $N(t)$, *es un proceso puntual en* $\mathbb{R}_+$. *Los* T_n *son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual* $N(t)$ *es simple si su número de ocurrencias son distintas:* $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ *casi seguramente.*

Definición 34.159 *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, *para* $n \geq 1$, *son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F, *donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$. *Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 34.120 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F, *con* $F(0) = 0$, *para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F. *Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, *donde* $T_n \rightarrow \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

34.2.17. Teorema Principal de Renovación

Nota 34.121 *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 34.75 (Teorema Principal de Renovación) *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 34.38 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 34.160 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 34.39 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 34.76 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]$.

34.2.18. Función de Renovación

Definición 34.161 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s), \; t \geq 0, \tag{34.2.78}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 34.40 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 34.77 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

34.2.19. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.41 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.122 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.78 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} &(34.2.79)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} &(34.2.80)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.30 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$
t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.2.81}
$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.162 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$
M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|
$$

Teorema 34.79 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} &(34.2.82)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} &(34.2.83)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.31 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.2.84}
$$

34.2.20. Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 34.163 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$
U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,
$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 34.42 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$
\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.
$$

Definición 34.164 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$
\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.
$$

Entonces

$$
\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.
$$

Proposición 34.43 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 34.123 *Un proceso de renovación* $N(t)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, *para* $t \geq 0$.

Teorema 34.80 *Sea* $N(t)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ *es finita para cada* t. *Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N(t)$ *tal que* $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, *independiente de* n. *Entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 34.32 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación* $N(t)$,

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1]\,,\ t \geq 0,$$

34.2.21. Procesos de Renovación

Definición 34.165 *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)\,, \tag{34.2.85}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n *como elementos de* $\mathbb{R}_+$, *y* $N(t)$ *es el número de puntos en* $\mathbb{R}$. *El proceso denotado por* $\{N(t) : t \geq 0\}$, *denotado por* $N(t)$, *es un proceso puntual en* $\mathbb{R}_+$. *Los* T_n *son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual* $N(t)$ *es simple si su número de ocurrencias son distintas:* $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ *casi seguramente.*

Definición 34.166 *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, *para* $n \geq 1$, *son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F, *donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$. *Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 34.124 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F, *con* $F(0) = 0$, *para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F. *Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, *donde* $T_n \to \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

34.2.22. Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i *se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por*

$$\left\{T_1^i, T_2^i, \ldots, T_k^i, \ldots\right\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_i$. *Además se sabe que para*

$$T^* = \min\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

T^* *se distribuye de manera exponencial con parámetro*

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{4} \mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad y \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min\{\tilde{r}, \hat{r}\},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad \textit{y por tanto} \quad \overline{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \overline{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\overline{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

34.2.23. Resultados para Procesos de Salida

En [40] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 34.44 *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1}X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k}X$.

- *Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.*
- *Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.*
- *Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:*

  Teorema 34.81 *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso **I** es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) Los tiempos de servicio son identicamente cero;

  b) $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;

  c) $L = 1$ y $G = D$;

  d) $L = \infty$ y $G = M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;

  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;

  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;

  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- *Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.*
- *King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.*

- *Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.*
- *El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)*

  Teorema 34.82 *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.

  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$

  d) $G = M$.

- *El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)*

  Teorema 34.83 *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [13] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- *Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.*
- *Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.*
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- *Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:*

  Teorema 34.84 *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right) 2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2 (1-\delta)^{-1}.
\end{aligned}$$

  Teorema 34.85 *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 34.86 *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

34.2.24. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 34.167 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 34.7 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Observación 34.8 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 34.168 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 34.125 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 34.169 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 34.126 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

34.2.25. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[35]

Definición 34.170 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{34.2.86}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 34.171 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 34.127 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq &\quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.45 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$.

Nota 34.128 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 34.87 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.87}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.88}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 34.33 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.2.89}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 34.172 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.88 *Supóngase que* $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{34.2.90}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.91}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 34.34 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.2.92}$$

Supóngase que $N(t)$ *es un proceso de renovación con distribución* F *con media finita* μ.

Definición 34.173 *La función de renovación asociada con la distribución* F*, del proceso* $N(t)$*, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 34.46 *Supóngase que la distribución de inter-renovación* F *tiene densidad* f*. Entonces* $U(t)$ *también tiene densidad, para* $t > 0$*, y es* $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$*. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 34.174 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 34.47 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 34.129 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 34.89 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 34.35 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 34.175 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t - s) \, dF(s), \ t \geq 0, \tag{34.2.93}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 34.48 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 34.90 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 34.176 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 34.49 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 34.177 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 34.50 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 34.130 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 34.91 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 34.36 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 34.178 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{34.2.94}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 34.51 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 34.92 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \to \infty.$$

Nota 34.131 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 34.93 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 34.52 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ \textit{donde}\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 34.179 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)],\ \textit{para}\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 34.53 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t),\ \textit{donde}\ h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 34.94 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 34.132 *Una función $h : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 34.95 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds.$$

Proposición 34.54 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 34.180 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 34.55 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t),\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 34.96 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

34.2.26. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_{+}$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 34.181 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = \left(\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\}\right)$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 34.9 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 34.10 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 34.182 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 34.133 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 34.183 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 34.134 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

34.2.27. Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 34.184 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 34.11 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 34.12 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 34.185 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 34.135 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 34.186 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 34.136 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

34.2.28. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración, *y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 34.187 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 34.188 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 34.189 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 34.97 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

34.2.29. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración, *y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 34.190 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 34.191 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 34.192 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 34.98 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

34.2.30. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n *están relacionados con los conteos de* $N(t)$ *por*

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$*, y*

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n*-ésima convolución de* F*. Entonces*

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.56 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Nota 34.137 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la* n*-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 34.99 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.95}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.96}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 34.37 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.2.97}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 34.193 *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.100 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \to \mu$ *c.s. cuando* $n \to \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (34.2.98)$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (34.2.99)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 34.38 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \quad (34.2.100)$$

Los tiempos T_n *están relacionados con los conteos de* $N(t)$ *por*

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$*, y*

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F*. Entonces*

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.57 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Nota 34.138 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 34.101 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (34.2.101)$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (34.2.102)$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 34.39 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \quad (34.2.103)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 34.194 *Para el proceso* $\{Z(t): t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.102 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (34.2.104)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (34.2.105)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 34.40 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (34.2.106)$$

Los tiempos T_n *están relacionados con los conteos de* $N(t)$ *por*

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$*, y*

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F*. Entonces*

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.58 *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Nota 34.139 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 34.103 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (34.2.107)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (34.2.108)\end{aligned}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí* $N/t)$ *la cumple.*

Corolario 34.41 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$*, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (34.2.109)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t): t \geq 0\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 34.195 *Para el proceso* $\{Z(t): t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.104 *Supóngase que* $n^{-1}T_n \to \mu$ *c.s. cuando* $n \to \infty$, *donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} & (34.2.110)\\ lim_{t\to\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (34.2.111)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 34.42 *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, *para* $n \geq 1$, *son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \to \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.2.112}$$

34.2.31. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n *están relacionados con los conteos de* $N(t)$ *por*

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, *y*

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. *Entonces*

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 34.59 *Para cada* $t \geq 0$, *la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, *para* $m \geq 1$.

Nota 34.140 *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n, *para* $n \geq 2$, *a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G, *entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 34.105 *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (34.2.113)\\ lim_{t\to\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (34.2.114)\end{aligned}$$

Es decir, T_n *satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N /t) la cumple.*

Corolario 34.43 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media* $\mu \leq \infty$, *entonces*

$$t^{-1} N\left(t\right) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.2.115}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\left\{Z\left(t\right) : t \geq 0\right\}$ *en el mismo espacio de probabilidad que* $N(t)$

Definición 34.196 *Para el proceso* $\left\{Z\left(t\right) : t \geq 0\right\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $\left(T_{n-1}, T_n\right]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} \left|Z\left(t\right) - Z\left(T_{n-1}\right)\right|$$

Teorema 34.106 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) = a, \text{ c.s.} \tag{34.2.116}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.117}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.44 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.2.118}$$

34.2.32. Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [41]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \left\{V\left(\tau\right), \tau < s\right\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V\left(t - s\right) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 34.197 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\left\{V\left(t\right) \in A\right\} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[X\right]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\left\{V\left(t + x\right) \in A | X > x\right\} \left(1 - F\left(x\right)\right) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 34.198 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 34.199 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 34.107 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^*\left(0\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V\left(s\right) ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V\left(s\right) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V\left(s\right) ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

34.2.33. Procesos de Renovación

Definición 34.200 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\left(T_n \leq t\right), \tag{34.2.119}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 34.201 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 34.141 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

34.2.34. Teorema Principal de Renovación

Nota 34.142 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 34.108 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 34.60 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 34.202 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T + t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 34.61 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 34.109 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$.

34.2.35. Función de Renovación

Definición 34.203 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t - s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{34.2.120}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 34.62 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 34.110 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

34.2.36. Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \ t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.63 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.143 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.111 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.121}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.122}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N /t) la cumple.

Corolario 34.45 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.2.123}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.204 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.112 *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{34.2.124}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.125}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.46 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.2.126}$$

34.2.37. Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 34.205 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 34.64 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 34.206 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 34.65 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 34.144 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 34.113 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 34.47 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

34.2.38. Procesos de Renovación

Definición 34.207 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{34.2.127}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 34.208 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 34.145 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

34.2.39. Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\left\{T_1^i, T_2^i, \ldots, T_k^i, \ldots\right\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_i$. Además se sabe que para

$$T^* = \min\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

T^* se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{4} \mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad y \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min\left\{\tilde{r}, \hat{r}\right\},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \overline{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \overline{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\overline{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

34.2.40. Resultados para Procesos de Salida

En [40] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 34.66 *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- *Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.*
- *Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.*
- *Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:*

  Teorema 34.114 *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) Los tiempos de servicio son identicamente cero;

b) $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;

c) $L = 1$ y $G = D$;

d) $L = \infty$ y $G = M$.

En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;

b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;

c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;

d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

Teorema 34.115 En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.

a) $s = \infty$

b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.

c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$

d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

Teorema 34.116 En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [13] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

Teorema 34.117 En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2(1-\delta)^{-1}.
\end{aligned}$$

Teorema 34.118 El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.

Teorema 34.119 Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.

34.2.41. Ya revisado

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \ldots, L_N(t)]$. *Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los* $L_j(\tau_i(m)) = 0$ *para* $i = 1, 2$ *son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.*

Sea M_i *el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea* $C_i^{(m)}$, *para* $m = 1, 2, \ldots, M_i$ *la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio* $\mathbb{E}[C_i]$ *como*

$$\mathbb{E}[C_i] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}[M_i]}$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, *el número de usuarios en la cola* $Q_i(z)$ *en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de* $z^{L_i(t)}$ *sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:*

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i *es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con* $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, *se sigue del lema de Wald que:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ *solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de* $P_i(z)$, *por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1 - \mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1 - P_i(z)} \\
&= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \\
&= \frac{\mu_i(1 - \mu_i)}{f_i(i)} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)}
\end{aligned}$$

Definición 34.209 *Sea L_i^*el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= f_i\left(i\right) &(34.2.128)\\ Var\left[L_i^*\right] &= f_i\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. &(34.2.129)\end{aligned}$$

Definición 34.210 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}S_i\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right]=F_i\left(\theta\left(z\right)\right),\\ F\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\ P\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\ F_i\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right],\theta_i\left(z\right)-zP_i\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1-\mu_i}=\frac{f_i\left(i\right)}{1-\mu_i},\\ Var\left[S_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^3}\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var\left[L_i^*\right] = f_i\left(i,i\right)+f_i\left(i\right)-f_i\left(i\right)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t=\tau_i\left(m+1\right)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $\left[\overline{\tau}\left(m\right),\tau_i\left(m+1\right)\right]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z_i\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si

$$I_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i\left(z\right)=I_i\left[P_i\left(z\right)\right]$$

para $i=1,2$, por tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[I_i\right]\\ Var\left[L_i^*\right] &= \mu_i^2Var\left[I_i\right]+\sigma^2\mathbb{E}\left[I_i\right]\end{aligned}$$

para $i=1,2$, por tanto

$$\mathbb{E}\left[I_i\right] = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i},$$

además

$$Var\left[I_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2}-\frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2}f_i\left(i\right).$$

Si $C_i\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i\left(z\right)=I_i\left[\theta_i\left(z\right)\right],$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}\\
Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[C_i\right],\\
\mathbb{E}\left[I_i\right] &= \left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right]
\end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_i\left(z\right)}{dz} &= \frac{\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)}\\
&- \frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)}\\
&- \frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)\left(P_i^{'}\left(z\right)-1\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)^2}\\
&+ \frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)}\\
&+ \frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)^2\left(P_i\left(z\right)-z\right)}
\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z\rightarrow 1^+$:

$$\begin{aligned}
Q_i^{(1)}\left(z\right) = \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{dQ_i\left(z\right)}{dz} &= \lim_{z\rightarrow 1}\frac{\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} && (34.2.130)\\
&- \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} && (34.2.131)\\
&- \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)\left(P_i^{'}\left(z\right)-1\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)^2} && (34.2.132)\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} && (34.2.133)\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right]\left(1-P_i\left(z\right)\right)^2\left(P_i\left(z\right)-z\right)} && (34.2.134)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)}{\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} &= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(-z+P_i\left(z\right)\right)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{-P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)+\left(1-F_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(-1+P_i^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)} &= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(P_i\left(z\right)-z\right)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{-P_i\left(z\right)F_i^{'}\left(z\right)+(1-z)F_i^{'}\left(z\right)P_i^{'}\left(z\right)+(1-z)P_i\left(z\right)F_i^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_i\left(z\right)\right)\left(-1+P_i^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_i\left(z\right)\right)P_i^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}}=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}\right]}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{\prime}[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

En nuestra notación $V(t)\equiv C_i$ *y* $X_i=C_i^{(m)}$ *para nuestra segunda definición, mientras que para la primera la notación es:* $X(t)\equiv C_i$ *y* $R_i\equiv C_i^{(m)}$.

Definición 34.211 *Sea* L_i^{*} *el número de usuarios en la cola* Q_i *cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_i^{*}\right] &= f_i(i) &(34.2.135)\\
Var\left[L_i^{*}\right] &= f_i(i,i)+\mathbb{E}\left[L_i^{*}\right]-\mathbb{E}\left[L_i^{*}\right]^{2}. &(34.2.136)
\end{aligned}$$

Definición 34.212 *El tiempo de Ciclo* C_i *es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por* $\tau_i(m+1)-\tau_i(m)$*, o equivalentemente* $\overline{\tau}_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$ *bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 34.213 *El tiempo de intervisita* I_i *es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por* $\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$.

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
S_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right]=F_i(\theta(z)),\\
F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\
P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\
F_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right],\theta_i(z)-zP_i
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^{*}\right]}{1-\mu_i}=\frac{f_i(i)}{1-\mu_i},\\
Var\left[S_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^{*}\right]}{(1-\mu_i)^{2}}+\frac{\sigma^{2}\mathbb{E}\left[L_i^{*}\right]}{(1-\mu_i)^{3}}
\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var\left[L_i^*\right] = f_i\left(i,i\right)+f_i\left(i\right)-f_i\left(i\right)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)$. *Dado que el número de usuarios presentes en* Q_i *al tiempo* $t=\tau_i\left(m+1\right)$ *es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo* $\left[\overline{\tau}\left(m\right),\tau_i\left(m+1\right)\right]$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i\left(\tau_i\left(m+1\right)\right)}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z_i\right)\right\}^{\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)}\right]$$

entonces, si

$$I_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)}\right]$$

se tienen que

$$F_i\left(z\right)=I_i\left[P_i\left(z\right)\right]$$

para $i=1,2$, *por tanto*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[I_i\right]\\ Var\left[L_i^*\right] &= \mu_i^2Var\left[I_i\right]+\sigma^2\mathbb{E}\left[I_i\right]\end{aligned}$$

para $i=1,2$, *por tanto*

$$\mathbb{E}\left[I_i\right] = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i},$$

además

$$Var\left[I_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2}-\frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2}f_i\left(i\right).$$

Si $C_i\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)}\right]$ *el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que*

$$C_i\left(z\right)=I_i\left[\theta_i\left(z\right)\right],$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right]=\frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i}=\frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}\\ Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[C_i\right],\\ \mathbb{E}\left[I_i\right] &= \left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right]\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $\left[L_1\left(t\right),L_2\left(t\right),\ldots,L_N\left(t\right)\right]$. *Los puntos cuando la cola* i *es visitada y todos los* $L_j\left(\tau_i\left(m\right)\right)=0$ *para* $i=1,2$ *son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.*

Sea M_i *el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea* $C_i^{(m)}$, *para* $m=1,2,\ldots,M_i$ *la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio* $\mathbb{E}\left[C_i\right]$ *como*

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ *contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que* $\mathbb{E}[M_i] < \infty$*, además, como* $M_i > 0$*, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que*

$$\mathbb{E}[C_i] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Nota 34.146 *En Stidham[41] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ *contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que* $\mathbb{E}[M_i] < \infty$*, además, como* $M_i > 0$*, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que*

$$\mathbb{E}[C_i] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Nota incompleta!!

34.2.42. Procesos de Renovación y Regenerativos

Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ *solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de* $P_i(z)$*, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{1-I_i[P_i(z)]}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que
Sea

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z} \cdot \frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Consideremos una cola de la red de sistemas de visitas cíclicas fija, Q_l.
Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (34.422), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_l es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 34.214 *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 34.215 *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 34.216 *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

En nuestra notación $V(t) \equiv C_i$ y $X_i = C_i^{(m)}$ para nuestra segunda definición, mientras que para la primera la notación es: $X(t) \equiv C_i$ y $R_i \equiv C_i^{(m)}$.

Definición 34.217 *Sea L_i^*el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\mathbb{E}[L_i^*] = f_i(i) \tag{34.2.137}$$

$$Var[L_i^*] = f_i(i,i) + \mathbb{E}[L_i^*] - \mathbb{E}[L_i^*]^2. \tag{34.2.138}$$

Definición 34.218 *El tiempo de Ciclo C_i es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
S_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m) - \tau_i(m)}\right] = F_i(\theta(z)), \\
F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right], \\
P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right], \\
F_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right], \theta_i(z) - zP_i
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{1-\mu_i}, \\
Var[S_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{(1-\mu_i)^2} + \frac{\sigma^2 \mathbb{E}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^3}
\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var[L_i^*] = f_i(i,i) + f_i(i) - f_i(i)^2.$$

por tanto

$$\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},$$

además

$$Var[I_i] = \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).$$

Si $C_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1) - \overline{\tau}_i(m)}\right]$el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i(z) = I_i[\theta_i(z)],$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}\\
Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[C_i\right],\\
\mathbb{E}\left[I_i\right] &= \left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right]
\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $\left[L_1\left(t\right), L_2\left(t\right), \ldots, L_N\left(t\right)\right]$. *Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los* $L_j\left(\tau_i\left(m\right)\right) = 0$ *para* $i = 1, 2$ *son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.*

Sea M_i *el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea* $C_i^{(m)}$, *para* $m = 1, 2, \ldots, M_i$ *la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio* $\mathbb{E}\left[C_i\right]$ *como*

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ *contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que* $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, *además, como* $M_i > 0$, *se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que*

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, *el número de usuarios en la cola* $Q_i\left(z\right)$ *en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de* $z^{L_i(t)}$ *sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:*

$$Q_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

M_i *es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con* $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, *se sigue del lema de Wald que:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i\left(z\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{1-I_i[P_i(z)]}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\ &- \frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\ &- \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2}\\ &+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\ &+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z\rightarrow 1^+$:

$$Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{dQ_i(z)}{dz} = \lim_{z\rightarrow 1}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \tag{34.2.139}$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \tag{34.2.140}$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} \tag{34.2.141}$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \tag{34.2.142}$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} \tag{34.2.143}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\frac{d}{dz}[(1-F_i(z))P_i(z)]}{\frac{d}{dz}[(1-P_i(z))(-z+P_i(z))]}\\ &= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{-P_i(z)F_i^{'}(z)+(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)+(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}} = \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}\right]}\\
=&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} = \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
=&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} = \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
=&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}'[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

Definición 34.219 *Sea L_{i}^{*}el número de usuarios en la cola Q_{i} cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right] &= f_{i}\left(i\right) \qquad (34.2.144)\\
Var\left[L_{i}^{*}\right] &= f_{i}\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]-\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]^{2}. \qquad (34.2.145)
\end{aligned}
$$

Definición 34.220 *El tiempo de Ciclo C_{i} es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_{i}\left(m+1\right)-\tau_{i}\left(m\right)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_{i}\left(m+1\right)-\overline{\tau}_{i}\left(m\right)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 34.221 *El tiempo de intervisita I_{i} es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_{i}\left(m+1\right)-\overline{\tau}_{i}\left(m\right)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
S_{i}\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_{i}\left(m\right)-\tau_{i}\left(m\right)}\right]=F_{i}\left(\theta\left(z\right)\right),\\
F\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_{0}}\right],\\
P\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{X_{n}}\right],\\
F_{i}\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_{i}\left(\tau_{i}\left(m\right)\right)}\right],\theta_{i}\left(z\right)-zP_{i}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_{i}\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]}{1-\mu_{i}}=\frac{f_{i}\left(i\right)}{1-\mu_{i}},\\
Var\left[S_{i}\right] &= \frac{Var\left[L_{i}^{*}\right]}{\left(1-\mu_{i}\right)^{2}}+\frac{\sigma^{2}\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]}{\left(1-\mu_{i}\right)^{3}}
\end{aligned}
$$

donde recordemos que

$$Var\left[L_i^*\right] = f_i\left(i,i\right) + f_i\left(i\right) - f_i\left(i\right)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i\left(m+1\right) - \overline{\tau}\left(m\right)$. *Dado que el número de usuarios presentes en* Q_i *al tiempo* $t = \tau_i\left(m+1\right)$ *es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo* $\left[\overline{\tau}\left(m\right), \tau_i\left(m+1\right)\right]$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i\left(\tau_i\left(m+1\right)\right)}\right] = \mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z_i\right)\right\}^{\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)}\right]$$

entonces, si

$$I_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)}\right]$$

se tienen que

$$F_i\left(z\right) = I_i\left[P_i\left(z\right)\right]$$

para $i = 1, 2$, *por tanto*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= \mu_i \mathbb{E}\left[I_i\right]\\ Var\left[L_i^*\right] &= \mu_i^2 Var\left[I_i\right] + \sigma^2 \mathbb{E}\left[I_i\right]\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, *por tanto*

$$\mathbb{E}\left[I_i\right] = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i},$$

además

$$Var\left[I_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i\left(i\right).$$

Si $C_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)}\right]$ *el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que*

$$C_i\left(z\right) = I_i\left[\theta_i\left(z\right)\right],$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}\\ Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \mu_i \mathbb{E}\left[C_i\right],\\ \mathbb{E}\left[I_i\right] &= \left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right]\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $\left[L_1\left(t\right), L_2\left(t\right), \ldots, L_N\left(t\right)\right]$. *Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los* $L_j\left(\tau_i\left(m\right)\right) = 0$ *para* $i = 1, 2$ *son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.*

Sea M_i *el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea* $C_i^{(m)}$, *para* $m = 1, 2, \ldots, M_i$ *la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio* $\mathbb{E}\left[C_i\right]$ *como*

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ *contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que* $\mathbb{E}[M_i] < \infty$*, además, como* $M_i > 0$*, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que*

$$\mathbb{E}[C_i] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i*, el número de usuarios en la cola* $Q_i(z)$ *en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de* $z^{L_i(t)}$ *sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:*

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

M_i *es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con* $\mathbb{E}[M_i] < \infty$*, se sigue del lema de Wald que:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i*,* $L_i(t)$ *solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de* $P_i(z)$*, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)}\\
&= \frac{1-I_i[P_i(z)]}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\\
&= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

Sea $V_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \frac{I_i(z)-1}{z-P_i(z)}$

$$\frac{\partial V_i(z)}{\partial z} = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left[\frac{I_i{}'(z)(z-P_i(z))}{z-P_i(z)} - \frac{(I_i(z)-1)(1-P_i{}'(z))}{(z-P_i(z))^2}\right]$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$U_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)} \cdot \frac{I_i(z)-1}{1-z}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}V_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\right)\frac{I_i(z)-1}{1-z} + \frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\frac{d}{dz}\left(\frac{I_i(z)-1}{1-z}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{-P_i(z)(z-P_i(z))-(1-P_i(z))\left(1-P_i'(z)\right)}{(z-P_i(z))^2}\cdot\frac{I_i(z)-1}{1-z}\right\}\\
&+ \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\cdot\frac{I_i'(z)(1-z)+(I_i(z)-1)}{(1-z)^2}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_i(z)}{\partial z} &= \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])}{(1-z)^2\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])} + \frac{(1-P_i[z])I_i'[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])} - \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])(1-P'[z])}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])^2}\\
&- \frac{(-1+I_i[z])P_i{}'[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}
\end{aligned}$$

Sea

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)P_i(z)F_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i'(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2}\\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}
\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z\rightarrow 1^+$*:*

$$\begin{aligned}
Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \lim_{z\rightarrow 1}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} && (34.2.146)\\
&- \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)P_i(z)F_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} && (34.2.147)\\
&- \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i'(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} && (34.2.148)\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} && (34.2.149)\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} && (34.2.150)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-F_i(z))P_i(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{-P_i(z)F_i'(z)+(1-F_i(z))P_i'(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i'(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i'(z)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\,P_{i}\,(z)\,F_{i}^{'}\,(z)}{(1-P_{i}\,(z))\,(P_{i}\,(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,P_{i}\,(z)\,F_{i}^{'}\,(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_{i}\,(z))\,(P_{i}\,(z)-z)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-P_{i}\,(z)\,F_{i}^{'}\,(z)+(1-z)F_{i}^{'}\,(z)\,P_{i}^{'}\,(z)+(1-z)P_{i}\,(z)\,F_{i}^{''}\,(z)}{(1-P_{i}\,(z))\left(-1+P_{i}^{'}\,(z)\right)-(-z+P_{i}\,(z))\,P_{i}^{'}\,(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\,(1-F_{i}\,(z))\,P_{i}\,(z)\left(P_{i}^{'}\,(z)-1\right)}{(1-P_{i}\,(z))\,(P_{i}\,(z)-z)^{2}} &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,(1-F_{i}\,(z))\,P_{i}\,(z)\left(P_{i}^{'}\,(z)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_{i}\,(z))\,(P_{i}\,(z)-z)^{2}\right]}\\
= \lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{-(1-F_{i}\,(z))\,P_{i}\,(z)\left(-1+P_{i}^{'}\,(z)\right)-(1-z)P_{i}\,(z)\,F_{i}^{'}\,(z)\left(-1+P_{i}^{'}\,(z)\right)}{2\,(1-P_{i}\,(z))\,(-z+P_{i}\,(z))\left(-1+P_{i}^{'}\,(z)\right)-(-z+P_{i}\,(z))^{2}\,P_{i}^{'}\,(z)}\\
+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{+(1-z)\,(1-F_{i}\,(z))\left(-1+P_{i}^{'}\,(z)\right)P_{i}^{'}\,(z)}{2\,(1-P_{i}\,(z))\,(-z+P_{i}\,(z))\left(-1+P_{i}^{'}\,(z)\right)-(-z+P_{i}\,(z))^{2}\,P_{i}^{'}\,(z)}\\
+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{+(1-z)\,(1-F_{i}\,(z))\,P_{i}\,(z)\,P_{i}^{''}\,(z)}{2\,(1-P_{i}\,(z))\,(-z+P_{i}\,(z))\left(-1+P_{i}^{'}\,(z)\right)-(-z+P_{i}\,(z))^{2}\,P_{i}^{'}\,(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\,(1-F_{i}\,(z))\,P_{i}^{'}\,(z)}{(1-P_{i}\,(z))\,(P_{i}\,(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,(1-F_{i}\,(z))\,P_{i}^{'}\,(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_{i}\,(z))\,(P_{i}\,(z)-z)\right]}\\
= \lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{-(1-F_{i}\,(z))\,P_{i}^{'}\,(z)-(1-z)F_{i}^{'}\,(z)\,P_{i}^{'}\,(z)+(1-z)\,(1-F_{i}\,(z))\,P_{i}^{''}\,(z)}{(1-P_{i}\,(z))\left(-1+P_{i}^{'}\,(z)\right)-(-z+P_{i}\,(z))\,P_{i}^{'}\,(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\,(1-F_{i}\,(z))\,P_{i}\,(z)\,P_{i}^{'}\,(z)}{(1-P_{i}\,(z))^{2}\,(P_{i}\,(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,(1-F_{i}\,(z))\,P_{i}\,(z)\,P_{i}^{'}\,(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_{i}\,(z))^{2}\,(P_{i}\,(z)-z)\right]}\\
= \lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{-(1-F_{i}\,(z))\,P_{i}\,(z)\,P_{i}^{'}\,(z)-(1-z)P_{i}\,(z)\,F_{i}^{'}\,(z)\,P_{i}^{'}[z]}{(1-P_{i}\,(z))^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\,(z)\right)-2\,(1-P_{i}\,(z))\,(-z+P_{i}\,(z))\,P_{i}^{'}\,(z)}\\
+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}&\frac{(1-z)\,(1-F_{i}\,(z))\,P_{i}^{'}\,(z)^{2}+(1-z)\,(1-F_{i}\,(z))\,P_{i}\,(z)\,P_{i}^{''}\,(z)}{(1-P_{i}\,(z))^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\,(z)\right)-2\,(1-P_{i}\,(z))\,(-z+P_{i}\,(z))\,P_{i}^{'}\,(z)}
\end{aligned}
$$

34.2.43. Tiempo de Ciclo Promedio

Consideremos una cola de la red de sistemas de visitas cíclicas fija, Q_l.
Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (34.422), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_l es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i)=0, L_2(T_i)=0, \hat{L}_1(T_i)=0$ y $\hat{L}_2(T_i)=0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 34.222 *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 34.223 *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 34.224 *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m=1,2,\ldots,M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

En nuestra notación $V(t)\equiv C_i$ y $X_i=C_i^{(m)}$ para nuestra segunda definición, mientras que para la primera la notación es: $X(t)\equiv C_i$ y $R_i\equiv C_i^{(m)}$.

34.2.44. Tiempos de Ciclo e Intervisita

Definición 34.225 *Sea L_i^*el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= f_i(i) && (34.2.151)\\
Var\left[L_i^*\right] &= f_i(i,i)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. && (34.2.152)
\end{aligned}
$$

Definición 34.226 *El tiempo de Ciclo C_i es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1)-\tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 34.227 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
S_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right]=F_i(\theta(z)),\\
F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\
P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\
F_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right],\theta_i(z)-zP_i
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1-\mu_i}=\frac{f_i(i)}{1-\mu_i},\\
Var[S_i] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^3}
\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var[L_i^*] = f_i(i,i)+f_i(i)-f_i(i)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t=\tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m),\tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right]=\mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i(z)=I_i[P_i(z)]$$

para $i=1,2$, por tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L_i^*] &= \mu_i\mathbb{E}[I_i]\\
Var[L_i^*] &= \mu_i^2 Var[I_i]+\sigma^2\mathbb{E}[I_i]
\end{aligned}$$

para $i=1,2$, por tanto

$$\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},$$

además

$$Var[I_i] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2}-\frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2}f_i(i).$$

Si $C_i(z)=\mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$ el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i(z)=I_i[\theta_i(z)],$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}\\
Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[C_i\right],\\
\mathbb{E}\left[I_i\right] &= \left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right]
\end{aligned}
$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $\left[L_1\left(t\right), L_2\left(t\right), \ldots, L_N\left(t\right)\right]$*. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los* $L_j\left(\tau_i\left(m\right)\right) = 0$ *para* $i = 1, 2$ *son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.*

Sea M_i *el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea* $C_i^{(m)}$*, para* $m = 1, 2, \ldots, M_i$ *la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio* $\mathbb{E}\left[C_i\right]$ *como*

$$
\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}
$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.
$$

como cada $C_i^{(m)}$ *contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que* $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$*, además, como* $M_i > 0$*, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que*

$$
\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,
$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$
\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.
$$

Sea la función generadora de momentos para L_i*, el número de usuarios en la cola* $Q_i\left(z\right)$ *en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de* $z^{L_i(t)}$ *sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:*

$$
Q_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}
$$

M_i *es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con* $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$*, se sigue del lema de Wald que:*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}
$$

por tanto se tiene que

$$
Q_i\left(z\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}
$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{1-I_i\left[P_i(z)\right]}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

34.2.45. Longitudes de la Cola en cualquier tiempo

Sea

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\ &- \frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\ &- \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2}\\ &+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\ &+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z\rightarrow 1^+$:

$$Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{dQ_i(z)}{dz} = \lim_{z\rightarrow 1}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \tag{34.2.153}$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \tag{34.2.154}$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} \tag{34.2.155}$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \tag{34.2.156}$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} \tag{34.2.157}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1^{+}} \frac{(1-F_i(z))\,P_i(z)}{(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\to 1^{+}} \frac{\frac{d}{dz}\left[(1-F_i(z))\,P_i(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\right]}\\ &= \lim_{z\to 1^{+}} \frac{-P_i(z)\,F_i^{'}(z)+(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))\,P_i^{'}(z)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1^{+}} \frac{(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\to 1^{+}} \frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)\right]}\\ &= \lim_{z\to 1^{+}} \frac{-P_i(z)\,F_i^{'}(z)+(1-z)F_i^{'}(z)\,P_i^{'}(z)+(1-z)P_i(z)\,F_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))\,P_i^{'}(z)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1^{+}} \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)^2} &= \lim_{z\to 1^{+}} \frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)^2\right]}\\ = \lim_{z\to 1^{+}} &\frac{-(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(1-z)P_i(z)\,F_i^{'}(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)}{2\,(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2\,P_i^{'}(z)}\\ + \lim_{z\to 1^{+}} &\frac{+(1-z)\,(1-F_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)P_i^{'}(z)}{2\,(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2\,P_i^{'}(z)}\\ + \lim_{z\to 1^{+}} &\frac{+(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{''}(z)}{2\,(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2\,P_i^{'}(z)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1^{+}} \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\to 1^{+}} \frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)\right]}\\ = \lim_{z\to 1^{+}} &\frac{-(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)-(1-z)F_i^{'}(z)\,P_i^{'}(z)+(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))\,P_i^{'}(z)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1^{+}} \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))^2\,(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\to 1^{+}} \frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))^2\,(P_i(z)-z)\right]}\\ = \lim_{z\to 1^{+}} &\frac{-(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{'}(z)-(1-z)P_i(z)\,F_i^{'}(z)\,P_i'[z]}{(1-P_i(z))^2\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-2\,(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\,P_i^{'}(z)}\\ + \lim_{z\to 1^{+}} &\frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)^2+(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))^2\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-2\,(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\,P_i^{'}(z)}\end{aligned}$$

34.2.46. Por resolver

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_i(z)}{\partial z} &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)\,P_i(z)}{1-P_i(z)}\right\}\\ = &\frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\right)\cdot\frac{(1-z)\,P_i(z)}{1-P_i(z)}+\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{(1-z)\,P_i(z)}{1-P_i(z)}\right)\right\}\\ = &\frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{(1-z)\,P_i(z)}{1-P_i(z)}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\right)+\frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{(1-z)\,P_i(z)}{1-P_i(z)}\right)\\ = &\frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{(1-z)\,P_i(z)}{1-P_i(z)}\cdot\frac{-F_i^{'}(z)\,(P_i(z)-z)-(1-F_i(z))\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{(P_i(z)-z)^2}\\ + &\frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)\,P_i^{'}(z)-P_i(z)}{(1-P_i(z))^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_i^{(1)}(z) &= \frac{(1-F_i(z))\,P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)}-\frac{(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)}\\ &- \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)^2}+\frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)}\\ &+ \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))^2\,(P_i(z)-z)}\end{aligned}$$

