Procesos Regenerativos y de Renovación: Revisión

Renewal and Regenerative Processes: Review

Carlos E. Martínez-Rodríguez

Julio 2024

Abstract

En este documento se presenta una recopilación de resultados relacionados con la teoría de procesos estocásticos, con un enfoque específico en procesos de Markov, procesos regenerativos, procesos de renovación y procesos estacionarios. La relevancia de estos temas reside en la capacidad de identificar puntos de regeneración y las condiciones necesarias para la garantizar la estacionareidad del proceso. El estudio inicia con una revisión de cadenas de Markov y prosigue con el análisis de procesos que cumplen con la propiedad fuerte de Markov. Posteriormente, se profundiza en los procesos de renovación, procesos regenerativos y, finalmente, en los procesos regenerativos estacionarios, destacando los resultados presentados por Thorisson [22]. Este trabajo no tiene la intención de ser exhaustivo, sino de proporcionar una base sólida que permita profundizar en el conocimiento de estos procesos, dado su amplio espectro de aplicaciones en criptografía [16], teoría de colas [15] y métodos de Monte Carlo [23]. Asimismo, se subraya la importancia de los procesos de tipo Poisson debido a sus numerosas aplicaciones (ver [8]).

Abstract

This document presents a compilation of results related to the theory of stochastic processes, with a specific focus on Markov processes, regenerative processes, renewal processes, and stationary processes. The relevance of these topics lies in the ability to identify regeneration points and the necessary conditions to ensure the stationarity of the process. The study begins with a review of Markov chains and continues with the analysis of processes that satisfy the strong Markov property. Subsequently, it delves into renewal processes, regenerative processes, and finally, stationary regenerative processes, highlighting the results presented by Thorisson [22]. This work is not intended to be exhaustive but aims to provide a solid foundation for further deepening the knowledge of these processes, given their broad range of applications in cryptography [16], queueing theory [15], and Monte Carlo methods [23]. Additionally, the importance of Poisson-type processes is emphasized due to their numerous applications (see [8]).

Contents

Introducción

El estudio de las cadenas de Markov es fundamental para comprender las condiciones bajo las cuales un proceso estocástico puede regenerarse, así como para determinar la existencia de tiempos de regeneración. La extensión de estos conceptos a teorías de colas y sistemas de visitas cíclicas requiere un conocimiento profundo de la teoría subyacente. Este análisis naturalmente lleva a explorar temas más complejos, tales como los procesos regenerativos y de renovación. En este trabajo se realiza una revisión de los conceptos esenciales para iniciar el estudio de los procesos regenerativos estacionarios. La revisión de estos temas se llevó a cabo en su momento bajo la supervisión del Dr. Raúl Montes de Oca Machorro y la Dra. Patricia Saavedra Barrera, cuyas oportunas y valiosas sugerencias y comentarios fueron fundamentales para desarrollar el estudio de este tipo de procesos estocásticos. Es importante destacar que las aplicaciones de estos resultados en la teoría de colas tienen un impacto significativo en problemas contemporáneos. A pesar de los avances logrados, aún existen preguntas sin resolver sobre su aplicación y generalización en la teoría de colas. Este trabajo no pretende ser un estudio exhaustivo sobre el tema, sino más bien proporcionar los elementos necesarios para introducirse en el estudio de estos procesos. El documento está organizado de la siguiente manera: en la primera sección se realiza una revisión de las cadenas de Markov y de los procesos de Markov. En la segunda sección se aborda un estudio inicial de los procesos de renovación y de los procesos regenerativos, junto con sus propiedades y el teorema principal de renovación. La tercera sección profundiza en los procesos regenerativos incluidos en [22], para los cuales es necesario revisar procesos más generales. Finalmente, en la última sección se presentan una serie de consideraciones respecto al contenido de este trabajo.

