

Procesos Regenerativos y de Renovación: Revisión

Carlos E. Martínez-Rodríguez

Julio 2024

Contents

0.1	Procesos de Renovación	6
0.2	Procesos de Renovación	6
0.3	Procesos de Renovación	7
0.4	Procesos de Renovación	7
0.5	Procesos de Renovación	14
0.6	Procesos de Renovación	15
0.7	Teorema Principal de Renovación	15
0.8	Teorema Principal de Renovación	16
0.9	Teorema Principal de Renovación	17
0.10	Teorema Principal de Renovación	17
0.11	Función de Renovación	18
0.12	Función de Renovación	18
0.13	Función de Renovación	19
0.14	Función de Renovación	19
0.15	Función de Renovación	20
0.16	Propiedades de los Procesos de Renovación	21
0.17	Función de Renovación	22
0.18	Puntos de Renovación	23
0.19	Resultados para Procesos de Salida	24
0.20	Procesos Regenerativos	25
0.21	Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]	26
0.22	Procesos Regenerativos	31
0.23	Procesos Regenerativos	32
0.24	Procesos Regenerativos	33
0.25	Procesos Regenerativos	33
0.26	Procesos Regenerativos	36
0.27	Procesos Regenerativos	37
0.28	Procesos Regenerativos	38
0.29	Procesos Regenerativos	39
0.30	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	43
0.31	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	43
0.32	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	44
0.33	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	45
0.34	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	46
0.35	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	46
0.36	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	47
0.37	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	49
0.38	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	50
0.39	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	50
0.40	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	52
0.41	Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [81]	53
0.42	Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [127]	101
0.43	Propiedades de los Procesos de Renovación	102

0.44	Propiedades de los Procesos de Renovación	105
0.45	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	107
0.46	Procesos de Renovación	107
0.47	Teorema Principal de Renovación	108
0.48	Función de Renovación	108
0.49	Propiedades de los Procesos de Renovación	109
0.50	Función de Renovación	110
0.51	Procesos de Renovación	111
0.52	Puntos de Renovación	111
0.53	Puntos de Renovación	112
0.54	Resultados para Procesos de Salida	113
0.55	Procesos Regenerativos	115
0.56	Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [81]	149
0.57	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	150
0.58	Procesos de Renovación	151
0.59	Propiedades de los Procesos de Renovación	152
0.60	Propiedades de los Procesos de Renovación	153
0.61	Propiedades de los Procesos de Renovación	155
0.62	Propiedades de los Procesos de Renovación	156
0.63	Propiedades de los Procesos de Renovación	157
0.64	Propiedades de los Procesos de Renovación	158
0.65	Propiedades de los Procesos de Renovación	165
0.66	Propiedades de los Procesos de Renovación	166
0.67	Propiedades de los Procesos de Renovación	167
0.68	Propiedades de los Procesos de Renovación	168
0.69	Propiedades de los Procesos de Renovación	170
0.70	Propiedades de los Procesos de Renovación	171
0.71	Función de Renovación	172
0.72	Función de Renovación	172
0.73	Función de Renovación	173
0.74	Procesos de Renovación	175
0.75	Procesos Regenerativos	182
0.76	Procesos Regenerativos	183
0.77	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	184
0.78	Existencia de Tiempos de Regeneración	185
0.79	Procesos Regenerativos: Thorisson	185
0.80	Procesos Regenerativos	199
0.81	Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [127]	199
0.82	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	200
0.83	Procesos de Renovación	201
0.84	Teorema Principal de Renovación	201
0.85	Propiedades de los Procesos de Renovación	202
0.86	Propiedades de los Procesos de Renovación	203
0.87	Propiedades de los Procesos de Renovación	204
0.88	Propiedades de los Procesos de Renovación	205
0.89	Propiedades de los Procesos de Renovación	207
0.90	Función de Renovación	208
0.91	Función de Renovación	208
0.92	Procesos de Renovación	209
0.93	Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]	209
0.94	Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]	215
0.95	Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]	221
0.96	Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]	228
0.97	Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]	235
0.98	Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]	241
0.99	Procesos Regenerativos	246