Sea $V_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \frac{I_i(z)-1}{z-P_i(z)}$

$$\frac{\partial V_i(z)}{\partial z} = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left[\frac{I_i{}'(z)(z-P_i(z))}{z-P_i(z)} - \frac{(I_i(z)-1)(1-P_i{}'(z))}{(z-P_i(z))^2}\right]$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$U_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)} \cdot \frac{I_i(z)-1}{1-z}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}V_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\right)\frac{I_i(z)-1}{1-z} + \frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\frac{d}{dz}\left(\frac{I_i(z)-1}{1-z}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{-P_i(z)(z-P_i(z)) - (1-P_i(z))\left(1-P_i^{'}(z)\right)}{(z-P_i(z))^2} \cdot \frac{I_i(z)-1}{1-z}\right\}\\
&+ \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)} \cdot \frac{I_i^{'}(z)(1-z) + (I_i(z)-1)}{(1-z)^2}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_i(z)}{\partial z} &= \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])}{(1-z)^2\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])} + \frac{(1-P_i[z])I_i^{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])} - \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])(1-P'[z])}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])^2}\\
&- \frac{(-1+I_i[z])P_i{}'[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}
\end{aligned}$$

34.2.47. Tiempos de Ciclo e Intervisita

Definición 34.228 *Sea* L_i^* *el número de usuarios en la cola* Q_i *cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\mathbb{E}[L_i^*] = f_i(i) \quad (34.2.158)$$
$$Var[L_i^*] = f_i(i,i) + \mathbb{E}[L_i^*] - \mathbb{E}[L_i^*]^2. \quad (34.2.159)$$

Definición 34.229 *El tiempo de Ciclo* C_i *es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por* $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$*, o equivalentemente* $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ *bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 34.230 *El tiempo de intervisita* I_i *es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por* $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
S_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right] = F_i(\theta(z)),\\
F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\
P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\
F_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right], \theta_i(z) - zP_i
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{1-\mu_i},\\
Var[S_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{(1-\mu_i)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^3}
\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var[L_i^*] = f_i(i,i) + f_i(i) - f_i(i)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i(z) = I_i[P_i(z)]$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[L_i^*] &= \mu_i \mathbb{E}[I_i]\\ Var[L_i^*] &= \mu_i^2 Var[I_i] + \sigma^2 \mathbb{E}[I_i]\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},$$

además

$$Var[I_i] = \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).$$

Si $C_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$ el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i(z) = I_i[\theta_i(z)],$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i]\,\mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)}\\ Var[C_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_i] &= \mu_i \mathbb{E}[C_i],\\ \mathbb{E}[I_i] &= (1-\mu_i)\,\mathbb{E}[C_i]\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \ldots, L_N(t)]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j(\tau_i(m)) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}[C_i]$ como

$$\mathbb{E}[C_i] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}[M_i]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}[C_i] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1 - \mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1 - P_i(z)}\\
&= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)}\\
&= \frac{\mu_i(1 - \mu_i)}{f_i(i)} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)}
\end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2}\\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}
\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z\rightarrow 1^{+}$:

$$Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{dQ_i(z)}{dz} = \lim_{z\rightarrow 1}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \tag{34.2.160}$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \tag{34.2.161}$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} \tag{34.2.162}$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \tag{34.2.163}$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} \tag{34.2.164}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}[(1-F_i(z))P_i(z)]}{\frac{d}{dz}[(1-P_i(z))(-z+P_i(z))]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_i(z)F_i^{'}(z)+(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_i(z)F_i^{'}(z)+(1-z)F_i^{'}(z)P_i^{'}(z)+(1-z)P_i(z)F_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2\right]}\\
= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}&\frac{-(1-F_i(z))P_i(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2P_i^{'}(z)}\\
+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}&\frac{+(1-z)(1-F_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)P_i^{'}(z)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2P_i^{'}(z)}\\
+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}&\frac{+(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{''}(z)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)]}\\
= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}&\frac{-(1-F_i(z))P_i^{'}(z)-(1-z)F_i^{'}(z)P_i^{'}(z)+(1-z)(1-F_i(z))P_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)\,(1-F_i\,(z))\,P_i\,(z)\,P_i^{'}\,(z)}{(1-P_i\,(z))^2\,(P_i\,(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,(1-F_i\,(z))\,P_i\,(z)\,P_i^{'}\,(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i\,(z))^2\,(P_i\,(z)-z)\right]}\\
= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}&\frac{-\,(1-F_i\,(z))\,P_i\,(z)\,P_i^{'}\,(z)-(1-z)P_i\,(z)\,F_i^{'}\,(z)\,P_i^{'}[z]}{(1-P_i\,(z))^2\left(-1+P_i^{'}\,(z)\right)-2\,(1-P_i\,(z))\,(-z+P_i\,(z))\,P_i^{'}\,(z)}\\
+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}&\frac{(1-z)\,(1-F_i\,(z))\,P_i^{'}\,(z)^2+(1-z)\,(1-F_i\,(z))\,P_i\,(z)\,P_i^{''}\,(z)}{(1-P_i\,(z))^2\left(-1+P_i^{'}\,(z)\right)-2\,(1-P_i\,(z))\,(-z+P_i\,(z))\,P_i^{'}\,(z)}
\end{aligned}
$$

34.2.48. Longitudes de la Cola en cualquier tiempo

Sea $V_i\,(z)=\frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\frac{I_i(z)-1}{z-P_i(z)}$

$$
\frac{\partial V_i\,(z)}{\partial z} = \frac{1}{\mathbb{E}\,[C_i]}\left[\frac{I_i{'}\,(z)\,(z-P_i\,(z))}{z-P_i\,(z)}-\frac{(I_i\,(z)-1)\,(1-P_i{'}\,(z))}{(z-P_i\,(z))^2}\right]
$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$
U_i\,(z)=\frac{1}{\mathbb{E}\,[C_i]}\cdot\frac{1-P_i\,(z)}{z-P_i\,(z)}\cdot\frac{I_i\,(z)-1}{1-z}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}V_i\,(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}\,[C_i]}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1-P_i\,(z)}{z-P_i\,(z)}\right)\frac{I_i\,(z)-1}{1-z}+\frac{1-P_i\,(z)}{z-P_i\,(z)}\frac{d}{dz}\left(\frac{I_i\,(z)-1}{1-z}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\,[C_i]}\left\{\frac{-P_i\,(z)\,(z-P_i\,(z))-(1-P_i\,(z))\left(1-P_i^{'}\,(z)\right)}{(z-P_i\,(z))^2}\cdot\frac{I_i\,(z)-1}{1-z}\right\}\\
&+ \frac{1}{\mathbb{E}\,[C_i]}\left\{\frac{1-P_i\,(z)}{z-P_i\,(z)}\cdot\frac{I_i^{'}\,(z)\,(1-z)+(I_i\,(z)-1)}{(1-z)^2}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_i\,(z)}{\partial z} &= \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])}{(1-z)^2\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}+\frac{(1-P_i[z])I_i^{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}-\frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])\,(1-P'[z])}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])^2}\\
&- \frac{(-1+I_i[z])P_i{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}
\end{aligned}
$$

34.2.49. Material por agregar

Teorema 34.120 *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1\leftrightarrow Q_3$ y $Q_2\leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t, $A_j\,(t)=\{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\}$ para algún tiempo $t\geq 0$ y Q_j la cola j-ésima en la RSVC, para $j=1,2,3,4$. Existe un intervalo $I\neq\emptyset$ tal que para $T^*\in I$, tal que $\mathbb{P}\left\{A_1\,(T^*)\,,A_2\,(Tt^*)\,,A_3\,(T^*)\,,A_4\,(T^*)\,|T^*\in I\right\}>0$.*

Demostración 34.1 *Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.*

Sea $n\geq 1$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j\,(\overline{\tau}_1\,(n))=0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1\,(n)>0$, entonces tenemos que $\tau_2\,(n)=\overline{\tau}_1\,(n)+r_1\,(n)$.

Definamos el intervalo $I_1\equiv[\overline{\tau}_1\,(n)\,,\tau_2\,(n)]$ de longitud $\xi_1=r_1\,(n)$.
Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1=\mu_1+\hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1\,(t)$ está dada por

$$
\mathbb{P}\left\{A_1\,(t)\,|t\in I_1\,(n)\right\}=e^{-\tilde{\mu}_1\xi_1(n)}. \tag{34.2.165}
$$

Por otra parte, para la cola Q_2 el tiempo $\overline{\tau}_2\,(n-1)$ es tal que $L_2\,(\overline{\tau}_2\,(n-1))=0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n.

Entonces tenemos un sgundo intervalo $I_2 \equiv \left[\overline{\tau}_2\left(n-1\right), \tau_2\left(n\right)\right]$. *Por lo tanto la probabilidad del evento* $A_2\left(t\right)$ *tiene probabilidad dada por*

$$\mathbb{P}\left\{A_2\left(t\right)|t \in I_2\left(n\right)\right\} = e^{-\tilde{\mu}_2\xi_2(n)}, \quad (34.2.166)$$

$$\xi_2\left(n\right) = \tau_2\left(n\right) - \overline{\tau}_2\left(n-1\right) \quad (34.2.167)$$

Ahora, dado que $I_1\left(n\right) \subset I_2\left(n\right)$, *se tiene que*

$$\begin{array}{rcl} \xi_1\left(n\right) \leq \xi_2\left(n\right) & \Leftrightarrow & -\xi_1\left(n\right) \geq -\xi_2\left(n\right) \\ -\tilde{\mu}_2\xi_1\left(n\right) \geq -\tilde{\mu}_2\xi_2\left(n\right) & \Leftrightarrow & e^{-\tilde{\mu}_2\xi_1(n)} \geq e^{-\tilde{\mu}_2\xi_2(n)} \\ \mathbb{P}\left\{A_2\left(t\right)|t \in I_1\left(n\right)\right\} & \geq & \mathbb{P}\left\{A_2\left(t\right)|t \in I_2\left(n\right)\right\}. \end{array}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\left\{A_1\left(t\right), A_2\left(t\right)|t \in I_1\left(n\right)\right\} & = & \mathbb{P}\left\{A_1\left(t\right)|t \in I_1\left(n\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_2\left(t\right)|t \in I_1\left(n\right)\right\} \\ & \geq & \mathbb{P}\left\{A_1\left(t\right)|t \in I_1\left(n\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_2\left(t\right)|t \in I_2\left(n\right)\right\} \\ & = & e^{-\tilde{\mu}_1\xi_1(n)}e^{-\tilde{\mu}_2\xi_2(n)} = e^{-\left[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)\right]}. \end{array}$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_1\left(t\right), A_2\left(t\right)|t \in I_1\left(n\right)\right\} = e^{-\left[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)\right]} > 0. \quad (34.2.168)$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC para algún $m \geq 1$ *se tiene que* $\tau_3\left(m\right) < \tau_2\left(n\right) < \tau_4\left(m\right)$ *por lo tanto se cumple cualquiera de los siguientes cuatro casos*

a) $\tau_3\left(m\right) < \tau_2\left(n\right) < \overline{\tau}_3\left(m\right)$

b) $\overline{\tau}_3\left(m\right) < \tau_2\left(n\right) < \tau_4\left(m\right)$

c) $\tau_4\left(m\right) < \tau_2\left(n\right) < \overline{\tau}_4\left(m\right)$

d) $\overline{\tau}_4\left(m\right) < \tau_2\left(n\right) < \tau_3\left(m+1\right)$

Sea el intervalo $I_3\left(m\right) \equiv \left[\tau_3\left(m\right), \overline{\tau}_3\left(m\right)\right]$ *tal que* $\tau_2\left(n\right) \in I_3\left(m\right)$, *con longitud de intervalo* $\xi_3 \equiv \overline{\tau}_3\left(m\right) - \tau_3\left(m\right)$, *entonces se tiene que para* Q_3

$$\mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right)|t \in I_3\left(m\right)\right\} = e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(m)}. \quad (34.2.169)$$

mientras que para Q_4 *consideremos el intervalo* $I_4\left(m\right) \equiv \left[\tau_4\left(m-1\right), \overline{\tau}_3\left(m\right)\right]$, *entonces por construcción* $I_3\left(m\right) \subset I_4\left(m\right)$, *por lo tanto*

$$\begin{array}{rcl} \xi_3\left(m\right) \leq \xi_4\left(m\right) & \Leftrightarrow & -\xi_3\left(m\right) \geq -\xi_4\left(m\right) \\ -\tilde{\mu}_4\xi_3\left(m\right) \geq -\tilde{\mu}_4\xi_4\left(m\right) & \Leftrightarrow & e^{-\tilde{\mu}_4\xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(n)} \\ \mathbb{P}\left\{A_4\left(t\right)|t \in I_3\left(m\right)\right\} & \geq & \mathbb{P}\left\{A_4\left(t\right)|t \in I_4\left(m\right)\right\}. \end{array}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right), A_4\left(t\right)|t \in I_3\left(m\right)\right\} & = & \mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right)|t \in I_3\left(m\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4\left(t\right)|t \in I_3\left(m\right)\right\} \\ & \geq & \mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right)|t \in I_3\left(m\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4\left(t\right)|t \in I_4\left(m\right)\right\} \\ & = & e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(m)}e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(m)} = e^{-\left(\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m)\right)}. \end{array}$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right), A_4\left(t\right)|t \in I_3\left(m\right)\right\} \geq e^{-\left(\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m)\right)} > 0. \quad (34.2.170)$$

Sea el intervalo $I_3\left(m\right) \equiv \left[\overline{\tau}_3\left(m\right), \tau_4\left(m\right)\right]$ *con longitud* $\xi_3 \equiv \tau_4\left(m\right) - \overline{\tau}_3\left(m\right)$, *entonces se tiene que para* Q_3

$$\mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right)|t \in I_3\left(m\right)\right\} = e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(m)}. \quad (34.2.171)$$

mientras que para Q_4 *consideremos el intervalo* $I_4\left(m\right) \equiv \left[\overline{\tau}_4\left(m-1\right), \tau_4\left(m\right)\right]$, *entonces por construcción* $I_3\left(m\right) \subset I_4\left(m\right)$, *y al igual que en el caso anterior se tiene que*

$$\begin{aligned}\xi_3(m) \leq \xi_4(m) &\Leftrightarrow -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m)\\ -\tilde{\mu}_4\xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4\xi_4(m) &\Leftrightarrow e^{-\tilde{\mu}_4\xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(n)}\\ \mathbb{P}\left\{A_4(t)|t\in I_3(m)\right\} &\geq \mathbb{P}\left\{A_4(t)|t\in I_4(m)\right\}.\end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t)|t\in I_3(m)\right\} &= \mathbb{P}\left\{A_3(t)|t\in I_3(m)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4(t)|t\in I_3(m)\right\}\\ &\geq \mathbb{P}\left\{A_3(t)|t\in I_3(m)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4(t)|t\in I_4(m)\right\}\\ &= e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(m)}e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(m)} = e^{-(\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m))}.\end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t)|t\in I_4(m)\right\} \geq e^{-(\tilde{\mu}_3+\tilde{\mu}_4)\xi_3(m)} > 0. \tag{34.2.172}$$

Para el intervalo $I_3(m) = [\tau_4(m), \overline{\tau}_4(m)]$, se tiene que este caso es análogo al caso (a).
Para el intevalo $I_3(m) \equiv [\overline{\tau}_4(m), \tau_4(m+1)]$, se tiene que es análogo al caso (b).
Por construcción se tiene que $I(n,m) \equiv I_1(n)\cap I_3(m) \neq \emptyset$,entonces en particular se tienen las contenciones $I(n,m) \subseteq I_1(n)$ y $I(n,m) \subseteq I_3(m)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m} \equiv \ell(I(n,m))$ tenemos que

$$\begin{aligned}\xi_{n,m} \leq \xi_1(n) \text{ y } \xi_{n,m} \leq \xi_3(m) \text{ entonces}\\ -\xi_{n,m} \geq -\xi_1(n) \text{ y } -\xi_{n,m} \leq -\xi_3(m)\end{aligned}$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{aligned}-\tilde{\mu}_1\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_1\xi_1(n), &\quad -\tilde{\mu}_2\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_2\xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2\xi_2(n),\\ -\tilde{\mu}_3\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_3\xi_3(m), &\quad -\tilde{\mu}_4\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_4\xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4\xi_4(m).\end{aligned}$$

Sea $T^*\in I(n,m)$, entonces dado que en particular $T^*\in I_1(n)$, se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2, en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4, es decir, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$, $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I(n,m)$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4, por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left\{A_1(T^*), A_2(T^*), A_3(T^*), A_4(T^*)|T^*\in I(n,m)\right\}\\ &= \prod_{j=1}^{4}\mathbb{P}\left\{A_j(T^*)|T^*\in I(n,m)\right\}\\ &\geq \mathbb{P}\left\{A_1(T^*)|T^*\in I_1(n)\right\}\mathbb{P}\left\{A_2(T^*)|T^*\in I_2(n)\right\}\\ &\mathbb{P}\left\{A_3(T^*)|T^*\in I_3(m)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4(T^*)|T^*\in I_4(m)\right\}\\ &= e^{-\mu_1\xi_1(n)}e^{-\mu_2\xi_2(n)}e^{-\mu_3\xi_3(m)}e^{-\mu_4\xi_4(m)}\\ &= e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)+\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m)]} > 0.\end{aligned} \tag{34.2.173}$$

Ahora solo resta demostrar que para $n \geq 1$, existe $m \geq 1$ tal que se cumplen cualquiera de los cuatro casos arriba mencionados:

a) $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \overline{\tau}_3(m)$

b) $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$

c) $\tau_4(m) < \tau_2(n) < \overline{\tau}_4(m)$

d) $\overline{\tau}_4(m) < \tau_2(n) < \tau_3(m+1)$

Consideremos nuevamente el primer caso. Supongamos que no existe $m \geq 1$, tal que $I_1(n)\cap I_3(m) \neq \emptyset$, es decir, para toda $m \geq 1$, $I_1(n)\cap I_3(m) = \emptyset$, entonces se tiene que ocurren cualquiera de los dos casos

a) $\tau_2(n) \leq \tau_3(m)$*: Recordemos que $\tau_2(m) = \overline{\tau}_1 + r_1(m)$ donde cada una de las variables aleatorias son tales que $\mathbb{E}[\overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n)] < \infty$, $\mathbb{E}[R_1] < \infty$ y $\mathbb{E}[\tau_3(m)] < \infty$, lo cual contradice el hecho de que no exista un ciclo $m \geq 1$ que satisfaga la condición deseada.*

b) $\tau_2(n) \geq \overline{\tau}_3(m)$: *por un argumento similar al anterior se tiene que no es posible que no exista un ciclo* $m \geq 1$ *tal que satisaface la condición deseada.*

Para el resto de los casos la demostración es análoga. Por lo tanto, se tiene que efectivamente existe $m \geq 1$ *tal que* $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$.

En Sigman, Thorison y Wolff [40] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 34.67 *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k (X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- *Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.*
- *Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.*
- *Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:*

  Teorema 34.121 *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso **I** es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*

  b) $L = 0$, *para cualquier proceso de servicio S;*

  c) $L = 1$ *y* $G = D$;

  d) $L = \infty$ *y* $G = M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ *son*

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;

  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;

  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;

  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- *Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.*
- *King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.*
- *Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.*
- *El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)*

  Teorema 34.122 *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*

  c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para* $L < \infty$

  d) $G = M$.

- *El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)*

  Teorema 34.123 *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Definición 34.231 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X*.*

Nota 34.147 *La existencia de un primer tiempo de regeneración,* R_1*, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos* $R_1, R_2 \ldots$*, que satisfacen la propiedad deseada [40].*

Nota 34.148 *Para la cola* $GI/GI/1$ *los usuarios arriban con tiempos* t_n *y son atendidos con tiempos de servicio* S_n*, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)*$T_n = t_n - t_{n-1}$*, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que* $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$*.*

Definición 34.232 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 34.149 *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si* $X(t)$ *es regenerativo y se define el proceso* $Y(t)$ *por* $Y(t) = f(X(t))$ *para alguna función Borel medible* $f(\cdot)$*. Además* Y *es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que* X*.*
En general, los tiempos de renovación, Z_k *de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de* $X(t)$*.*

Nota 34.150 *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 34.151 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 34.152
a) Si el proceso regenerativo X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*
b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ *es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{X_1, X_2, \ldots\}$*, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel* A*,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$*, donde* $R(t) = \text{máx}\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ *=número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en* $[0, t]$*. El intervalo* $[0, X_1)$ *es llamado* primer ciclo de regeneración *de* $\{V(t), t \geq 0\}$*,* $[X_1, X_1 + X_2)$ *el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ *y sea* F *la función de distrbución de* X

Definición 34.233 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 34.234 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 34.235 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 34.124 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 34.48 *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\,ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 34.236 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \qquad (34.2.174)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 34.237 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 34.153 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 34.154 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 34.125 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 34.68 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 34.238 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)\,|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 34.69 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 34.126 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.70 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.155 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.127 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.175}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.176}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.49 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.2.177}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.239 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.128 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{34.2.178}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.179}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.50 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (34.2.180)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &=& 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.71 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.156 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.129 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \qquad (34.2.181)$$

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \qquad (34.2.182)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.51 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (34.2.183)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.240 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.130 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \qquad (34.2.184)$$

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \qquad (34.2.185)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.52 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (34.2.186)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.72 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.157 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.131 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.187}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.188}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.53 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.2.189}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.241 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.132 *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{34.2.190}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.191}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.54 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.2.192}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.73 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.158 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.133 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \; c.s. \tag{34.2.193}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \; c.s. \tag{34.2.194}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.55 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \; c.s. \text{ cuando } t \to \infty. \tag{34.2.195}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.242 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.134 *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \; c.s. \tag{34.2.196}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \; c.s. \tag{34.2.197}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.56 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \; c.s. \text{ cuando } t \to \infty. \tag{34.2.198}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.74 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.159 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.135 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.199}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.200}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.57 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.2.201}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.243 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.136 *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{34.2.202}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.203}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.58 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.2.204}$$

Definición 34.244 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{34.2.205}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 34.75 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 34.137 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 34.245 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = 1\!\!1(t \geq 0)$.

Proposición 34.76 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 34.246 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 34.77 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 34.160 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 34.138 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 34.59 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 34.247 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1\!\!1(T_n \leq t), \tag{34.2.206}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 34.248 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 34.161 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 34.249 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{34.2.207}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 34.250 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 34.162 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.78 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 34.3 (Proceso Poisson) *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 34.163 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.139 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.208}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.209}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.60 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.2.210}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.251 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.140 *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{34.2.211}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.212}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.61 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.2.213}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 34.252 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 34.79 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 34.253 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 34.80 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 34.164 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 34.141 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 34.62 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t)+1],\ t \geq 0,$$

Definición 34.254 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{34.2.214}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 34.81 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 34.142 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 34.255 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 34.82 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 34.256 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 34.83 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 34.165 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 34.143 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 34.63 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t)+1],\ t \geq 0,$$

Definición 34.257 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{34.2.215}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 34.84 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 34.144 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Nota 34.166 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 34.145 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 34.85 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ \textit{donde}\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 34.258 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)],\ \textit{para}\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 34.86 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t),\ \textit{donde}\ h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 34.146 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 34.167 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde b es DRI.*

Teorema 34.147 (Teorema Principal de Renovación) *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 34.87 *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 34.259 *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 34.88 *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 34.148 (Regeneración Cruda) *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$*.*

Definición 34.260 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 34.168 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 34.169 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 34.170 *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ*.*

Definición 34.261 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 34.171 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 34.149 (Procesos Regenerativos) *Suponga que el proceso*

Definición 34.262 (Renewal Process Trinity) *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t*.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t*, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t*.*

- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t.

Nota 34.172 *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n, *y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$. *Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{34.2.216}$$

Ejemplo 34.4 (Tiempos de recurrencia Poisson) *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ, *entonces de la expresión (34.8.10) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 34.173 *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 34.263 *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 34.174 *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ *en* $\mathbb{R}_+$, *con puntos* $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 34.89 *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 34.150 *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación* N *es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante* $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 34.175 *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 34.64 *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 34.176 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \to S$.

Nota 34.177 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 34.264 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2, *independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1. *Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, *se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X.

Definición 34.265 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 34.178 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 34.266 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 34.179 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 34.180 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 34.267 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 34.181 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 34.268 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 34.182 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 34.269 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 34.270 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 34.271 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 34.151 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 34.272 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 34.273 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 34.274 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 34.152 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}(0)\right]<\infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\, ds\right]<\infty$,entonces

$$\frac{\int_{0}^{t} V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Para $\{X(t): t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_{+}$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_{n}=T_{n}-T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Sean $T_{1}, T_{2}, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_{j} es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_{1}(T_{i})=0, L_{2}(T_{i})=0, \hat{L}_{1}(T_{i})=0$ y $\hat{L}_{2}(T_{i})=0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Sea la función generadora de momentos para L_{i}, el número de usuarios en la cola $Q_{i}(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_{i}(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_{i}(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_{i}(t)}\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_{i}} \sum_{t=\tau_{i}(m)}^{\tau_{i}(m+1)-1} z^{L_{i}(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_{i}} \tau_{i}(m+1)-\tau_{i}(m)\right]}$$

M_{i} es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_{i}]<\infty$[1], se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_{i}} \sum_{t=\tau_{i}(m)}^{\tau_{i}(m+1)-1} z^{L_{i}(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_{i}]\, \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_{i}(m)}^{\tau_{i}(m+1)-1} z^{L_{i}(t)}\right] \\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_{i}} \tau_{i}(m+1)-\tau_{i}(m)\right] &= \mathbb{E}[M_{i}]\, \mathbb{E}\left[\tau_{i}(m+1)-\tau_{i}(m)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_{i}(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_{i}(m)}^{\tau_{i}(m+1)-1} z^{L_{i}(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_{i}(m+1)-\tau_{i}(m)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

*Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (**??**): $n \rightarrow t-\tau_{i}(m)$, $T \rightarrow \overline{\tau}_{i}(m)-\tau_{i}(m)$, $L_{n} \rightarrow L_{i}(t)$ y $F(z)=\mathbb{E}\left[z^{L_{0}}\right] \rightarrow F_{i}(z)=\mathbb{E}\left[z^{L_{i} \tau_{i}(m)}\right]$, se puede ver que*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_{n}}\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_{i}(m)}^{\overline{\tau}_{i}(m)-1} z^{L_{i}(t)}\right]=z \frac{F_{i}(z)-1}{z-P_{i}(z)} \tag{34.2.217}$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_{i}(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_{i}(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_{i}(m)}^{\tau_{i}(m+1)-1} z^{L_{i}(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_{i}(m)}^{\tau_{i}(m+1)-1}\left\{P_{i}(z)\right\}^{t-\overline{\tau}_{i}(m)}\right]=\frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_{i}(z)\right\}^{\tau_{i}(m+1)-\overline{\tau}_{i}(m)}\right]}{1-P_{i}(z)} \\
&= \frac{1-I_{i}\left[P_{i}(z)\right]}{1-P_{i}(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_{i}(m)}^{\tau_{i}(m+1)-1} z^{L_{i}(t)}\right] = \frac{1-F_{i}(z)}{1-P_{i}(z)}$$

[1]En Stidham[41] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_{i}} C_{i}^{(m)}\right]<\infty$, como cada $C_{i}^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_{i}]<\infty$, además, como $M_{i}>0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_{i}]<\infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N} \mu_{k}<1$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right]+\mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}+\frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}\right\}
\end{aligned}$$

es decir

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \tag{34.2.218}$$

Teorema 34.153 *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t, $A_j(t) = \{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\}$ para algún tiempo $t \geq 0$ y Q_j la cola j-ésima en la RSVC, para $j = 1,2,3,4$. Existe un intervalo $I \neq \emptyset$ tal que para $T^* \in I$, tal que $\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(Tt^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I\} > 0$.*

Demostración 34.2 *Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.*

Sea $n > 0$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1(n) > 0$, entonces tenemos que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1(n)$.

Definamos el intervalo $I_1 \equiv [\overline{\tau}_1(n), \tau_2(n)]$ de longitud $\xi_1 = r_1(n)$. Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$\mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_1\xi_1(n)}. \tag{34.2.219}$$

Por otra parte, para la cola Q_2, el tiempo $\overline{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\overline{\tau}_2(n-1)) = 0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n. Entonces tenemos un sgundo intervalo $I_2 \equiv [\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_2\xi_2(n)}, \tag{34.2.220}$$

donde $\xi_2(n) = \tau_2(n) - \overline{\tau}_2(n-1)$.

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} &= \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\}\,\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\} \\
&\geq \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\}\,\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} \\
&= e^{-\tilde{\mu}_1\xi_1(n)}e^{-\tilde{\mu}_2\xi_2(n)} = e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)]}.
\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)]} > 0. \tag{34.2.221}$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC, se afirma que existe $m > 0$ tal que $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$.

Para Q_3 sea $I_3 = [\overline{\tau}_3(m), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_3(m) = r_3(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(n)}. \tag{34.2.222}$$

Análogamente que como se hizo para Q_2, tenemos que para Q_4 se tiene el intervalo $I_4 = [\overline{\tau}_4(m-1), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_4(m) = \tau_4(m) - \overline{\tau}_4(m-1)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} = e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(n)}. \tag{34.2.223}$$

Al igual que para el primer sistema, dado que $I_3(m) \subset I_4(m)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\xi_3(m) \leq \xi_4(m) &\Leftrightarrow -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\
-\tilde{\mu}_4\xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4\xi_4(m) &\Leftrightarrow e^{-\tilde{\mu}_4\xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(m)} \\
\mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} &\geq \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\}
\end{aligned}$$

Entonces, dado que los eventos A_3 y A_4 son independientes, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right),A_4\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\} &= \mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\}\\ &\geq \mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right)|t\in I_3\left(n\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4\left(t\right)|t\in I_4\left(n\right)\right\}\\ &= e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(m)}e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(m)}=e^{-[\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m)]}.\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right),A_4\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\}=e^{-[\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m)]}>0. \tag{34.2.224}$$

Por construcción se tiene que $I\left(n,m\right)\equiv I_1\left(n\right)\cap I_3\left(m\right)\neq\emptyset$,entonces en particular se tienen las contenciones $I\left(n,m\right)\subseteq I_1\left(n\right)$ y $I\left(n,m\right)\subseteq I_3\left(m\right)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m}\equiv\ell\left(I\left(n,m\right)\right)$ tenemos que

$$\xi_{n,m}\leq\xi_1\left(n\right)\text{ y }\xi_{n,m}\leq\xi_3\left(m\right)\text{ entonces }-\xi_{n,m}\geq-\xi_1\left(n\right)\text{ y }-\xi_{n,m}\leq-\xi_3\left(m\right)$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{array}{ll}-\tilde{\mu}_1\xi_{n,m}\geq-\tilde{\mu}_1\xi_1\left(n\right), & -\tilde{\mu}_2\xi_{n,m}\geq-\tilde{\mu}_2\xi_1\left(n\right)\geq-\tilde{\mu}_2\xi_2\left(n\right),\\ -\tilde{\mu}_3\xi_{n,m}\geq-\tilde{\mu}_3\xi_3\left(m\right), & -\tilde{\mu}_4\xi_{n,m}\geq-\tilde{\mu}_4\xi_3\left(m\right)\geq-\tilde{\mu}_4\xi_4\left(m\right).\end{array}$$

Sea $T^*\in I_{n,m}$, entonces dado que en particular $T^*\in I_1\left(n\right)$ se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2, en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4, es decir, $\tilde{\mu}_1=\mu_1$, $\tilde{\mu}_2=\mu_2$, $\tilde{\mu}_3=\mu_3$, $\tilde{\mu}_4=\mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I_{n,m}$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4, por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left\{A_1\left(T^*\right),A_2\left(T^*\right),A_3\left(T^*\right),A_4\left(T^*\right)|T^*\in I_{n,m}\right\}=\prod_{j=1}^4\mathbb{P}\left\{A_j\left(T^*\right)|T^*\in I_{n,m}\right\}\\ &\geq\mathbb{P}\left\{A_1\left(T^*\right)|T^*\in I_1\left(n\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_2\left(T^*\right)|T^*\in I_2\left(n\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_3\left(T^*\right)|T^*\in I_3\left(m\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4\left(T^*\right)|T^*\in I_4\left(m\right)\right\}\\ &=e^{-\mu_1\xi_1(n)}e^{-\mu_2\xi_2(n)}e^{-\mu_3\xi_3(m)}e^{-\mu_4\xi_4(m)}=e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)+\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m)]}>0.\end{aligned} \tag{34.2.225}$$

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [13] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- *Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.*
- *Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.*
- $\mathbb{E}\left(D_n\right)=\mathbb{E}\left(T_n\right)$.
- *Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:*

Teorema 34.154 *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu\left(\mu+\theta\right)^{-1}\left[\delta\theta-\mu\left(1-\delta\right)\alpha\left(\theta\right)\right]\left[\theta-\mu\left(1-\delta\right)^{-1}\right]\\ \alpha\left(\theta\right) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right]\\ var\left(D_n\right) &= var\left(T_0\right)-\left(\tau^{-1}-\delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}\left(S_0\right)\right)^2\left(1-\delta\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Teorema 34.155 *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 34.156 *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

En Sigman, Thorison y Wolff [40] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1\leq\tau_2\leq\cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j=\tau_j-\tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$, y proceso estocástico $X=\left\{X\left(t\right):t\geq0\right\}$ con espacio de estados $\left(S,\mathcal{R}\right)$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 34.90 *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1}X=_D X$, entonces $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R=\left\{R_k:k\geq1\right\}$, tal que para $k\geq1$,*

$$\theta_k\left(X,R\right)=_D\left(X,R\right).$$

Además, para $k\geq1$, θ_kR es condicionalmente independiente de $\left(X,R_1,\dots,R_k\right)$, dado $\theta_{\tau k}X$.

- *Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.*
- *Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.*
- *Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:*

  Teorema 34.157 *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso **I** es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*

  b) *$L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;*

  c) *$L = 1$ y $G = D$;*

  d) *$L = \infty$ y $G = M$.*

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\left\{T_{n+1} - T_n \leq t\right\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;

  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;

  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;

  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- *Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.*
- *King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.*
- *Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.*
- *El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)*

  Teorema 34.158 *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*

  c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$*

  d) $G = M$.

- *El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)*

  Teorema 34.159 *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [13] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- *Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.*
- *Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.*
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- *Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:*

  Teorema 34.160 *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2(1-\delta)^{-1}.
\end{aligned}$$

  Teorema 34.161 *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 34.162 *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

Sean Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 en una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC). Supongamos que cada una de las colas es del tipo $M/M/1$ con tasa de arribo μ_i y que la transferencia de usuarios entre los dos sistemas ocurre entre $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$ con respectiva tasa de arribo igual a la tasa de salida $\hat{\mu}_i = \mu_i$, esto se sabe por lo desarrollado en la sección anterior.