Introduction

The study of Markov chains is fundamental for understanding the conditions under which a stochastic process can regenerate, as well as for determining the existence of regeneration times. Extending these concepts to queueing theories and cyclic visit systems requires a deep understanding of the underlying theory. This analysis naturally leads to exploring more complex topics such as regenerative and renewal processes. This work provides a review of the essential concepts for initiating the study of stationary regenerative processes. The review of these topics was conducted under the supervision of Dr. Raúl Montes de Oca Machorro and Dr. Patricia Saavedra Barrera, whose timely and valuable suggestions and comments were fundamental in developing the study of these types of stochastic processes. It is important to highlight that the applications of these results in queueing theory have a significant impact on contemporary problems. It is important to highlight that the applications of these results in queueing theory have a significant impact on contemporary problems. Despite the advances made, there are still unresolved questions regarding their application and generalization in queueing theory. This work does not aim to be an exhaustive study of the topic but rather to provide the necessary elements to introduce the study of these processes. The document is organized as follows: the first section provides a review of Markov chains and Markov processes. The second section addresses an initial study of renewal processes and regenerative processes, along with their properties and the main renewal theorem. The third section delves into the regenerative processes included in [22], for which it is necessary to review more general processes. Finally, the last section presents a series of considerations regarding the content of this work.

1 Procesos Estocásticos

Definición 1.1. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 1.2. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 1.3. *Sea X un espacio topológico. El álgebra de Borel en X, denotada por $\mathcal{B}(X)$, es la σ-álgebra generada por la colección de todos los conjuntos abiertos de X. Es decir, $\mathcal{B}(X)$ es la colección más pequeña de subconjuntos de X que contiene todos los conjuntos abiertos y es cerrada bajo la unión numerable, la intersección numerable y el complemento.*

Definición 1.4. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\},$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.5. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1.6. *[TSP, Ash [1]]Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1.7. *[TSP, Ash [1]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1.8. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1.9. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{1.1}$$

Nota 1.1. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (1.1) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{1.2}$$

Teorema 1.1. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \to p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \to \{0, 1, \ldots,\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B). \tag{1.3}$$

en $\{T < \infty\}$.

Cadenas de Markov

Definición 1.10. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\mathbf{E}$ un conjunto no vacío, finito o numerable. Una sucesión de variables aleatorias $\{X_n : \Omega \to \mathbf{E}, n \geq 0\}$ se le llama Cadena de Markov con espacio de estados $\mathbf{E}$ si satisface la condición de Markov, esto es, si para todo $n \geq 1$ y toda sucesión $x_0, x_1, \ldots, x_n, x, y \in \mathbf{E}$ se cumple que*

$$P\{X_n = y | X_{n-1} = x, \ldots, X_0 = x_0\} = P\{X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}\}. \tag{1.4}$$

La distribución de X_0 se llama distribución inicial y se denotará por π.

Nota 1.2. *Las probabilidades condicionales $P\{X_n = y | X_{n-1} = x\}$ se les llama probabilidades condicionales*

Nota 1.3. *En este trabajo se considerarán solamente aquellas cadenas de Markov con probabilidades de transición estacionarias, es decir, aquellas que no dependen del valor de n (se dice que es una cadena homogénea), es decir, cuando se diga $X_n, n \geq 0$ es cadena de Markov, se entiende que es una sucesión de variables aleatorias que satisfacen la propiedad de Markov y que tienen probabilidades de transición estacionarias.*

Nota 1.4. *Para una cadena de Markov Homogénea se tiene la siguiente denotación*

$$P\{X_n = y | X_{n-1} = x\} = P_{x,y}. \tag{1.5}$$

Nota 1.5. *Para $m \geq 1$ se denotará por $P_{x,y}^{(m)}$ a $P\{X_{n+m} = y | X_n = x\}$, que significa la probabilidad de ir en m pasos o unidades de tiempo de x a y, y se le llama probabilidad de transición en m pasos.*

Nota 1.6. *Para $x, y \in \mathbf{E}$ se define a $P_{x,y}^{(0)}$ como $\delta_{x,y}$, donde $\delta_{x,y}$ es la delta de Kronecker, es decir, vale 1 si $x = y$ y 0 en otro caso.*

Nota 1.7. *En el caso de que $\mathbf{E}$ sea finito, se considera la matrix $P = (P_{x,y})_{x,y \in \mathbf{E}}$ y se le llama matriz de transición.*

Nota 1.8. *Si la distribución inicial π es igual al vector $(\delta_{x,y})_{y\in\mathbf{E}}$, es decir,*

$$P(X_0 = x) = 1) \text{ y } P(X_0 \neq x) = 0,$$

entonces se toma la notación

$$P_x(A) = P(A|X_0 = x), A \in \mathcal{F}, \tag{1.6}$$

y se dice que la cadena empieza en A. Se puede demostrar que P_x es una nueva medida de probabilidad en el espacio $(\Omega, \mathcal{F})$.