0.100	Puntos de Renovación	250
0.101	Resultados para Procesos de Salida	250
0.102	Procesos Regenerativos	250
0.103	Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]	251
0.104	Procesos Regenerativos	257
0.105	Procesos Regenerativos	258
0.106	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	259
0.107	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	259
0.108	Propiedades de los Procesos de Renovación	260
0.109	Propiedades de los Procesos de Renovación	261
0.110	Propiedades de los Procesos de Renovación	263
0.111	Propiedades de los Procesos de Renovación	264
0.112	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	265
0.113	Procesos de Renovación	266
0.114	Teorema Principal de Renovación	266
0.115	Función de Renovación	267
0.116	Propiedades de los Procesos de Renovación	267
0.117	Función de Renovación	269
0.118	Procesos de Renovación	269
0.119	Puntos de Renovación	270
0.120	Resultados para Procesos de Salida	271
0.121	Procesos Regenerativos	272
0.122	Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]	273
0.123	Procesos Regenerativos	278
0.124	Procesos Regenerativos	279
0.125	Propiedades de los Procesos de Renovación	280
0.126	Propiedades de los Procesos de Renovación	284
0.127	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	285
0.128	Procesos de Renovación	286
0.129	Teorema Principal de Renovación	287
0.130	Función de Renovación	287
0.131	Propiedades de los Procesos de Renovación	288
0.132	Función de Renovación	289
0.133	Procesos de Renovación	290
0.134	Puntos de Renovación	290
0.135	Resultados para Procesos de Salida	291
0.136	Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [81]	293
0.137	Output Process and Regenerative Processes	344
0.138	Output Process and Regenerative Processes	345
0.139	Procesos Regenerativos	367
0.140	Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [81]	367
0.141	Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]	377
1	Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [81]	386
1.1	Teorema Principal de Renovación	387
1.2	Propiedades de los Procesos de Renovación	388
1.3	Función de Renovación	389
1.4	Procesos de Renovación	390
1.5	Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]	390
1.6	Procesos Regenerativos	397
1.7	Procesos Regenerativos	397
1.8	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	398
1.9	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	399
1.10	Procesos Regenerativos	400
1.11	Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [81]	400
1.12	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	401

1.13	Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]	402
1.14	Modelo de Flujo	403
1.15	Procesos de Estados de Markov	413
1.16	Teoría General de Procesos Estocásticos	415
1.17	Propiedades de Markov	415
1.18	Primer Condición de Regularidad	416
1.19	Construcción del Modelo de Flujo	416
1.20	Estabilidad	419
1.21	Propiedades de Markov	423
1.22	Primer Condición de Regularidad	424
1.23	Procesos Fuerte de Markov	431
1.23.1	Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [98]	431
1.24	Procesos Harris Recurrentes Positivos	431
1.25	Construcción de un Modelo de Flujo Límite	431
1.26	Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad	435
1.27	Teorema 2.1	435
1.28	Teorema 2.2	436
1.29	Teorema 2.3	436
1.30	Definiciones Básicas	437
1.31	Preliminares	441
1.32	Procesos Harris Recurrente	442
1.33	Modelo de Flujo	443
1.34	Procesos de Estados de Markov	454
1.35	Teoría General de Procesos Estocásticos	455
1.36	Propiedades de Markov	456
1.37	Primer Condición de Regularidad	456
1.38	Construcción del Modelo de Flujo	457
1.39	Estabilidad	460
1.40	Propiedades de Markov	464
1.41	Primer Condición de Regularidad	465
1.42	Procesos de Estados Markoviano para el Sistema	471
1.43	Procesos Fuerte de Markov	471
1.43.1	Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [98]	472
1.44	Procesos Harris Recurrentes Positivos	472
1.45	Construcción de un Modelo de Flujo Límite	472
1.46	Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad	476
1.47	Teorema 2.1	476
1.48	Teorema 2.2	477
1.49	Teorema 2.3	477
1.50	Definiciones Básicas	478
1.51	Proceso de Estados Markoviano para el Sistema	481
1.52	Procesos Fuerte de Markov	481
1.53	Propiedades de Markov	482
1.54	Primer Condición de Regularidad	482
1.55	Propiedades de Markov	485
1.56	Primer Condición de Regularidad	486
1.57	Supuestos	493
1.57.1	Supuestos Básicos	494
1.58	Procesos Harris Recurrente	494
1.59	Modelo de Flujo	495
1.59.1	Modelo de Flujo y Estabilidad	501
1.59.2	Resultados principales	502
1.59.3	Definiciones Generales	503
1.59.4	Definiciones y Descripción del Modelo	505
1.59.5	Políticas de Servicio	505
1.59.6	Proceso de Estados	505