Consideremos, sin pérdida de generalidad como base del análisis, la cola Q_1 además supongamos al servidor lo comenzamos a observar una vez que termina de atender a la misma para desplazarse y llegar a Q_2, es decir al tiempo τ_2.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, ciclo del servidor en que regresa a Q_1 para dar servicio y atender conforme a la política exhaustiva, entonces se tiene que $\overline{\tau}_1(n)$ es el tiempo del servidor en el sistema 1 en que termina de dar servicio a todos los usuarios presentes en la cola, por lo tanto se cumple que $L_1(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, entonces el servidor para llegar a Q_2 incurre en un tiempo de traslado r_1 y por tanto se cumple que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1$. Dado que los tiempos entre arribos son exponenciales se cumple que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n) + r_1]\} = e^{-\tilde{\mu}_1 r_1},\\ \mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n) + r_1]\} = e^{-\tilde{\mu}_2 r_1}.\end{aligned}$$

El evento que nos interesa consiste en que no haya arribos desde que el servidor abandonó Q_2 y regresa nuevamente para dar servicio, es decir en el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Entonces, si hacemos

$$\begin{aligned}\varphi_1(n) &\equiv \overline{\tau}_1(n) + r_1 = \overline{\tau}_2(n-1) + r_1 + r_2 + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n)\\ &= \overline{\tau}_2(n-1) + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r,,\end{aligned}$$

y longitud del intervalo

$$\begin{aligned}\xi &\equiv \overline{\tau}_1(n) + r_1 - \overline{\tau}_2(n-1) = \overline{\tau}_2(n-1) + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r - \overline{\tau}_2(n-1)\\ &= \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r.\end{aligned}$$

Entonces, determinemos la probabilidad del evento no arribos a Q_2 en $[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]$:

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi}. \tag{34.2.226}$$

De manera análoga, tenemos que la probabilidad de no arribos a Q_1 en $[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]$ esta dada por

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi}, \tag{34.2.227}$$

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi}. \tag{34.2.228}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ y } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\}\\ &= \mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\}\\ &\times \mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi} = e^{-\tilde{\mu} \xi}.\end{aligned} \tag{34.2.229}$$

Para el segundo sistema, consideremos nuevamente $\overline{\tau}_1(n) + r_1$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $m > 0$ tal que $\overline{\tau}_3(m) < \overline{\tau}_1 + r_1 < \tau_4(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_3(m), \overline{\tau}_1(n) + r_1]\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3}, \tag{34.2.230}$$

donde

$$\xi_3 = \overline{\tau}_1(n) + r_1 - \overline{\tau}_3(m) = \overline{\tau}_1(n) - \overline{\tau}_3(m) + r_1, \tag{34.2.231}$$

mientras que para Q_4 al igual que con Q_2 escribiremos $\tau_4(m)$ en términos de $\overline{\tau}_4(m-1)$:
$\varphi_2 \equiv \tau_4(m) = \overline{\tau}_4(m-1) + r_4 + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) + r_3 = \overline{\tau}_4(m-1) + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) + \hat{r}$, además,
$\xi_2 \equiv \varphi_2(m) - \overline{\tau}_1 - r_1 = \overline{\tau}_4(m-1) + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) - \overline{\tau}_1(n) + \hat{r} - r_1$.
Entonces

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_4 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]\} = e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_2}, \tag{34.2.232}$$

mientras que para Q_3 se tiene que

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1\left(n\right)+r_1,\varphi_2\left(m\right)\right]\right\}=e^{-\tilde{\mu}_3\xi_2} \tag{34.2.233}$$

Por tanto

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3 \wedge Q_4 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1\left(n\right)+r_1,\varphi_2\left(m\right)\right]\right\}=e^{-\hat{\mu}\xi_2} \tag{34.2.234}$$

donde $\hat{\mu}=\tilde{\mu}_3+\tilde{\mu}_4$.
Ahora, definamos los intervalos $\mathcal{I}_1=\left[\overline{\tau}_1\left(n\right)+r_1,\varphi_1\left(n\right)\right]$ *y* $\mathcal{I}_2=\left[\overline{\tau}_1\left(n\right)+r_1,\varphi_2\left(m\right)\right]$*, entonces, sea* $\mathcal{I}=\mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2$ *el intervalo donde cada una de las colas se encuentran vacías, es decir, si tomamos* $T^*\in\mathcal{I}$*, entonces* $L_1\left(T^*\right)=L_2\left(T^*\right)=L_3\left(T^*\right)=L_4\left(T^*\right)=0$.
Ahora, dado que por construcción $\mathcal{I}\neq\emptyset$ *y que para* $T^*\in\mathcal{I}$ *en ninguna de las colas han llegado usuarios, se tiene que no hay transferencia entre las colas, por lo tanto, el sistema 1 y el sistema 2 son condicionalmente independientes en* $\mathcal{I}$*, es decir*

$$\mathbb{P}\left\{L_1\left(T^*\right),L_2\left(T^*\right),L_3\left(T^*\right),L_4\left(T^*\right)|T^*\in\mathcal{I}\right\}=\prod_{j=1}^{4}\mathbb{P}\left\{L_j\left(T^*\right)\right\}, \tag{34.2.235}$$

para $T^*\in\mathcal{I}$.

Definición 34.275 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X=\left\{X\left(t\right):t\geq0\right\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1>0$ *tal que*

i) $\left\{X\left(t+R_1\right):t\geq0\right\}$ *es independiente de* $\left\{\left\{X\left(t\right):t<R_1\right\},\right\}$
ii) $\left\{X\left(t+R_1\right):t\geq0\right\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\left\{X\left(t\right):t>0\right\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\left\{X\left(t+R_1\right)\right\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\left\{R_n\right\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k\equiv R_1+R_2+\cdots+R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X.

Nota 34.183 *La existencia de un primer tiempo de regeneración,* R_1*, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos* $R_1,R_2\ldots,$ *que satisfacen la propiedad deseada [40].*

Nota 34.184 *Para la cola* $GI/GI/1$ *los usuarios arriban con tiempos* t_n *y son atendidos con tiempos de servicio* S_n*, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)*$T_n=t_n-t_{n-1}$*, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que* $\mathbb{E}S_n<\mathbb{E}T_n<\infty$.

Definición 34.276 *Para* x *fijo y para cada* $t\geq0$*, sea* $I_x\left(t\right)=1$ *si* $X\left(t\right)\leq x$*,* $I_x\left(t\right)=0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X}&=lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty}X\left(u\right)du\\ \mathbb{P}\left(X_{\infty}\leq x\right)&=lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty}I_x\left(u\right)du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X}=\frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1}X\left(t\right)dt\right]}{\mathbb{E}\left[R_1\right]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 34.185 *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si* $X\left(t\right)$ *es regenerativo y se define el proceso* $Y\left(t\right)$ *por* $Y\left(t\right)=f\left(X\left(t\right)\right)$ *para alguna función Borel medible* $f\left(\cdot\right)$*. Además* Y *es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que* X.
En general, los tiempos de renovación, Z_k *de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de* $X\left(t\right)$.

Nota 34.186 *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 34.187 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 34.188 *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) *Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞*

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración, *y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 34.277 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t + x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 34.278 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 34.279 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 34.163 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Corolario 34.65 *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \to \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E} \int_0^X V(s) \, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \to \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 34.280 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{34.2.236}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 34.281 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 34.189 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 34.190 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 34.164 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 34.91 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 34.282 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 34.92 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t),\ donde\ h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 34.165 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.93 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.191 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.166 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (34.2.237)$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (34.2.238)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.66 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (34.2.239)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.283 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.167 *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (34.2.240)$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (34.2.241)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.67 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (34.2.242)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\{N(t) \geq n\} = \{T_n \leq t\}$$
$$T_{N(t)} \leq t < T_{N(t)+1},$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\{N(t) \geq n\} = \{T_n \leq t\}$$
$$P\{N(t) \leq n\} = 1 - F^{(n+1)\star}(t)$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.94 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.192 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.168 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (34.2.243)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (34.2.244)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N\,/t)$ la cumple.

Corolario 34.68 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (34.2.245)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.284 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.169 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (34.2.246)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (34.2.247)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.69 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (34.2.248)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.95 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.193 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.170 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (34.2.249)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (34.2.250)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.70 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (34.2.251)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.285 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.171 *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (34.2.252)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (34.2.253)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.71 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (34.2.254)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\
T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\
P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)
\end{aligned}
$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.96 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.194 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.172 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (34.2.255)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (34.2.256)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.72 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (34.2.257)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.286 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.173 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (34.2.258)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (34.2.259)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.73 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (34.2.260)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.97 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.195 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.174 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_{n} &= \mu, \text{ c.s.} && (34.2.261)\\
lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (34.2.262)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_{n} satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.74 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$
t^{-1}N\left(t\right)\rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t\rightarrow\infty. \tag{34.2.263}
$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\left\{Z\left(t\right):t\geq0\right\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N\left(t\right)$

Definición 34.287 *Para el proceso $\left\{Z\left(t\right):t\geq0\right\}$ se define la fluctuación máxima de $Z\left(t\right)$ en el intervalo $\left(T_{n-1},T_{n}\right]$:*

$$
M_{n}=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_{n}}|Z\left(t\right)-Z\left(T_{n-1}\right)|
$$

Teorema 34.175 *Supóngase que $n^{-1}T_{n}\rightarrow\mu$ c.s. cuando $n\rightarrow\infty$, donde $\mu\leq\infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_{n}\right) &= a, \text{ c.s.} && (34.2.264)\\
lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (34.2.265)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_{n}=0$ c.s.

Corolario 34.75 *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_{n}\right)-Z\left(T_{n-1}\right),M_{n}\right)$, para $n\geq1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$
lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right)\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_{1}\right)-Z\left(T_{0}\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_{1}\right]}, \text{ c.s. cuando } t\rightarrow\infty. \tag{34.2.266}
$$

Definición 34.288 *Sea $h\left(t\right)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h\left(t\right)$ y la distribución F es*

$$
H\left(t\right)=h\left(t\right)+\int_{\left[0,t\right]}H\left(t-s\right)dF\left(s\right), \; t\geq0, \tag{34.2.267}
$$

donde $H\left(t\right)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H\left(t\right)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 34.98 *La función $U\star h\left(t\right)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 34.176 (Teorema Renovación Elemental)

$$
t^{-1}U\left(t\right)\rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t\rightarrow\infty.
$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 34.289 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N\left(t\right)$, es*

$$
U\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}\left(t\right), \; t\geq0,
$$

donde $F^{0\star}\left(t\right)=\mathbb{1}\left(t\geq0\right)$.

Proposición 34.99 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U\left(t\right)$ también tiene densidad, para $t>0$, y es $U^{'}\left(t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{n\star}\left(t\right)$. Además*

$$
\mathbb{P}\left\{N\left(t\right)>N\left(t-\right)\right\}=0, \; t\geq0.
$$

Definición 34.290 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$
\hat{F}\left(\alpha\right)=\int_{\mathbb{R}_{+}}e^{-\alpha t}dF\left(t\right), \; \alpha\geq0.
$$

Entonces

$$
\hat{U}\left(\alpha\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F}\left(\alpha\right)^{n}=\frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}.
$$

Proposición 34.100 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 34.196 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 34.177 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 34.76 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 34.291 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{34.2.268}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 34.292 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 34.197 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 34.293 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{34.2.269}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 34.294 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 34.198 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.101 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 34.5 (Proceso Poisson) *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 34.199 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.178 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.270}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.271}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.77 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.2.272}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.295 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.179 *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{34.2.273}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.2.274}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.78 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.2.275}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 34.296 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 34.102 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 34.297 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 34.103 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 34.200 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 34.180 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 34.79 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 34.298 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \ t \geq 0, \tag{34.2.276}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 34.104 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 34.181 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 34.299 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 34.105 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 34.300 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 34.106 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 34.201 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 34.182 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 34.80 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 34.301 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{34.2.277}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 34.107 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 34.183 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Nota 34.202 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 34.184 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 34.108 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ \textit{donde}\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 34.302 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 34.109 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 34.185 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Nota 34.203 *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t)\geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 34.186 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 34.110 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 34.303 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 34.111 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 34.187 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Definición 34.304 *Para el proceso $\{(N(t),X(t)):t\geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1},T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n=\left(\xi_n,\{X\left(T_{n-1}+t\right):0\leq t<\xi_n\}\right)$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 34.204 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t)=f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f:\tilde{S}\rightarrow S$.*

Nota 34.205 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 34.206 *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t):t\geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 34.305 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 34.207 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 34.188 (Procesos Regenerativos) *Suponga que el proceso*

Definición 34.306 (Renewal Process Trinity) *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- *$A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- *$B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- *$L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 34.208 *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{34.2.278}$$

Ejemplo 34.6 (Tiempos de recurrencia Poisson) *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (34.8.10) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 34.209 *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 34.307 *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 34.210 *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 34.112 *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 34.189 *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación N es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 34.211 *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 34.81 *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 34.212 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Nota 34.213 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 34.308 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X*.*

Definición 34.309 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 34.214 *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_{∞}

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ*.*

Definición 34.310 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 34.215 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 34.216 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 34.311 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2*, independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1*. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$*, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X*.*

Nota 34.217 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 34.312 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 34.218 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 34.313 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty}\mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 34.314 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 34.315 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 34.190 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 34.316 *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 34.317 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 34.318 *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 34.191 *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] \quad = \quad \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$*.*

Sea la función generadora de momentos para L_i*, el número de usuarios en la cola* $Q_i(z)$ *en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de* $z^{L_i(t)}$ *sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces*
Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t*. Entonces, determinando el primer momento es posible ver que*

Definición 34.319 *El tiempo de Ciclo* C_i *es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por* $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$*, o equivalentemente* $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ *bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 34.320 *El tiempo de intervisita* I_i *es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por* $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$*.*

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$*. Dado que el número de usuarios presentes en* Q_i *al tiempo* $t = \tau_i(m+1)$ *es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo* $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ *se tiene que*

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si $I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)}\right]$ *se tiene que* $F_i(z) = I_i[P_i(z)]$ *para* $i = 1, 2$*.*
Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (34.422), sean $T_1, T_2, \ldots$ *los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola* Q_j *es visitada por el servidor para dar servicio, es decir,* $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ *y* $\hat{L}_2(T_i) = 0$*, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,*

Definición 34.321 *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 34.322 *Para* T_i *se define,* M_i*, el número de ciclos de visita a la cola* Q_l*, durante el ciclo regenerativo, es decir,* M_i *es un proceso de renovación.*

Definición 34.323 *Para cada uno de los* M_i*'s, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo,* $C_i^{(m)}$*, para* $m = 1, 2, \ldots, M_i$*, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

[2]

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ*.*

[2] In Stidham and Heyman [41] shows that is sufficient for the regenerative process to be stationary that the mean regenerative cycle time is finite: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$,

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1$.

Definición 34.324 *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.*

Nota 34.219 *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 34.325 *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma \left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 34.326 *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 34.192 *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i \left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \dots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \dots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 34.327 *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 34.328 *Dos espacios medibles $(E, \mathcal{E})$ y $(G, \mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \to G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 34.329 *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G, \mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 34.220 *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 34.330 *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ es una familia $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E, \mathcal{E})$.*

Definición 34.331 *Un proceso estocástico one-sided contiuous time **(PEOSCT)** es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}} (E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 34.221 *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 34.222 *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}(Z_{t_1} \leq x_1, \dots, Z_{t_n} \leq x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{34.2.279}$$

Nota 34.223 *Para espacios polacos $(E, \mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 34.332 *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 34.224 *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H, \mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{34.2.280}$$

Nota 34.225 *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ a $(H, \mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H, \mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 34.226 *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H, \mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 34.333 *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0, \infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) . w \in \Omega.$$

Definición 34.334 *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible **(CM)** si el mapeo que toma $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 34.227 *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 34.335 *Un PEOSCT con espacio de estados $(H, \mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible **(CCM)** si el mapeo $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 34.228 *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0, \infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w, t) en $(Z(w), t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w), t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 34.336 *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{ (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)} : z \in H \right\} = H, \; t \in [0, \infty).$$

Definición 34.337 *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0, \infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)}, \; z \in H.$$

Definición 34.338 *Se dice que un proceso Z es shift-medible **(SM)** si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H}$ medible.*

Nota 34.229 *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 34.230
- *Dado el espacio polaco $(E, \mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0, \infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 34.231 *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 34.193 *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 34.339 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s \in [0, \infty)}$ y $S = (S_k)_0^{\infty}$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L, \mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{ (s_k)_0^{\infty} \in [0, \infty)^{\{0, 1, \ldots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty \right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0, 1, \ldots\}}$.
Así el par (Z, S) es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0, \infty), \mathcal{B}[0, \infty))$.

Definición 34.340 *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t \left(z, (s_k)_0^{\infty} \right) = \theta_t \left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t \right)_0^{\infty} \right)$$

donde $n_{t-} = inf \{ n \geq 1 : s_n \geq t \}$.

Nota 34.232 *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 34.341 *Dado un proceso* ***PEOSSM*** *(Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $\left((Z_s)\, s \in [0,S_n), S_0, \ldots, S_n\right)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 34.233 *Si el par (Z,S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 34.194 *Supóngase que el par (Z,S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z,S) con periodo d.*

Definición 34.342 *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx > 0$ con $X_2, X_3, \ldots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\,dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 34.343 *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 34.234

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 34.235 *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 34.195 *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 34.196 *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0, S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*, S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 34.197 *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{34.2.281}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{34.2.282}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{34.2.283}$$

Also the intervisit time I_i is defined as the period beginning at the time of its service completion in a cycle and ending at the time when it is polled in the next cycle; its duration is given by $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.
So we the following are still true

$$\begin{array}{ll}
\mathbb{E}[L_i] = \mu_i \mathbb{E}[I_i], & \mathbb{E}[C_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)}, \\
\mathbb{E}[S_i] = \mu_i \mathbb{E}[C_i], & \mathbb{E}[I_i] = (1-\mu_i)\mathbb{E}[C_i], \\
Var[L_i] = \mu_i^2 Var[I_i] + \sigma^2 \mathbb{E}[I_i], & Var[C_i] = \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}, \\
Var[S_i] = \frac{Var[L_i^*]}{(1-\mu_i)^2} + \frac{\sigma^2 \mathbb{E}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^3}, & Var[I_i] = \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).
\end{array} \tag{34.2.284}$$

Definición 34.344 *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 34.345 *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.*

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si $I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$ se tiene que $F_i(z) = I_i[P_i(z)]$ para $i = 1, 2$.
Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (34.422), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 34.346 *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 34.347 *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 34.348 *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$[3], se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
*Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (**??**): $n \rightarrow t - \tau_i(m)$, $T \rightarrow \overline{\tau}_i(m) - \tau_i(m)$, $L_n \rightarrow L_i(t)$ y $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right] \rightarrow F_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i \tau_i(m)}\right]$, se puede ver que*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} \tag{34.2.285}$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

[3] En Stidham[41] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)} \\ &= \frac{1-I_i\left[P_i(z)\right]}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} + \sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)} + \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}\right\} \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

es decir

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \tag{34.2.286}$$

Si hacemos:

$$\begin{aligned}S(z) &= 1-F(z) && (34.2.287)\\ T(z) &= z-P(z) && (34.2.288)\\ U(z) &= 1-P(z) && (34.2.289)\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[C_i\right]Q(z) = \frac{(z-1)S(z)P(z)}{T(z)U(z)} \tag{34.2.290}$$

A saber, si $a_k = P\{L(t)=k\}$

$$S(z) = 1-F(z) = 1-\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

entonces
$S'(z) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}$, *por tanto* $S^{(1)}(1) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k = -\mathbb{E}[L(t)]$, *luego* $S''(z) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k z^{k-2}$ *y* $S^{(2)}(1) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k = \mathbb{E}[L(L-1)]$; *de la misma manera* $S'''(z) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)a_k z^{k-3}$ *y* $S^{(3)}(1) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)a_k = -\mathbb{E}[L(L-1)(L-2)] = -\mathbb{E}\left[L^3\right]+3-\mathbb{E}\left[L^2\right]-2-\mathbb{E}[L]$. *Es decir*

$$\begin{aligned}S^{(1)}(1) &= -\mathbb{E}[L(t)],\\ S^{(2)}(1) &= -\mathbb{E}[L(L-1)] = -\mathbb{E}\left[L^2\right]+\mathbb{E}[L],\\ S^{(3)}(1) &= -\mathbb{E}[L(L-1)(L-2)] = -\mathbb{E}\left[L^3\right]+3\mathbb{E}\left[L^2\right]-2\mathbb{E}[L].\end{aligned}$$

Expandiendo alrededor de $z=1$

$$
\begin{aligned}
S(z) &= S(1) + \frac{S^{'}(1)}{1!}(z-1) + \frac{S^{''}(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{S^{'''}(1)}{3!}(z-1)^3 + \ldots + \\
&= (z-1)\left\{S^{'}(1) + \frac{S^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{S^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \ldots + \right\} \\
&= (z-1) R_1(z)
\end{aligned}
$$

con $R_1(z) \neq 0$, pues

$$R_1(z) = -\mathbb{E}[L] \tag{34.2.291}$$

entonces

$$R_1(z) = S^{'}(1) + \frac{S^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{S^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \frac{S^{iv}(1)}{4!}(z-1)^3 + \ldots + \tag{34.2.292}$$

Calculando las derivadas y evaluando en $z = 1$

$$
\begin{aligned}
R_1(1) &= S^{(1)}(1) = -\mathbb{E}[L] && (34.2.293)\\
R_1^{(1)}(1) &= \frac{1}{2}S^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[L^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[L] && (34.2.294)\\
R_1^{(2)}(1) &= \frac{2}{3!}S^{(3)}(1) = -\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[L^3\right] + \mathbb{E}\left[L^2\right] - \frac{2}{3}\mathbb{E}[L] && (34.2.295)
\end{aligned}
$$

De manera análoga se puede ver que para $T(z) = z - P(z)$ se puede encontrar una expanción alrededor de $z = 1$
Expandiendo alrededor de $z = 1$

$$
\begin{aligned}
T(z) &= T(1) + \frac{T^{'}(1)}{1!}(z-1) + \frac{T^{''}(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{T^{'''}(1)}{3!}(z-1)^3 + \ldots + \\
&= (z-1)\left\{T^{'}(1) + \frac{T^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{T^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \ldots + \right\} \\
&= (z-1) R_2(z)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
T^{(1)}(1) &= -\mathbb{E}[X(t)] = -\mu, \\
T^{(2)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)] = -\mathbb{E}\left[X^2\right] + \mathbb{E}[X] = -\mathbb{E}\left[X^2\right] + \mu, \\
T^{(3)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)] = -\mathbb{E}\left[X^3\right] + 3\mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}[X] \\
&= -\mathbb{E}\left[X^3\right] + 3\mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mu.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $R_2(1) \neq 0$, pues

$$R_2(1) = 1 - \mathbb{E}[X] = 1 - \mu \tag{34.2.296}$$

entonces

$$R_2(z) = T^{'}(1) + \frac{T^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{T^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \frac{T^{(iv)}(1)}{4!}(z-1)^3 + \ldots + \tag{34.2.297}$$

Calculando las derivadas y evaluando en $z = 1$

$$
\begin{aligned}
R_2(1) &= T^{(1)}(1) = 1 - \mu && (34.2.298)\\
R_2^{(1)}(1) &= \frac{1}{2}T^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right] + \frac{1}{2}\mu && (34.2.299)\\
R_2^{(2)}(1) &= \frac{2}{3!}T^{(3)}(1) = -\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[X^3\right] + \mathbb{E}\left[X^2\right] - \frac{2}{3}\mu && (34.2.300)
\end{aligned}
$$

Finalmente para de manera análoga se puede ver que para $U(z) = 1 - P(z)$ se puede encontrar una expanción alrededor de $z = 1$

$$
\begin{aligned}
U(z) &= U(1) + \frac{U^{'}(1)}{1!}(z-1) + \frac{U^{''}(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{U^{'''}(1)}{3!}(z-1)^3 + \ldots + \\
&= (z-1)\left\{U^{'}(1) + \frac{U^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{U^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \ldots + \right\} \\
&= (z-1) R_3(z)
\end{aligned}
$$

donde

$$\begin{aligned}
U^{(1)}(1) &= -\mathbb{E}[X(t)] = -\mu, \\
U^{(2)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)] = -\mathbb{E}\left[X^2\right] + \mathbb{E}[X] = -\mathbb{E}\left[X^2\right] + \mu, \\
U^{(3)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)] = -\mathbb{E}\left[X^3\right] + 3\mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}[X] \\
&= -\mathbb{E}\left[X^3\right] + 3\mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mu.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $R_3(1) \neq 0$*, pues*

$$R_3(1) = -\mathbb{E}[X] = -\mu \tag{34.2.301}$$

entonces

$$R_3(z) = U^{'}(1) + \frac{U^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{U^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \frac{U^{(iv)}(1)}{4!}(z-1)^3 + \ldots + \tag{34.2.302}$$

Calculando las derivadas y evaluando en $z = 1$

$$R_3(1) = U^{(1)}(1) = -\mu \tag{34.2.303}$$

$$R_3^{(1)}(1) = \frac{1}{2}U^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right] + \frac{1}{2}\mu \tag{34.2.304}$$

$$R_3^{(2)}(1) = \frac{2}{3!}U^{(3)}(1) = -\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[X^3\right] + \mathbb{E}\left[X^2\right] - \frac{2}{3}\mu \tag{34.2.305}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}[C_i]\,Q(z) = \frac{(z-1)(z-1)R_1(z)P(z)}{(z-1)R_2(z)(z-1)R_3(z)} = \frac{R_1(z)P(z)}{R_2(z)R_3(z)} \equiv \frac{R_1P}{R_2R_3} \tag{34.2.306}$$

Entonces

$$\left[\frac{R_1(z)P(z)}{R_2(z)R_3(z)}\right]^{'} = \frac{PR_2R_3R_1^{'} + R_1R_2R_3P^{'} - R_3R_1PR_2 - R_2R_1PR_3^{'}}{(R_2R_3)^2} \tag{34.2.307}$$

Evaluando en $z = 1$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R_2(1)R_3(1)R_1^{(1)}(1) + R_1(1)R_2(1)R_3(1)P^{'}(1) - R_3(1)R_1(1)R_2(1)^{(1)} - R_2(1)R_1(1)R_3^{'}(1)}{(R_2(1)R_3(1))^2} \\
&= \frac{1}{(1-\mu)^2\mu^2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}L\right)(1-\mu)(-\mu) + (-\mathbb{E}L)(1-\mu)(-\mu)\mu\right. \\
&\quad \left. -\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2 + \frac{1}{2}\mu\right)(-\mu)(-\mathbb{E}L) - (1-\mu)(-\mathbb{E}L)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2 + \frac{1}{2}\mu\right)\right\} \\
&= \frac{1}{(1-\mu)^2\mu^2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}L\right)\left(\mu^2 - \mu\right) + \left(\mu^2 - \mu^3\right)\mathbb{E}L\right. \\
&\quad \left. -\mu\mathbb{E}L\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2 + \frac{1}{2}\mu\right) + (\mathbb{E}L - \mu\mathbb{E}L)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2 + \frac{1}{2}\mu\right)\right\} \\
&= \frac{1}{(1-\mu)^2\mu^2}\left\{-\frac{1}{2}\mu^2\mathbb{E}L^2 + \frac{1}{2}\mu\mathbb{E}L^2 + \frac{1}{2}\mu^2\mathbb{E}L - \mu^3\mathbb{E}L + \mu\mathbb{E}L\mathbb{E}X^2 - \frac{1}{2}\mathbb{E}L\mathbb{E}X^2\right\} \\
&= \frac{1}{(1-\mu)^2\mu^2}\left\{\frac{1}{2}\mu\mathbb{E}L^2(1-\mu) + \mathbb{E}L\left(\frac{1}{2} - \mu\right)\left(\mu^2 - \mathbb{E}X^2\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2\mu(1-\mu)}\mathbb{E}L^2 - \frac{\frac{1}{2} - \mu}{(1-\mu)^2\mu^2}\sigma^2\mathbb{E}L
\end{aligned}$$

por lo tanto (para Takagi)

$$Q^{(1)} = \frac{1}{\mathbb{E}C}\left\{\frac{1}{2\mu(1-\mu)}\mathbb{E}L^2 - \frac{\frac{1}{2} - \mu}{(1-\mu)^2\mu^2}\sigma^2\mathbb{E}L\right\}$$

donde

$$\mathbb{E}C = \frac{\mathbb{E}L}{\mu(1-\mu)}$$

entonces

$$\begin{aligned} Q^{(1)} &= \frac{1}{2}\frac{\mathbb{E}L^2}{\mathbb{E}L} - \frac{\frac{1}{2}-\mu}{(1-\mu)\,\mu}\sigma^2 = \frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}L} - \frac{\sigma^2}{2}\left\{\frac{2\mu-1}{(1-\mu)\,\mu}\right\} \\ &= \frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}L} + \frac{\sigma^2}{2}\left\{\frac{1}{1-\mu} + \frac{1}{\mu}\right\} \end{aligned}$$

Mientras que para nosotros

$$Q^{(1)} = \frac{1}{\mu\,(1-\mu)}\frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}C} - \sigma^2\frac{\mathbb{E}L}{2\mathbb{E}C}\cdot\frac{1-2\mu}{(1-\mu)^2\,\mu^2}$$

Retomando la ecuación (34.2.307)

$$\left[\frac{R_1(z)\,P(z)}{R_2(z)\,R_3(z)}\right]^{'} = \frac{PR_2R_3R_1^{'} + R_1R_2R_3P^{'} - R_3R_1PR_2 - R_2R_1PR_3^{'}}{(R_2R_3)^2} = \frac{F(z)}{G(z)}$$

donde

$$\begin{aligned} F(z) &= PR_2R_3R_1^{'} + R_1R_2R_3P^{'} - R_3R_1PR_2^{'} - R_2R_1PR_3^{'} \\ G(z) &= R_2^2R_3^2 \\ G^2(z) &= R_2^4R_3^4 = (1-\mu)^4\,\mu^4 \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} G^{'}(z) &= 2R_2R_3\left[R_2^{'}R_3 + R_2R_3^{'}\right] \\ G^{'}(1) &= -2(1-\mu)\,\mu\left[\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right] + \frac{1}{2}\mu\right)(-\mu) + (1-\mu)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right] + \frac{1}{2}\mu\right)\right] \end{aligned}$$

$$F^{'}(z) = \left[(R_2R_3)\,R_1^{''} - (R_1R_3)\,R_2^{''} - (R_1R_2)\,R_3^{''} - 2\left(R_2^{'}R_3^{'}\right)R_1\right]P + 2\,(R_2R_3)\,R_1^{'}P^{'} + (R_1R_2R_3)\,P^{''}$$

Por lo tanto, encontremos $F^{'}(z)\,G(z) + F(z)\,G^{'}(z)$:

$$\begin{aligned} &F^{'}(z)\,G(z) + F(z)\,G^{'}(z) = \left\{\left[(R_2R_3)\,R_1^{''} - (R_1R_3)\,R_2^{''} - (R_1R_2)\,R_3^{''} - 2\left(R_2^{'}R_3^{'}\right)R_1\right]P \right. \\ &\left. +2\,(R_2R_3)\,R_1^{'}P^{'} + (R_1R_2R_3)\,P^{''}\right\}R_2^2R_3^2 - \left\{\left[PR_2R_3R_1^{'} + R_1R_2R_3P^{'} - R_3R_1PR_2^{'}\right.\right. \\ &\left.\left. -R_2R_1PR_3^{'}\right]\left[2R_2R_3\left(R_2^{'}R_3 + R_2R_3^{'}\right)\right]\right\} \end{aligned}$$

Evaluando en $z=1$

$$\begin{aligned} &= (1+R_3)^3\,R_3^3R_1^{''} - (1+R_3)^2\,R_1R_3^3R_3^{''} - (1+R_3)^3\,R_3^2R_1R_3^{''} - 2\,(1+R_3)^2\,R_3^2\left(R_3^{'}\right)^2 \\ &+ 2\,(1+R_3)^3\,R_3^3R_1^{'}P^{'} + (1+R_3)^3\,R_3^3R_1P^{''} - 2\,(1+R_3)^2\,R_3^2\,(1+2R_3)\,R_3^{'}R_1^{'} \\ &- 2\,(1+R_3)^2\,R_3^2R_1R_3^{'}\,(1+2R_3)\,P^{'} + 2\,(1+R_3)\,(1+2R_3)\,R_3^3R_1\left(R_3^{'}\right)^2 \\ &+ 2\,(1+R_3)^2\,(1+2R_3)\,R_1R_3R_3^{'} \\ &= -(1-\mu)^3\,\mu^3R_1^{''} - (1-\mu)^2\,\mu^2R_1\,(1-2\mu)\,R_3^{''} - (1-\mu)^3\,\mu^3R_1P^{''} \\ &+ 2\,(1-\mu)\,\mu^2\left[(1-2\mu)\,R_1 - (1-\mu)\right]\left(R_3^{'}\right)^2 - 2\,(1-\mu)^2\,\mu R_1\,(1-2\mu)\,R_3^{'} \\ &- 2\,(1-\mu)^3\,\mu^4R_1^{'} - 2\mu\,(1-\mu)\,(1-2\mu)\,R_3^{'}R_1^{'} - 2\mu^3\,(1-\mu)^2\,(1-2\mu)\,R_1R_1^{'} \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \left[\frac{F(z)}{G(z)}\right]^{'} &= \frac{1}{\mu^3\,(1-\mu)^3}\left\{-(1-\mu)^2\,\mu^2R_1^{''} - \mu\,(1-\mu)\,(1-2\mu)\,R_1R_3^{''} - \mu^2\,(1-\mu)^2\,R_1P^{''}\right. \\ &+2\mu\left[(1-2\mu)\,R_1 - (1-\mu)\right]\left(R_3^{'}\right)^2 - 2\,(1-\mu)\,(1-2\mu)\,R_1R_3^{'} - 2\mu^3\,(1-\mu)^2\,R_1^{'} \\ &\left.-2\,(1-2\mu)\,R_3^{'}R_1^{'} - 2\mu^2\,(1-\mu)\,(1-2\mu)\,R_1R_1^{'}\right\} \end{aligned}$$

recordemos que

$$
\begin{aligned}
R_1 &= -\mathbb{E}L\\
R_3 &= -\mu\\
R_1^{'} &= -\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}L\\
R_3^{'} &= -\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\\
R_1^{''} &= -\frac{1}{3}\mathbb{E}L^3+\mathbb{E}L^2-\frac{2}{3}\mathbb{E}L\\
R_3^{''} &= -\frac{1}{3}\mathbb{E}X^3+\mathbb{E}X^2-\frac{2}{3}\mu\\
R_1R_3^{'} &= \frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L-\frac{1}{2}\mathbb{E}X\mathbb{E}L\\
R_1R_1^{'} &= \frac{1}{2}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}L+\frac{1}{2}\mathbb{E}^2L\\
R_3^{'}R_1^{'} &= \frac{1}{4}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L^2-\frac{1}{4}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L-\frac{1}{4}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}X+\frac{1}{4}\mathbb{E}X\mathbb{E}L\\
R_1R_3^{''} &= \frac{1}{6}\mathbb{E}X^3\mathbb{E}L^2-\frac{1}{6}\mathbb{E}X^3\mathbb{E}L-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L+\frac{1}{3}\mathbb{E}X\mathbb{E}L^2-\frac{1}{3}\mathbb{E}X\mathbb{E}L\\
R_1P^{''} &= -\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L\\
\left(R_3^{'}\right)^2 &= \frac{1}{4}\mathbb{E}^2X^2-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}X+\frac{1}{4}\mathbb{E}^2X
\end{aligned}
$$

Definición 34.349 *Let L_i^* be the number of users at queue Q_i when it is polled, then*

$$\mathbb{E}\left[L_i^*\right]=f_i\left(i\right),\quad Var\left[L_i^*\right]=f_i\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. \tag{34.2.308}$$

Definición 34.350 *The cycle time C_i for the queue Q_i is the period beginning at the time when it is polled in a cycle and ending at the time when it is polled in the next cycle; it's duration is given by $\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)$, equivalently $\overline{\tau}_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$ under steady state assumption.*

Definición 34.351 *The intervisit time I_i is defined as the period beginning at the time of its service completion in a cycle and ending at the time when it is polled in the next cycle; its duration is given by $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$.*

The intervisit time duration $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)$ given the number of users found at queue Q_i at time $t=\tau_i\left(m+1\right)$ is equal to the number of arrivals during the preceding intervisit time $\left[\overline{\tau}\left(m\right),\tau_i\left(m+1\right)\right]$.
So we have

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z_i\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

if $I_i\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$ we have $F_i\left(z\right)=I_i\left[P_i\left(z\right)\right]$ for $i=1,2$. Futhermore can be proved that

$$
\begin{array}{ll}
\mathbb{E}\left[L_i\right]=\mu_i\mathbb{E}\left[I_i\right], & \mathbb{E}\left[C_i\right]=\frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)},\\
\mathbb{E}\left[S_i\right]=\mu_i\mathbb{E}\left[C_i\right], & \mathbb{E}\left[I_i\right]=\left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right],\\
Var\left[L_i\right]=\mu_i^2Var\left[I_i\right]+\sigma^2\mathbb{E}\left[I_i\right], & Var\left[C_i\right]=\frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2},\\
Var\left[S_i\right]=\frac{Var\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^3}, & Var\left[I_i\right]=\frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2}-\frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2}f_i\left(i\right).
\end{array} \tag{34.2.309}
$$

Let consider the points when the process $\left[L_1\left(1\right),L_2\left(1\right),L_3\left(1\right),L_4\left(1\right)\right]$ becomes zero at the same time, this points, $T_1,T_2,\ldots$ will be denoted as regeneration points, then we have that

Definición 34.352 *the interval between two such succesive regeneration points will be called regenerative cycle.*

Definición 34.353 *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 34.354 *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m=1,2,\ldots,M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i\left(z\right)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces

$$Q_i\left(z\right)=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i\left(z\right)}{P_i\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}. \tag{34.2.310}$$

Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t. Entonces, determinando el primer momento es posible ver que

M_i is an stopping time for the regenerative process with $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, from Wald's lemma follows that:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}$$

therefore

$$Q_i\left(z\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

*Doing the following substitutions en (**??**): $n\rightarrow t-\tau_i\left(m\right)$, $T\rightarrow\overline{\tau}_i\left(m\right)-\tau_i\left(m\right)$, $L_n\rightarrow L_i\left(t\right)$ and $F\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{L_0}\right]\rightarrow F_i\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{L_i\tau_i(m)}\right]$, we obtain*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right]=z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)} \tag{34.2.311}$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i\left(t\right)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i\left(z\right)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right]=\frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i\left(z\right)}\\
&= \frac{1-I_i\left[P_i\left(z\right)\right]}{1-P_i\left(z\right)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Q_i\left(z\right) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}=\frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}+\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right]+\mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\left\{z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)}+\frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i\left(z\right)}{P_i\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}
\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{array}{ll}
S^{'}\left(z\right)=-\sum_{k=1}^{+\infty}ka_kz^{k-1}, & S^{(1)}\left(1\right)=-\sum_{k=1}^{+\infty}ka_k=-\mathbb{E}\left[L\left(t\right)\right],\\
S^{''}\left(z\right)=-\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)a_kz^{k-2}, & S^{(2)}\left(1\right)=-\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)a_k=\mathbb{E}\left[L\left(L-1\right)\right],\\
S^{'''}\left(z\right)=-\sum_{k=3}^{+\infty}k(k-1)(k-2)a_kz^{k-3}, & S^{(3)}\left(1\right)=-\sum_{k=3}^{+\infty}k(k-1)(k-2)a_k\\
 & =-\mathbb{E}\left[L\left(L-1\right)\left(L-2\right)\right]\\
 & =-\mathbb{E}\left[L^3\right]+3-\mathbb{E}\left[L^2\right]-2-\mathbb{E}\left[L\right];
\end{array} \tag{34.2.312}$$

34.3. Introduction

A cyclic polling system consists of multiple queues that are served by a single server in cyclic order. Users arrive at each queue according to independent processes, which also are independent of the service times. The server attends each queue according to a service policy previously established. The most commonly service policies studied are the exhaustive, gated and the k-limited. The exhaustive policy consists in attending all users until the queue is emptied. When the server finishes, it moves to the next queue incurring in a switchover time that is an independent and identically distributed random variable. An exhaustive analysis have been made in this subject. For an overview of the literature on polling systems, their applications and standard results we refer to surveys such as: [3, 22, 25, 34, 43, 42].