Nota 1.9. *La suma de las entradas de los renglones de la matriz de transición es igual a uno, es decir, para todo $x \in \mathbf{E}$ se tiene $\sum_{y\in\mathbf{E}} P_{x,y} = 1$.*

Para poder obtener uno de los resultados más importantes en cadenas de Markov, la *ecuación de Chapman-kolmogorov* se requieren los siguientes resultados:

Lema 1.1. *Sean $x, y, z \in \mathbf{E}$ y $0 \leq m \leq n-1$, entonces se cumple que*

$$P(X_{n+1} = y|X_n = z, X_m = x) = P_{z,y}. \tag{1.7}$$

Proposición 1.1. *Si $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{E}$ y $\pi(x_0) = P(X_0 = x_0)$, entonces*

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n, X_0 = x_0) = \pi(x_0) P_{x_0,x_1} \cdot P_{x_1,x_2} \cdots P_{x_{n-1},x_n}. \tag{1.8}$$

De la proposición anterior se tiene

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n|X_0 = x_0) = P_{x_0,x_1} \cdot P_{x_1,x_2} \cdots P_{x_{n-1},x_n}. \tag{1.9}$$

finalmente tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.2. *Sean $n, k \in \mathbb{N}$ fijos y $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+k} \in \mathbf{E}$, entonces*

$$\begin{aligned} & P(X_{n+1} = x_{n+1}, \ldots, X_{n+k} = x_{n+k}|X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) \\ = \ & P(X_1 = x_{n+1}, X_2 = x_{n+2}, \cdots, X_k = x_{n+k}|X_0 = x_n). \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1. *Sea X_n una variable aleatoria al tiempo n tal que*

$$\begin{array}{l} P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = p, \\ P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1) = q = 1-p, \\ P(X_0 = 0) = \pi_0(0). \end{array} \tag{1.10}$$

Se puede demostrar que

$$\begin{array}{l} P(X_n = 0) = \frac{q}{p+q}, \\ P(X_n = 1) = \frac{p}{p+q}. \end{array} \tag{1.11}$$

Ejemplo 1.2. *El problema de la Caminata Aleatoria.*

Ejemplo 1.3. *El problema de la ruina del jugador.*

Ejemplo 1.4. *Sea $\{Y_i\}_{i=0}^{\infty}$ sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas, definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que toman valores enteros, se tiene que la sucesión $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ definida por $X_j = \sum_{i=0}^{j} Y_i$ es una cadena de Markov en el conjunto de los números enteros.*

Proposición 1.3. *Para una cadena de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con espacio de estados $\mathbf{E}$ y para todo $n, m \in \mathbb{N}$ y toda pareja $x, y \in \mathbf{E}$ se cumple*

$$P(X_{n+m} = y|X_0 = x) = \sum_{z\in\mathbf{E}} P_{x,z}^{(m)} P_{z,y}^{(n)} = P_{x,y}^{(n+m)}. \tag{1.12}$$

Nota 1.10. *Para una cadena de Markov con un número finito de estados, se puede pensar a P^n como la n-ésima potencia de la matriz P. Sea π_0 distribución inicial de la cadena de Markov, como*

$$P(X_n = y) = \sum_x P(X_0 = x, X_n = y) = \sum_x P(X_0 = x) P(X_n = y | X_0 = x), \tag{1.13}$$

se puede comprobar que

$$P(X_n = y) = \sum_x \pi_0(X) P^n(x, y). \tag{1.14}$$

Con lo anterior es posible calcular la distribuición de X_n en términos de la distribución inicial π_0 y la función de transición de n-pasos P^n,

$$P(X_{n+1} = y) = \sum_x P(X_n = x) P(x, y). \tag{1.15}$$

Nota 1.11. *Si se conoce la distribución de X_0 se puede conocer la distribución de X_1.*