1.59.7	Introducción	506
1.59.8	Colas Cíclicas	506
1.59.9	Resultados Previos	507
1.59.10	Teorema de Estabilidad: Descripción	508
1.60	Supuestos	509
1.60.1	Supuestos Básicos	510
1.61	Procesos Harris Recurrente	510
1.62	Modelo de Flujo	512
1.63	Modelo de Flujo	513
1.64	Estabilidad de los Sistemas de Visitas Cíclicas	516
1.65	Resultados principales	517
1.66	Supuestos	517
1.66.1	Supuestos Básicos	518
1.67	Procesos Harris Recurrente	519
1.68	Modelo de Flujo	520
1.69	Supuestos	522
1.69.1	Supuestos Básicos	523
1.70	Procesos Harris Recurrente	524
1.71	Modelo de Flujo	525
1.71.1	Supuestos Básicos	527
1.72	Procesos Harris Recurrente	527
1.73	Modelo de Flujo	529
1.74	Supuestos	530
1.74.1	Supuestos Básicos	532
1.75	Procesos Harris Recurrente	532
1.76	Modelo de Flujo	533
2	Preliminares: Modelos de Flujo	535
2.1	Supuestos Básicos	536
2.2	Procesos Regenerativos	537
2.3	Preliminares	538
2.4	Procesos Harris Recurrente	539
3	Modelo de Flujo	541
3.1	Teoría de Procesos Estocásticos y Medibilidad	543
3.2	Construcción del Modelo de Flujo	551
3.3	Ya revisado	608
4	Procesos de Renovación y Regenerativos	615
4.1	Tiempo de Ciclo Promedio	625
4.2	Tiempos de Ciclo e Intervista	625
4.3	Longitudes de la Cola en cualquier tiempo	628
4.4	Por resolver	630
4.5	Tiempos de Ciclo e Intervista	631
4.6	Longitudes de la Cola en cualquier tiempo	635
4.7	Material por agregar	636
4.8	Propiedades de los Procesos de Renovación	648
5	Procesos Regenerativos	665
5.1	Preliminares	668

0.1 Procesos de Renovación

Definición 1. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (1)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 2. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 1. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

0.2 Procesos de Renovación

Definición 3. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (2)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 4. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 2. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

0.3 Procesos de Renovación

Definición 5. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (3)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 6. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 3. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

0.4 Procesos de Renovación

Definición 7. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (4)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 8. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 4. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Definición 9. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (5)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 10. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 5. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 1. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Ejemplo 1 (Proceso Poisson). Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ con tasa λ . Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ .

Nota 6. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 1. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (7)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 1 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 11. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 2. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (9)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (10)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 2. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 12. *La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 2. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 13. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 3. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 7. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 3. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 3 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 14. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (12)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 4. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 4 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 15. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 5. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 16. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 6. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.

Nota 8. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 5. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 4 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 17. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (13)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 7. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 6 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 9. Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 7 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 8. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 18. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 9. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 8 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 10. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 9 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 10. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 19. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 11. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 10 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 20. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 11. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 12. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Nota 13. Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S , espacio métrico.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 21. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 14. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Teorema 11 (Procesos Regenerativos). Suponga que el proceso

Definición 22 (Renewal Process Trinity). Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t , que es el tiempo desde la última renovación para t .
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t , residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t .
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t .

Nota 15. El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n , y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de Markov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados \mathbb{R}_+ . Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \quad (14)$$

Ejemplo 2 (Tiempos de recurrencia Poisson). Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ , entonces de la expresión (4.80) se tiene que

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 16. Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 23. Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k$ y $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \dots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \dots, X(s_k)).$$

Nota 17. Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en \mathbb{R}_+ , con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$.

Proposición 12. Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 12. Los siguientes enunciados son equivalentes

- i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.
- ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.
- iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,
- iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - F(s)] ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 18. Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.

Corolario 5. El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renovación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.