Bos and Boon [5] published a report where they studied a Network of Polling Systems applied to a traffic problem, there they analyzed a network of intersections and followed a path in it. Their objective was to predict if the costumers can pass through the network in a finite time or not. The buffer occupancy method was used in this analysis and simulation techniques were also used to verify the results. It is important to remark that the heavy traffic case was studied in this report, as well as the cyclic case was not considered.

In this work, we study a Network of Cyclic Polling Systems (NCPS) that consists of two cyclic polling systems, each of them conformed by two queues attended by a single server. We apply the buffer occupancy method described by Kleinrock and Takagi [43]. This method is based on the use of the Probability Generating Function (PGF) of the joint distribution function of the queues lengths at the moment the server starts a visit period in each of the queues that conform the system.

We present a theorem that guarantees the stability for the NCPS under specific conditions, also we obtain explicit expressions for the queue lengths at the moment the server arrives. With this results we obtain the queue lengths of the NCPS at any time for the servers.

We believe these results can be generalized for the continuous case and from the point of view of applications, the results are useful because they allow us to obtain analytical expressions for the performance measures, and also give us the keys to determine waiting times and queue lengths for any time during the operation of the network. Initially our main goal was studying the system of public transportation, which can be seen as a network consisting of several cyclic polling systems.

34.4. Construcción del Modelo e Hipótesis

Consider a Network consisting of two cyclic polling systems with two queues each, Q_1, Q_2 for the first system and $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ for the second one, each of them with infinite-sized buffer. In each system a single server visits the queues in cyclic order, where it applies the exhaustive policy, i.e., when the server polls a queue, it serves all the customers present until the queue becomes empty. This case is illustrated in `Figure 1`.

The second system's users at queue 2, can moves to the first system after being attended, also we assume that the network is open; that is, all customers eventually leave the network. As usually in polling systems theory we assume the arrivals in each queue are Poisson processes from with independent identical distributed (i.i.d.) inter arrival exponential times. The service times are exponential independent and identically distributed random variables. Finally upon completion of a visit at any queue, the servers incurs in a random switchover time according to an arbitrary distribution. We define a cycle to be the time interval between two consecutive polling instants, the time period in a cycle during which the server is attending a queue is called a service period. We are considering the case where the server visit the queues in cyclic order.

Time is slotted with slot size equal to the service time of a fixed costumer, we call the time interval $[t, t+1]$ the t-th slot. The arrival processes are denoted by $X_1(t), X_2(t)$ for the first system and $\hat{X}_1(t)$, $\hat{X}_2(t)$ for the second, the arrival rate at Q_i and $\hat{Q}_i$ is denoted by μ_i and $\hat{\mu}_i$ respectively, with the condition $\mu_i < 1$ and $\hat{\mu}_i < 1$. The second system's users pass to the first one according to a process Y_2, with arrival rate $\tilde{\mu}_2$.

Let's denote by τ_i the polling instant at queue Q_1 and by $\overline{\tau}_i$ the instant when the servers leaves to queue and starts a switchover time. Like the rest of the random variables the swithcover period is an i.i.d random variable R_i with general distribution.

To determine the length of the queues, i.e., the number of users in the queue at the moment the server arrives we define the process L_i and $\hat{L}_i$ for the first and second system, respectively, in the sequel we use the buffer occupancy method to obtain the generating function, first and second moments of queue size distributions at polling instants. At each of the queues in the network the number of users is the number of users at the time the server arrives plus the numbers of users from the other system.

In order to obtain the joint probability generating function (PGF) for the number or users residing in queue i when the queue is polled in the NCPS, we define for each of the arrival processes $X_1, X_2, \hat{X}_1, \hat{X}_2, Y_2$, and $\tilde{X}_2$ with $\tilde{X}_2 = X_2 + Y_2$, their PGF

$$P_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_i^{X_i(t)}\right], \quad \hat{P}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\hat{X}_i(t)}\right]$$

for $i = 1, 2$, and

$$\check{P}_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{Y_2(t)}\right], \quad \tilde{P}_2(z_2) = \mathbb{E}\left[z_2^{\tilde{X}_2(t)}\right],$$

for $i = 1, 2,$ *and*

$$\check{\mu}_2 = \mathbb{E}\left[Y_2(t)\right] = \check{P}_2^{(1)}(1), \quad \tilde{\mu}_2 = \mathbb{E}\left[\tilde{X}_2(t)\right] = \tilde{P}_2^{(1)}(1).$$

The PGF For the service time is defined by:

$$S_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_i^{\overline{\tau}_i - \tau_i}\right], \quad \hat{S}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\overline{\zeta}_i - \zeta_i}\right]$$

with first moment

$$s_i = \mathbb{E}\left[\overline{\tau}_i - \tau_i\right], \quad \hat{s}_i = \mathbb{E}\left[\overline{\zeta}_i - \zeta_i\right]$$

for $i = 1, 2$. *In a similar manner the PGF for the switchover time of the server from the moment it ends to attend a queue, to the time of arrival to the next queue is given by*

$$R_i(z_i) = \mathbb{E}\left[z_1^{\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i}\right], \quad \hat{R}_i(w_i) = \mathbb{E}\left[w_i^{\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i}\right]$$

with first moment

$$r_i = \mathbb{E}\left[\tau_{i+1} - \overline{\tau}_i\right], \quad \hat{r}_i = \mathbb{E}\left[\zeta_{i+1} - \overline{\zeta}_i\right]$$

for $i = 1, 2$. *The number of users in the queue at times* $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2$, *it's zero, i.e.,* $L_i(\overline{\tau_i}) = 0$, *and* $\hat{L}_i\left(\overline{\zeta_i}\right) = 0$ *for* $i = 1, 2$. *Then the number of users in the queue of the second system at the moment the server ends attending in the queue is given by the number of users present at the moment it arrives plus the number of arrivals during the service time, i.e.,*

$$\hat{L}_i(\overline{\tau}_j) = \hat{L}_i(\tau_j) + \hat{X}_i(\overline{\tau}_j - \tau_j),$$

for $i, j = 1, 2$, *meanwhile for the first system :*

$$L_1(\overline{\tau}_j) = L_1(\tau_j) + X_1(\overline{\tau}_j - \tau_j).$$

Specifically for the second queue of the first system we need to consider the users of transfer becoming from the second queue in the second system while the server its in the other queue attending, it means that this users have been already attended by the server before they can go to the first queue:

$$L_2(\overline{\tau}_1) = L_2(\tau_1) + X_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1) + Y_2(\overline{\tau}_1 - \tau_1). \tag{34.4.1}$$

As is know, the gambler's ruin problem can be used to model the server's busy period in a cyclic polling system, so let $\tilde{L}_0 \geq 0$ *be the number of users present at the moment the server arrive to start attending, also let* T *be the time the server need to attend the users in the queue starting with* $\tilde{L}_0$ *users. Suppose the gambler has two independent and simultaneous moves, such events are independent and identical to each other for each realization. The gain on the n-th game is* $\tilde{\mathsf{X}}_n = \mathsf{X}_n + \mathsf{Y}_n$ *units from which is substracted a playing fee of 1 unit for each move. His PGF is given by* $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{L}_0}\right]$, *futhermore*

$$\tilde{P}(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tilde{\mathsf{X}}_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{\mathsf{X}_n + \mathsf{X}_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{\mathsf{X}_n} z^{\mathsf{X}_n}\right] = \mathbb{E}\left[z^{\mathsf{X}_n}\right]\mathbb{E}\left[z^{\mathsf{X}_n}\right] = P(z)\check{P}(z),$$

with $\tilde{\mu} = \mathbb{E}\left[\tilde{\mathsf{X}}_n\right] = \tilde{P}[z] < 1$. *If* $\tilde{L}_n$ *denotes the capital remaining after the n-th game, then* $\tilde{L}_n = \tilde{L}_0 + \tilde{\mathsf{X}}_1 + \tilde{\mathsf{X}}_2 + \cdots + \tilde{\mathsf{X}}_n - 2n$. *The result that relates the gambler's ruin problem with the busy period of the server it's a generalization of the result given in Takagi [42] chapter 3.*

Proposición 34.113 *Let's* $G_n(z)$ *and* $G(z, w)$ *defined as in (33.80.5), then* $G_n(z) = \frac{1}{z}\left[G_{n-1}(z) - G_{n-1}(0)\right]\tilde{P}(z)$. *Futhermore* $G(z, w) = \frac{zF(z) - wP(z)G(0,w)}{z - wR(z)}$, *with a unique pole in the unit circle, also the pole is of the form* $z = \theta(w)$ *and satisfies 3*

i) $\tilde{\theta}(1) = 1$,

ii) $\tilde{\theta}^{(1)}(1) = \frac{1}{1-\tilde{\mu}}$,

iii) $\tilde{\theta}^{(2)}(1) = \frac{\tilde{\mu}}{(1-\tilde{\mu})^2} + \frac{\tilde{\sigma}}{(1-\tilde{\mu})^3}$.

34.4.1. Description of the model: Probability Generating Function

In order to model the network of cyclic polling system it's necessary to consider the users arrivals to each queue in one of the system, but on times the other system's server arrival, ζ_i. *In the case of the first system and the server arrives to a queue in the second one:*

$$F_{i,j}(z_i; \zeta_j) = \mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\zeta_j)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[L_i(\zeta_j) = k\right] z_i^k,$$

for $i,j=1,2$. Now consider the case of the queues in the second system and the server arrive to a queue in the first system

$$\hat{F}_{i,j}\left(w_i;\tau_j\right)=\mathbb{E}\left[w_i^{\hat{L}_i\left(\tau_j\right)}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\hat{L}_i\left(\tau_j\right)=k\right]w_i^k,$$

for $i,j=1,2$. With the developed we can define the joint PGF for the second system:

$$\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1\left(\tau_j\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\tau_j\right)}\right]=\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1\left(\tau_j\right)}\right]\mathbb{E}\left[w_2^{\hat{L}_2\left(\tau_j\right)}\right]=\hat{F}_{1,j}\left(w_1;\tau_j\right)\hat{F}_{2,j}\left(w_2;\tau_j\right)\equiv\hat{\mathbf{F}}_j\left(w_1,w_2;\tau_j\right).$$

In a similar manner we define the joint PGF for the first system, and the second system's server:

$$\mathbb{E}\left[z_1^{L_1\left(\zeta_j\right)}z_2^{L_2\left(\zeta_j\right)}\right]=\mathbb{E}\left[z_1^{L_1\left(\zeta_j\right)}\right]\mathbb{E}\left[z_2^{L_2\left(\zeta_j\right)}\right]=F_{1,j}\left(z_1;\zeta_j\right)F_{2,j}\left(z_2;\zeta_j\right)\equiv\mathbf{F}_j\left(z_1,z_2;\zeta_j\right).$$

Now we proceed to determine the joint PGF for the times that the server visit each queue in their corresponding system, i.e., $t=\left\{\tau_1,\tau_2,\zeta_1,\zeta_2\right\}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_j\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)&=\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^2 z_i^{L_i\left(\tau_j\right)}\prod_{i=1}^2 w_i^{\hat{L}_i\left(\tau_j\right)}\right],\\ \hat{\mathbf{F}}_j\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right)&=\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^2 z_i^{L_i\left(\zeta_j\right)}\prod_{i=1}^2 w_i^{\hat{L}_i\left(\zeta_j\right)}\right],\end{aligned}\tag{34.4.2}$$

for $j=1,2$. Then with the purpose of find the number of users present in the netwotk when the server ends attending one of the queues in any of the systems we have that

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1\left(\overline{\tau}_1\right)}z_2^{L_2\left(\overline{\tau}_1\right)}w_1^{\hat{L}_1\left(\overline{\tau}_1\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\overline{\tau}_1\right)}\right]=\mathbb{E}\left[z_2^{L_2\left(\overline{\tau}_1\right)}w_1^{\hat{L}_1\left(\overline{\tau}_1\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\overline{\tau}_1\right)}\right]\\ =\;&\mathbb{E}\left[z_2^{L_2\left(\tau_1\right)+X_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)+Y_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}w_1^{\hat{L}_1\left(\tau_1\right)+\hat{X}_1\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\tau_1\right)+\hat{X}_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}\right]\end{aligned}$$

using the equation (34.4.1) we have

$$\begin{aligned}=\;&\mathbb{E}\left[z_2^{L_2\left(\tau_1\right)}z_2^{X_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}z_2^{Y_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}w_1^{\hat{L}_1\left(\tau_1\right)}w_1^{\hat{X}_1\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\tau_1\right)}w_2^{\hat{X}_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}\right]\\ =\;&\mathbb{E}\left[z_2^{L_2\left(\tau_1\right)}\left\{w_1^{\hat{L}_1\left(\tau_1\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\tau_1\right)}\right\}\left\{z_2^{X_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}z_2^{Y_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}w_1^{\hat{X}_1\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}w_2^{\hat{X}_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}\right\}\right]\end{aligned}$$

applying the fact that the arrivals processes in the queues in each systems are independent:

$$=\mathbb{E}\left[z_2^{L_2\left(\tau_1\right)}\left\{z_2^{X_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}z_2^{Y_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}w_1^{\hat{X}_1\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}w_2^{\hat{X}_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1\left(\tau_1\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\tau_1\right)}\right]$$

given that the arrival processes in the queues are independent, it's possible to separate the expectation for the arrival processes in Q_1 and Q_2 at time τ_1, which is the time the server visits Q_1. Considering $\tilde{X}_2\left(z_2\right)=X_2\left(z_2\right)+Y_2\left(z_2\right)$ we have

$$\begin{aligned}&=\mathbb{E}\left[z_2^{L_2\left(\tau_1\right)}\left\{z_2^{\tilde{X}_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}w_1^{\hat{X}_1\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}w_2^{\hat{X}_2\left(\overline{\tau}_1-\tau_1\right)}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1\left(\tau_1\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\tau_1\right)}\right]\\ &=\mathbb{E}\left[z_2^{L_2\left(\tau_1\right)}\left\{\tilde{P}_2\left(z_2\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\hat{P}_1\left(w_1\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\hat{P}_2\left(w_2\right)^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right\}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1\left(\tau_1\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\tau_1\right)}\right]\\ &=\mathbb{E}\left[z_2^{L_2\left(\tau_1\right)}\left\{\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right\}^{\overline{\tau}_1-\tau_1}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1\left(\tau_1\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\tau_1\right)}\right]\\ &=\mathbb{E}\left[z_2^{L_2\left(\tau_1\right)}\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)^{L_1\left(\tau_1\right)}\right]\mathbb{E}\left[w_1^{\hat{L}_1\left(\tau_1\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\tau_1\right)}\right]\\ &=F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)\cdot\hat{F}_1\left(w_1,w_2;\tau_1\right)\\ &\equiv\mathbf{F}_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2,w_1,w_2\right).\end{aligned}$$

The last equalities are true because the number of arrivals to $\hat{Q}_2$ during the time interval $\left[\tau_1,\overline{\tau}_1\right]$ still haven't been attended by the server in the system 2, then the users can't pass to the first system through the queue Q_2. Therefore the number of users switching from $\hat{Q}_2$ to Q_2 during the time interval $\left[\tau_1,\overline{\tau}_1\right]$ depends on the policy of transfer between the two systems, according to the last section

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[z_1^{L_1\left(\overline{\tau}_1\right)}z_2^{L_2\left(\overline{\tau}_1\right)}w_1^{\hat{L}_1\left(\overline{\tau}_1\right)}w_2^{\hat{L}_2\left(\overline{\tau}_1\right)}\right]=\mathbf{F}_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2,w_1,w_2\right)\\ &\equiv F_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2\right)\hat{F}_1\left(w_1,w_2;\tau_1\right).\end{aligned}$$

Using similar reasoning for the rest of the server's arrival times we have that

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\tau}_2)}z_2^{L_2(\overline{\tau}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\tau}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\tau}_2)}\right] &= F_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right)\right)\hat{F}_2\left(w_1,w_2;\tau_2\right)\\
&\equiv \mathbf{F}_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_1,w_2\right),\\
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_1)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_1)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_1)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_1)}\right] &= F_1\left(z_1,z_2;\zeta_1\right)\hat{F}_1\left(\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right)\\
&\equiv \hat{\mathbf{F}}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right),\\
\mathbb{E}\left[z_1^{L_1(\overline{\zeta}_2)}z_2^{L_2(\overline{\zeta}_2)}w_1^{\hat{L}_1(\overline{\zeta}_2)}w_2^{\hat{L}_2(\overline{\zeta}_2)}\right] &= F_2\left(z_1,z_2;\zeta_2\right)\hat{F}_2\left(w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right)\\
&\equiv \hat{\mathbf{F}}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Now we are in conditions to obtain the recursive equations that model the NCPS. We need to consider the switchover times that the server need to translate from one queue to another and, the number or user presents in the system at the time the server leaves to the queue to start attending the next. Thus far developed, we can find that for the NCPS:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) &= R_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)\mathbf{F}_1\left(\theta_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),z_2,w_1,w_2\right),\\
\mathbf{F}_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) &= R_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)\mathbf{F}_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_1,w_2\right),\\
\hat{\mathbf{F}}_2\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) &= \hat{R}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)\hat{\mathbf{F}}_1\left(z_1,z_2,\hat{\theta}_1\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_2\left(w_2\right)\right),w_2\right),\\
\hat{\mathbf{F}}_1\left(z_1,z_2,w_1,w_2\right) &= \hat{R}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\prod_{i=1}^{2}\hat{P}_i\left(w_i\right)\right)\hat{\mathbf{F}}_2\left(z_1,z_2,w_1,\hat{\theta}_2\left(P_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\hat{P}_1\left(w_1\right)\right)\right).
\end{aligned}\tag{34.4.3}$$

It's necessary to give an step ahead, considering the case illustrated in **`Figure 2`**, *where just like before, the server's switchover times are given by the generals equations* $R_i\left(\mathbf{z},\mathbf{w}\right)=R_i\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\tilde{P}_3\left(z_3\right)\tilde{P}_4\left(z_4\right)\right)$, *with first order derivatives given by* $D_iR_i=r_i\tilde{\mu}_i$, *and second order partial derivatives* $D_jD_iR_k=R_k^{(2)}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j+\mathbb{1}_{i=j}r_kP_i^{(2)}+\mathbb{1}_{i\neq j}r_k\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j$ *for any* i,j,k. *According to the equations given before and the queue lengths for the other system's server times, we can obtain general expressions*

$$D_j\mathbf{F}_i\left(z_1,z_2;\tau_{i+2}\right)=\mathbb{1}_{j\leq 2}F_{j,i+2}^{(1)},\quad D_j\mathbf{F}_i\left(z_3,z_4;\tau_{i-2}\right)=\mathbb{1}_{j\geq 3}F_{j,i-2}^{(1)},\tag{34.4.4}$$

for $i,j=1,2,3,4$*; with second order derivatives given by*

$$\begin{aligned}
D_jD_i\mathbf{F}_k\left(z_1,z_2;\tau_{k+2}\right) &= \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,k+2}^{(2)}+\mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,k-2}^{(1)}F_{i,k+2}^{(1)},\\
D_jD_i\mathbf{F}_k\left(z_3,z_4;\tau_{k-2}\right) &= \mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F_{i,k-2}^{(2)}+\mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j\neq i}F_{j,k-2}^{(1)}F_{i,k-2}^{(1)}.
\end{aligned}\tag{34.4.5}$$

According with the developed at the moment, we can get the recursive equations which are of the following form

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_1\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right) &= R_2\left(\prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i\left(z_i\right)\right)\mathbf{F}_2\left(z_1,\tilde{\theta}_2\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\tilde{P}_3\left(z_3\right)\tilde{P}_4\left(z_4\right)\right),z_3,z_4\right),\\
\mathbf{F}_2\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right) &= R_1\left(\prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i\left(z_i\right)\right)\mathbf{F}_1\left(\tilde{\theta}_1\left(\tilde{P}_2\left(z_2\right)\tilde{P}_3\left(z_3\right)\tilde{P}_4\left(z_4\right)\right),z_2,z_3,z_4\right),\\
\mathbf{F}_3\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right) &= R_4\left(\prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i\left(z_i\right)\right)\mathbf{F}_4\left(z_1,z_2,z_3,\tilde{\theta}_4\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\tilde{P}_3\left(z_3\right)\right)\right),\\
\mathbf{F}_4\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right) &= R_3\left(\prod_{i=1}^{4}\tilde{P}_i\left(z_i\right)\right)\mathbf{F}_3\left(z_1,z_2,\tilde{\theta}_3\left(\tilde{P}_1\left(z_1\right)\tilde{P}_2\left(z_2\right)\tilde{P}_4\left(z_4\right)\right),z_4\right).
\end{aligned}\tag{34.4.6}$$

So we have the first theorem

Teorema 34.198 *Suppose* $\tilde{\mu}=\tilde{\mu}_1+\tilde{\mu}_2<1$, $\hat{\mu}=\tilde{\mu}_3+\tilde{\mu}_4<1$, *then the number of users in the queues conforming the network of cyclic polling system (34.4.6), when the server visit a queue can be found solving the linear system given by equations (34.4.7) and (34.4.8):*

$$f_j\left(i\right)=r_{j+1}\tilde{\mu}_i+\mathbb{1}_{i\neq j+1}f_{j+1}\left(j+1\right)\tfrac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_{j+1}}+\mathbb{1}_{i=j}f_{j+1}\left(i\right)+\mathbb{1}_{j=1}\mathbb{1}_{i\geq 3}F_{i,j+1}^{(1)}+\mathbb{1}_{j=3}\mathbb{1}_{i\leq 2}F_{i,j+1}^{(1)}\tag{34.4.7}$$

$j=1,3$ *and* $i=1,2,3,4$.

$$f_j\left(i\right)=r_{j-1}\tilde{\mu}_i+\mathbb{1}_{i\neq j-1}f_{j-1}\left(j-1\right)\tfrac{\tilde{\mu}_i}{1-\tilde{\mu}_{j-1}}+\mathbb{1}_{i=j}f_{j-1}\left(i\right)+\mathbb{1}_{j=2}\mathbb{1}_{i\geq 3}F_{i,j-1}^{(1)}+\mathbb{1}_{j=4}\mathbb{1}_{i\leq 2}F_{i,j-1}^{(1)}\tag{34.4.8}$$

$j=2,4$ *and* $i=1,2,3,4$, *whose solutions are:*

$$\begin{aligned}
f_i\left(j\right) &= \left(\mathbb{1}_{j=i-1}+\mathbb{1}_{j=i+1}\right)r_j\tilde{\mu}_j+\mathbb{1}_{i=j}\left(\mathbb{1}_{i\leq 2}\tfrac{r\tilde{\mu}_i\left(1-\tilde{\mu}_i\right)}{1-\tilde{\mu}}+\mathbb{1}_{i\geq 2}\tfrac{\hat{r}\tilde{\mu}_i\left(1-\tilde{\mu}_i\right)}{1-\hat{\mu}}\right)\\
&+\mathbb{1}_{i=1}\mathbb{1}_{j\geq 3}\left(\tilde{\mu}_j\left(r_{i+1}+\tfrac{r\tilde{\mu}_{i+1}}{1-\tilde{\mu}}\right)+F_{j,i+1}^{(1)}\right)+\mathbb{1}_{i=3}\mathbb{1}_{j\geq 3}\left(\tilde{\mu}_j\left(r_{i+1}+\tfrac{\hat{r}\tilde{\mu}_{i+1}}{1-\hat{\mu}}\right)+F_{j,i+1}^{(1)}\right)\\
&+\mathbb{1}_{i=2}\mathbb{1}_{j\leq 2}\left(\tilde{\mu}_j\left(r_{i-1}+\tfrac{r\tilde{\mu}_{i-1}}{1-\tilde{\mu}}\right)+F_{j,i-1}^{(1)}\right)+\mathbb{1}_{i=4}\mathbb{1}_{j\leq 2}\left(\tilde{\mu}_j\left(r_{i-1}+\tfrac{\hat{r}\tilde{\mu}_{i-1}}{1-\hat{\mu}}\right)+F_{j,i-1}^{(1)}\right).
\end{aligned}\tag{34.4.9}$$

Figura 34.1: Network of Cyclic Polling System with simple transfer

Grafica3.jpg

Figura 34.2: Network of Cyclic Polling System with double bidirectional transfer

Grafica4.jpg

Teorema 34.199 *For the system given in (34.4.6) we have that the second moments are in their general form*

$$\begin{aligned}
f_1(i,k) &= D_kD_i\left(R_2+\mathbf{F}_2+\mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbf{F}_4\right)+D_iR_2D_k\left(\mathbf{F}_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\mathbf{F}_4\right)+D_iF_2D_k\left(R_2+\mathbb{1}_{k\geq 3}\mathbf{F}_4\right)\\
&\quad +\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\mathbf{F}_4D_k\left(R_2+\mathbf{F}_2\right)\\
f_2(i,k) &= D_kD_i\left(R_1+\mathbf{F}_1+\mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbf{F}_3\right)+D_iR_1D_k\left(\mathbf{F}_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\mathbf{F}_3\right)+D_i\mathbf{F}_1D_k\left(R_1+\mathbb{1}_{k\geq 3}\mathbf{F}_3\right)\\
&\quad +\mathbb{1}_{i\geq 3}D_i\mathbf{F}_3D_k\left(R_1+\mathbf{F}_1\right)\\
f_3(i,k) &= D_kD_i\left(R_4+\mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbf{F}_2+\mathbf{F}_4\right)+D_i\tilde{R}_4D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}\mathbf{F}_2+\mathbf{F}_4\right)+D_i\mathbf{F}_4D_k\left(R_4+\mathbb{1}_{k\leq 2}\mathbf{F}_2\right)\\
&\quad +\mathbb{1}_{i\leq 2}D_i\mathbf{F}_2D_k\left(R_4+\mathbf{F}_4\right)\\
f_4(i,k) &= D_kD_i\left(R_3+\mathbb{1}_{i\leq 2}\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_3\right)+D_iR_3D_k\left(\mathbb{1}_{k\leq 2}\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_3\right)+D_i\mathbf{F}_3D_k\left(R_3+\mathbb{1}_{k\leq 2}\mathbf{F}_1\right)\\
&\quad +\mathbb{1}_{i\leq 2}D_i\mathbf{F}_1D_k\left(R_3+\mathbf{F}_3\right)
\end{aligned} \tag{34.4.10}$$

Corolario 34.82 *Conforming the equations given in (34.4.10) the second order moments are obtained solving the linear systems given by (34.5.2). These solutions are*

$$\begin{array}{ll}
f_1(1,1)=b_3, & f_2(2,2)=\frac{b_2}{1-b_1},\\
f_1(1,3)=a_4\left(\frac{b_2}{1-b_1}\right)+a_5K_{12}+K_3, & f_1(1,4)=a_6\left(\frac{b_2}{1-b_1}\right)+a_7K_{12}+K_4,\\
f_1(3,3)=a_8\left(\frac{b_2}{1-b_1}\right)+K_8, & f_1(3,4)=a_9\left(\frac{b_2}{1-b_1}\right)+K_9,\\
f_1(4,4)=a_{10}\left(\frac{b_2}{1-b_1}\right)+a_5K_{12}+K_{10}, & f_2(2,3)=a_{14}b_3+a_{15}K_2+K_{16},\\
f_2(2,4)=a_{16}b_3+a_{17}K_2+K_{17}, & f_2(3,3)=a_{18}b_3+K_{18},\\
f_2(3,4)=a_{19}b_3+K_{19}, & f_2(4,4)=a_{20}b_3+K_{20},\\
f_3(3,3)=\frac{b_5}{1-b_4}, & f_4(4,4)=b_6,\\
f_3(1,1)=a_{21}b_6+K_{21}, & f_3(1,2)=a_{22}b_6+K_{22},\\
f_3(1,3)=a_{23}b_6+a_{24}K_{39}+K_{23}, & f_3(2,2)=a_{25}b_6+K_{25},\\
f_3(2,3)=a_{26}b_6+a_{27}K_{39}+K_{26}, & f_4(1,1)=a_{31}\left(\frac{b_5}{1-b_4}\right)+K_{31},\\
f_4(1,2)=a_{32}\left(\frac{b_5}{1-b_4}\right)+K_{32}, & f_4(1,4)=a_{33}\left(\frac{b_5}{1-b_4}\right)+a_{34}K_{29}+K_{31},\\
f_4(2,2)=a_{35}\left(\frac{b_5}{1-b_4}\right)+K_{35}, & f_4(2,4)=a_{36}\left(\frac{b_5}{1-b_4}\right)+a_{37}K_{29}+K_{37}.
\end{array} \tag{34.4.11}$$

where

$$\begin{array}{lll}
N_1=a_2K_{12}+a_3K_{11}+K_1, & N_2=a_{12}K_2+a_{13}K_5+K_{15}, & b_1=a_1a_{11},\\
b_2=a_{11}N_1+N_2, & b_3=a_1\left(\frac{b_2}{1-b_1}\right)+N_1, & N_3=a_{29}K_{39}+a_{30}K_{38}+K_{28},\\
N_4=a_{39}K_{29}+a_{40}K_{30}+K_{40}, & b_4=a_{28}a_{38}, & b_5=a_{28}N_4+N_3,\\
 & b_6=a_{38}\left(\frac{b_5}{1-b_4}\right)+N_4. &
\end{array}$$

The values for the a_i's and K_i can be found in Appendix B. Finally

Definición 34.355 *Let L_i^* be the number of users at queue Q_i when it is polled, then*

$$\mathbb{E}\left[L_i^*\right]=f_i(i),\quad Var\left[L_i^*\right]=f_i(i,i)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. \tag{34.4.12}$$

34.4.2. Stability Analysis

We are interested in determine the queue lengths at any time, not just when the server arrives to the queue to start attending according to the exhaustive policy. For this purpose we need to make assumptions over the processes involved in order to guarantee the stability of the Network.

First of all we are going to assume the arrival processes are Poisson, the service time are exponential. In 1973 Disney [16] prove that the only stationary system $M/G/1/L$, with renewal departure process are the $M/M/1$ y $M/D/1/1$ systems, also this implies that the output process is Poisson with the same rate of the arrival process. The switchover times has no particular distribution, the only condition they have to satisfy is the first moment finite.

Sigman, Thorison and Wolff [40] proved that if there is a first regeneration time then exist a non decreasing infinite sequence of regeneration times. With this in consideration we have the following theorem

Teorema 34.200 *Given a Network of Cyclic Polling Systems (NCPS) conformed by two cyclic polling systems, each of them with $M/M/1$ queues. Both systems are related by users transfer between the queues Q_1, Q_3 and Q_2, Q_4. Suppose $\tilde{\mu}, \hat{\mu} < 1$. Let's define the following events for the arrival processes at time t: $A_j(t) = \{0 \text{ arrivals on } Q_j \text{ at time } t\}$, for some $t \geq 0$ and queue Q_j in the NCPS for $j = 1, 2, 3, 4$. Then there exist an non empty interval I such that for $T^* \in I$ the $\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(Tt^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I\} > 0$ is satisfied.*

Demostración 34.3 *Without of loss of generality we are going to consider as base of the analysis the queue Q_1 from the first system.*

Let's $n \geq 1$ cycle for the first system, so let's be $\overline{\tau}_1(n)$ time the server ends attending en queue Q_1, it means $L_j(\overline{\tau}_1(n)) = 0$. The server incurrs in a switchover time to traslate to the other queue, which is a random variable whose realitation is $r_1(n) > 0$, then we have that $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1(n)$.

Let's be $I_1 \equiv [\overline{\tau}_1(n), \tau_2(n)]$ the intreval with length $\xi_1 = r_1(n)$. Given that the arrival times are exponentials with rate $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ and the transfer users process from queue Q_3 are exponentials with rate $\hat{\mu}_1$, we have that the event $A_1(t)$ has probability given by

$$\mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)}. \tag{34.4.13}$$

In the other side, for the queue Q_2, the time $\overline{\tau}_2(n-1)$ is such that $L_2(\overline{\tau}_2(n-1)) = 0$, it means, it's the time when the queue is emptied by the server en the previous cycle. So we have a second time interval $I_2 \equiv [\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$ so the event $A_2(t)$ has probability

$$\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)}, \tag{34.4.14}$$

with length $\xi_2(n) = \tau_2(n) - \overline{\tau}_2(n-1)$. Given the time intervals construction we have that $I_1(n) \subset I_2(n)$, therefore $\xi_1(n) \leq \xi_2(n)$ so $-\xi_1(n) \geq -\xi_2(n)$ then $-\tilde{\mu}_2\xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2\xi_2(n)$ and finally $e^{-\tilde{\mu}_2\xi_1(n)} \geq e^{-\tilde{\mu}_2\xi_2(n)}$, then

$$\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\} \geq \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\}. \tag{34.4.15}$$

Now we can determine the joint conditional probability on the interval $I_1(n)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} &= \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\} \\
&\geq \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} \\
&= e^{-\tilde{\mu}_1\xi_1(n)} e^{-\tilde{\mu}_2\xi_2(n)} = e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n) + \tilde{\mu}_2\xi_2(n)]}.
\end{aligned}$$

It means

$$\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n) + \tilde{\mu}_2\xi_2(n)]} > 0. \tag{34.4.16}$$

With respect the relation between both systems, there exists some $m \geq 1$ such that $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$ therefore we have the following cases for $\tau_2(n)$:

2

a) $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \overline{\tau}_3(m)$,

b) $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$,

c) $\tau_4(m) < \tau_2(n) < \overline{\tau}_4(m)$,

d) $\overline{\tau}_4(m) < \tau_2(n) < \tau_3(m+1)$.