Procesos de Estados de Markov

Teorema 1.2. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B), \tag{1.16}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{ \bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v \right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{1.17}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{1.18}$$

donde ∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t,\zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{1.19}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\left\{t > 0 : \phi_v(t,\zeta) \in \partial^* M_v\right\}.$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v,\zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \to \lambda(v, \phi_v(s,\zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0,\epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$, se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s,\mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{1.20}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 1.1 (Supuesto 3.1, Davis [6]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0,t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{1.21}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[1] se cumple para cualquier tiempo de paro.

Clasificación de Estados

Definición 1.11. *Para A conjunto en el espacio de estados, se define un tiempo de paro T_A de A como*

$$T_A = min_{n>0}(X_n \in A). \tag{1.22}$$

Nota 1.12. *Si $X_n \notin A$ para toda $n > 0$, $T_A = \infty$, es decir, T_A es el primer tiempo positivo que la cadena de Markov está en A.*

Una vez que se tiene la definición anterior se puede demostrar la siguiente igualdad:

Proposición 1.4. $P^n(x,y) = \sum_{m=1}^n P_x(T_y = m) P^{n.m}(y,x), n \geq 1.$

Definición 1.12. *En una cadena de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con espacio de estados $\mathbf{E}$, matriz de transición $(P_{x,y})_{x,y\in\mathbf{E}}$ y para $x, y \in \mathbf{E}$, se dice que*

a) De x se accede a y si existe $n \geq 0$ tal que $P_{x,y}^{(n)} > 0$ y se denota por $(x \to y)$.

b) x y y se comunican entre sí, lo que se denota por $(x \leftrightarrow y)$, si se cumplen $(x \to y)$ y $(y \to x)$.

[1]Revisar página 362, y 364 de Davis [6].

c) *Un estado $x \in \mathbf{E}$ es estado recurrente si*

$$P\left(X_n = x \text{ para algún } n \in \mathbb{N} | X_0 = x\right) \equiv 1.$$

d) *Un estado $x \in \mathbf{E}$ es estado transitorio si*

$$P\left(X_n = x \text{ para algún } n \in \mathbb{N} | X_0 = x\right) < 1.$$

e) *Un estado $x \in \mathbf{E}$ se llama absorbente si $P_{x,x} \equiv 1$.*

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.5. *$x \leftrightarrow y$ es una relación de equivalencia y da lugar a una partición del espacio de estados $\mathbf{E}$.*

Definición 1.13. *Para E espacio de estados*

a) *Se dice que $C \subset \mathbf{E}$ es una clase de comunicación si cualesquiera dos estados de C se comunicán entre sí.*

b) *Dado $x \in \mathbf{E}$, su clase de comunicación se denota por: $C(x) = \{y \in \mathbf{E} : x \leftrightarrow y\}$.*

c) *Se dice que un conjunto de estados $C \subset \mathbf{E}$ es cerrado si ningún estado de $\mathbf{E} - C$ puede ser accedido desde un estado de C.*

Definición 1.14. *Sea $\mathbf{E}$ espacio de estados, se dice que la cadena es irreducible si cualquiera de las siguientes condiciones, equivalentes entre sí, se cumplen*

a) *Desde cualquier estado de $\mathbf{E}$ se puede acceder a cualquier otro.*

b) *Todos los estados se comunican entre sí.*

c) *$C(x) = \mathbf{E}$ para algún $x \in \mathbf{E}$.*

d) *$C(x) = \mathbf{E}$ para todo $x \in \mathbf{E}$.*

e) *El único conjunto cerrado es el total.*

Por lo tanto tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.6. *Sea $\mathbf{E}$ espacio de estados y T tiempo de paro, entonces se tiene que*

a) *Un estado $x \in \mathbf{E}$ es recurrente si y sólo si $P\left(T_x < \infty | x_0 = x\right) = 1$.*

b) *Un estado $x \in \mathbf{E}$ es transitorio si y sólo si $P\left(T_x < \infty | x_0 = x\right) < 1$.*

c) *Un estado $x \in \mathbf{E}$ es absorbente si y sólo si $P\left(T_x = 1 | x_0 = x\right) = 1$.*