0.5 Procesos de Renovación

Definición 24. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (15)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 25. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 19. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

0.6 Procesos de Renovación

Definición 26. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (16)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 27. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 20. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

0.7 Teorema Principal de Renovación

Nota 21. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 13 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 13. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 28. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 14. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 14 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

0.8 Teorema Principal de Renovación

Nota 22. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 15 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 15. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 29. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 16. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 16 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

0.9 Teorema Principal de Renovación

Nota 23. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 17 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 17. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 30. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 18. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 18 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

0.10 Teorema Principal de Renovación

Nota 24. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 19 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 19. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 31. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 20. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 20 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

0.11 Función de Renovación

Definición 32. *Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (17)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 21. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).*

Teorema 21 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

0.12 Función de Renovación

Definición 33. *Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (18)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 22. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).*

Teorema 22 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

0.13 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 34. *La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 23. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 35. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 24. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 25. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 23. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 6 (Identidad de Wald para Renovaciones). *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

0.14 Función de Renovación

Definición 36. *Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (19)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 25. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).*

Teorema 24 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

0.15 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 37. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 26. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 38. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 27. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 26. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 25. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 7 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

0.16 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 28. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 27. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 26. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (20)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (21)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 8 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 39. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 27. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (23)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (24)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 9. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (25)$$

0.17 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 40. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 29. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 41. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 30. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 28. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 28. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 10 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

0.18 Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\{T_1^i, T_2^i, \dots, T_k^i, \dots\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/\mu_i$. Además se sabe que para

$$T^* = \min \{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\},$$

T^* se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^* = \sum_{i=1}^4 \mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad \text{y} \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min \{\tilde{r}, \hat{r}\},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \bar{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \bar{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\bar{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

0.19 Resultados para Procesos de Salida

En [127] prueban que para la existencia de una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1 , donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados (S, \mathcal{R}) , con \mathcal{R} σ -álgebra.

Proposición 31. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R_1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de (X, R_1, \dots, R_k) , dado $\theta_{\tau_k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

Teorema 29. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso I es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

- a) *Los tiempos de servicio son idénticamente cero;*
- b) *$L = 0$, para cualquier proceso de servicio S ;*
- c) *$L = 1$ y $G = D$;*
- d) *$L = \infty$ y $G = M$.*

En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

- a) $1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0$;
- b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t), t \geq 0$;
- c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t), t \geq 0$;
- d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t), t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostró que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso el proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

Teorema 30. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

- a) $s = \infty$
- b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*
- c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$*
- d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

Teorema 31. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B , tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [100] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.

- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

Teorema 32. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{-\theta D_n}) &= \mu(\mu + \theta)^{-1} [\delta\theta - \mu(1 - \delta)\alpha(\theta)] [\theta - \mu(1 - \delta)^{-1}] \\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}[e^{-\theta T_0}] \\ \text{var}(D_n) &= \text{var}(T_0) - (\tau^{-1} - \delta^{-1}) 2\delta (\mathbb{E}(S_0))^2 (1 - \delta)^{-1}.\end{aligned}$$

Teorema 33. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 34. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

0.20 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 42. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamente distribuidos.

Observación 1. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 2. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 43 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

- $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 29. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 44. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 30. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

0.21 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]

Definición 45. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (26)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 46. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 31. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 32. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 32. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 35. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (27)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (28)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 11 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 47. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 36. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (30)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (31)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 12. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (32)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 48. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 33. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 49. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 34. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 33. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 37. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 13 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 50. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (33)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 35. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 38 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 51. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 36. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 52. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 37. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 34. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 39. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 14 (Identidad de Wald para Renovaciones). *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 53. *Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (34)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 38. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).*

Teorema 40 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 35. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 41 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 39. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \quad \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 54. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \quad \text{para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 40. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \quad \text{donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 42 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 36. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 43 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 41. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 55. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 42. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 44 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

0.22 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 56. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 3. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Observación 4. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 57 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 37. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 58. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 38. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

0.23 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 59. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 5. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Observación 6. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 60 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 39. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 61. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 40. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

0.24 Procesos Regenerativos

0.25 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 62. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectorias muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamente distribuidos.

Nota 41. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 42. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 63 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 43. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 64. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y definanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 44. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Procesos Regenerativos

Nota 45. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 46. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 65 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Definición 66. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 47. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 67. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 48. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 49. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 68 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 50. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 69. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 51. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

0.26 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 70. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamente distribuidos.

Observación 7. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Observación 8. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 71 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 52. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 72. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 53. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

0.27 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 73. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamente distribuidos.

Observación 9. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Observación 10. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 74 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 54. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 75. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 55. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

0.28 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 76. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamente distribuidos.

Observación 11. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Observación 12. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 77 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 56. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 78. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 57. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

0.29 Procesos Regenerativos

Nota 58. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f: \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 59. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 79 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Definición 80. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 60. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞ .

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 81. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamente distribuidos.