First consider the time interval $I_3(m) \equiv [\tau_3(m), \overline{\tau}_3(m)]$ such that $\tau_2(n) \in I_3(m)$, with length $\xi_3 \equiv \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m)$, then we have for the queue Q_3

$$\mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(m)\} = e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(m)}. \tag{34.4.17}$$

whereas for Q_4 lets consider the time interval $I_4(m) \equiv [\tau_4(m-1), \overline{\tau}_3(m)]$, then we have that $I_3(m) \subset I_4(m)$, therefore in a similar manner that we have done for Q_1 and Q_2 we obtain

$$\mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} \geq \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} \tag{34.4.18}$$

and

$$\mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\} \geq e^{-(\tilde{\mu}_3\xi_3(m) + \tilde{\mu}_4\xi_4(m))} > 0. \tag{34.4.19}$$

For the rest of the cases the demonstration is similar. It means we always can find a time interval where we can guarantee there is no arrivals to the queues in each system with positive probability.

By construction we have that $I(n,m) \equiv I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$, then in particular we have the following contentions $I(n,m) \subseteq I_1(n)$ and $I(n,m) \subseteq I_3(m)$, therefore if we define $\xi(n,m)$ as the length of the interval $I(n,m)$ we have $\xi(n,m) \leq \xi_1(n)$, $\xi(n,m) \leq \xi_3(m)$, then $-\xi(n,m) \geq -\xi_1(n)$ and finally $-\xi(n,m) \leq -\xi_3(m)$ therefore we have the following 2

a*)* $-\tilde{\mu}_1\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_1\xi_1(n)$,

b*)* $-\tilde{\mu}_2\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_2\xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2\xi_2(n)$,

c*)* $-\tilde{\mu}_3\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_3\xi_3(m)$,

d*)* $-\tilde{\mu}_4\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_4\xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4\xi_4(m)$.

Let's $T^* \in I(n,m)$, then given that in particular $T^* \in I_1(n)$, there is no arrivals to the queues Q_1 and Q_2, therefore there is no transfer users from Q_3 and Q_4, it means, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$, $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$, thats it, the events A_1 and A_3 are conditionally independent in the interval $I(n,m)$; the same goes for the events A_2 and A_4, therefore we have

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(T^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I(n,m)\} = \prod_{j=1}^4 \mathbb{P}\{A_j(T^*) | T^* \in I(n,m)\} \\
&\geq \mathbb{P}\{A_1(T^*) | T^* \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(T^*) | T^* \in I_2(n)\} \mathbb{P}\{A_3(T^*) | T^* \in I_3(m)\} \mathbb{P}\{A_4(T^*) | T^* \in I_4(m)\} \\
&= e^{-\mu_1\xi_1(n)} e^{-\mu_2\xi_2(n)} e^{-\mu_3\xi_3(m)} e^{-\mu_4\xi_4(m)} = e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n) + \tilde{\mu}_2\xi_2(n) + \tilde{\mu}_3\xi_3(m) + \tilde{\mu}_4\xi_4(m)]} > 0.
\end{aligned} \tag{34.4.20}$$

Now we only need to prove that for $n \geq 1$, there exist an $m \geq 1$ such that the cases mentioned before are satisfied:

2

a) $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \overline{\tau}_3(m)$,

b) $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$,

c) $\tau_4(m) < \tau_2(n) < \overline{\tau}_4(m)$,

d) $\overline{\tau}_4(m) < \tau_2(n) < \tau_3(m+1)$.

We only give the proof for the fist case, for the rest the demonstration are similar. Suppose there is no $m \geq 1$, with $I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$, it means that for all $m \geq 1$, $I_1(n) \cap I_3(m) = \emptyset$, then we have only two cases

a) $\tau_2(n) \leq \tau_3(m)$*: Recall that* $\tau_2(m) = \overline{\tau}_1 + r_1(m)$ *where each of the random variables are such that* $\mathbb{E}[\overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n)] < \infty$, $\mathbb{E}[R_1] < \infty$ *y* $\mathbb{E}[\tau_3(m)] < \infty$*, which contradicts the fact that there is no such* $m \geq 1$.

b) $\tau_2(n) \geq \overline{\tau}_3(m)$*: the reasoning is similar to the previous given.*

According to the stablished in Sigman, Thorison and Wolff [40] theorem (34.279) allow us to ensure that there is an infinite sequence of regeneration times, let $T_1, T_2, \ldots$ considered as the regeneration points, then we have that just like in Takagi [42], the following definition

Definición 34.356 *the interval between two such succesive regeneration points will be called regenerative cycle.*

And for the regeneration points

Definición 34.357 *Let M_i be the number of polling cycles in a regenerative cycle.*

Definición 34.358 *Considering the M_i's, the duration of the m-th polling cycle in a regeneration cycle will be denoted by $C_i^{(m)}$, for $m = 1, 2, \ldots, M_i$.*

And finally, the mean polling cycle time is defined by

Definición 34.359

$$\mathbb{E}[C_i] = \frac{\sum_{m=1}^{M_i} \mathbb{E}\left[C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}[M_i]} \tag{34.4.21}$$

Teorema 34.201 *The process $\{C_i : i = 1, 2, \ldots, M_i\}$ is a regenerative process. Also there exists a regenerative and stationary process as function of this process.*

With this in mind let denote by L_i the number of users at queue Q_i at arbitrary times. Their generating probability function will be denoted by $Q_i(z)$ which is also given by the time average of $z^{L_i(t)}$ over the regenerative cycled defined before so we have

$$Q_i(z) \quad = \quad \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

which can be rewritten as

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1-z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \tag{34.4.22}$$

If we define the following

$$S(z) = 1 - F(z), \quad T(z) = z - P(z), \quad U(z) = 1 - P(z). \tag{34.4.23}$$

then

$$\mathbb{E}[C_i] Q(z) = \frac{(z-1) S(z) P(z)}{T(z) U(z)}. \tag{34.4.24}$$

Where if we define $a_k = P\{L(t) = k\}$ then

$$S(z) = 1 - F(z) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

therefore $S'(z) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}$*, with* $S^{(1)}(1) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k = -\mathbb{E}[L(t)]$*, and* $S''(z) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k z^{k-2}$ *so* $S^{(2)}(1) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k = \mathbb{E}[L(L-1)]$*; in the same way we obtain* $S'''(z) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2) a_k z^{k-3}$ *and* $S^{(3)}(1) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2) a_k = -\mathbb{E}[L(L-1)(L-2)] = -\mathbb{E}\left[L^3\right] + 3 - \mathbb{E}\left[L^2\right] - 2 - \mathbb{E}[L]$.
it means

$$\begin{aligned} &S^{(1)}(1) = -\mathbb{E}[L(t)], \\ &S^{(2)}(1) = -\mathbb{E}[L(L-1)] = -\mathbb{E}\left[L^2\right] + \mathbb{E}[L], \\ &S^{(3)}(1) = -\mathbb{E}[L(L-1)(L-2)] = -\mathbb{E}\left[L^3\right] + 3\mathbb{E}\left[L^2\right] - 2\mathbb{E}[L]. \end{aligned} \tag{34.4.25}$$

expanding around $z=1$

$$\begin{aligned} S(z) &= S(1)+\frac{S^{'}(1)}{1!}(z-1)+\frac{S^{''}(1)}{2!}(z-1)^2+\frac{S^{'''}(1)}{3!}(z-1)^3+\ldots+\\ &= (z-1)\left\{S^{'}(1)+\frac{S^{''}(1)}{2!}(z-1)+\frac{S^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2+\ldots+\right\}\\ &= (z-1)R_1(z)\end{aligned}$$

with $R_1(z)\neq 0$*, given that* $R_1(z)=-\mathbb{E}[L]$ *then*

$$R_1(z) = S^{'}(1)+\frac{S^{''}(1)}{2!}(z-1)+\frac{S^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2+\frac{S^{iv}(1)}{4!}(z-1)^3+\ldots+ \tag{34.4.26}$$

Calculating the derivatives and evaluating in $z=1$

$$\begin{array}{l} R_1(1)=S^{(1)}(1)=-\mathbb{E}[L]\\ R_1^{(1)}(1)=\frac{1}{2}S^{(2)}(1)=-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[L^2\right]+\frac{1}{2}\mathbb{E}[L]\\ R_1^{(2)}(1)=\frac{2}{3!}S^{(3)}(1)=-\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[L^3\right]+\mathbb{E}\left[L^2\right]-\frac{2}{3}\mathbb{E}[L]\end{array} \tag{34.4.27}$$

In a similar manner for $T(z)=z-P(z)$ *can be found an expansion around* $z=1$*:*

$$\begin{aligned} T(z) &= T(1)+\frac{T^{'}(1)}{1!}(z-1)+\frac{T^{''}(1)}{2!}(z-1)^2+\frac{T^{'''}(1)}{3!}(z-1)^3+\ldots+\\ &= (z-1)\left\{T^{'}(1)+\frac{T^{''}(1)}{2!}(z-1)+\frac{T^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2+\ldots+\right\}\\ &= (z-1)R_2(z)\end{aligned}$$

where

$$\begin{array}{l} T^{(1)}(1)=-\mathbb{E}[X(t)]=-\mu,\\ T^{(2)}(1)=-\mathbb{E}[X(X-1)]=-\mathbb{E}\left[X^2\right]+\mathbb{E}[X]=-\mathbb{E}\left[X^2\right]+\mu,\\ T^{(3)}(1)=-\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)]=-\mathbb{E}\left[X^3\right]+3\mathbb{E}\left[X^2\right]-2\mathbb{E}[X]\\ =-\mathbb{E}\left[X^3\right]+3\mathbb{E}\left[X^2\right]-2\mu.\end{array} \tag{34.4.28}$$

therefore $R_2(1)\neq 0$*, because*

$$R_2(1)=1-\mathbb{E}[X]=1-\mu \tag{34.4.29}$$

then

$$R_2(z) = T^{'}(1)+\frac{T^{''}(1)}{2!}(z-1)+\frac{T^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2+\frac{T^{(iv)}(1)}{4!}(z-1)^3+\ldots+ \tag{34.4.30}$$

Calculating the derivatives and evaluating $z=1$

$$\begin{array}{l} R_2(1)=T^{(1)}(1)=1-\mu\\ R_2^{(1)}(1)=\frac{1}{2}T^{(2)}(1)=-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right]+\frac{1}{2}\mu\\ R_2^{(2)}(1)=\frac{2}{3!}T^{(3)}(1)=-\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[X^3\right]+\mathbb{E}\left[X^2\right]-\frac{2}{3}\mu\end{array} \tag{34.4.31}$$

Finally proceeding in analogous manner for $U(z)=1-P(z)$ *also can be found an expansion around* $z=1$

$$\begin{array}{l} U(z)=U(1)+\frac{U^{'}(1)}{1!}(z-1)+\frac{U^{''}(1)}{2!}(z-1)^2+\frac{U^{'''}(1)}{3!}(z-1)^3+\ldots+\\ =(z-1)\left\{U^{'}(1)+\frac{U^{''}(1)}{2!}(z-1)+\frac{U^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2+\ldots+\right\}=(z-1)R_3(z)\end{array}$$

where

$$\begin{array}{l} U^{(1)}(1)=-\mathbb{E}[X(t)]=-\mu,\\ U^{(2)}(1)=-\mathbb{E}[X(X-1)]=-\mathbb{E}\left[X^2\right]+\mathbb{E}[X]=-\mathbb{E}\left[X^2\right]+\mu,\\ U^{(3)}(1)=-\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)]=-\mathbb{E}\left[X^3\right]+3\mathbb{E}\left[X^2\right]-2\mathbb{E}[X]\\ =-\mathbb{E}\left[X^3\right]+3\mathbb{E}\left[X^2\right]-2\mu.\end{array}$$

Therefore $R_3(1)\neq 0$*, because*

$$R_3(1) = -\mathbb{E}[X] = -\mu \tag{34.4.32}$$

then

$$R_3(z) = U^{'}(1) + \frac{U^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{U^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \frac{U^{(iv)}(1)}{4!}(z-1)^3 + \ldots + \tag{34.4.33}$$

calculating the derivatives and evaluating in $z=1$

$$\begin{array}{l} R_3(1) = U^{(1)}(1) = -\mu \\ R_3^{(1)}(1) = \frac{1}{2}U^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right] + \frac{1}{2}\mu \\ R_3^{(2)}(1) = \frac{2}{3!}U^{(3)}(1) = -\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[X^3\right] + \mathbb{E}\left[X^2\right] - \frac{2}{3}\mu \end{array} \tag{34.4.34}$$

Then we have that

$$\mathbb{E}[C_i]\,Q(z) = \frac{(z-1)(z-1)R_1(z)P(z)}{(z-1)R_2(z)(z-1)R_3(z)} = \frac{R_1(z)P(z)}{R_2(z)R_3(z)} \equiv \frac{R_1P}{R_2R_3} \tag{34.4.35}$$

Calcuating the derivative with respect z

$$\left[\frac{R_1(z)P(z)}{R_2(z)R_3(z)}\right]^{'} = \frac{PR_2R_3R_1^{'} + R_1R_2R_3P^{'} - R_3R_1PR_2 - R_2R_1PR_3^{'}}{(R_2R_3)^2} \tag{34.4.36}$$

evauatong in $z=1$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R_2(1)R_3(1)R_1^{(1)}(1) + R_1(1)R_2(1)R_3(1)P^{'}(1) - R_3(1)R_1(1)R_2(1)^{(1)} - R_2(1)R_1(1)R_3^{'}(1)}{(R_2(1)R_3(1))^2} \\
&= \frac{1}{(1-\mu)^2\mu^2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}L\right)(1-\mu)(-\mu) + (-\mathbb{E}L)(1-\mu)(-\mu)\mu\right. \\
&\quad \left. - \left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2 + \frac{1}{2}\mu\right)(-\mu)(-\mathbb{E}L) - (1-\mu)(-\mathbb{E}L)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2 + \frac{1}{2}\mu\right)\right\} \\
&= \frac{1}{(1-\mu)^2\mu^2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}L\right)\left(\mu^2 - \mu\right) + \left(\mu^2 - \mu^3\right)\mathbb{E}L\right. \\
&\quad \left. -\mu\mathbb{E}L\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2 + \frac{1}{2}\mu\right) + (\mathbb{E}L - \mu\mathbb{E}L)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2 + \frac{1}{2}\mu\right)\right\} \\
&= \frac{1}{(1-\mu)^2\mu^2}\left\{-\frac{1}{2}\mu^2\mathbb{E}L^2 + \frac{1}{2}\mu\mathbb{E}L^2 + \frac{1}{2}\mu^2\mathbb{E}L - \mu^3\mathbb{E}L + \mu\mathbb{E}L\mathbb{E}X^2 - \frac{1}{2}\mathbb{E}L\mathbb{E}X^2\right\} \\
&= \frac{1}{(1-\mu)^2\mu^2}\left\{\frac{1}{2}\mu\mathbb{E}L^2(1-\mu) + \mathbb{E}L\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\left(\mu^2 - \mathbb{E}X^2\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2\mu(1-\mu)}\mathbb{E}L^2 - \frac{\frac{1}{2}-\mu}{(1-\mu)^2\mu^2}\sigma^2\mathbb{E}L
\end{aligned}$$

Then we get (Takagi's formula)

$$Q^{(1)} = \frac{1}{\mathbb{E}C}\left\{\frac{1}{2\mu(1-\mu)}\mathbb{E}L^2 - \frac{\frac{1}{2}-\mu}{(1-\mu)^2\mu^2}\sigma^2\mathbb{E}L\right\}$$

with

$$\mathbb{E}C = \frac{\mathbb{E}L}{\mu(1-\mu)}$$

therefore

$$\begin{aligned}
Q^{(1)} &= \frac{1}{2}\frac{\mathbb{E}L^2}{\mathbb{E}L} - \frac{\frac{1}{2}-\mu}{(1-\mu)\mu}\sigma^2 = \frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}L} - \frac{\sigma^2}{2}\left\{\frac{2\mu-1}{(1-\mu)\mu}\right\} \\
&= \frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}L} + \frac{\sigma^2}{2}\left\{\frac{1}{1-\mu} + \frac{1}{\mu}\right\}
\end{aligned}$$

while for us

$$Q^{(1)} = \frac{1}{\mu\left(1-\mu\right)}\frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}C} - \sigma^2\frac{\mathbb{E}L}{2\mathbb{E}C}\cdot\frac{1-2\mu}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}.$$

Now, reconsider the equation (34.10.21)

$$\left[\frac{R_1\left(z\right)P\left(z\right)}{R_2\left(z\right)R_3\left(z\right)}\right]^{'} = \frac{PR_2R_3R_1^{'}+R_1R_2R_3P^{'}-R_3R_1PR_2-R_2R_1PR_3^{'}}{\left(R_2R_3\right)^2} \equiv \frac{F\left(z\right)}{G\left(z\right)}$$

where

$$\begin{array}{l} F\left(z\right) = PR_2R_3R_1^{'}+R_1R_2R_3P^{'}-R_3R_1PR_2^{'}-R_2R_1PR_3^{'}\\ G\left(z\right) = R_2^2R_3^2\\ G^2\left(z\right) = R_2^4R_3^4 = \left(1-\mu\right)^4\mu^4 \end{array} \tag{34.4.37}$$

so

$$\begin{array}{l} G^{'}\left(z\right) = 2R_2R_3\left[R_2^{'}R_3+R_2R_3^{'}\right]\\ G^{'}\left(1\right) = -2\left(1-\mu\right)\mu\left[\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right]+\frac{1}{2}\mu\right)\left(-\mu\right)+\left(1-\mu\right)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right]+\frac{1}{2}\mu\right)\right]\\ F^{'}\left(z\right) = \left[\left(R_2R_3\right)R_1^{''}-\left(R_1R_3\right)R_2^{''}-\left(R_1R_2\right)R_3^{''}-2\left(R_2^{'}R_3^{'}\right)R_1\right]P+2\left(R_2R_3\right)R_1^{'}P^{'}+\left(R_1R_2R_3\right)P^{''}. \end{array} \tag{34.4.38}$$

Now, let us calculate $F^{'}\left(z\right)G\left(z\right)+F\left(z\right)G^{'}\left(z\right)$:

$$\begin{array}{l} F^{'}\left(z\right)G\left(z\right)+F\left(z\right)G^{'}\left(z\right) = \left\{\left[\left(R_2R_3\right)R_1^{''}-\left(R_1R_3\right)R_2^{''}-\left(R_1R_2\right)R_3^{''}-2\left(R_2^{'}R_3^{'}\right)R_1\right]P\right.\\ \left.+2\left(R_2R_3\right)R_1^{'}P^{'}+\left(R_1R_2R_3\right)P^{''}\right\}R_2^2R_3^2-\left\{\left[PR_2R_3R_1^{'}+R_1R_2R_3P^{'}-R_3R_1PR_2^{'}\right.\right.\\ \left.\left.-R_2R_1PR_3^{'}\right]\left[2R_2R_3\left(R_2^{'}R_3+R_2R_3^{'}\right)\right]\right\} \end{array}$$

now evaluate in $z=1$

$$\begin{array}{rcl} F^{'}\left(1\right)G\left(1\right) & + & F\left(1\right)G^{'}\left(1\right) = \left(1+R_3\right)^3R_3^3R_1^{''}-\left(1+R_3\right)^2R_1R_3^3R_3^{''}-\left(1+R_3\right)^3R_3^2R_1R_3^{''}\\ & - & 2\left(1+R_3\right)^2R_3^2\left(R_3^{'}\right)^2\\ & + & 2\left(1+R_3\right)^3R_3^3R_1^{'}P^{'}+\left(1+R_3\right)^3R_3^3R_1P^{''}-2\left(1+R_3\right)^2R_3^2\left(1+2R_3\right)R_3^{'}R_1^{'}\\ & - & 2\left(1+R_3\right)^2R_3^2R_1R_3^{'}\left(1+2R_3\right)P^{'}+2\left(1+R_3\right)\left(1+2R_3\right)R_3^3R_1\left(R_3^{'}\right)^2\\ & + & 2\left(1+R_3\right)^2\left(1+2R_3\right)R_1R_3R_3^{'}\\ & = & -\left(1-\mu\right)^3\mu^3R_1^{''}-\left(1-\mu\right)^2\mu^2R_1\left(1-2\mu\right)R_3^{''}-\left(1-\mu\right)^3\mu^3R_1P^{''}\\ & + & 2\left(1-\mu\right)\mu^2\left[\left(1-2\mu\right)R_1-\left(1-\mu\right)\right]\left(R_3^{'}\right)^2-2\left(1-\mu\right)^2\mu R_1\left(1-2\mu\right)R_3^{'}\\ & - & 2\left(1-\mu\right)^3\mu^4R_1^{'}-2\mu\left(1-\mu\right)\left(1-2\mu\right)R_3^{'}R_1^{'}-2\mu^3\left(1-\mu\right)^2\left(1-2\mu\right)R_1R_1^{'} \end{array}$$

therefore

$$\begin{array}{rcl} \left[\frac{F\left(z\right)}{G\left(z\right)}\right]^{'} & = & \frac{1}{\mu^3\left(1-\mu\right)^3}\left\{-\left(1-\mu\right)^2\mu^2R_1^{''}-\mu\left(1-\mu\right)\left(1-2\mu\right)R_1R_3^{''}-\mu^2\left(1-\mu\right)^2R_1P^{''}\right.\\ & & +2\mu\left[\left(1-2\mu\right)R_1-\left(1-\mu\right)\right]\left(R_3^{'}\right)^2-2\left(1-\mu\right)\left(1-2\mu\right)R_1R_3^{'}-2\mu^3\left(1-\mu\right)^2R_1^{'}\\ & & \left.-2\left(1-2\mu\right)R_3^{'}R_1^{'}-2\mu^2\left(1-\mu\right)\left(1-2\mu\right)R_1R_1^{'}\right\} \end{array}$$

recall that

$$
\begin{aligned}
R_1 &= -\mathbb{E}L\\
R_3 &= -\mu\\
R_1^{'} &= -\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}L\\
R_3^{'} &= -\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\\
R_1^{''} &= -\frac{1}{3}\mathbb{E}L^3+\mathbb{E}L^2-\frac{2}{3}\mathbb{E}L\\
R_3^{''} &= -\frac{1}{3}\mathbb{E}X^3+\mathbb{E}X^2-\frac{2}{3}\mu\\
R_1R_3^{'} &= \frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L-\frac{1}{2}\mathbb{E}X\mathbb{E}L\\
R_1R_1^{'} &= \frac{1}{2}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}L+\frac{1}{2}\mathbb{E}^2L\\
R_3^{'}R_1^{'} &= \frac{1}{4}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L^2-\frac{1}{4}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L-\frac{1}{4}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}X+\frac{1}{4}\mathbb{E}X\mathbb{E}L\\
R_1R_3^{''} &= \frac{1}{6}\mathbb{E}X^3\mathbb{E}L^2-\frac{1}{6}\mathbb{E}X^3\mathbb{E}L-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L+\frac{1}{3}\mathbb{E}X\mathbb{E}L^2-\frac{1}{3}\mathbb{E}X\mathbb{E}L\\
R_1P^{''} &= -\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L\\
\left(R_3^{'}\right)^2 &= \frac{1}{4}\mathbb{E}^2X^2-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}X+\frac{1}{4}\mathbb{E}^2X
\end{aligned}
$$

34.5. Appendix A: General Case Calculations Exhaustive Policy

Remember the equations given in equations (34.4.4) and (34.4.10) for the first and second order partial derivatives respectively. The first moments equations for the queue lengths as before for the times the server arrives to the queue to start attending are obtained solving the system given by $f_1(i) = D_i R_2 + D_i \mathbf{F}_2 + \mathbb{1}_{i\geq 3} D_i \mathbf{F}_4$, *similar expressions of the queues for the rest give us the linear system*

$$\begin{array}{ll}
f_1(1) = r_2\tilde{\mu}_1 + \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + f_2(1), & f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2, \\
f_1(3) = r_2\tilde{\mu}_3 + \frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + F^{(1)}_{3,2}(1), & f_1(4) = r_2\tilde{\mu}_4 + \frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2) + F^{(1)}_{4,2}(1), \\
f_2(1) = r_1\tilde{\mu}_1, & f_2(2) = r_1\tilde{\mu}_2 + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_1} f_1(1) + f_1(2), \\
f_2(3) = r_1\tilde{\mu}_3 + \frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_1} f_1(1) + F^{(1)}_{3,1}(1), & f_2(4) = r_1\tilde{\mu}_4 + \frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_1} f_1(1) + F^{(1)}_{4,1}(1), \\
f_3(1) = \tilde{r}_4\tilde{\mu}_1 + \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_4} f_4(4) + F^{(1)}_{1,4}(1), & f_3(2) = \tilde{r}_4\tilde{\mu}_2 + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_4} f_4(4) + F^{(1)}_{2,4}(1), \\
f_3(3) = \tilde{r}_4\tilde{\mu}_3 + \frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_4} f_4(4) + f_4(3), & f_3(4) = \tilde{r}_4\tilde{\mu}_4 \\
f_4(1) = \tilde{r}_3\tilde{\mu}_1 + \frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_3} f_3(3) + F^{(1)}_{1,3}(1), & f_4(2) = \tilde{r}_3\mu_2 + \frac{\tilde{\mu}_2}{1-\tilde{\mu}_3} f_3(3) + F^{(1)}_{2,3}(1), \\
f_4(3) = \tilde{r}_3\tilde{\mu}_3, & f_4(4) = \tilde{r}_3\tilde{\mu}_4 + \frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_3} f_3(3) + f_3(4),
\end{array}$$

Then we have that if $\mu = \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2 < 1$, $\hat{\mu} = \tilde{\mu}_3 + \tilde{\mu}_4 < 1$, $r = r_1 + r_2$ *and* $\hat{r} = \tilde{r}_3 + \tilde{r}_4$ *the system's solution are obtained by direct calculations:*

$$\begin{array}{ll}
f_2(1) = r_1\tilde{\mu}_1, & f_1(2) = r_2\tilde{\mu}_2, \\
f_3(4) = r_4\tilde{\mu}_4, & f_4(3) = r_3\tilde{\mu}_3, \\
f_1(1) = r\frac{\tilde{\mu}_1(1-\tilde{\mu}_1)}{1-\mu}, & f_2(2) = r\frac{\tilde{\mu}_2(1-\tilde{\mu}_2)}{1-\mu}, \\
f_1(3) = \tilde{\mu}_3\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + F^{(1)}_{3,2}(1), & f_1(4) = \tilde{\mu}_4\left(r_2 + \frac{r\tilde{\mu}_2}{1-\mu}\right) + F^{(1)}_{4,2}(1), \\
f_2(3) = \tilde{\mu}_3\left(r_1 + \frac{r\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}}\right) + F^{(1)}_{3,1}(1), & f_2(4) = \tilde{\mu}_4\left(r_1 + \frac{r\tilde{\mu}_1}{1-\mu}\right) + F^{(1)}_{4,,1}(1), \\
f_3(1) = \tilde{\mu}_1\left(r_4 + \frac{\hat{r}\tilde{\mu}_4}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,4}(1), & f_3(2) = \tilde{\mu}_2\left(r_4 + \frac{\hat{r}\tilde{\mu}_4}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,4}(1), \\
f_3(3) = \hat{r}\frac{\tilde{\mu}_3(1-\tilde{\mu}_3)}{1-\hat{\mu}}, & f_4(1) = \tilde{\mu}_1\left(r_3 + \frac{\hat{r}\tilde{\mu}_3}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{1,3}(1), \\
f_4(2) = \tilde{\mu}_2\left(r_3 + \frac{\hat{r}\tilde{\mu}_3}{1-\hat{\mu}}\right) + F^{(1)}_{2,3}(1), & f_4(4) = \hat{r}\frac{\tilde{\mu}_4(1-\tilde{\mu}_4)}{1-\hat{\mu}}.
\end{array}$$

Now, developing the equations given in (34.4.10) we obtain for instance $f_1(1,1) = \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 f_2(2,2) + 2\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2} f_2(2,1) + f_2(1,1) + \tilde{\mu}_1^2\left(R_2^{(2)} + f_2(2)\,\theta_2^{(2)}\right) + \tilde{P}_1^{(2)}\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2} + r_2\right) + 2r_2\tilde{\mu}_2 f_2(1)$; *similar reasoning lead us the following general expressions*

$$\begin{aligned}
f_1(i,j) &= \mathbb{1}_{i=1} f_2(1,1) + \left[(1-\mathbb{1}_{i=j=3})\,\mathbb{1}_{i+j\leq 6}\mathbb{1}_{i\leq j}\frac{\mu_j}{1-\tilde{\mu}_2} + (1-\mathbb{1}_{i=j=3})\,\mathbb{1}_{i+j\leq 6}\mathbb{1}_{i>j}\frac{\mu_i}{1-\tilde{\mu}_2}\right.\\
&\left.+\mathbb{1}_{i=1}\frac{\mu_i}{1-\tilde{\mu}_2}\right] f_2(1,2) + \mathbb{1}_{i,j\neq 2}\left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2 \mu_i\mu_j f_2(2,2) + \left[\mathbb{1}_{i,j\neq 2}\tilde{\theta}_2^{(2)}\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{i,j\neq 2}\mathbb{1}_{i=j}\frac{\tilde{P}_i^{(2)}}{1-\tilde{\mu}_2}\right.\\
&\left.+\mathbb{1}_{i,j\neq 2}\mathbb{1}_{i\neq j}\frac{\tilde{\mu}_i\tilde{\mu}_j}{1-\tilde{\mu}_2}\right] f_2(2) + \left[r_2\tilde{\mu}_i + \mathbb{1}_{i\geq 3}F^{(1)}_{i,2}\right] f_2(j) + \left[r_2\tilde{\mu}_j + \mathbb{1}_{j\geq 3}F^{(1)}_{j,2}\right] f_2(i)\\
&+\left[R_2^{(2)} + \mathbb{1}_{i=j} r_2\right]\tilde{\mu}_i\mu_j + \mathbb{1}_{j\geq 3}F^{(1)}_{j,2}\left[\mathbb{1}_{j\neq i}F^{(1)}_{i,2} + r_2\tilde{\mu}_i\right] + r_2\left[\mathbb{1}_{i=j}P_i^{(2)} + \mathbb{1}_{i\geq 3}F^{(1)}_{i,2}\tilde{\mu}_j\right]\\
&+\mathbb{1}_{i\geq 3}\mathbb{1}_{j=i}F^{(2)}_{i,2}
\end{aligned} \tag{34.5.1}$$

in a similar manner we obtain expressions for $f_2(i,j)$, $f_3(i,j)$ *and* $f_4(i,j)$
for $i,k = 1,2,3,4$; *from which we obtain the linear equations system*

$$\begin{array}{ll}
f_1(1,1) = a_1 f_2(2,2) + a_2 f_2(2,1) + a_3 f_2(1,1) + K_1, & f_1(1,2) = K_2, \\
f_1(1,3) = a_4 f_2(2,2) + a_5 f(2,1) + K_3, & f_1(1,4) = a_6 f_2(2,2) + a_7 f_2(2,1) + K_4,
\end{array} \tag{34.5.2}$$

for the rest equations, similar reasoning lead us to a linear system equations whose solutions are described in corolary (34.82) with coefficients given by, we just show a few of them
with values for a_i *and* K_i

$$\begin{array}{llll}
a_1 = \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2, & a_2 = \frac{2\tilde{\mu}_1}{1-\tilde{\mu}_2}, & a_3 = 1, & a_4 = \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3, \\
a_5 = \frac{\tilde{\mu}_3}{1-\tilde{\mu}_2}, & a_6 = \left(\frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)^2\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4, & a_7 = \frac{\tilde{\mu}_4}{1-\tilde{\mu}_2}, &
\end{array} \tag{34.5.3}$$

$$\begin{aligned}
K_1 &= \tilde{\mu}_1^2\left(R_2^{(2)} + f_2(2)\,\theta_2^{(2)}\right) + \tilde{P}_1^{(2)}\left(\frac{f_2(2)}{1-\tilde{\mu}_2} + r_2\right) + 2r_2\tilde{\mu}_2 f_2(1),\\
K_2 &= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2\left[R_2^{(2)} + r_2\right] + r_2\left[\tilde{\mu}_1 f_2(2) + \tilde{\mu}_2 f_2(1)\right],\\
K_3 &= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_3\left[R_2^{(2)} + r_2 + f_2(2)\left(\tilde{\theta}_2^{(2)} + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\right] + r_2\tilde{\mu}_1\left[F^{(1)}_{3,2} + f_2(1)\right] + \left[r_2\tilde{\mu}_3 + F^{(1)}_{3,2}\right] f_2(1),\\
K_4 &= \tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_4\left[R_2^{(2)} + r_2 + f_2(2)\left(\tilde{\theta}_2^{(2)} + \frac{1}{1-\tilde{\mu}_2}\right)\right] + r_2\tilde{\mu}_1\left[f_2(4) + F^{(1)}_{4,2}\right] + f_2(1)\left[r_2\tilde{\mu}_4 + F^{(1)}_{4,2}\right],
\end{aligned} \tag{34.5.4}$$

34.6. Appendix B: Stability Analysis for a NCPS

Teorema 34.202 *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t, $A_j(t) = \{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\}$ para algún tiempo $t \geq 0$ y Q_j la cola j-ésima en la RSVC, para $j = 1, 2, 3, 4$. Existe un intervalo $I \neq \emptyset$ tal que para $T^* \in I$, tal que $\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(Tt^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I\} > 0$.*

Demostración 34.4 *Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.*

Sea $n \geq 1$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1(n) > 0$, entonces tenemos que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1(n)$.

Definamos el intervalo $I_1 \equiv [\overline{\tau}_1(n), \tau_2(n)]$ de longitud $\xi_1 = r_1(n)$.
Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$\mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)}. \tag{34.6.1}$$

Por otra parte, para la cola Q_2 el tiempo $\overline{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\overline{\tau}_2(n-1)) = 0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n.