Procesos de Markov

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1.15. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{1.23}$$

Definición 1.16. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada (*tight*).*

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1.3. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1.17. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$,*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{2}. \tag{1.24}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$, es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[3] (1.25) relativa a $(\mathcal{G}_t)$, si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.26}$$

Definición 1.18. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 1.13. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (1.26) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica:

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{1.27}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t). En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (1.27) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

2 Procesos de Renovación y Regenerativos

Definición 2.1. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \; para \; t \geq 0. \tag{2.1}$$

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$ es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 2.2. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$.*

Nota 2.1. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno define las otras variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son*

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \;\; y \; N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \; donde \; T_n \to \infty, \tag{2.2}$$

casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

[2] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[3]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{1.25}$$

Procesos Regenerativos Estacionarios

Definición 2.3. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,*

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\}, \tag{2.3}$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones que ocurren en $[0, t]$.

Definición 2.4. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx, \tag{2.4}$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 2.5. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 2.1. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}.$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}.$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 2.1. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E}V < \infty$, V es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\, ds}{\mathbb{E}X}.$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Teorema Principal de Renovación

Nota 2.2. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable (DRI) en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 2.2 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es DRI, entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds. \tag{2.5}$$

Proposición 2.1. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$, puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t)\,,\ \textit{donde}\ h(t)=H(t)-F\star H(t)\,. \tag{2.6}$$

Definición 2.6. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right]\,,\ \textit{para}\ t\geq 0, \tag{2.7}$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 2.2. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t)\,,\ \textit{donde}\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]. \tag{2.8}$$

Teorema 2.3 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético; y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+}h(s)\,ds, \tag{2.9}$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Definición 2.7. *Para el proceso $\{(N(t),X(t)):t\geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1},T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n=\left(\xi_n,\{X(T_{n-1}+t):0\leq t<\xi_n\}\right).$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 2.3. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t)=f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f:\tilde{S}\rightarrow S$.*

Nota 2.4. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 2.5. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t):t\geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Considérese $\{X(t):t\geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n=T_n-T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}&\{N(t)\geq n\}=\{T_n\leq t\}\,,\\&T_{N(t)}\leq t<T_{N(t)+1},\end{aligned} \tag{2.10}$$

además $N(T_n)=n$, y

$$N(t)=\max\{n:T_n\leq t\}=\min\{n:T_{n+1}>t\}\,. \tag{2.11}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n\leq t\}=F^{n\star}(t)\,, \tag{2.12}$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{l} \{N(t) \geq n\} = \{T_n \leq t\}, \\ P\{N(t) \leq n\} = 1 - F^{(n+1)\star}(t). \end{array} \tag{2.13}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$, se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t). \tag{2.14}$$

Proposición 2.3. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$, existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 2.1 (**Proceso Poisson**)**.** *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 2.6. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$.*

Teorema 2.4. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{array}{l} lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \;\; c.s. \\ lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \;\; c.s. \end{array} \tag{2.15}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 2.2 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \;\; c.s. \;\; cuando \; t \to \infty. \tag{2.16}$$

Consideremos el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$.

Definición 2.8. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$, se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|.$$

Teorema 2.5. *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{array}{l} lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \;\; c.s. \\ lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \;\; c.s. \end{array} \tag{2.17}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 2.3. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \;\; c.s. \;\; cuando \; t \to \infty. \tag{2.18}$$

Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 2.9. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0, \tag{2.19}$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 2.4. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-1)\} = 0, \, t \geq 0. \tag{2.20}$$

Definición 2.10. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}. \tag{2.21}$$

Proposición 2.5. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 2.7. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ sí y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 2.6. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0, \tag{2.22}$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0, \tag{2.23}$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 2.4 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0. \tag{2.24}$$

Definición 2.11. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \ t \geq 0, \tag{2.25}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 2.6. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (2.25).*

Teorema 2.7 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

3 Teoría de Procesos Regenerativos

Definición 3.1 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, t \geq 0\}$.

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$.