Nota 61. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 62. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 82 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 63. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 83. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 64. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 84. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 85. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 86. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 45. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 87. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 88. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 89. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 46. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

0.30 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 90. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 91. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 92. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 47. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

0.31 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 93. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 94. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 95. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 48. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

0.32 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 96. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 97. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 98. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 49. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

0.33 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 99. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 100. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 101. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 50. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

0.34 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 102. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 103. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 104. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 51. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

0.35 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 105. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 106. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 107. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 52. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

0.36 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 108. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 109. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 110. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 53. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 111. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 112. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 113. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 54. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 15. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

0.37 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 114. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 115. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 116. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 55. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

0.38 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 117. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 118. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 119. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 56. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

0.39 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 120. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 121. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 122. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 57. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 16. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 123. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (35)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 124. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$.

Nota 65. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue la otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Nota 66. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 58 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 43. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 125. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 44. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 59 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

0.40 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 126. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 127. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 128. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 60. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

0.41 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [81]

Definición 129 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 67. La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1 , implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos R_1, R_2, \dots , que satisfacen la propiedad deseada [127].

Nota 68. Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n , los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e idénticamente distribuidos (*i.i.d.*) $T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son *i.i.d.* e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.

Definición 130. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 69. Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X .

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 70. Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.

Nota 71. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Nota 72. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 131. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 132. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 133. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 61. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 17. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 134. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (36)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 135. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 73. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Nota 74. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 62 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 45. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 136. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 46. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 63 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 47. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E} [e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E} [N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 75. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 64. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (37)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (38)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 18 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (39)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 137. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 65. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (40)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (41)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 19. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (42)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 48. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 76. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 66. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (43)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (44)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 20 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (45)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 138. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 67. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (46)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (47)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 21. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (48)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 49. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 77. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 68. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (49)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (50)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 22 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (51)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 139. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la *fluctuación máxima* de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 69. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (52)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (53)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 23. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (54)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 50. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 78. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 70. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (55)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (56)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 24 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (57)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 140. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 71. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (58)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (59)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 25. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (60)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 51. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 79. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 72. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (61)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (62)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 26 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (63)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 141. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 73. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (64)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (65)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 27. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (66)$$

Definición 142. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (67)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 52. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 74 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 143. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 53. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 144. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 54. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 80. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 75. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 28 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 145. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (68)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 146. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 81. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Definición 147. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (69)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 148. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 82. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 55. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Ejemplo 3 (Proceso Poisson). Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ con tasa λ . Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ .

Nota 83. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 76. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (70)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (71)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 29 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (72)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 149. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 77. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (73)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (74)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 30. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (75)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 150. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 56. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 151. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 57. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 84. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 78. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 31 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 152. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \tag{76}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 58. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 79 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 153. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 59. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 154. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 60. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 85. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 80. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 32 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 155. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (77)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 61. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 81 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 86. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 82 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 62. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 156. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 63. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 83 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 87. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 84 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 64. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 157. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 65. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 85 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 158. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 88. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 89. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Nota 90. Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S , espacio métrico.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 159. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 91. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Teorema 86 (Procesos Regenerativos). Suponga que el proceso

Definición 160 (Renewal Process Trinity). Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t , que es el tiempo desde la última renovación para t .
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t , residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t .

- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t .

Nota 92. El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n , y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MARKOV a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados \mathbb{R}_+ . Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \quad (78)$$

Ejemplo 4 (Tiempos de recurrencia Poisson). Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ , entonces de la expresión (4.80) se tiene que

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 93. Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 161. Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k$ y $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \dots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \dots, X(s_k)).$$

Nota 94. Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en \mathbb{R}_+ , con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$.

Proposición 66. Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 87. Los siguientes enunciados son equivalentes

- i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.
- ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.
- iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,
- iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - F(s)] ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 95. Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.

Corolario 33. El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renovación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.

Nota 96. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 97. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 162 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Definición 163. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 98. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 164. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectorias muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamente distribuidos.