Entonces tenemos un sgundo intervalo $I_2 \equiv [\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)}, \tag{34.6.2}$$

$$\xi_2(n) = \tau_2(n) - \overline{\tau}_2(n-1) \tag{34.6.3}$$

Ahora, dado que $I_1(n) \subset I_2(n)$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
\xi_1(n) \leq \xi_2(n) & \Leftrightarrow & -\xi_1(n) \geq -\xi_2(n) \\
-\tilde{\mu}_2 \xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_2(n) & \Leftrightarrow & e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_1(n)} \geq e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)} \\
\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\} & \geq & \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\}.
\end{array}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} & = & \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\} \\
& \geq & \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} \\
& = & e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]}.
\end{array}$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]} > 0. \tag{34.6.4}$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC para algún $m \geq 1$ se tiene que $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$ por lo tanto se cumple cualquiera de los siguientes cuatro casos

a) $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \overline{\tau}_3(m)$

b) $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$

c) $\tau_4(m) < \tau_2(n) < \overline{\tau}_4(m)$

d) $\overline{\tau}_4(m) < \tau_2(n) < \tau_3(m+1)$

Sea el intervalo $I_3(m) \equiv [\tau_3(m), \overline{\tau}_3(m)]$ tal que $\tau_2(n) \in I_3(m)$, con longitud de intervalo $\xi_3 \equiv \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m)$, entonces se tiene que para Q_3

$$\mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(m)\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)}. \tag{34.6.5}$$

mientras que para Q_4 consideremos el intervalo $I_4(m) \equiv [\tau_4(m-1), \overline{\tau}_3(m)]$, entonces por construcción $I_3(m) \subset I_4(m)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\xi_3(m) \leq \xi_4(m) &\Leftrightarrow -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m)\\ -\tilde{\mu}_4\xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4\xi_4(m) &\Leftrightarrow e^{-\tilde{\mu}_4\xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(n)}\\ \mathbb{P}\{A_4(t)\,|t \in I_3(m)\} &\geq \mathbb{P}\{A_4(t)\,|t \in I_4(m)\}.\end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t)\,|t \in I_3(m)\} &= \mathbb{P}\{A_3(t)\,|t \in I_3(m)\}\,\mathbb{P}\{A_4(t)\,|t \in I_3(m)\}\\ &\geq \mathbb{P}\{A_3(t)\,|t \in I_3(m)\}\,\mathbb{P}\{A_4(t)\,|t \in I_4(m)\}\\ &= e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(m)}e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(m)} = e^{-(\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m))}.\end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t)\,|t \in I_3(m)\} \geq e^{-(\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m))} > 0. \tag{34.6.6}$$

Sea el intervalo $I_3(m) \equiv [\overline{\tau}_3(m), \tau_4(m)]$ *con longitud* $\xi_3 \equiv \tau_4(m) - \overline{\tau}_3(m)$*, entonces se tiene que para* Q_3

$$\mathbb{P}\{A_3(t)\,|t \in I_3(m)\} = e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(m)}. \tag{34.6.7}$$

mientras que para Q_4 *consideremos el intervalo* $I_4(m) \equiv [\overline{\tau}_4(m-1), \tau_4(m)]$*, entonces por construcción* $I_3(m) \subset I_4(m)$*, y al igual que en el caso anterior se tiene que*

$$\begin{aligned}\xi_3(m) \leq \xi_4(m) &\Leftrightarrow -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m)\\ -\tilde{\mu}_4\xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4\xi_4(m) &\Leftrightarrow e^{-\tilde{\mu}_4\xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(n)}\\ \mathbb{P}\{A_4(t)\,|t \in I_3(m)\} &\geq \mathbb{P}\{A_4(t)\,|t \in I_4(m)\}.\end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t)\,|t \in I_3(m)\} &= \mathbb{P}\{A_3(t)\,|t \in I_3(m)\}\,\mathbb{P}\{A_4(t)\,|t \in I_3(m)\}\\ &\geq \mathbb{P}\{A_3(t)\,|t \in I_3(m)\}\,\mathbb{P}\{A_4(t)\,|t \in I_4(m)\}\\ &= e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(m)}e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(m)} = e^{-(\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m))}.\end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t)\,|t \in I_4(m)\} \geq e^{-(\tilde{\mu}_3+\tilde{\mu}_4)\xi_3(m)} > 0. \tag{34.6.8}$$

Para el intervalo $I_3(m) = [\tau_4(m), \overline{\tau}_4(m)]$*, se tiene que este caso es análogo al caso (a).*
Para el intevalo $I_3(m) \equiv [\overline{\tau}_4(m), \tau_4(m+1)]$*, se tiene que es análogo al caso (b).*
Por construcción se tiene que $I(n,m) \equiv I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$*,entonces en particular se tienen las contenciones* $I(n,m) \subseteq I_1(n)$ *y* $I(n,m) \subseteq I_3(m)$*, por lo tanto si definimos* $\xi_{n,m} \equiv \ell(I(n,m))$ *tenemos que*

$$\begin{aligned}\xi_{n,m} \leq \xi_1(n) \text{ y } \xi_{n,m} \leq \xi_3(m) \text{ entonces}\\ -\xi_{n,m} \geq -\xi_1(n) \text{ y } -\xi_{n,m} \leq -\xi_3(m)\end{aligned}$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{array}{ll}-\tilde{\mu}_1\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_1\xi_1(n), & -\tilde{\mu}_2\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_2\xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2\xi_2(n),\\ -\tilde{\mu}_3\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_3\xi_3(m), & -\tilde{\mu}_4\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_4\xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4\xi_4(m).\end{array}$$

Sea $T^* \in I(n,m)$*, entonces dado que en particular* $T^* \in I_1(n)$*, se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas* Q_1 *y* Q_2*, en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para* Q_3 *y* Q_4*, es decir,* $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$*,* $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$*,* $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$*,* $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$*, es decir, los eventos* Q_1 *y* Q_3 *son condicionalmente* *independientes en el intervalo* $I(n,m)$; *lo mismo ocurre para las colas* Q_2 *y* Q_4, *por lo tanto tenemos que*

$$\begin{array}{l}\mathbb{P}\left\{A_1\left(T^*\right),A_2\left(T^*\right),A_3\left(T^*\right),A_4\left(T^*\right)|T^*\in I\left(n,m\right)\right\}\\ =\prod_{j=1}^{4}\mathbb{P}\left\{A_j\left(T^*\right)|T^*\in I\left(n,m\right)\right\}\\ \geq\mathbb{P}\left\{A_1\left(T^*\right)|T^*\in I_1\left(n\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_2\left(T^*\right)|T^*\in I_2\left(n\right)\right\}\\ \mathbb{P}\left\{A_3\left(T^*\right)|T^*\in I_3\left(m\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4\left(T^*\right)|T^*\in I_4\left(m\right)\right\}\\ =e^{-\mu_1\xi_1(n)}e^{-\mu_2\xi_2(n)}e^{-\mu_3\xi_3(m)}e^{-\mu_4\xi_4(m)}\\ =e^{-\left[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)+\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m)\right]}>0.\end{array}\tag{34.6.9}$$

Ahora solo resta demostrar que para $n\geq1$, *existe* $m\geq1$ *tal que se cumplen cualquiera de los cuatro casos arriba mencionados:*

a) $\tau_3(m)<\tau_2(n)<\overline{\tau}_3(m)$

b) $\overline{\tau}_3(m)<\tau_2(n)<\tau_4(m)$

c) $\tau_4(m)<\tau_2(n)<\overline{\tau}_4(m)$

d) $\overline{\tau}_4(m)<\tau_2(n)<\tau_3(m+1)$

Consideremos nuevamente el primer caso. Supongamos que no existe $m\geq1$, *tal que* $I_1(n)\cap I_3(m)\neq\emptyset$, *es decir, para toda* $m\geq1$, $I_1(n)\cap I_3(m)=\emptyset$, *entonces se tiene que ocurren cualquiera de los dos casos*

a) $\tau_2(n)\leq\tau_3(m)$: *Recordemos que* $\tau_2(m)=\overline{\tau}_1+r_1(m)$ *donde cada una de las variables aleatorias son tales que* $\mathbb{E}\left[\overline{\tau}_1(n)-\tau_1(n)\right]<\infty$, $\mathbb{E}\left[R_1\right]<\infty$ *y* $\mathbb{E}\left[\tau_3(m)\right]<\infty$, *lo cual contradice el hecho de que no exista un ciclo* $m\geq1$ *que satisfaga la condición deseada.*

b) $\tau_2(n)\geq\overline{\tau}_3(m)$: *por un argumento similar al anterior se tiene que no es posible que no exista un ciclo* $m\geq1$ *tal que satisaface la condición deseada.*

Para el resto de los casos la demostración es análoga. Por lo tanto, se tiene que efectivamente existe $m\geq1$ *tal que* $\tau_3(m)<\tau_2(n)<\tau_4(m)$.

34.7. Appendix C: Output Process and Regenerative Processes

En Sigman, Thorison y Wolff [40] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 34.114 *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k (X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- *Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.*
- *Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.*
- *Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:*

  Teorema 34.203 *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso **I** es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) Los tiempos de servicio son identicamente cero;

  b) $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;

  c) $L = 1$ y $G = D$;

  d) $L = \infty$ y $G = M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;

  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;

  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;

  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- *Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.*
- *King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.*
- *Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.*
- *El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)*

  Teorema 34.204 *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.

  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$

  d) $G = M$.

- *El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)*

  Teorema 34.205 *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Definición 34.360 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 34.236 *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [40].*

Nota 34.237 *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos ($\mathtt{i.i.d.}$)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son $\mathtt{i.i.d.}$ e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 34.361 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 34.238 *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 34.239 *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 34.240 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 34.241 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 34.362 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 34.363 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 34.364 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 34.206 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Corolario 34.83 *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \to \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\,ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \to \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 34.365 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{34.7.1}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 34.366 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 34.242 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 34.243 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 34.207 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \to \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 34.115 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 34.367 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 34.116 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t)\,,\ \text{donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]\,.$$

Teorema 34.208 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.117 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.244 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.209 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu,\ c.s. \tag{34.7.2}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu,\ c.s. \tag{34.7.3}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.84 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu,\ c.s.\ \text{cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.7.4}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.368 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.210 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a,\ c.s. \tag{34.7.5}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu,\ c.s. \tag{34.7.6}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.85 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.7.7}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.118 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.245 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.211 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.7.8}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.7.9}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.86 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.7.10}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.369 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.212 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{34.7.11}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.7.12}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.87 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.7.13}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \text{máx}\{n : T_n \leq t\} = \text{mín}\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.119 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.246 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.213 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.7.14}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.7.15}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.88 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.7.16}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.370 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.214 *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{34.7.17}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.7.18}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.89 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.7.19}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.120 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.247 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.215 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.7.20}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.7.21}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.90 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.7.22}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.371 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.216 *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{34.7.23}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.7.24}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.91 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.7.25}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.121 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.248 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.217 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.7.26}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.7.27}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 34.92 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.7.28}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.372 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.218 *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{34.7.29}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.7.30}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.93 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{34.7.31}$$

Definición 34.373 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t)=h(t)+\int_{[0,t]}H(t-s)\,dF(s)\,,\ t\geq 0, \tag{34.7.32}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 34.122 *La función $U\star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 34.219 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t)\rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t\rightarrow\infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 34.374 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)\,,\ t\geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t)=\mathbb{1}(t\geq 0)$.

Proposición 34.123 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t>0$, y es $U^{'}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t)>N(t-)\right\}=0,\ t\geq 0.$$

Definición 34.375 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha)=\int_{\mathbb{R}_{+}}e^{-\alpha t}dF(t)\,,\ \alpha\geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F^{n\star}}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F}(\alpha)^{n}=\frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 34.124 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha)=\frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 34.249 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right]=\lambda t$, para $t\geq 0$.*

Teorema 34.220 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t)=\mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()}f(T_n)\right]=\int_{(0,t]}f(s)\,d\eta(s)\,,\ t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1,X_2,\ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n|T_n=s\right]=f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)}X_n\right]=\int_{(0,t]}f(s)\,d\eta(s)\,,\ t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 34.94 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right]=\mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right],\ t\geq 0,$$

Definición 34.376 *Sean $0\leq T_1\leq T_2\leq\ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}(T_n\leq t)\,, \tag{34.7.33}$$

para $t\geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 34.377 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 34.250 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 34.378 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{34.7.34}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 34.379 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 34.251 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.125 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 34.7 (Proceso Poisson) *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 34.252 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.221 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.7.35}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.7.36}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.95 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.7.37}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.380 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.222 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{34.7.38}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.7.39}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.96 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.7.40}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 34.381 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 34.126 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 34.382 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 34.127 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 34.253 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 34.223 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 34.97 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 34.383 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{34.7.41}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 34.128 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 34.224 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 34.384 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 34.129 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 34.385 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 34.130 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 34.254 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 34.225 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 34.98 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 34.386 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{34.7.42}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 34.131 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 34.226 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 34.255 *Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 34.227 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 34.132 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 34.387 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 34.133 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 34.228 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 34.256 *Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$*, donde b es DRI.*

Teorema 34.229 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 34.134 *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t<0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U\star h(t),\ donde\ h(t) = H(t) - F\star H(t)$$

Definición 34.388 *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 34.135 *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U\star h(t),\ donde\ h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)].$$

Teorema 34.230 (Regeneración Cruda) *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase* $M = \sup\{|X(t)| : t\leq T\}$*. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$*.*

Definición 34.389 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t\geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0\leq t<\xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 34.257 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S}\rightarrow S$*.*

Nota 34.258 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 34.259 *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t\geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t\geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución F de media finita* μ*.*

Definición 34.390 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t\geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0\leq t<\xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 34.260 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 34.231 (Procesos Regenerativos) *Suponga que el proceso*

Definición 34.391 (Renewal Process Trinity) *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*

- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t.

Nota 34.261 *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n, *y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$. *Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{34.7.43}$$

Ejemplo 34.8 (Tiempos de recurrencia Poisson) *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ, *entonces de la expresión (34.8.10) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 34.262 *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 34.392 *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 34.263 *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ *en* $\mathbb{R}_+$, *con puntos* $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 34.136 *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 34.232 *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación* N *es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante* $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 34.264 *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 34.99 *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 34.265 *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 34.266 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 34.393 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2, *independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1. *Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, *se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X.

Definición 34.394 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 34.267 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 34.395 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 34.268 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 34.269 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 34.396 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 34.270 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 34.397 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 34.271 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración, *y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 34.398 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 34.399 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 34.400 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 34.233 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración, *y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 34.401 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 34.402 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 34.403 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 34.234 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^*(0)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$*.*

Para $\{X(t):t\geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n=T_n-T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ*.*

Sean $T_1,T_2,\ldots$ *los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola* Q_j *es visitada por el servidor para dar servicio, es decir,* $L_1(T_i)=0,L_2(T_i)=0,\hat{L}_1(T_i)=0$ *y* $\hat{L}_2(T_i)=0$*, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Sea la función generadora de momentos para* L_i*, el número de usuarios en la cola* $Q_i(z)$ *en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de* $z^{L_i(t)}$ *sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:*

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

M_i *es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con* $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$[4]*, se sigue del lema de Wald que:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right]\\ \mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (??): $n\rightarrow t-\tau_i(m)$*,* $T\rightarrow\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)$*,* $L_n\rightarrow L_i(t)$ *y* $F(z)=\mathbb{E}\left[z^{L_0}\right]\rightarrow F_i(z)=\mathbb{E}\left[z^{L_i\tau_i(m)}\right]$*, se puede ver que*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1}z^{L_n}\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1}z^{L_i(t)}\right]=z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)} \tag{34.7.44}$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ *solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de* $P_i(z)$*, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right]=\frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{1-I_i\left[P_i(z)\right]}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

[4]En Stidham[41] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}C_i^{(m)}\right]<\infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$, además, como $M_i>0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}\left[C_i\right]<\infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N}\mu_k<1$.

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right]+\mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}+\frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}\right\}
\end{aligned}
$$

es decir

$$
Q_i(z)=\frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \tag{34.7.45}
$$

Teorema 34.235 *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t, $A_j(t)=\{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\}$ para algún tiempo $t\geq 0$ y Q_j la cola j-ésima en la RSVC, para $j=1,2,3,4$. Existe un intervalo $I\neq\emptyset$ tal que para $T^*\in I$, tal que $\mathbb{P}\left\{A_1(T^*),A_2(Tt^*),A_3(T^*),A_4(T^*)|T^*\in I\right\}>0$.*

Demostración 34.5 *Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.*
Sea $n>0$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j(\overline{\tau}_1(n))=0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1(n)>0$, entonces tenemos que $\tau_2(n)=\overline{\tau}_1(n)+r_1(n)$.
Definamos el intervalo $I_1\equiv[\overline{\tau}_1(n),\tau_2(n)]$ de longitud $\xi_1=r_1(n)$. Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1=\mu_1+\hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$
\mathbb{P}\left\{A_1(t)|t\in I_1(n)\right\}=e^{-\tilde{\mu}_1\xi_1(n)}. \tag{34.7.46}
$$

Por otra parte, para la cola Q_2, el tiempo $\overline{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\overline{\tau}_2(n-1))=0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n. Entonces tenemos un sgundo intervalo $I_2\equiv[\overline{\tau}_2(n-1),\tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$
\mathbb{P}\left\{A_2(t)|t\in I_2(n)\right\}=e^{-\tilde{\mu}_2\xi_2(n)}, \tag{34.7.47}
$$

donde $\xi_2(n)=\tau_2(n)-\overline{\tau}_2(n-1)$.
Entonces, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{A_1(t),A_2(t)|t\in I_1(n)\right\} &= \mathbb{P}\left\{A_1(t)|t\in I_1(n)\right\}\mathbb{P}\left\{A_2(t)|t\in I_1(n)\right\}\\
&\geq \mathbb{P}\left\{A_1(t)|t\in I_1(n)\right\}\mathbb{P}\left\{A_2(t)|t\in I_2(n)\right\}\\
&= e^{-\tilde{\mu}_1\xi_1(n)}e^{-\tilde{\mu}_2\xi_2(n)}=e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)]}.
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
\mathbb{P}\left\{A_1(t),A_2(t)|t\in I_1(n)\right\}=e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)]}>0. \tag{34.7.48}
$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC, se afirma que existe $m>0$ tal que $\overline{\tau}_3(m)<\tau_2(n)<\tau_4(m)$.
Para Q_3 sea $I_3=[\overline{\tau}_3(m),\tau_4(m)]$ con longitud $\xi_3(m)=r_3(m)$, entonces

$$
\mathbb{P}\left\{A_3(t)|t\in I_3(n)\right\}=e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(n)}. \tag{34.7.49}
$$

Análogamente que como se hizo para Q_2, tenemos que para Q_4 se tiene el intervalo $I_4=[\overline{\tau}_4(m-1),\tau_4(m)]$ con longitud $\xi_4(m)=\tau_4(m)-\overline{\tau}_4(m-1)$, entonces

$$
\mathbb{P}\left\{A_4(t)|t\in I_4(m)\right\}=e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(n)}. \tag{34.7.50}
$$

Al igual que para el primer sistema, dado que $I_3(m)\subset I_4(m)$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\xi_3(m)\leq\xi_4(m) &\Leftrightarrow -\xi_3(m)\geq-\xi_4(m)\\
-\tilde{\mu}_4\xi_3(m)\geq-\tilde{\mu}_4\xi_4(m) &\Leftrightarrow e^{-\tilde{\mu}_4\xi_3(m)}\geq e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(m)}\\
\mathbb{P}\left\{A_4(t)|t\in I_3(m)\right\} &\geq \mathbb{P}\left\{A_4(t)|t\in I_4(m)\right\}
\end{aligned}
$$

Entonces, dado que los eventos A_3 y A_4 son independientes, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\right\} &= \mathbb{P}\left\{A_3(t) | t \in I_3(m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(t) | t \in I_3(m)\right\} \\ &\geq \mathbb{P}\left\{A_3(t) | t \in I_3(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(t) | t \in I_4(n)\right\} \\ &= e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)} e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} = e^{-[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)]}.\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\right\} = e^{-[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)]} > 0. \tag{34.7.51}$$

Por construcción se tiene que $I(n,m) \equiv I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$,entonces en particular se tienen las contenciones $I(n,m) \subseteq I_1(n)$ y $I(n,m) \subseteq I_3(m)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m} \equiv \ell(I(n,m))$ tenemos que

$$\xi_{n,m} \leq \xi_1(n) \text{ y } \xi_{n,m} \leq \xi_3(m) \text{ entonces } -\xi_{n,m} \geq -\xi_1(n) \text{ y } -\xi_{n,m} \leq -\xi_3(m)$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{array}{ll} -\tilde{\mu}_1 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_1 \xi_1(n), & -\tilde{\mu}_2 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_2(n), \\ -\tilde{\mu}_3 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_3 \xi_3(m), & -\tilde{\mu}_4 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m). \end{array}$$

Sea $T^* \in I_{n,m}$, entonces dado que en particular $T^* \in I_1(n)$ se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2, en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4, es decir, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$, $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I_{n,m}$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4, por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left\{A_1(T^*), A_2(T^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I_{n,m}\right\} = \prod_{j=1}^{4} \mathbb{P}\left\{A_j(T^*) | T^* \in I_{n,m}\right\} \\ &\geq \mathbb{P}\left\{A_1(T^*) | T^* \in I_1(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_2(T^*) | T^* \in I_2(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_3(T^*) | T^* \in I_3(m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(T^*) | T^* \in I_4(m)\right\} \\ &= e^{-\mu_1 \xi_1(n)} e^{-\mu_2 \xi_2(n)} e^{-\mu_3 \xi_3(m)} e^{-\mu_4 \xi_4(m)} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n) + \tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)]} > 0.\end{aligned} \tag{34.7.52}$$

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [13] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- *Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.*
- *Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.*
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- *Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:*

  Teorema 34.236 *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

  $$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\ var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right) 2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2 (1-\delta)^{-1}.\end{aligned}$$

  Teorema 34.237 *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 34.238 *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

En Sigman, Thorison y Wolff [40] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 34.137 *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- *Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.*
- *Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.*
- *Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:*

  Teorema 34.239 *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*

  b) $L = 0$, *para cualquier proceso de servicio S;*

  c) $L = 1$ *y* $G = D$;

  d) $L = \infty$ *y* $G = M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\left\{T_{n+1} - T_n \leq t\right\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;

  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;

  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;

  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- *Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.*
- *King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.*
- *Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.*
- *El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)*

  Teorema 34.240 *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*

  c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$*

  d) $G = M$.

- *El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)*

  Teorema 34.241 *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [13] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- *Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.*
- *Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.*
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- *Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:*

  Teorema 34.242 *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu + \theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right) 2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2 (1-\delta)^{-1}.
\end{aligned}$$

  Teorema 34.243 *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 34.244 *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

Sean Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 en una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC). Supongamos que cada una de las colas es del tipo $M/M/1$ con tasa de arribo μ_i y que la transferencia de usuarios entre los dos sistemas ocurre entre $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$ con respectiva tasa de arribo igual a la tasa de salida $\hat{\mu}_i = \mu_i$, esto se sabe por lo desarrollado en la sección anterior.

Consideremos, sin pérdida de generalidad como base del análisis, la cola Q_1 además supongamos al servidor lo comenzamos a observar una vez que termina de atender a la misma para desplazarse y llegar a Q_2, es decir al tiempo τ_2.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, ciclo del servidor en que regresa a Q_1 para dar servicio y atender conforme a la política exhaustiva, entonces se tiene que $\overline{\tau}_1(n)$ es el tiempo del servidor en el sistema 1 en que termina de dar servicio a todos los usuarios presentes en la cola, por lo tanto se cumple que $L_1(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, entonces el servidor para llegar a Q_2 incurre en un tiempo de traslado r_1 y por tanto se cumple que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1$. Dado que los tiempos entre arribos son exponenciales se cumple que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n) + r_1]\} &= e^{-\tilde{\mu}_1 r_1},\\ \mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n) + r_1]\} &= e^{-\tilde{\mu}_2 r_1}.\end{aligned}$$

El evento que nos interesa consiste en que no haya arribos desde que el servidor abandonó Q_2 y regresa nuevamente para dar servicio, es decir en el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Entonces, si hacemos

$$\begin{aligned}\varphi_1(n) &\equiv \overline{\tau}_1(n) + r_1 = \overline{\tau}_2(n-1) + r_1 + r_2 + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n)\\ &= \overline{\tau}_2(n-1) + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r,,\end{aligned}$$

y longitud del intervalo

$$\begin{aligned}\xi &\equiv \overline{\tau}_1(n) + r_1 - \overline{\tau}_2(n-1) = \overline{\tau}_2(n-1) + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r - \overline{\tau}_2(n-1)\\ &= \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r.\end{aligned}$$

Entonces, determinemos la probabilidad del evento no arribos a Q_2 en $[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]$:

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi}. \tag{34.7.53}$$

De manera análoga, tenemos que la probabilidad de no arribos a Q_1 en $[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]$ esta dada por

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi}, \tag{34.7.54}$$

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi}. \tag{34.7.55}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ y } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\}\\ &= \mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\}\\ &\times \mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi} = e^{-\tilde{\mu} \xi}.\end{aligned} \tag{34.7.56}$$

Para el segundo sistema, consideremos nuevamente $\overline{\tau}_1(n) + r_1$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $m > 0$ tal que $\overline{\tau}_3(m) < \overline{\tau}_1 + r_1 < \tau_4(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_3(m), \overline{\tau}_1(n) + r_1]\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3}, \tag{34.7.57}$$

donde

$$\xi_3 = \overline{\tau}_1(n) + r_1 - \overline{\tau}_3(m) = \overline{\tau}_1(n) - \overline{\tau}_3(m) + r_1, \tag{34.7.58}$$

mientras que para Q_4 al igual que con Q_2 escribiremos $\tau_4(m)$ en términos de $\overline{\tau}_4(m-1)$:
$\varphi_2 \equiv \tau_4(m) = \overline{\tau}_4(m-1) + r_4 + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) + r_3 = \overline{\tau}_4(m-1) + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) + \hat{r}$, además,
$\xi_2 \equiv \varphi_2(m) - \overline{\tau}_1 - r_1 = \overline{\tau}_4(m-1) + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) - \overline{\tau}_1(n) + \hat{r} - r_1$.
Entonces

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_4 \text{ en el intervalo } [\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]\} = e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_2}, \tag{34.7.59}$$

mientras que para Q_3 se tiene que

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n)+r_1,\varphi_2(m)\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_3\xi_2} \tag{34.7.60}$$

Por tanto

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3 \wedge Q_4 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n)+r_1,\varphi_2(m)\right]\right\} = e^{-\hat{\mu}\xi_2} \tag{34.7.61}$$

donde $\hat{\mu} = \tilde{\mu}_3 + \tilde{\mu}_4$.
Ahora, definamos los intervalos $\mathcal{I}_1 = \left[\overline{\tau}_1(n)+r_1,\varphi_1(n)\right]$ *y* $\mathcal{I}_2 = \left[\overline{\tau}_1(n)+r_1,\varphi_2(m)\right]$, *entonces, sea* $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ *el intervalo donde cada una de las colas se encuentran vacías, es decir, si tomamos* $T^* \in \mathcal{I}$, *entonces* $L_1(T^*) = L_2(T^*) = L_3(T^*) = L_4(T^*) = 0$.
Ahora, dado que por construcción $\mathcal{I} \neq \emptyset$ *y que para* $T^* \in \mathcal{I}$ *en ninguna de las colas han llegado usuarios, se tiene que no hay transferencia entre las colas, por lo tanto, el sistema 1 y el sistema 2 son condicionalmente independientes en* $\mathcal{I}$, *es decir*

$$\mathbb{P}\left\{L_1(T^*),L_2(T^*),L_3(T^*),L_4(T^*)|T^* \in \mathcal{I}\right\} = \prod_{j=1}^{4}\mathbb{P}\left\{L_j(T^*)\right\}, \tag{34.7.62}$$

para $T^* \in \mathcal{I}$.

Definición 34.404 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

- *i)* $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$
- *ii)* $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t+R_1)\}$ *es regenerativo con tiempo de regeneración* R_2, *independiente de* R_1 *pero con la misma distribución que* R_1. *Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas* $\{R_n\}$ *llamados longitudes de ciclo. Si definimos a* $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, *se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para* X.

Nota 34.272 *La existencia de un primer tiempo de regeneración,* R_1, *implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos* $R_1, R_2 \ldots,$ *que satisfacen la propiedad deseada [40].*

Nota 34.273 *Para la cola* $GI/GI/1$ *los usuarios arriban con tiempos* t_n *y son atendidos con tiempos de servicio* S_n, *los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (*`i.i.d.`*)*$T_n = t_n - t_{n-1}$, *además los tiempos de servicio son* `i.i.d.` *e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que* $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.

Definición 34.405 *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 34.274 *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si* $X(t)$ *es regenerativo y se define el proceso* $Y(t)$ *por* $Y(t) = f(X(t))$ *para alguna función Borel medible* $f(\cdot)$. *Además* Y *es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que* X.
En general, los tiempos de renovación, Z_k *de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de* $X(t)$.

Nota 34.275 *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 34.276 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 34.277 *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) *Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞*

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\right\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración, *y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 34.406 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 34.407 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 34.408 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 34.245 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) *Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 34.100 *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) \, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 34.409 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{34.7.63}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 34.410 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 34.278 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 34.279 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 34.246 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 34.138 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 34.411 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 34.139 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 34.247 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.140 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.280 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.248 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.7.64}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.7.65}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.101 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.7.66}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.412 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.249 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{34.7.67}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.7.68}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.102 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.7.69}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.141 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.281 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.250 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (34.7.70) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (34.7.71) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.103 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (34.7.72)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.413 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.251 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (34.7.73) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (34.7.74) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.104 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (34.7.75)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \text{máx}\{n : T_n \leq t\} = \text{mín}\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.142 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.282 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.252 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_{n} &= \mu,\ c.s. && (34.7.76)\\
lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu,\ c.s. && (34.7.77)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_{n} satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.105 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N\left(t\right) \rightarrow 1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t \rightarrow \infty. \tag{34.7.78}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\left\{Z\left(t\right) : t \geq 0\right\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N\left(t\right)$

Definición 34.414 *Para el proceso $\left\{Z\left(t\right) : t \geq 0\right\}$ se define la fluctuación máxima de $Z\left(t\right)$ en el intervalo $\left(T_{n-1}, T_{n}\right]$:*

$$M_{n} = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_{n}} \left|Z\left(t\right) - Z\left(T_{n-1}\right)\right|$$

Teorema 34.253 *Supóngase que $n^{-1}T_{n} \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_{n}\right) &= a,\ c.s. && (34.7.79)\\
lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu,\ c.s. && (34.7.80)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_{n} = 0$ c.s.

Corolario 34.106 *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_{n}\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_{n}\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_{1}\right) - Z\left(T_{0}\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_{1}\right]},\ c.s.\ cuando\ t \rightarrow \infty. \tag{34.7.81}$$

Los tiempos T_{n} están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$
\begin{aligned}
\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_{n} \leq t\right\}\\
T_{N(t)} \leq &\ t < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N\left(T_{n}\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_{n} \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_{n} \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$
\begin{aligned}
\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_{n} \leq t\right\}\\
P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right)
\end{aligned}
$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 34.143 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^{m}\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.283 *Si el primer tiempo de renovación ξ_{1} no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_{n}, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_{n} de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 34.254 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (34.7.82)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (34.7.83)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.107 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (34.7.84)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.415 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.255 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (34.7.85)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (34.7.86)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.108 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (34.7.87)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \;\; t \;\; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.144 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 34.284 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.256 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.7.88}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.7.89}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.109 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.7.90}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.416 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.257 *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{34.7.91}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.7.92}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.110 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.7.93}$$

Definición 34.417 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \ t \geq 0, \tag{34.7.94}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 34.145 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 34.258 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 34.418 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 34.146 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 34.419 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 34.147 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 34.285 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 34.259 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 34.111 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1]\,,\ t \geq 0,$$

Definición 34.420 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)\,, \tag{34.7.95}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 34.421 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 34.286 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

34.8. Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[35]

Definición 34.422 *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)\,, \tag{34.8.1}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 34.423 *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 34.287 *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &=& 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 34.148 *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 34.9 (Proceso Poisson) *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 34.288 *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 34.260 *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{34.8.2}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.8.3}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 34.112 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación) *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.8.4}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 34.424 *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 34.261 *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{34.8.5}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{34.8.6}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 34.113 *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{34.8.7}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 34.425 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 34.149 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 34.426 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 34.150 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 34.289 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 34.262 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 34.114 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 34.427 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{34.8.8}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 34.151 *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 34.263 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 34.428 *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t),\ t\geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t)=\mathbb{1}(t\geq 0)$.

Proposición 34.152 *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t>0$, y es $U^{'}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t)>N(t-)\}=0,\ t\geq 0.$$

Definición 34.429 *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha)=\int_{\mathbb{R}_{+}}e^{-\alpha t}dF(t),\ \alpha\geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F^{n\star}}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F}(\alpha)^{n}=\frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 34.153 *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha)=\frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 34.290 *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)]=\lambda t$, para $t\geq 0$.*

Teorema 34.264 *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t)=\mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()}f(T_n)\right]=\int_{(0,t]}f(s)\,d\eta(s),\ t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1,X_2,\ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n|T_n=s]=f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)}X_n\right]=\int_{(0,t]}f(s)\,d\eta(s),\ t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 34.115 (Identidad de Wald para Renovaciones) *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right]=\mu\mathbb{E}[N(t)+1],\ t\geq 0,$$

Definición 34.430 *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t)=h(t)+\int_{[0,t]}H(t-s)\,dF(s),\ t\geq 0,\tag{34.8.9}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 34.154 *La función $U\star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (34.8.9).*

Teorema 34.265 (Teorema Renovación Elemental)

$$t^{-1}U(t)\rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t\rightarrow\infty.$$

Nota 34.291 *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 34.266 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds.$$

Proposición 34.155 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 34.431 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 34.156 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 34.267 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 34.292 *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 34.268 (Teorema Principal de Renovación) *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 34.157 *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 34.432 *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 34.158 *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 34.269 (Regeneración Cruda) *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 34.433 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 34.293 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 34.294 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 34.295 *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ *Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios* S*, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea* $N(t)$ *un proceso de renovación en* $\mathbb{R}_+$ *definido en el mismo espacio de probabilidad que* $X(t)$*, con tiempos de renovación* T *y tiempos de inter-renovación* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, con misma distribución* F *de media finita* μ*.*

Definición 34.434 *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 34.296 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 34.270 (Procesos Regenerativos) *Suponga que el proceso*

Definición 34.435 (Renewal Process Trinity) *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t*.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t*, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t*.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$*, la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t*.*

Nota 34.297 *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n*, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$*. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t + y) - N((t - x)) = 0\} \tag{34.8.10}$$

Ejemplo 34.10 (Tiempos de recurrencia Poisson) *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*, entonces de la expresión (34.8.10) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$*.*

Nota 34.298 *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 34.436 *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$*,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 34.299 *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$*,* $t \geq 0$*.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ *en* $\mathbb{R}_+$*, con puntos* $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$*.*

Proposición 34.159 *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$*, entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$*,* $t \geq 0$

Teorema 34.271 *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación* N *es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante* $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$*,*

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$*, para* $t, x \geq 0$*.*

Nota 34.300 *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 34.116 *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 34.301 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 34.302 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 34.437 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 34.438 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 34.303 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 34.439 *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 34.304 *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 34.305 *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 34.440 (Definición Clásica) *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 34.306 *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 34.441 *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 34.307 *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

*para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado* primer ciclo de regeneración *de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el* segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.*
Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 34.442 *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 34.443 *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 34.444 *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 34.272 *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

iudad de México

Academia de Matemáticas
Colegio de Ciencia y Tecnología

Revisión de Procesos Regenerativos Estacionarios

Carlos Ernesto Martínez Rodríguez

Agosto, 2016

Index

34.9. Existencia de Tiempos de Regeneración

Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ a $(E,\mathcal{E})$, es decir, para $A\in\mathcal{E}$, se tiene que $\{Y\in A\}\in\mathcal{F}$, donde $\{Y\in A\}:=\{w\in\Omega: Y(w)\in A\}=:Y^{-1}A$. También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible. Para cada $i\in\mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i,\mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i):=\left(\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i\in\mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i:=\sigma\left\{\{y:y_i\in A\}:i\in\mathbb{I}\text{ y }A\in\mathcal{E}_i\right\}.$$

Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi\in(\Omega,\mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.