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 3.1. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [20].*

Nota 3.2. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 3.2. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{array}{l} \overline{X} = lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du, \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) = lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du, \end{array} \tag{3.1}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]}, \tag{3.2}$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 3.3. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 3.4. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 3.5. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 3.6. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Procesos de Renovación y Regenerativos

Definición 3.3 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 3.7. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de Markov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$ tal que,*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\}. \tag{3.3}$$

Ejemplo 3.1 (Tiempos de recurrencia Poisson). *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (3.3) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)},\ 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 3.8. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 3.4. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 3.9. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 3.1. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces*

$$\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)],\ t \geq 0. \tag{3.4}$$

Teorema 3.1. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación N es estacionario,*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario,*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\,ds$.

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 3.10. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 3.1. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renovación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Procesos Regenerativos Estacionarios

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 3.5. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde*

$$\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A. \tag{3.5}$$

Nota 3.11. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 3.6. *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma\left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}. \tag{3.6}$$

Definición 3.7. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 3.2. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n}), \tag{3.7}$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$.

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 3.8. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 3.9. *Dos espacios medibles $(E, \mathcal{E})$ y $(G, \mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \to G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 3.10. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G, \mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 3.12. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 3.11. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ es una familia $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E, \mathcal{E})$.*

Definición 3.12. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}}(E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 3.13. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 3.14. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E,\mathcal{E}) = (\mathbb{R},\mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_1} \leq x_1, \ldots, Z_{t_n} \leq x_n\right), x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{3.8}$$

Nota 3.15. *Para espacios polacos $(E,\mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 3.13. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$, para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 3.16. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H,\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{3.9}$$

Nota 3.17. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ a $(H,\mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H,\mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 3.18. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H,\mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 3.14. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0,\infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w), \, w \in \Omega. \tag{3.10}$$

Definición 3.15. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible **(CM)** si el mapeo que toma $(w,t) \in \Omega \times [0,\infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 3.19. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w,T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w,T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 3.16. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H,\mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible **(CCM)** si el mapeo $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 3.20. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0,\infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w,t) en $(Z(w),t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w),t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 3.17. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s \in [0,\infty)} : z \in H\right\} = H, \, t \in [0,\infty). \tag{3.11}$$

Definición 3.18. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0,\infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s \in [0,\infty)}, \, z \in H. \tag{3.12}$$

Definición 3.19. *Se dice que un proceso Z es shift-medible **(SM)** si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ medible.*

Nota 3.21. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 3.22.
- *Dado el espacio polaco $(E,\mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0,\infty)$ que es ISI, entonces cumple con ser CCM.*

- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 3.23. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 3.3. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 3.20. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^{\infty}$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L, \mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^{\infty} \in [0,\infty)^{\{0,1,\ldots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty\right\}, \tag{3.13}$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\ldots\}}$. Así el par (Z, S) es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^{+}$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 3.21. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z, (s_k)_0^{\infty}\right) = \theta_t\left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^{\infty}\right), \tag{3.14}$$

donde $n_{t-} = inf\{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 3.24. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0,\infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 3.22. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), \, n \geq 0,$$

y además $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0, S_n), S_0, \ldots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z, S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 3.25. *Si el par (Z, S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 3.4. *Supóngase que el par (Z, S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) es una versión estacionaria de (Z, S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) es una versión periodicamente estacionaria de (Z, S) con periodo d.*

Definición 3.23. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^{+}$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx > 0$ con $X_2, X_3, \ldots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\,dx para\ B \in \mathcal{B}. \tag{3.15}$$

Definición 3.24. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z, S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 3.26.
- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z, S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 3.27. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 3.5. *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 3.4 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 3.6. *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0,S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega,\mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^*=\frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]}d\mathbb{P}. \tag{3.16}$$

Sea (Z^*,S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0,S^0\right)\in\cdot\right)$. Entonces $(Z*,S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*,S^*)]=\mathbb{E}\left[\int_0^{X_1}f\left(\theta_s\left(Z^0,S^0\right)\right)ds\right]/\mathbb{E}[X_1] \tag{3.17}$$

$f\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x):=\frac{\mathbb{E}[X_1]\wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}, \tag{3.18}$$

para $x\geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1>x]/\mathbb{E}[X_1]$, con $x\geq 0$.