Nota 99. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 100. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 165 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 101. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 166. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 102. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (puntos de regeneración) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 167. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 168. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 169. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 88. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 170. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 171. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 172. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 89. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Sean T_1, T_2, \dots los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Sea la función generadora de momentos para L_i , el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E} \left[z^{L_i(t)} \right] = \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right]}{\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m) \right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$ ¹, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] &= \mathbb{E}[M_i] \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] \\ \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m) \right] &= \mathbb{E}[M_i] \mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)] \end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right]}{\mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (??): $n \rightarrow t - \tau_i(m)$, $T \rightarrow \bar{\tau}_i(m) - \tau_i(m)$, $L_n \rightarrow L_i(t)$ y $F(z) = \mathbb{E}[z^{L_0}] \rightarrow F_i(z) = \mathbb{E}[z^{L_i \tau_i(m)}]$, se puede ver que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n} \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\bar{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} \right] = z \frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} \quad (79)$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i , $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\tau_i(m)} \right] = \frac{1 - \mathbb{E} [\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\tau_i(m)}]}{1 - P_i(z)} \\ &= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)} \end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] = \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Por lo tanto

¹En Stidham[128] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un proceso estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)} \right] < \infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^N \mu_k < 1$.

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right]}{\mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]} \left\{ \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\bar{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{t=\bar{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]} \left\{ z \frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} + \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)} \right\}
\end{aligned}$$

es decir

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \quad (80)$$

Teorema 90. *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo M/M/1. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t , $A_j(t) = \{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\}$ para algún tiempo $t \geq 0$ y Q_j la cola j -ésima en la RSVC, para $j = 1, 2, 3, 4$. Existe un intervalo $I \neq \emptyset$ tal que para $T^* \in I$, tal que $\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(Tt^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I\} > 0$.*

Proof. Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.

Sea $n > 0$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j(\bar{\tau}_1(n)) = 0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1(n) > 0$, entonces tenemos que $\tau_2(n) = \bar{\tau}_1(n) + r_1(n)$.

Definamos el intervalo $I_1 \equiv [\bar{\tau}_1(n), \tau_2(n)]$ de longitud $\xi_1 = r_1(n)$. Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$\mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)}. \quad (81)$$

Por otra parte, para la cola Q_2 , el tiempo $\bar{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\bar{\tau}_2(n-1)) = 0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n . Entonces tenemos un segundo intervalo $I_2 \equiv [\bar{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)}, \quad (82)$$

donde $\xi_2(n) = \tau_2(n) - \bar{\tau}_2(n-1)$.

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} &= \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\} \\
&\geq \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} \\
&= e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]}.
\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]} > 0. \quad (83)$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC, se afirma que existe $m > 0$ tal que $\bar{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$.

Para Q_3 sea $I_3 = [\bar{\tau}_3(m), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_3(m) = r_3(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(n)}. \quad (84)$$

Análogamente que como se hizo para Q_2 , tenemos que para Q_4 se tiene el intervalo $I_4 = [\bar{\tau}_4(m-1), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_4(m) = \tau_4(m) - \bar{\tau}_4(m-1)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} = e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)}. \quad (85)$$

Al igual que para el primer sistema, dado que $I_3(m) \subset I_4(m)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \xi_3(m) \leq \xi_4(m) &\Leftrightarrow -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\ -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m) &\Leftrightarrow e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} \\ \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} &\geq \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} \end{aligned}$$

Entonces, dado que los eventos A_3 y A_4 son independientes, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\} &= \mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(m)\} \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} \\ &\geq \mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(m)\} \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} \\ &= e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)} e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} = e^{-[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)]}. \end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\} = e^{-[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)]} > 0. \quad (86)$$

Por construcción se tiene que $I(n, m) \equiv I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$, entonces en particular se tienen las contenciones $I(n, m) \subseteq I_1(n)$ y $I(n, m) \subseteq I_3(m)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m} \equiv \ell(I(n, m))$ tenemos que

$$\xi_{n,m} \leq \xi_1(n) \text{ y } \xi_{n,m} \leq \xi_3(m) \text{ entonces } -\xi_{n,m} \geq -\xi_1(n) \text{ y } -\xi_{n,m} \leq -\xi_3(m)$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{aligned} -\tilde{\mu}_1 \xi_{n,m} &\geq -\tilde{\mu}_1 \xi_1(n), & -\tilde{\mu}_2 \xi_{n,m} &\geq -\tilde{\mu}_2 \xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_2(n), \\ -\tilde{\mu}_3 \xi_{n,m} &\geq -\tilde{\mu}_3 \xi_3(m), & -\tilde{\mu}_4 \xi_{n,m} &\geq -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m). \end{aligned}$$