Teorema 34.273 *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i\in\mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i,\mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y\in\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i:y_i\in A_{i_1},\dots,y_n\in A_{i_n}\right)=P_{i_1}(A_{i_n})\cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n>0$, toda $i_1,\dots,i_n\in\mathbb{I}$ y todo $A_{i_1}\in\mathcal{E}_{i_1},\dots,A_{i_n}\in\mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i,P_i):=\left(\prod_{i\in\mathbb{I}},E_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 34.445 *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo. (es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.)*

*Dos espacios medibles $(E,\mathcal{E})$ y $(G,\mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f:E\to G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel. Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G,\mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0,1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G. Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar. Un proceso estocástico (**PE**) con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ es una familia $Z=(\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E,\mathcal{E})$.*

Definición 34.446 *Un Proceso Estocástico One-Sided Contiuous Time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}=[0,\infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right):=\otimes_{s\in\mathbb{I}}(E,\mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w)=(Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w\in\Omega$. La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales. En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E,\mathcal{E})=(\mathbb{R},\mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales

$$\mathbb{P}(Z_{t_1}\leq x_1,\dots,Z_{t_n}\leq x_n),x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R},t_1,\dots,t_n\in\mathbb{I},n\geq1.\tag{34.9.1}$$

Para espacios polacos $(E,\mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales. Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w\in\Omega$ del mapeo aleatorio

Z. Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H,\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z\in H$ a $z_t\in E$ para $t\in\mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,

$$\mathcal{H}:=E^{\mathbb{I}}\cap H:=\left\{A\cap H:A\in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{34.9.2}$$

Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ a $(H,\mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H,\mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z. La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H,\mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.

Definición 34.447 *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0,\infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T\left(w\right):=Z_{T(w)}\left(w\right).w\in\Omega.$$

Definición 34.448 *Un PEOSCT Z es Conjuntamente Medible **(CM)** si el mapeo que toma $(w,t)\in\Omega\times[0,\infty)$ a $Z_t\left(w\right)\in E$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}\left[0,\infty\right)/\mathcal{E}$ medible.*

Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $\left(w,T\left(w\right)\right)$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}\left[0,\infty\right)$ medible, mientras que el segundo toma $\left(w,T\left(w\right)\right)$ en $Z_{T(w)}\left(w\right)$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}\left[0,\infty\right)/\mathcal{E}$ medible.

Definición 34.449 *Un PEOSCT con espacio de estados $(H,\mathcal{H})$ es Canónicamente Conjuntamente Medible **(CCM)** si el mapeo $(z,t)\in H\times[0,\infty)$ en $Z_t\in E$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}\left[0,\infty\right)/\mathcal{E}$ medible.*

Un PEOSCT-CCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega\times[0,\infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w,t) en $\left(Z\left(w\right),t\right)$ es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}\left[0,\infty\right)/\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}\left[0,\infty\right)$ medible, y el segundo que toma $\left(Z\left(w\right),t\right)$ en $Z_t\left(w\right)$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}\left[0,\infty\right)/\mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.

Definición 34.450 *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es Internamente Shift-Invariante **(ISI)** si*

$$\left\{\left(z_{t+s}\right)_{s\in[0,\infty)}:z\in H\right\}=H,\,t\in[0,\infty).$$

Definición 34.451 *Dado un PEOSCT-ISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t\in[0,\infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z=\left(z_{t+s}\right)_{s\in[0,\infty)},\,z\in H.$$

Definición 34.452 *Se dice que un proceso Z es Shift-Medible **(SM)** si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t)\in H\times[0,\infty)$ en $\theta_t z\in H$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}\left[0,\infty\right)/\mathcal{H}$ medible.*

Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es SM si y sólo si es CCM. Dado el espacio polaco $(E,\mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E\left[0,\infty\right)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM. Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas. Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.

Teorema 34.274 *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 34.453 *Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z=\left(Z_s\right)_{s\in[0,\infty)}$ y $S=\left(S_k\right)_0^{\infty}$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0\leq S_0<S_1<\cdots\rightarrow\infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L,\mathcal{L})$, donde*

$$L=\left\{\left(s_k\right)_0^{\infty}\in[0,\infty)^{\{0,1,\dots\}}:s_0<s_1<\cdots\rightarrow\infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L}=L\cap\mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.
Así el par (Z,S) es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ en $(H\times L,\mathcal{H}\otimes\mathcal{L})$. El par $\mathcal{H}\otimes\mathcal{L}^{+}$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H\times L,\mathcal{H}\otimes\mathcal{L})$ en $\left([0,\infty),\mathcal{B}\left[0,\infty\right)\right)$.

Definición 34.454 *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H\times L$ en $H\times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z,\left(s_k\right)_0^{\infty}\right)=\theta_t\left(z,\left(s_{n_{t-}+k}-t\right)_0^{\infty}\right)$$

donde $n_{t-}=inf\left\{n\geq1:s_n\geq t\right\}$.

Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t)\in H\times[0,\infty)$ en $z_t\in E$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}\left[0,\infty\right)/\mathcal{E}$ medible.

Definición 34.455 *Dado un proceso* ***PEOSSM*** *(Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $\left((Z_s)\, s \in [0, S_n), S_0, \ldots, S_n\right)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Si el par (Z,S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.

Teorema 34.275 *Supóngase que el par (Z,S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z,S) con periodo d.*

Definición 34.456 *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx > 0$ con $X_2, X_3, \ldots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\, dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 34.457 *Dado un proceso estocástico Z se le llama Wide-Sense Regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico. Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico. Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.

Teorema 34.276 *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 34.277 *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0, S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*, S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 34.278 *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{34.9.3}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{34.9.4}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{34.9.5}$$

34.10. Main Theorem: Article

The authors are interested in determining the means of the queue lengths at any time, for the exhaustive policy. For this purpose, it is necessary to make assumptions over the processes involved in order to guarantee the stationarity of the queue lengths processes in the NCPS.

Supuestos 34.1 *(i) Each of the queues of the NCPS is an $M/M/1$ system, with $\tilde{\rho}_i := \tilde{\mu}_i/\lambda_i < 1$, for $i = 1,2,3,4$ (observe that in the case considered $\tilde{\rho}_i = \tilde{\mu}_i$, for $i = 1,2,3,4$, given that the service time is assumed to be proportional to the length of the slot).*

(ii) The switchover times have a finite first moment.

Observación 34.1 *In [16] conditions are given which guarantee that the $M/M/1$ system has a renewal departure process (see Theorem 3.4 (4) in this reference). This will be used in the proofs of Theorems 34.279 and 34.280.*

Consider the processes $\mathbb{L}(t) = (L_1(t), L_2(t), L_3(t), L_4(t))$, $\mathbb{B}(t) = (B_1(t), B_2(t), B_3(t), B_4(t))$, $\mathbb{K}(t) = (K_1(t), K_2(t), K_3(t), K_4(t))$, and $\mathbb{V}(t) = (V_1(t), V_2(t), V_3(t), V_4(t))$, $t \geq 0$, for the queue lengths, switchover times, service times and polling instants, respectively. Associated to the queue length processes, the state spaces $\mathbb{D}_i = \{0,1,2,\ldots,\}$ and $\mathcal{D}_i = \mathcal{P}(\mathbb{D}_i)$, are considered, where $\mathcal{P}(\mathbb{D}_i)$ is the class of all subsets of $\mathbb{D}_i$, for $i = 1,2,3,4$. For the following processes: switchover times, service times, and polling instants, consider the state space $\mathbb{G} = [0,\infty)$ with $\mathcal{G} = \mathcal{B}(\mathbb{G})$, where $\mathcal{B}(\mathbb{G})$ is the Borel σ-algebra generated by the open subsets of $\mathbb{G}$. Then the general process

$$\mathbb{W}(t) = (\mathbb{L}(t), \mathbb{B}(t), \mathbb{K}(t), \mathbb{V}(t)), \; t > 0,$$

is obtained, with state spaces $\Xi = \mathbb{D}_i^4 \times \mathbb{G}^{12}$ and $\Im = \mathcal{B}(\Xi)$. In the sequel, the random variables taken into account are supposed to be defined in the measurable space $(\Xi, \Im)$. For a random variable η, $\eta[\Xi] := \{\eta(t) : t \geq 0\}$ will be denoted. Besides, the following events for the arrival processes will be defined for some $t \geq 0$ and queue Q_i in the NCPS: $A_i(t) = \{0$ arrivals on Q_i at time $t\}$, for $i = 1,2,3,4$.

Teorema 34.279 *Suppose that Assumption 1 holds. Given an NCPS, there exists a random variable T^*, such that*

$$\mathbb{P}\{A_1(T^*) \cap A_2(T^*) \cap A_3(T^*) \cap A_4(T^*) | T^* = t^*\} > 0, \; t^* \in T^*[\Xi]$$

is satisfied.

Demostración 34.6 *The proof is divided into four steps given from a) to d).*

a) In this incise it is going to be proved that both queues of system Γ_1 become empty at certain time.

The index $j = 1,2,3,\ldots$, is used to denote the cycle when the server of system Γ_1 visits a queue. Denote its switchover times by $r_1(j)$ and by $r_2(j)$, and its service times by $K_1(j)$, $K_2(j)$, for the queues Q_1 and Q_2, respectively.

It is also necessary to define appropriate random variables which are going to help calculating the joint probability for the events $A_1(t)$ and $A_2(t)$ for certain times $\tilde{t} > 0$. When the server arrives to the queue Q_1, at $t = 0$, $\tau_1(1) = 0$, there are no users in the queue, so that $K_1(1) = 0$, therefore $\overline{\tau}_1(1) = \tau_1(1) = 0$. Then the server moves to Q_2 according to the random variable $r_1(1)$ so that the arrival time to queue Q_2 is given by $\tau_2(1) = r_1(1)$.

There are two possible situations when the server arrives to Q_2: the queue is empty or not. This means that $K_2(1)$ could be equal or greater than 0. Here the authors just present the case when $K_2(1) > 0$; the proof when $K_2(1) = 0$ is similar to the case of $K_2(1) > 0$. Suppose $K_2(1) > 0$, then

$$\overline{\tau}_2(1) = \tau_2(1) + K_2(1),$$

consequently the server moves to Q_1 incurring in a switchover time $r_2(1)$, so that

$$\tau_1(2) = \overline{\tau}_2(1) + r_2(1).$$

For $\tau_1(2)$ there are two possibilities: Q_1 is still empty or not. This means that $K_1(2) = 0$ or $K_1(2) > 0$, therefore $\overline{\tau}_1(2) = \tau_1(2)$ or $\overline{\tau}_1(2) = \tau_1(2) + K_1(2)$. In both cases

$$\tau_2(2) = \overline{\tau}_1(2) + r_1(2).$$

If $K_1(2)$ is not equal to zero, it is necessary to consider the period of time when it is possible to guarantee that both queues are empty at the same time. If $K_1(1) = K_2(1) = K_1(2) = K_2(2) = 0$, the calculations are simple, then it is supposed that they are not equal to zero. Let α be fixed with $\alpha \in [0,1]$. Consider the random variables

$$T_1 = (1-\alpha)\overline{\tau}_1(2) + \alpha\tau_2(2), \quad T_2 = (1-\alpha)\overline{\tau}_2(1) + \alpha\tau_2(2). \tag{34.10.1}$$

For $t_1 \in T_1[\Xi]$ and $t_2 \in T_2[\Xi]$, it is obtained that

$$\mathbb{P}\{A_1(T_1)|T_1 = t_1\} = e^{-\tilde{\mu}_1 t_1}, \text{ and } \quad \mathbb{P}\{A_2(T_2)|T_2 = t_2\} = e^{-\tilde{\mu}_2 t_2}. \tag{34.10.2}$$

By construction it is gotten that $T_1[\Xi] \subseteq T_2[\Xi]$, therefore $T_1[\Xi] \cap T_2[\Xi] = T_1[\Xi] \subseteq T_2[\Xi]$, so that, if $\tilde{t} \in T_1[\Xi] \cap T_2[\Xi]$ is considered, then

$$\mathbb{P}\left\{A_2(T_1)|T_1 = \tilde{t}\right\} \geq \mathbb{P}\left\{A_2(T_2)|T_2 = \tilde{t}\right\}.$$

Therefore the joint probability is given by

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{A_1(T_1) \cap A_2(T_1)|T_1 = \tilde{t}\right\} &= \mathbb{P}\left\{A_1(T_1)|T_1 = \tilde{t}\right\}\mathbb{P}\left\{A_2(T_1)|T_1 = \tilde{t}\right\} \\ &\geq \mathbb{P}\left\{A_1(T_1)|T_1 = \tilde{t}\right\}\mathbb{P}\left\{A_2(T_2)|T_2 = \tilde{t}\right\} \\ &= e^{-\tilde{\mu}_1\tilde{t}}e^{-\tilde{\mu}_2\tilde{t}} = e^{-(\tilde{\mu}_1+\tilde{\mu}_2)\tilde{t}} > 0.\end{aligned}$$

(Note that events $A_1(t)$ and $A_2(t)$ are conditionally independent under T_1.) Hence,

$$\mathbb{P}\left\{A_1(T_1) \cap A_2(T_1)|T_1 = \tilde{t}\right\} > 0, \text{ for } \tilde{t} \in T_1[\Xi] \cap T_2[\Xi]. \tag{34.10.3}$$

b) Now it will be demonstrated that for the time of departure of the server in system Γ_1 it is always possible to find a cycle such that the server in system Γ_2 has just finished to attend one of the queues. So let us prove that for $\tau_2(2)$ there exists an $n \geq 1$ such that one of the following inequalities is satisfied:

$$\begin{aligned} &a)\ \tau_3(n) < \tau_2(2) < \overline{\tau}_3(n), \quad b)\ \overline{\tau}_3(n) < \tau_2(2) < \tau_4(n), \\ &c)\ \tau_4(n) < \tau_2(2) < \overline{\tau}_4(n), \quad d)\ \overline{\tau}_4(n) < \tau_2(2) < \tau_3(n+1). \end{aligned} \tag{34.10.4}$$

The authors only give the proof for the case a); the proofs for the rest of the cases are similar. Suppose that for all $n \geq 1$, $\tau_2(2) \leq \overline{\tau}_3(n)$ or $\overline{\tau}_3(n) \leq \tau_2(2)$. Consider $\tau_3(n) = 0$ and $\tau_2(2) > 0$, with $\overline{\tau}_3(n) \leq \tau_2(2)$ for all $n \geq 1$ (the proof of the case $\tau_2(2) \leq \overline{\tau}_3(n)$ is analogous). It implies that all arrivals take place before $\tau_2(2)$, but this is not possible. Hence, case a) holds.

c) In this part two random variables will be constructed for the system Γ_2 such that it will be possible to determine the joint probability for the events $A_3(t)$ and $A_4(t)$ for certain times $\hat{t}$. Without loss of generality, consider that $\tau_3(n) < \tau_2(2) < \overline{\tau}_3(n)$ for n whose existence is guaranteed in (b), and define the random variables

$$\begin{aligned} T_3 &= (1-\alpha)\,\tau_3(n-1) + \alpha\overline{\tau}_3(n) \ \text{ and} \\ T_4 &= (1-\alpha)\,\overline{\tau}_4(n-1) + \alpha\overline{\tau}_3(n). \end{aligned} \tag{34.10.5}$$

Again, as above, for $\hat{t} \in T_3[\Xi] \cap T_4[\Xi]$, the joint probability is given by

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{A_3(T_4) \cap A_4(T_4)\,|T_4 = \hat{t}\right\} &\geq \mathbb{P}\left\{A_3(T_3)\,|T_3 = \hat{t}\right\} \cdot \mathbb{P}\left\{A_4(T_4)\,|T_4 = \hat{t}\right\} \\ &= e^{-(\tilde{\mu}_3+\tilde{\mu}_4)\hat{t}} > 0. \end{aligned}$$

d) Finally, with the random variables T_1, T_2, T_3, and T_4, a new random variable T^* is constructed, such that all the queues of both systems become empty for T^*. For n, whose existence is guaranteed in (b), let

$$T^+ := \overline{\tau}_3(n), \ \text{ and } \quad T^- := \text{mín}\left\{\overline{\tau}_2(1), \overline{\tau}_3(n-1)\right\} \tag{34.10.6}$$

and observe that

$$T^-[\Xi] \subset T_i[\Xi] \subset T^+[\Xi], \ \text{ for } i = 1,2,3,4.$$

Define the random variable

$$T^* := (1-\alpha)\,T^- + \alpha T^+, \tag{34.10.7}$$

such that for all $i = 1,2,3,4$, it satisfies that $T^*[\Xi] \subset T_i[\Xi]$, so $T^*[\Xi] \subset \cap_{i=1}^4 T_i[\Xi]$. This implies that

$$\mathbb{P}\left\{A_i(T^*)\,|T^* = t^*\right\} \geq \mathbb{P}\left\{A_i(T_i)\,|T_i = t^*\right\} = e^{-\tilde{\mu}_i t^*} > 0, \ \text{ for } t^* \in T^*[\Xi]. \tag{34.10.8}$$

This means that for $t^* \in T^*[\Xi]$ there are no arrivals to the queues Q_1 and Q_2, it results that there are no transfer users from Q_3 and Q_4, so $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$, and $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$. Consequently the events $A_1(T^*)$ and $A_3(T^*)$ are conditionally independent for T^*; the same argument can be applied for the events $A_2(T^*)$ and $A_4(T^*)$. Therefore, it follows that

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{A_1(T^*) \cap A_2(T^*) \cap A_3(T^*) \cap A_4(T^*)\,|T^* = t^*\right\} &\geq \textstyle\prod_{i=1}^4 \mathbb{P}\left\{A_i(T_i)\,|T_i = t_i\right\} \\ = \textstyle\prod_{i=1}^4 e^{-\mu_i t_i} = e^{-\sum_{i=1}^4 \mu_i t_i} > 0, \ \text{ for } t^* \in T^*[\Xi]. \end{aligned} \tag{34.10.9}$$

Observación 34.2 *Note that it is easy to prove that T^* has a finite first moment. This is a consequence of the fact that each of the variables involved in the definition of T^* has a finite first moment, given that each of the queues in the NCPS is an $M/M/1$ system.*

Now, the stationarity of the stochastic process related to the NCPS will be proved. Definitions very close to the ones given in Chapters 2, 3, 4, and 10 in Thorisson [45] with respect to the stationarity of regenerative processes will be followed. Consider the processes $\mathbb{L}(t) = (L_1(t), L_2(t), L_3(t), L_4(t))$, $t \geq 0$, defined previously. Observe that the process $\mathbb{L}(t)$, $t \geq 0$, takes values in the product space given by

$$\left(\mathbf{E}, \tilde{\mathcal{E}}\right) = \left(\prod_{i=1}^4 D_i, \prod_{i=1}^4 \mathcal{D}_i\right),$$

which also results to be a polish space, and $\tilde{\mathcal{E}}$ is the corresponding product σ-algebra.

Teorema 34.280 *Given the stochastic process $\mathbb{L}(t)$, $t \geq 0$, there is an infinite sequence of regeneration times $\Phi_n, n \geq 0$ defined on $(\Xi, \Im)$, such that for $\phi_n \in \Phi_n[\Xi]$,*

$$\mathbb{L}(\phi_n) = (L_1(\phi_n), L_2(\phi_n), L_3(\phi_n), L_4(\phi_n)) = (0,0,0,0), n \geq 0. \tag{34.10.10}$$

Furthermore, there exists a stationary version of the process $\mathbb{L}(t)$, $t \geq 0$.

Demostración 34.7 *Suppose that the process $\mathbf{L} = \{\mathbb{L}(t), t \geq 0\}$ has been constructed in a canonical way on a probability space $\left(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathbb{P}}\right)$. Given that the queue length processes $\mathbb{L}(t)$, $t \geq 0$ are counting processes, it follows that they have right continuous paths with left hand limits. Hence, it is obtained that the process $\mathbf{L}$ is a continuous time one sided process, with path set $H := D_{\mathbf{E}}[0,\infty)$, where $D_{\mathbf{E}}[0,\infty)$ is the set of right continuous maps from $[0,\infty)$ to $\mathbf{E}$ with left hand limits (see Section 2.1, p. 126 in [45]).*

According to the second paragraph, Section 2.8, p. 131 in [45], the path set H is internally shift-invariant and therefore canonically jointly measurable. By Section 2.7, p. 130 in [45], the stochastic process $\mathbf{L}$ is shift-measurable.

Hence, by Theorem 34.279 it is obtained that the hypothesis of Theorem 4.5, p. 362 in [45] are satisfied, so that the underlying probability space $\left(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathbb{P}}\right)$ can be extended to support a sequence of random times $\{\Phi_n : n \geq 1\}$ such that the stochastic process regenerates in these points. In the case discussed here, each of the queues becomes empty at $\phi_n \in \Phi_n[\Xi]$.

Finally, by Remark 34.2 and Definition 3.1, p. 346 in [45] (in fact, comparing the equations (3.1) and (3.2) with equations (4.6) and (4.7) in Theorem 4.5, p. 362 in [45]), it is gotten that the stochastic process $\mathbf{L}$ is classical regenerative with finite first moment for the cycle lengths, therefore it is possible to apply Theorem 3.1, p. 348 in [45], in order to obtain that there exists a stationary version of the stochastic processes $\mathbf{L}$ and $\{\Phi_n : n \geq 0\}$ satisfies (34.10.10).

Now, the probability generating functions that model the NCPS will be determined to calculate the expected queue lengths at any time.

In this section it is supposed that Assumption 34.1 holds. Here, the idea given in [42] is followed, in order to find the expected queue lengths at any time for the NCPS.

*Fix $i \in \{1,2,3,4\}$. Let L_i^* be the number of users at queue Q_i at polling instants, then, following Section **??**, it is obtained that*

$$\mathbb{E}\left[L_i^*\right] = f_i(i), \quad Var\left[L_i^*\right] = \mathbf{f}_i(i,i) + \mathbb{E}\left[L_i^*\right] - \mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. \tag{34.10.11}$$

Consider the cycle time C_i for the queue Q_i with duration given by $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$ for $m \geq 1$. The intervisit time I_i of the queue Q_i is defined as the period beginning at the time the server leaves Q_i in a cycle and ends at the time when the queue Q_i is polled in the next cycle; its duration is given by $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$. The interval between two successive regeneration points will be called regenerative cycle. Observe that Theorem 34.280 guarantees its existence. Let M_i be the number of polling cycles in a regenerative cycle. The duration of the m-th polling cycle in a regeneration cycle will be denoted by $C_i^{(m)}$, for $m = 1,2,\ldots,M_i$. The mean polling cycle time is defined by

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\sum_{m=1}^{M_i} \mathbb{E}\left[C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}. \tag{34.10.12}$$

Again, note that Theorem 34.280 guarantees that all the terms in the right-hand side of (34.10.12) are well defined. For the process $L_i(t)$, $t \geq 0$, their PGF will be denoted by $\mathcal{Q}_i(z)$, $z \in \mathbb{C}$, which is also given by the time average of $z^{L_i(t)}$ over the regenerative cycle defined before, so it is obtained that

$$\mathcal{Q}_i(z) \quad = \quad \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \left(\tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right)\right]}, \tag{34.10.13}$$

which can be rewritten in the form

$$\mathcal{Q}_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1-z) P_i(z)}{1 - P_i(z)}, \tag{34.10.14}$$

(see Section 3 in [42]). The following proposition provides the expected queue lengths for each of the queues in the NCPS at any time.

Teorema 34.281 *For the queue lengths in the NCPS at any time, with PGF given in (34.10.14), the first and second order moments are given by*

$$\mathcal{Q}_i^{(1)}(1) = \frac{1}{\tilde{\mu}_i(1-\tilde{\mu}_i)} \frac{\mathbb{E}(L_i^*)^2}{2\mathbb{E}\left[C_i\right]} - \sigma_i^2 \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{2\mathbb{E}\left[C_i\right]} \cdot \frac{1 - 2\tilde{\mu}_i}{(1-\tilde{\mu}_i)^2 \tilde{\mu}_i^2}, \tag{34.10.15}$$

where $\sigma_i^2 = \left(Var\left[\tilde{X}_i(t)\right]\right)^2$, and

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[C_i\right] \mathcal{Q}_i^{(2)}(1) = \tfrac{1}{\tilde{\mu}_i^3 (1-\tilde{\mu}_i)^3} \Big\{ -(1-\tilde{\mu}_i)^2 \tilde{\mu}_i^2 O_{1,i}^{(2)}(1) \\
&- \tilde{\mu}_i (1-\tilde{\mu}_i)(1-2\tilde{\mu}_i) O_{1,i}(1) O_{3,i}^{(2)}(1) - \tilde{\mu}_i^2 (1-\tilde{\mu}_i)^2 O_{1,i}(1) P_i^{(2)}(1) \\
&+ 2\tilde{\mu}_i \left[(1-2\tilde{\mu}_i) O_{1,i}(1) - (1-\tilde{\mu}_i)\right] \left(O_{3,i}^{(1)}(1)\right)^2 \\
&- 2(1-\tilde{\mu}_i)(1-2\tilde{\mu}_i) O_{1,i}(1) O_{3,i}^{(1)}(1) - 2\tilde{\mu}_i^3 (1-\tilde{\mu}_i)^2 O_{1,i}^{(1)}(1) \\
&- 2(1-2\tilde{\mu}_i) O_{3,i}^{(1)}(1) O_{1,i}^{(1)}(1) - 2\tilde{\mu}_i^2 (1-\tilde{\mu}_i)(1-2\tilde{\mu}_i) O_{1,i}(1) O_{1,i}^{(1)}(1) \Big\},
\end{aligned} \tag{34.10.16}$$

for $i = 1,2,3,4$.

Demostración 34.8 *Fix $i \in \{1,2,3,4\}$ and $z \in \mathbb{C}$. To remove the singularities in (34.10.14) it is necessary to define the following analytic functions:*

$$\varphi_i(z) = 1 - F_i(z), \quad \psi_i(z) = z - P_i(z), \quad \text{and } \varsigma_i(z) = 1 - P_i(z), \tag{34.10.17}$$

then

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] \mathcal{Q}_i(z) = \frac{(z-1)\varphi_i(z) P_i(z)}{\psi_i(z) \varsigma_i(z)}. \tag{34.10.18}$$

For $k \geq 0$, define $a_k = P\left\{L_i^*(t) = k\right\}$. It is obtained that

$$\varphi_i(z) = 1 - F_i(z) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k,$$

therefore

$$\begin{aligned}
\varphi_i^{(1)}(z) &= -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}, \text{ with } \varphi_i^{(1)}(1) = -\mathbb{E}\left[L_i^*(t)\right], \text{ and} \\
\varphi_i^{(2)}(z) &= -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k z^{k-2}, \text{ hence } \varphi_i^{(2)}(1) = \mathbb{E}\left[L_i^*\left(L_i^* - 1\right)\right].
\end{aligned}$$

In the same way it is gotten that

$$\varphi_i^{(3)}(z) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2) a_k z^{k-3} \text{ and } \varphi_i^{(3)}(1) = -\mathbb{E}\left[L_i^*\left(L_i^* - 1\right)\left(L_i^* - 2\right)\right].$$

Expanding $\varphi_i(z)$ around $z = 1$,

$$\begin{aligned}
\varphi_i(z) &= \varphi_i(1) + \frac{\varphi_i^{(1)}(1)}{1!}(z-1) + \frac{\varphi_i^{(2)}(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{\varphi^{(3)}(1)}{3!}(z-1)^3 + \ldots + \\
&= (z-1)\left\{\varphi_i^{(1)}(1) + \frac{\varphi^{(2)}(1)}{2!}(z-1) + \frac{\varphi_i^{(3)}(1)}{3!}(z-1)^2 + \ldots +\right\} = (z-1) O_{1,i}(z)
\end{aligned}$$

with $O_{1,i}(z) \neq 0$, given that $O_{1,i}(z) = -\mathbb{E}\left[L_i^*\right]$, where

$$O_{1,i}(z) = \varphi_i^{(1)}(1) + \frac{\varphi_i^{(2)}(1)}{2!}(z-1) + \frac{\varphi_i^{(3)}(1)}{3!}(z-1)^2 + \ldots + . \tag{34.10.19}$$

Calculating the derivatives of $O_{1,i}(z)$, and evaluating in $z = 1$, it is obtained that

$$\begin{aligned}
O_{1,i}(1) &= -\mathbb{E}\left[L_i^*\right], \; O_{1,i}^{(1)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(L_i^*)^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[L_i^*\right] \\
\text{and } O_{1,i}^{(2)}(1) &= -\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[(L_i^*)^3\right] + \mathbb{E}\left[(L_i^*)^2\right] - \frac{2}{3}\mathbb{E}\left[L_i^*\right].
\end{aligned}$$

Proceeding in a similar manner for $\psi_i(z) = z - P_i(z)$ and $\varsigma_i(z) = 1 - P_i(z)$, it is gotten that

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] Q_i(z) = \frac{O_{1,i}(z) P_i(z)}{O_{2,i}(z) O_{3,i}(z)}. \tag{34.10.20}$$

Calculating the derivative with respect to z, and evaluating in $z = 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[C_i\right]\mathcal{Q}_i^{(1)}(1) &= \frac{1}{\left(1-\tilde{\mu}_i\right)^2 \tilde{\mu}_i^2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(L_i^*)^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[L_i^*\right]\right)\left(1-\tilde{\mu}_i\right)\left(-\tilde{\mu}_i\right)\right. \\
&+ \left(-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]\right)\left(1-\tilde{\mu}_i\right)\left(-\tilde{\mu}_i\right)\tilde{\mu}_i - \left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\tilde{X}_i^2(t)\right] + \frac{1}{2}\tilde{\mu}_i\right)\left(-\tilde{\mu}_i\right)\left(-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]\right) \\
&- \left.\left(1-\tilde{\mu}_i\right)\left(-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]\right)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\tilde{X}_i^2(t)\right] + \frac{1}{2}\tilde{\mu}_i\right)\right\} \\
&= \frac{1}{\left(1-\tilde{\mu}_i\right)^2 \tilde{\mu}_i^2}\left\{-\frac{1}{2}\tilde{\mu}_i^2\mathbb{E}\left[(L_i^*)^2\right] + \frac{1}{2}\tilde{\mu}_i\mathbb{E}\left[(L_i^*)^2\right] + \frac{1}{2}\tilde{\mu}_i^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right] - \tilde{\mu}_i^3\mathbb{E}\left[L_i^*\right]\right. \\
&+ \left.\tilde{\mu}_i\mathbb{E}\left[L_i^*\right]\mathbb{E}\left[\tilde{X}_i^2(t)\right] - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[L_i^*\right]\mathbb{E}\left[\tilde{X}_i^2(t)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2\tilde{\mu}_i\left(1-\tilde{\mu}_i\right)}\mathbb{E}\left[(L_i^*)^2\right] - \frac{\frac{1}{2} - \tilde{\mu}_i}{\left(1-\tilde{\mu}_i\right)^2\tilde{\mu}_i^2}\sigma_i^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right].
\end{aligned}$$

It means that

$$\mathcal{Q}_i^{(1)}(1) = \frac{1}{\tilde{\mu}_i\left(1-\tilde{\mu}_i\right)}\frac{\mathbb{E}\left[(L_i^*)^2\right]}{2\mathbb{E}\left[C_i\right]} - \sigma_i^2\frac{\mathbb{E}L_i^*}{2\mathbb{E}\left[C_i\right]} \cdot \frac{1-2\tilde{\mu}_i}{\left(1-\tilde{\mu}_i\right)^2\tilde{\mu}_i^2}.$$

Deriving again and evaluating in $z = 1$, it follows that

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[C_i\right]\mathcal{Q}_i^{(2)}(1) &= \frac{1}{\tilde{\mu}_i^3\left(1-\tilde{\mu}_i\right)^3}\left\{-\left(1-\tilde{\mu}_i\right)^2\tilde{\mu}_i^2 O_{1,i}^{(2)}(1)\right. \\
&- \tilde{\mu}_i\left(1-\tilde{\mu}_i\right)\left(1-2\tilde{\mu}_i\right)O_{1,i}(1)O_{3,i}^{(2)}(1) - \tilde{\mu}_i^2\left(1-\tilde{\mu}_i\right)^2 O_{1,i}(1)P_i^{(2)}(1) \\
&+ 2\tilde{\mu}_i\left[\left(1-2\tilde{\mu}_i\right)O_{1,i}(1) - \left(1-\tilde{\mu}_i\right)\right]\left(O_{3,i}^{(1)}(1)\right)^2 \\
&- 2\left(1-\tilde{\mu}_i\right)\left(1-2\tilde{\mu}_i\right)O_{1,i}(1)O_{3,i}^{(1)}(1) - 2\tilde{\mu}_i^3\left(1-\tilde{\mu}_i\right)^2 O_{1,i}^{(1)}(1) \\
&- \left.2\left(1-2\tilde{\mu}_i\right)O_{3,i}^{(1)}(1)O_{1,i}^{(1)}(1) - 2\tilde{\mu}_i^2\left(1-\tilde{\mu}_i\right)\left(1-2\tilde{\mu}_i\right)O_{1,i}(1)O_{1,i}^{(1)}(1)\right\},
\end{aligned}$$

where $O_{1,i}(1), O_{1,i}^{(1)}(1), O_{3,i}^{(1)}(1), O_{3,i}^{(2)}(1), P_i^{(2)}(1)$ can be obtained using direct operations.

Observación 34.3 *To determine the second order moments for the queue lengths, it is necessary to calculate the third derivative of the arrival processes for each of the queues.*

Parte V

APÉNDICES

CAPÍTULO 35

IMPLEMENTACIONES NUMÉRICAS

35.1. Día 1: Regresión Logística

Implementación Básica en R

Para implementar una regresión logística en R, primero es necesario instalar y cargar los paquetes necesarios.