Teorema 3.7. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0\leq S_0<S_1$ y*

$$\theta_{S_1}Z=\theta_{S_0}Z \text{ en distribución.} \tag{3.19}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\begin{aligned}&\theta_{S_n}(Z,S)=\left(Z^0,S^0\right),n\geq 0, \text{ en distribución,}\\&(Z,S_0,S_1) \text{ depende de } (X_2,X_3,\ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1}Z.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Corolario 3.2. *Bajo las condiciones del Teorema anterior (**??**), el par (Z,S) es regenerativo clásico. Si además se tiene que $\mathbb{E}[X_1]<\infty$ por el Teorema (**??**) existe un par (Z^*,S^*) que es una vesión estacionaria de (Z,S).*

Definición 3.25. *Los tiempos aleatorios S_n dividen Z en*

a) un retraso $D=(Z_s)_{s\in[0,\infty)}$,

b) una sucesión de ciclos $C_n=\left(Z_{S_{n-1}+s}\right)_{s\in[0,X_n)}$, $n\geq 1$,

c) las longitudes de los ciclos $X_n=S_n-S_{n-1}$, $n\neq 1$.

Nota 3.28. *a) El retraso D y los ciclos C_n son procesos estocásticos que se desvanecen en los tiempos aleatorios S_0 y X_n respectivamente.*

b) Las longitudes de los ciclos $X_1,X_2,\ldots$ y el retraso de la longitud (delay-length) S_0 son obtenidos por el mismo mapeo medible de sus respectivos ciclos $C_1,C_2,\ldots$ y el retraso D.

c) El par (Z,S) es un mapeo medible del retraso y de los ciclos y viceversa.

Definición 3.26. *(Z,S) es zero-delayed si $S_0\equiv 0$. Se define el par zero-delayed por*

$$\left(Z^0,S^0\right):=\theta_{S_0}(Z,S). \tag{3.21}$$

Entonces $S_0^0\equiv 0$ y $S_0^0\equiv X_1^0$, mientras que para $n\geq 1$ se tiene que $X_n^0\equiv X_n$ y $C_n^0\equiv C_n$.

Definición 3.27. *Se le llama al par* (Z, S) ***ciclo-stacionario*** *si los ciclos forman una sucesión estacionaria, es decir, con* $=^D$ *denota iguales en distribución:*

$$\left(C_{n+1}, C_{n+2}, \dots\right) =^D \left(C_1, C_2, \dots\right), n \geq 0. \tag{3.22}$$

Ciclo-estacionareidad es equivalente a

$$\theta_{S_n}\left(Z, S\right) =^D \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \tag{3.23}$$

donde $\left(C_{n+1}, C_{n+2}, \dots\right)$ *y* $\theta_{S_n}\left(Z, S\right)$ *son mapeos medibles de cada uno y que no dependen de* n.

Definición 3.28. *Un par* $\left(Z^*, S^*\right)$ *es* ***estacionario*** *si* $\theta\left(Z^*, S^*\right) =^D \left(Z^*, S^*\right)$, *para* $t \geq 0$.

Procesos de Salida y Procesos Regenerativos

En Sigman, Thorison y Wolff [20] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$, y proceso estocástico $X = \left\{X\left(t\right) : t \geq 0\right\}$ con espacio de estados $\left(S, \mathcal{R}\right)$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 3.2. *Si existe una variable aleatoria no negativa* R_1 *tal que* $\theta_{R1}X =_D X$, *entonces* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$ *puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias* $R = \left\{R_k : k \geq 1\right\}$, *tal que para* $k \geq 1$,

$$\theta_k\left(X, R\right) =_D \left(X, R\right).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ *es condicionalmente independiente de* $\left(X, R_1, \dots, R_k\right)$, *dado* $\theta_{\tau k}X$.