Instalación y Configuración de R y RStudio

- *Descargue e instale R desde* `https://cran.r-project.org/`*. Siga las instrucciones para su sistema operativo (Windows, MacOS, Linux).*
- *Descargue e instale RStudio desde* `https://rstudio.com/products/rstudio/download/`*.*

35.1.1. Ejemplo de Regresión Logística en R

A continuación, se muestra un ejemplo de cómo ajustar un modelo de regresión logística en R utilizando un conjunto de datos simulado. El ejemplo incluye la instalación del paquete necesario, la carga de datos, el ajuste del modelo, y la interpretación de los resultados.

```
# Instalación del paquete necesario
install.packages("stats")

# Carga del paquete
library(stats)

# Ejemplo de conjunto de datos
data <- data.frame(
  outcome = c(1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0),
  predictor = c(2.3, 1.9, 3.1, 2.8, 3.6, 2.4, 2.1, 3.3, 2.2, 1.7)
)

# Ajuste del modelo de regresión logística
model <- glm(outcome ~ predictor, data = data, family = binomial)

# Resumen del modelo
summary(model)
```

En este ejemplo, se utiliza el conjunto de datos data que contiene una variable de resultado binaria outcome y una variable predictora continua predictor. El modelo de regresión logística se ajusta utilizando la función `glm` *con la familia binomial. La función* `summary(model)` *proporciona un resumen del modelo ajustado, incluyendo los coeficientes estimados, sus errores estándar, valores z, y p-valores.*

- ***Coeficientes:*** *Los coeficientes estimados β_0 y β_1 indican la dirección y magnitud de la relación entre las variables predictoras y la probabilidad del resultado.*

- ***Errores Estándar:*** *Los errores estándar proporcionan una medida de la precisión de los coeficientes estimados.*
- ***Valores z y p-valores:*** *Los valores z y p-valores se utilizan para evaluar la significancia estadística de los coeficientes. Un p-valor pequeño (generalmente ¡0.05) indica que el coeficiente es significativamente diferente de cero.*

Este es solo un ejemplo básico, en aplicaciones reales, es posible que necesites realizar más análisis y validaciones, como la evaluación de la bondad de ajuste del modelo, el diagnóstico de posibles problemas de multicolinealidad, y la validación cruzada del modelo.

```
# Archivo: regresionlogistica.R

# Instalación del paquete necesario
#install.packages("stats")

# Carga del paquete
library(stats)

# Fijar la semilla para reproducibilidad
set.seed(123)

# Número de observaciones
n <- 100

# Generar las variables independientes X1, X2, ..., X15
# Creamos una matriz de tamaño n x 15 con valores generados aleatoriamente de una
 distribución normal
X <- as.data.frame(matrix(rnorm(n * 15), nrow = n, ncol = 15))
colnames(X) <- paste0("X", 1:15)  # Nombramos las columnas como X1, X2, ..., X15

# Coeficientes verdaderos para las variables independientes
# Generamos un vector de 16 coeficientes (incluyendo el intercepto) aleatorios entre -1 y 1
beta <- runif(16, -1, 1)  # 15 coeficientes más el intercepto

# Generar el término lineal
# Calculamos el término lineal utilizando los coeficientes y las variables independientes
linear_term <- beta[1] + as.matrix(X) %*% beta[-1]

# Generar la probabilidad utilizando la función logística
# Calculamos las probabilidades utilizando la función logística
p <- 1 / (1 + exp(-linear_term))

# Generar la variable dependiente binaria Y
# Generamos valores binarios (0 o 1) utilizando las probabilidades calculadas
Y <- rbinom(n, 1, p)

# Combinar las variables independientes y la variable dependiente en un data frame
data <- cbind(Y, X)

# Dividir el conjunto de datos en entrenamiento y prueba
set.seed(123)  # Fijar la semilla para reproducibilidad
train_indices <- sample(1:n, size = 0.7 * n)  # 70% de los datos para entrenamiento
train_set <- data[train_indices, ]  # Conjunto de entrenamiento
test_set <- data[-train_indices, ]  # Conjunto de prueba

# Ajuste del modelo de regresión logística en el conjunto de entrenamiento
# Ajustamos un modelo de regresión logística utilizando las variables independientes
para predecir Y
model <- glm(Y ~ ., data = train_set, family = binomial)

# Resumen del modelo
# Mostramos un resumen del modelo ajustado
summary(model)

# Guardar el modelo y los resultados en un archivo
# Guardamos el modelo ajustado en un archivo .RData
save(model, file = "regresion_logistica_modelo.RData")

# Guardar los datos simulados en archivos CSV
# Guardamos los conjuntos de datos de entrenamiento y prueba en archivos CSV
write.csv(train_set, "datos_entrenamiento_regresion_logistica.csv", row.names = FALSE)
```

```
write.csv(test_set, "datos_prueba_regresion_logistica.csv", row.names = FALSE)

# Hacer predicciones en el conjunto de prueba
# Utilizamos el modelo ajustado para hacer predicciones en el conjunto de prueba
test_set$prob_pred <- predict(model, newdata = test_set, type = "response")
test_set$Y_pred <- ifelse(test_set$prob_pred > 0.5, 1, 0)
# Convertimos probabilidades a clases binarias

# Calcular la precisión de las predicciones
# Calculamos la precisión de las predicciones comparando con los valores reales de Y
accuracy <- mean(test_set$Y_pred == test_set$Y)
cat("La precisión del modelo en el conjunto de prueba es:", accuracy, "\n")

# Guardar las predicciones en un archivo CSV
# Guardamos las predicciones y las probabilidades predichas en un archivo CSV
write.csv(test_set, "predicciones_regresion_logistica.csv", row.names = FALSE)

# Graficar los coeficientes estimados
# Graficamos los coeficientes estimados del modelo ajustado
plot(coef(model), main = "Coeficientes Estimados del Modelo de Regresión Logística",
     xlab = "Variables", ylab = "Coeficientes", type = "h", col = "blue")
abline(h = 0, col = "red", lwd = 2)

# Mostrar un mensaje indicando que el proceso ha finalizado
cat("El modelo de regresión logística se ha ajustado, se han hecho predicciones y los resultados se han guardado
```

35.1.2. Aplicación a Datos de Cáncer - Parte I

A continuación, se muestra un ejemplo de cómo ajustar un modelo de regresión logística en R utilizando el conjunto de datos del cáncer de mama de Wisconsin.

```
# Archivo: regresionlogistica_cancer.R

# Instalación del paquete necesario
install.packages("mlbench")
install.packages("dplyr")

# Carga de los paquetes
library(mlbench)
library(dplyr)

# Cargar el conjunto de datos BreastCancer
data("BreastCancer")

# Ver las primeras filas del conjunto de datos
head(BreastCancer)

# Preprocesamiento de los datos
# Eliminar la columna de identificación y filas con valores faltantes
breast_cancer_clean <- BreastCancer %>%
  select(-Id) %>%
  na.omit()

# Convertir la variable 'Class' a factor binario
breast_cancer_clean$Class <- ifelse(breast_cancer_clean$Class == "malignant", 1, 0)
breast_cancer_clean$Class <- as.factor(breast_cancer_clean$Class)

# Convertir las demás columnas a numéricas
breast_cancer_clean[, 1:9] <- lapply(breast_cancer_clean[, 1:9], as.numeric)

# Dividir el conjunto de datos en entrenamiento (70%) y prueba (30%)
set.seed(123)
train_indices <- sample(1:nrow(breast_cancer_clean), size = 0.7 * nrow(breast_cancer_clean))
train_set <- breast_cancer_clean[train_indices, ]
test_set <- breast_cancer_clean[-train_indices, ]

# Ajuste del modelo de regresión logística en el conjunto de entrenamiento
model <- glm(Class ~ ., data = train_set, family = binomial)

# Resumen del modelo
```

```
summary(model)

# Guardar el modelo y los resultados en un archivo
save(model, file = "regresion_logistica_cancer_modelo.RData")

# Guardar los datos simulados en archivos CSV
write.csv(train_set, "datos_entrenamiento_cancer.csv", row.names = FALSE)
write.csv(test_set, "datos_prueba_cancer.csv", row.names = FALSE)

# Hacer predicciones en el conjunto de prueba
test_set$prob_pred <- predict(model, newdata = test_set, type = "response")
test_set$Class_pred <- ifelse(test_set$prob_pred > 0.5, 1, 0)

# Calcular la precisión de las predicciones
accuracy <- mean(test_set$Class_pred == test_set$Class)
cat("La precisión del modelo en el conjunto de prueba es:", accuracy, "\n")

# Guardar las predicciones en un archivo CSV
write.csv(test_set, "predicciones_cancer.csv", row.names = FALSE)

# Graficar los coeficientes estimados
plot(coef(model), main = "Coeficientes Estimados del Modelo de Regresión Logística",
     xlab = "Variables", ylab = "Coeficientes", type = "h", col = "blue")
abline(h = 0, col = "red", lwd = 2)

# Mostrar un mensaje indicando que el proceso ha finalizado
cat("El modelo de regresión logística se ha ajustado, se han hecho predicciones y los resultados se han guardado
```

Descripción del Código

Instalación y Carga de Paquetes:
Instalamos y cargamos el paquete `stats` necesario para la regresión logística.
Generación de Datos Simulados:

- *Fijamos una semilla para la reproducibilidad.*
- *Generamos un conjunto de datos con 100 observaciones y 15 variables independientes (`X1, X2, ..., X15`) usando una distribución normal.*
- *Definimos los coeficientes verdaderos para las variables independientes y calculamos el término lineal.*
- *Calculamos las probabilidades usando la función logística y generamos una variable dependiente binaria `Y` basada en esas probabilidades.*
- *Combinamos las variables independientes y la variable dependiente en un `data frame`.*

División de Datos en Conjuntos de Entrenamiento y Prueba:

- *Dividimos los datos en un conjunto de entrenamiento (70 %) y un conjunto de prueba (30 %).*

Ajuste del Modelo de Regresión Logística:

- *Ajustamos un modelo de regresión logística en el conjunto de entrenamiento.*
- *Mostramos un resumen del modelo ajustado.*

Guardado de Datos y Modelo:

- *Guardamos el modelo ajustado en un archivo `.RData`.*
- *Guardamos los conjuntos de datos de entrenamiento y prueba en archivos CSV.*

Predicciones y Evaluación del Modelo:

- *Hacemos predicciones en el conjunto de prueba utilizando el modelo ajustado.*
- *Calculamos la precisión de las predicciones comparando con los valores reales de `Y`.*
- *Guardamos las predicciones y las probabilidades predichas en un archivo CSV.*

Visualización de los Coeficientes del Modelo:

- *Graficamos los coeficientes estimados del modelo ajustado.*
- *Mostramos un mensaje indicando que el proceso ha finalizado.*

Para ejecutar este script, guarda el código en un archivo llamado regresionlogistica.R, abre R o RStudio, navega hasta el directorio donde guardaste el archivo y ejecuta el script usando source(regresionlogistica.R").

Ejemplo Titanic

Cuando realizas una regresión logística, obtienes coeficientes para cada variable independiente en tu modelo. Estos coeficientes indican la dirección y la magnitud de la relación entre cada variable independiente y la variable dependiente (en este caso, Survived).

Interpretación de los Coeficientes

- ***Intercepto*** *((Intercept)): Este coeficiente representa el logaritmo de las probabilidades (log-odds) de que Survived sea 1 (supervivencia) cuando todas las variables independientes son cero.*
- ***Pclass****: El coeficiente asociado con Pclass indica cómo cambia el log-odds de supervivencia con cada incremento en la clase del pasajero. Si el coeficiente es negativo, sugiere que una clase más alta (por ejemplo, de primera clase a tercera clase) reduce las probabilidades de supervivencia.*
- ***Sex****: Este coeficiente muestra el efecto de ser hombre o mujer en las probabilidades de supervivencia. Generalmente, se espera que el coeficiente sea positivo para female indicando que las mujeres tenían mayores probabilidades de sobrevivir.*
- ***Age****: El coeficiente de Age indica cómo cambia el log-odds de supervivencia con cada año de incremento en la edad. Un coeficiente negativo sugiere que la probabilidad de supervivencia disminuye con la edad.*
- ***SibSp*** *y* ***Parch****: Estos coeficientes indican el efecto del número de hermanos/cónyuges a bordo y padres/hijos a bordo en las probabilidades de supervivencia.*
- ***Fare****: Este coeficiente indica el efecto del precio del billete en las probabilidades de supervivencia. Un coeficiente positivo sugiere que pagar más por el billete se asocia con mayores probabilidades de supervivencia.*

Estadísticas de Ajuste del Modelo

El resumen del modelo (summary(model)) incluye varias estadísticas importantes:

- ***Estadísticos z y p-valores****: Estas estadísticas indican la significancia de cada coeficiente. Un p-valor bajo (generalmente ¡0.05) sugiere que la variable es un predictor significativo de la variable dependiente.*
- ***Desviación Residual****: La desviación residual mide la calidad del ajuste del modelo. Valores más bajos indican un mejor ajuste.*
- ***AIC (Akaike Information Criterion)****: El AIC es una medida de la calidad del modelo que toma en cuenta tanto la bondad del ajuste como la complejidad del modelo. Modelos con AIC más bajo son preferidos.*

Precisión del Modelo

La precisión del modelo en el conjunto de prueba es una métrica importante para evaluar el rendimiento del modelo. La precisión se calcula como el número de predicciones correctas dividido por el número total de predicciones.

Ejemplo de Resultados

Supongamos que la precisión del modelo es 0.78 (78 %). Esto significa que el modelo correctamente predijo el estado de supervivencia del 78 % de los pasajeros en el conjunto de prueba.

Matriz de Confusión y Otras Métricas

Además de la precisión, otras métricas como la matriz de confusión, la sensibilidad, la especificidad, y el área bajo la curva ROC (AUC-ROC) también pueden proporcionar una visión más completa del rendimiento del modelo.

Matriz de Confusión

- ***Verdaderos Positivos (TP)****: Número de pasajeros que sobrevivieron y fueron predichos como sobrevivientes.*
- ***Verdaderos Negativos (TN)****: Número de pasajeros que no sobrevivieron y fueron predichos como no sobrevivientes.*
- ***Falsos Positivos (FP)****: Número de pasajeros que no sobrevivieron pero fueron predichos como sobrevivientes.*
- ***Falsos Negativos (FN)****: Número de pasajeros que sobrevivieron pero fueron predichos como no sobrevivientes.*

Ejemplo de Cálculo de Métricas

```
# Calcular la matriz de confusión
table(test_set$Survived, test_set$Survived_pred)

# Calcular sensibilidad y especificidad
sensitivity <- sum(test_set$Survived == 1 & test_set$Survived_pred == 1) / sum(test_set$Survived == 1)
specificity <- sum(test_set$Survived == 0 & test_set$Survived_pred == 0) / sum(test_set$Survived == 0)

# Calcular AUC-ROC
library(pROC)
roc_curve <- roc(test_set$Survived, test_set$prob_pred)
auc(roc_curve)
```

Visualización de Resultados

Graficar los coeficientes del modelo, la curva ROC y otras visualizaciones ayudan a entender mejor el rendimiento y la importancia de cada variable en el modelo.

```
# Graficar la curva ROC
plot(roc_curve, main = "Curva ROC para el Modelo de Regresión Logística")
```

Resumen Final

El modelo de regresión logística aplicado al conjunto de datos del Titanic proporciona una forma de entender cómo diferentes características de los pasajeros influyen en sus probabilidades de supervivencia. La interpretación de los coeficientes del modelo, las estadísticas de ajuste, y la precisión del modelo en el conjunto de prueba son fundamentales para evaluar el rendimiento y la utilidad del modelo en hacer predicciones sobre la supervivencia de los pasajeros del Titanic.

35.1.3. Simulación de Datos de Cáncer - Parte II

Aquí se presenta un ejemplo de cómo realizar una regresión logística utilizando datos simulados de pacientes con cáncer.

```
#---- Archivo: cancerLogRegSimulado.R ----

# Instalación del paquete necesario
if (!requireNamespace("dplyr", quietly = TRUE)) {
  install.packages("dplyr")
}

# Carga del paquete
library(dplyr)

# Fijar la semilla para reproducibilidad
set.seed(123)

# Número de observaciones
n <- 150

# Generar las variables independientes X1, X2, ..., X15
# Creamos una matriz de tamaño n x 15 con valores generados aleatoriamente de una
distribución normal
X <- as.data.frame(matrix(rnorm(n * 15), nrow = n, ncol = 15))
colnames(X) <- paste0("X", 1:15)  # Nombramos las columnas como X1, X2, ..., X15

# Coeficientes verdaderos para las variables independientes
# Generamos un vector de 16 coeficientes (incluyendo el intercepto) aleatorios entre -1 y 1
beta <- runif(16, -1, 1)  # 15 coeficientes más el intercepto

# Generar el término lineal
# Calculamos el término lineal utilizando los coeficientes y las variables independientes
linear_term <- beta[1] + as.matrix(X) %*% beta[-1]

# Generar la probabilidad utilizando la función logística
# Calculamos las probabilidades utilizando la función logística
p <- 1 / (1 + exp(-linear_term))
```

```
# Generar la variable dependiente binaria Y
# Generamos valores binarios (0 o 1) utilizando las probabilidades calculadas
Y <- rbinom(n, 1, p)

# Combinar las variables independientes y la variable dependiente en un data frame
data <- cbind(Y, X)

# Dividir el conjunto de datos en entrenamiento y prueba
set.seed(123)  # Fijar la semilla para reproducibilidad
train_indices <- sample(1:n, size = 0.7 * n)  # 70% de los datos para entrenamiento
train_set <- data[train_indices, ]  # Conjunto de entrenamiento
test_set <- data[-train_indices, ]  # Conjunto de prueba

# Ajuste del modelo de regresión logística en el conjunto de entrenamiento
# Ajustamos un modelo de regresión logística utilizando las variables independientes
para predecir Y
model <- glm(Y ~ ., data = train_set, family = binomial)

# Resumen del modelo
# Mostramos un resumen del modelo ajustado
summary(model)

# Guardar el modelo y los resultados en un archivo
# Guardamos el modelo ajustado en un archivo .RData
save(model, file = "regresion_logistica_cancer_modelo_simulado.RData")

# Guardar los datos simulados en archivos CSV
# Guardamos los conjuntos de datos de entrenamiento y prueba en archivos CSV
write.csv(train_set, "datos_entrenamiento_cancer_simulado.csv", row.names = FALSE)
write.csv(test_set, "datos_prueba_cancer_simulado.csv", row.names = FALSE)

# Hacer predicciones en el conjunto de prueba
# Utilizamos el modelo ajustado para hacer predicciones en el conjunto de prueba
test_set$prob_pred <- predict(model, newdata = test_set, type = "response")
test_set$Y_pred <- ifelse(test_set$prob_pred > 0.5, 1, 0)
# Convertimos probabilidades a clases binarias

# Calcular la precisión de las predicciones
# Calculamos la precisión de las predicciones comparando con los valores reales de Y
accuracy <- mean(test_set$Y_pred == test_set$Y)
cat("La precisión del modelo en el conjunto de prueba es:", accuracy, "\n")

# Guardar las predicciones en un archivo CSV
# Guardamos las predicciones y las probabilidades predichas en un archivo CSV
write.csv(test_set, "predicciones_cancer_simulado.csv", row.names = FALSE)

# Graficar los coeficientes estimados
# Graficamos los coeficientes estimados del modelo ajustado
plot(coef(model), main = "Coeficientes Estimados del Modelo de Regresión Logística",
     xlab = "Variables", ylab = "Coeficientes", type = "h", col = "blue")
abline(h = 0, col = "red", lwd = 2)

# Mostrar un mensaje indicando que el proceso ha finalizado
cat("El modelo de regresión logística se ha ajustado, se han hecho predicciones
y los resultados se han guardado en 'regresion_logistica_cancer_modelo_simulado.RData'.\n")
```

35.1.4. Simulación de Datos de Cáncer - Parte III

En un estudio sobre cáncer, especialmente en el contexto del cáncer de mama, las principales mediciones suelen incluir una variedad de características clínicas y patológicas. Aquí hay algunas de las principales mediciones que se tienen en cuenta:

- ***Tamaño del Tumor****: Medición del diámetro del tumor.*
- ***Estado de los Ganglios Linfáticos****: Número de ganglios linfáticos afectados.*
- ***Grado del Tumor****: Clasificación del tumor basada en la apariencia de las células cancerosas.*
- ***Receptores Hormonales****: Estado de los receptores de estrógeno y progesterona.*
- ***Estado HER2****: Expresión del receptor 2 del factor de crecimiento epidérmico humano.*

- ***Ki-67**: Índice de proliferación celular.*
- ***Edad del Paciente**: Edad en el momento del diagnóstico.*
- ***Histopatología**: Tipo y subtipo histológico del cáncer.*
- ***Márgenes Quirúrgicos**: Estado de los márgenes después de la cirugía (si están libres de cáncer o no).*
- ***Invasión Linfovascular**: Presencia de células cancerosas en los vasos linfáticos o sanguíneos.*
- ***Tratamientos Previos**: Tipos de tratamientos recibidos antes del diagnóstico (quimioterapia, radioterapia, etc.).*
- ***Tipo de Cirugía**: Tipo de procedimiento quirúrgico realizado (mastectomía, lumpectomía, etc.).*
- ***Metástasis**: Presencia de metástasis y ubicación de las mismas.*
- ***Índice de Masa Corporal (IMC)**: Relación entre el peso y la altura del paciente.*
- ***Marcadores Genéticos**: Presencia de mutaciones genéticas específicas (BRCA1, BRCA2, etc.).*

Estas mediciones proporcionan una visión integral del estado del cáncer y se utilizan para planificar el tratamiento y predecir el pronóstico.

A continuación, se muestra un ejemplo de cómo ajustar un modelo de regresión logística en R utilizando un conjunto de datos simulado con estas mediciones.

```
# Archivo: simulcorrectedCancer.R

# Instalación del paquete necesario
if (!requireNamespace("dplyr", quietly = TRUE)) {
  install.packages("dplyr")
}

# Carga del paquete
library(dplyr)

# Fijar la semilla para reproducibilidad
set.seed(123)

# Número de observaciones
n <- 1500

# Simulación de las variables independientes
# Tamaño del Tumor (en cm)
Tumor_Size <- rnorm(n, mean = 3, sd = 1.5)

# Estado de los Ganglios Linfáticos (número de ganglios afectados)
Lymph_Nodes <- rpois(n, lambda = 3)

# Grado del Tumor (1 a 3)
Tumor_Grade <- sample(1:3, n, replace = TRUE)

# Receptores Hormonales (0: negativo, 1: positivo)
Estrogen_Receptor <- rbinom(n, 1, 0.7)
Progesterone_Receptor <- rbinom(n, 1, 0.7)

# Estado HER2 (0: negativo, 1: positivo)
HER2_Status <- rbinom(n, 1, 0.3)

# Ki-67 (% de células proliferativas)
Ki_67 <- rnorm(n, mean = 20, sd = 10)

# Edad del Paciente (años)
Age <- rnorm(n, mean = 50, sd = 10)

# Histopatología (1: ductal, 2: lobular, 3: otros)
Histopathology <- sample(1:3, n, replace = TRUE)

# Márgenes Quirúrgicos (0: positivo, 1: negativo)
Surgical_Margins <- rbinom(n, 1, 0.8)

# Invasión Linfovascular (0: no, 1: sí)
Lymphovascular_Invasion <- rbinom(n, 1, 0.4)

# Tratamientos Previos (0: no, 1: sí)
Prior_Treatments <- rbinom(n, 1, 0.5)
```

```
# Tipo de Cirugía (0: mastectomía, 1: lumpectomía)
Surgery_Type <- rbinom(n, 1, 0.5)

# Metástasis (0: no, 1: sí)
Metastasis <- rbinom(n, 1, 0.2)

# Índice de Masa Corporal (IMC)
BMI <- rnorm(n, mean = 25, sd = 5)

# Marcadores Genéticos (0: negativo, 1: positivo)
Genetic_Markers <- rbinom(n, 1, 0.1)

# Generar la variable dependiente binaria Y (sobrevivencia 0: no, 1: sí)
# Utilizaremos una combinación arbitraria de las variables para generar Y
linear_term <- -1 + 0.5 * Tumor_Size - 0.3 * Lymph_Nodes + 0.2 * Tumor_Grade +
  0.4 * Estrogen_Receptor + 0.3 * Progesterone_Receptor - 0.2 * HER2_Status +
  0.1 * Ki_67 - 0.05 * Age + 0.3 * Surgical_Margins - 0.4 * Lymphovascular_Invasion +
  0.2 * Prior_Treatments + 0.1 * Surgery_Type - 0.5 * Metastasis + 0.01 * BMI +
  0.2 * Genetic_Markers
p <- 1 / (1 + exp(-linear_term))
Y <- rbinom(n, 1, p)

# Combinar las variables independientes y la variable dependiente en un data frame
data <- data.frame(Y, Tumor_Size, Lymph_Nodes, Tumor_Grade, Estrogen_Receptor,
                   Progesterone_Receptor, HER2_Status, Ki_67, Age, Histopathology,
                   Surgical_Margins, Lymphovascular_Invasion, Prior_Treatments,
                   Surgery_Type, Metastasis, BMI, Genetic_Markers)

# Dividir el conjunto de datos en entrenamiento y prueba
set.seed(123)  # Fijar la semilla para reproducibilidad
train_indices <- sample(1:n, size = 0.7 * n)  # 70% de los datos para entrenamiento
train_set <- data[train_indices, ]  # Conjunto de entrenamiento
test_set <- data[-train_indices, ]  # Conjunto de prueba

# Ajuste del modelo de regresión logística en el conjunto de entrenamiento
# Ajustamos un modelo de regresión logística utilizando las variables independientes para
 predecir Y
model <- glm(Y ~ ., data = train_set, family = binomial)

# Resumen del modelo
# Mostramos un resumen del modelo ajustado
summary(model)

# Guardar el modelo y los resultados en un archivo
# Guardamos el modelo ajustado en un archivo .RData
save(model, file = "regresion_logistica_cancer_modelo_simulado.RData")

# Guardar los datos simulados en archivos CSV
# Guardamos los conjuntos de datos de entrenamiento y prueba en archivos CSV
write.csv(train_set, "datos_entrenamiento_cancer_simulado.csv", row.names = FALSE)
write.csv(test_set, "datos_prueba_cancer_simulado.csv", row.names = FALSE)

# Hacer predicciones en el conjunto de prueba
# Utilizamos el modelo ajustado para hacer predicciones en el conjunto de prueba
test_set$prob_pred <- predict(model, newdata = test_set, type = "response")
test_set$Y_pred <- ifelse(test_set$prob_pred > 0.5, 1, 0)
# Convertimos probabilidades a clases binarias

# Calcular la precisión de las predicciones
# Calculamos la precisión de las predicciones comparando con los valores reales de Y
accuracy <- mean(test_set$Y_pred == test_set$Y)
cat("La precisión del modelo en el conjunto de prueba es:", accuracy, "\n")

# Guardar las predicciones en un archivo CSV
# Guardamos las predicciones y las probabilidades predichas en un archivo CSV
write.csv(test_set, "predicciones_cancer_simulado.csv", row.names = FALSE)

# Graficar los coeficientes estimados
# Graficamos los coeficientes estimados del modelo ajustado
```

```
plot(coef(model), main = "Coeficientes Estimados del Modelo de Regresión Logística",
     xlab = "Variables", ylab = "Coeficientes", type = "h", col = "blue")
abline(h = 0, col = "red", lwd = 2)

# Mostrar un mensaje indicando que el proceso ha finalizado
cat("El modelo de regresión logística se ha ajustado, se han hecho predicciones
y los resultados se han guardado en 'regresion_logistica_cancer_modelo_simulado.RData'.\n")
```

Parte VI

BIBLIOGRAFIA

CAPÍTULO 36

Bibliografía

Bibliografía

[1] *Asmussen, S. (1987). Applied Probability and Queues. John Wiley and Sons.*

[2] *Bhat, N. (2008). An Introduction to Queueing Theory: Modelling and Analysis in Applications. Birkhauser.*

[3] *Boxma, J. O. (1987). Pseudoconservation Laws in Cyclic Service Systems. Journal of Applied Probability, 24, 949-964.*

[4] *Borovkov, A. A., and Schassberger, R. (1995). Ergodicity of a Polling Network. Stochastic Processes and their Applications, 50(2), 253-262.*

[5] *van den Bos, L., and Boon, M. (2013). Networks of Polling Systems (report). Eindhoven University of Technology.*

[6] *Boon, M. A. A., van der Mei, R. D., and Winands, E. M. M. (2011). Applications of Polling Systems. February 24, 2011.*

[7] *Ng, C. H., and Soong, B. H. (2008). Queueing Modelling Fundamentals with Applications in Communications Networks. John Wiley and Sons.*

[8] *Chen, H. (1995). Fluid Approximations and Stability of Multiclass Queueing Networks I: Work-conserving Disciplines. Annals of Applied Probability.*

[9] *Cooper, R. B. (1970). Queues Served in Cyclic Order: Waiting Times. The Bell System Technical Journal, 49, 399-413.*

[10] *Dai, J. G. (1995). On Positive Harris Recurrence of Multiclass Queueing Networks: A Unified Approach Via Fluid Limit Models. The Annals of Applied Probability, 5(1), 49-77.*

[11] *Dai, J. G., and Meyn, S. P. (1995). Stability and Convergence of Moments for Multiclass Queueing Networks Via Fluid Limit Models. IEEE Transactions on Automatic Control, 40(11), 1889-1904.*

[12] *Dai, J. G., and Weiss, G. (1996). Stability and Instability of Fluid Models for Reentrant Lines. Mathematics of Operations Research, 21(1), 115-134.*

[13] *Daley, D. J. (1968). The Correlation Structure of the Output Process of Some Single Server Queueing Systems. The Annals of Mathematical Statistics, 39(3), 1007-1019.*

[14] *Davis, M. H. A. (1984). Piecewise Deterministic Markov Processes: A General Class of Nondiffusion Stochastic Models. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 46(3), 353-388.*

[15] *Down, D. (1998). On the Stability of Polling Models with Multiple Servers. Journal of Applied Probability, 35(3), 925-935.*

[16] *Disney, R. L., Farrell, R. L., and Morais, P. R. (1973). A Characterization of $M/G/1$ Queues with Renewal Departure Processes. Management Science, 19(11), Theory Series, 1222-1228.*

[17] *Eisenberg, M. (1972). Queues with Periodic Service and Changeover Time. Operations Research, 20(2), 440-451.*

[18] *Fricker, C., and Jaïbi, M. R. (1994). Monotonicity and Stability of Periodic Polling Models. Queueing Systems, 15(1-4), 211-238.*

[19] *Getoor, R. K. (1979). Transience and Recurrence of Markov Processes. In J. Azema and M. Yor (Eds.), Seminaire de Probabilités XIV (pp. 397-409). New York: Springer-Verlag.*

[20] *Gut, A. (1995). Stopped Random Walks: Limit Theorems and Applications. Applied Probability.*

[21] *Kaspi, H., and Mandelbaum, A. (1992). Regenerative Closed Queueing Networks. Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 39(4), 239-258.*

[22] *Kleinrock, L. (1975). Queueing Systems: Theory, Volume 1. Wiley-Interscience.*

[23] *Konheim, A. G., Levy, H., and Srinivasan, M. M. (1994). Descendant Set: An Efficient Approach for the Analysis of Polling Systems. IEEE Transactions on Communications, 42(2-4), 1245-1253.*

[24] *Lang, S. (1973). Calculus of Several Variables. Addison-Wesley Publishing Company.*

[25] *Levy, H., and Sidi, M. (1990). Polling Systems: Applications, Modeling, and Optimization. IEEE Transactions on Communications, 30(10), 1750-1760.*

[26] *Fricker, C., and Jaïbi, M. R. (1998). Stability of Multi-server Polling Models. Institute National de Recherche en Informatique et en Automatique.*

[27] *Meyn, S. P., and Tweedie, R. L. (1993). Markov Chains and Stochastic Stability. Springer-Verlag.*

[28] *Meyn, S. P., and Down, D. (1994). Stability of Generalized Jackson Networks. The Annals of Applied Probability.*

[29] *van der Mei, R. D., and Borst, S. C. (1997). Analysis of Multiple-server Polling Systems by Means of the Power-Series Algorithm. Stochastic Models, 13(2), 339-369.*

[30] *Meyn, S. P. (1995). Transience of Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models. The Annals of Applied Probability, 5(4), 946-957.*

[31] *Adan, I. J. B. F., van Leeuwaarden, J. S. H., and Winands, E. M. M. (2006). On the Application of Rouche's Theorem in Queueing Theory. Operations Research Letters, 34(3), 355-360.*

[32] *Roubos, A. (2007). Polling Systems and their Applications. Vrije Universiteit Amsterdam.*

[33] *Saavedra, B. P. (2011). Informe Técnico del Microsimulador. Departamento de Matemáticas.*

[34] *Vishnevskii, V. M., and Semenova, O. V. (2006). Mathematical Methods to Study the Polling Systems. Automation and Remote Control, 67(2), 173-220.*

[35] *Serfozo, R. (2009). Basics of Applied Stochastic Processes. Springer-Verlag.*

[36] *Sharpe, M. (1998). General Theory of Markov Processes. Academic.*

[37] *Sigman, K. (1990). The Stability of Open Queueing Networks. Stochastic Processes and their Applications, 35(1), 11-15.*

[38] *Sidi, M., and Levy, H. (1990). Customer Routing in Polling Systems. In P. King, I. Mitrani, and R. Pooley (Eds.), Proceedings Performance '90. North-Holland, Amsterdam.*

[39] *Sidi, M., and Levy, H. (1991). Polling Systems with Simultaneous Arrivals. IEEE Transactions on Communications, 39(6), 823-827.*

[40] *Sigman, K., Thorisson, H., and Wolff, R. W. (1994). A Note on the Existence of Regeneration Times. Journal of Applied Probability, 31, 1116-1122.*

[41] *Stidham, S. Jr. (1972). Regenerative Processes in the Theory of Queues, with Applications to the Alternating Priority Queue. Advances in Applied Probability, 4(3), 542-577.*

[42] *Takagi, H. (1986). Analysis of Polling Systems. Cambridge: MIT Press.*

[43] *Takagi, H., and Kleinrock. (1986). Analysis of Polling Systems. Cambridge: MIT Press.*

[44] *Takagi, H. (1988). Queueing Analysis of Polling Models. ACM Computing Surveys, 20(1), 5-28.*

[45] *Thorisson, H. (2000). Coupling, Stationarity, and Regeneration. Probability and its Applications. Springer-Verlag.*

[46] *Winands, E. M. M., Adan, I. J. B. F., and van Houtum, G. J. (2006). Mean Value Analysis for Polling Systems. Queueing Systems, 54, 35-44.*

[47] *James, G., Witten, D., Hastie, T., and Tibshirani, R. (2013). An Introduction to Statistical Learning: with Applications in R. Springer.*

[48] *Hosmer, D. W., Lemeshow, S., and Sturdivant, R. X. (2013). Applied Logistic Regression (3rd ed.). Wiley.*

[49] *Bishop, C. M. (2006). Pattern Recognition and Machine Learning. Springer.*

[50] *Harrell, F. E. (2015). Regression Modeling Strategies: With Applications to Linear Models, Logistic and Ordinal Regression, and Survival Analysis. Springer.*

[51] *R Documentation and Tutorials:* `https://cran.r-project.org/manuals.html`

[52] *Tutorials on R-bloggers:* `https://www.r-bloggers.com/`

[53] *Coursera: Machine Learning by Andrew Ng.*

[54] *edX: Data Science and Machine Learning Essentials by Microsoft.*

[55] *Ross, S. M. (2014). Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists. Academic Press.*

[56] *DeGroot, M. H., and Schervish, M. J. (2012). Probability and Statistics (4th ed.). Pearson.*

[57] *Hogg, R. V., McKean, J., and Craig, A. T. (2019). Introduction to Mathematical Statistics (8th ed.). Pearson.*

[58] *Kleinbaum, D. G., and Klein, M. (2010). Logistic Regression: A Self-Learning Text (3rd ed.). Springer.*

[59] *Wasserman, L. (2004). All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference. Springer.*

[60] *Probability and Statistics Tutorials on Khan Academy:* `https://www.khanacademy.org/math/statistics-probability`

[61] *Online Statistics Education:* `http://onlinestatbook.com/`

[62] *Peng, C. Y. J., Lee, K. L., and Ingersoll, G. M. (2002). An Introduction to Logistic Regression Analysis and Reporting. The Journal of Educational Research.*

[63] *Agresti, A. (2007). An Introduction to Categorical Data Analysis (2nd ed.). Wiley.*

[64] *Han, J., Pei, J., and Kamber, M. (2011). Data Mining: Concepts and Techniques. Morgan Kaufmann.*

[65] *Data Cleaning and Preprocessing on Towards Data Science:* `https://towardsdatascience.com/data-cleaning-and-preprocessing`

[66] *Molinaro, A. M., Simon, R., and Pfeiffer, R. M. (2005). Prediction Error Estimation: A Comparison of Resampling Methods. Bioinformatics.*

[67] *Evaluating Machine Learning Models on Towards Data Science:* `https://towardsdatascience.com/evaluating-machine-learning-models`

[68] *Practical Guide to Logistic Regression in R on Towards Data Science:* `https://towardsdatascience.com/practical-guide-to-logistic-regression-in-r`

[69] *Coursera: Statistics with R by Duke University.*

[70] *edX: Data Science: Probability by Harvard University.*

[71] *Coursera: Logistic Regression by Stanford University.*

[72] *edX: Data Science: Inference and Modeling by Harvard University.*

[73] *Coursera: Data Science: Wrangling and Cleaning by Johns Hopkins University.*

[74] *edX: Data Science: R Basics by Harvard University.*

[75] *Coursera: Regression Models by Johns Hopkins University.*

[76] *edX: Data Science: Statistical Inference by Harvard University.*

[77] *An Introduction to Survival Analysis on Towards Data Science:* `https://towardsdatascience.com/an-introduction-to-survival-analysis`

[78] *Multinomial Logistic Regression on DataCamp:* `https://www.datacamp.com/community/tutorials/multinomial-logistic-regression-R`

[79] *Coursera: Survival Analysis by Johns Hopkins University.*

[80] *edX: Data Science: Statistical Inference and Modeling for High-throughput Experiments by Harvard University.*

[81] *Sigman, K., and Wolff, R. W. (1993). A Review of Regenerative Processes. SIAM Review, 38(2), 269-288.*