A continuación se enuncian una lista de resultados para sistemas de espera:

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 3.8. *Para el sistema de espera* $M/G/1/L$ *con disciplina FIFO, el proceso* $\boldsymbol{I}$ *es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son idénticamente cero;*
  b) $L = 0$, *para cualquier proceso de servicio* S;
  c) $L = 1$ *y* $G = D$;
  d) $L = \infty$ *y* $G = M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\left\{T_{n+1} - T_n \leq t\right\}$ *son*

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
  b) $1 - e^{-\lambda t} * F\left(t\right)$, $t \geq 0$;
  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d\left(t\right)$, $t \geq 0$;
  d) $1 - e^{-\lambda t} * F\left(t\right)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostró que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.

- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.

- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 3.9. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.

  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$

  d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 3.10. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [5] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.

- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.

- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.

- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 3.11. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2(1-\delta)^{-1}.
\end{aligned}$$

  Teorema 3.12. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 3.13. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

Conclusiones

References

[1] Ash, Robert B. Basic probability theory. Courier Corporation, 2008.

[2] Asmussen, S. (1987). *Applied Probability and Queues*. John Wiley and Sons.

[3] Bhat, N. (2008). *An Introduction to Queueing Theory: Modelling and Analysis in Applications*. Birkhauser.

[4] Borovkov, A. A., and Schassberger, R. (1995). Ergodicity of a Polling Network. *Stochastic Processes and their Applications*, 50(2), 253-262.

[5] Daley, D. J. (1968). The Correlation Structure of the Output Process of Some Single Server Queueing Systems. *The Annals of Mathematical Statistics*, 39(3), 1007-1019.

[6] Davis, M. H. A. (1984). Piecewise Deterministic Markov Processes: A General Class of Nondiffusion Stochastic Models. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 46(3), 353-388.

[7] Disney, R. L., Farrell, R. L., and Morais, P. R. (1973). A Characterization of $M/G/1$ Queues with Renewal Departure Processes. *Management Science*, 19(11), Theory Series, 1222-1228.

[8] Douc, R., Jacob, P. E., Lee, A., and Vats, D. (2022). Solving the Poisson equation using coupled Markov chains. arXiv preprint arXiv:2206.05691.

[9] Getoor, R. K. (1979). Transience and Recurrence of Markov Processes. In J. Azema and M. Yor (Eds.), *Seminaire de Probabilités XIV* (pp. 397-409). New York: Springer-Verlag.

[10] Gut, A. (1995). *Stopped Random Walks: Limit Theorems and Applications*. Applied Probability.

[11] Ng, C. H., and Soong, B. H. (2008). *Queueing Modelling Fundamentals with Applications in Communications Networks*. John Wiley and Sons.

[12] Kleinrock, L. (1975). *Queueing Systems: Theory, Volume 1*. Wiley-Interscience.

[13] Lang, S. (1973). *Calculus of Several Variables*. Addison-Wesley Publishing Company.

[14] Meyn, S. P., and Tweedie, R. L. (1993). *Markov Chains and Stochastic Stability*. Springer-Verlag.

[15] Morozov, E., and Steyaert, B. (2021). Stability analysis of regenerative queueing models. Springer International Publishing.

[16] Portmann, C., and Renner, R. (2022). Security in quantum cryptography. *Reviews of Modern Physics*, 94(2), 025008.

[17] Ross, S. M. (2014). *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*. Academic Press.

[18] Serfozo, R. (2009). *Basics of Applied Stochastic Processes*. Springer-Verlag.

[19] Sharpe, M. (1998). *General Theory of Markov Processes*. Academic.

[20] Sigman, K., Thorisson, H., and Wolff, R. W. (1994). A Note on the Existence of Regeneration Times. *Journal of Applied Probability*, 31, 1116-1122.

[21] Stidham, S. Jr. (1972). Regenerative Processes in the Theory of Queues, with Applications to the Alternating Priority Queue. *Advances in Applied Probability*, 4(3), 542-577.

[22] Thorisson, H. (2000). *Coupling, Stationarity, and Regeneration*. Probability and its Applications. Springer-Verlag.

[23] Xu, K., Fjelde, T. E., Sutton, C., and Ge, H. (2021, March). Couplings for Multinomial Hamiltonian Monte Carlo. In *International Conference on Artificial Intelligence and Statistics* (pp. 3646-3654). PMLR.

Index