Sea $T^* \in I_{n,m}$, entonces dado que en particular $T^* \in I_1(n)$ se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2 , en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4 , es decir, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$, $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I_{n,m}$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4 , por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(T^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I_{n,m}\} &= \prod_{j=1}^4 \mathbb{P}\{A_j(T^*) | T^* \in I_{n,m}\} \\ &\geq \mathbb{P}\{A_1(T^*) | T^* \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(T^*) | T^* \in I_2(n)\} \mathbb{P}\{A_3(T^*) | T^* \in I_3(m)\} \mathbb{P}\{A_4(T^*) | T^* \in I_4(m)\} \\ &= e^{-\mu_1 \xi_1(n)} e^{-\mu_2 \xi_2(n)} e^{-\mu_3 \xi_3(m)} e^{-\mu_4 \xi_4(m)} = e^{-[\mu_1 \xi_1(n) + \mu_2 \xi_2(n) + \mu_3 \xi_3(m) + \mu_4 \xi_4(m)]} > 0. \end{aligned} \quad (87)$$

□

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [100] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.

- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

Teorema 91. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{-\theta D_n}) &= \mu(\mu + \theta)^{-1} [\delta\theta - \mu(1 - \delta)\alpha(\theta)] [\theta - \mu(1 - \delta)^{-1}] \\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}[e^{-\theta T_0}] \\ \text{var}(D_n) &= \text{var}(T_0) - (\tau^{-1} - \delta^{-1}) 2\delta(\mathbb{E}(S_0))^2 (1 - \delta)^{-1}.\end{aligned}$$

Teorema 92. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 93. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

En Sigman, Thorison y Wolff [127] prueban que para la existencia de una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1 , donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados (S, \mathcal{R}) , con \mathcal{R} σ -álgebra.

Proposición 67. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R_1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de (X, R_1, \dots, R_k) , dado $\theta_{\tau_k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

Teorema 94. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso I es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

- Los tiempos de servicio son idénticamente cero;*
- $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S ;*
- $L = 1$ y $G = D$;*
- $L = \infty$ y $G = M$.*

En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

- $1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0$;
- $1 - e^{-\lambda t} * F(t), t \geq 0$;
- $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t), t \geq 0$;
- $1 - e^{-\lambda t} * F(t), t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.

- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

Teorema 95. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

- a) $s = \infty$
- b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*
- c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$*
- d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

Teorema 96. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B , tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [100] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

Teorema 97. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{-\theta D_n}) &= \mu(\mu + \theta)^{-1} [\delta\theta - \mu(1 - \delta)\alpha(\theta)] [\theta - \mu(1 - \delta)^{-1}] \\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}[e^{-\theta T_0}] \\ \text{var}(D_n) &= \text{var}(T_0) - (\tau^{-1} - \delta^{-1}) 2\delta(\mathbb{E}(S_0))^2(1 - \delta)^{-1}.\end{aligned}$$

Teorema 98. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 99. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

Sean Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 en una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC). Supongamos que cada una de las colas es del tipo $M/M/1$ con tasa de arribo μ_i y que la transferencia de usuarios entre los dos sistemas ocurre entre $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$ con respectiva tasa de arribo igual a la tasa de salida $\hat{\mu}_i = \mu_i$, esto se sabe por lo desarrollado en la sección anterior.

Consideremos, sin pérdida de generalidad como base del análisis, la cola Q_1 además supongamos al servidor lo comenzamos a observar una vez que termina de atender a la misma para desplazarse y llegar a Q_2 , es decir al tiempo τ_2 .

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, ciclo del servidor en que regresa a Q_1 para dar servicio y atender conforme a la política exhaustiva, entonces se tiene que $\bar{\tau}_1(n)$ es el tiempo del servidor en el sistema 1 en que termina de dar servicio a todos los usuarios presentes en la cola, por lo tanto se cumple que $L_1(\bar{\tau}_1(n)) = 0$, entonces el servidor para llegar a Q_2 incurre en un tiempo de traslado r_1 y por tanto se cumple que $\tau_2(n) = \bar{\tau}_1(n) + r_1$. Dado que los tiempos entre arribos son exponenciales se cumple que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_1(n), \bar{\tau}_1(n) + r_1]\} &= e^{-\bar{\mu}_1 r_1}, \\ \mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_1(n), \bar{\tau}_1(n) + r_1]\} &= e^{-\bar{\mu}_2 r_1}.\end{aligned}$$

El evento que nos interesa consiste en que no haya arribos desde que el servidor abandonó Q_2 y regresa nuevamente para dar servicio, es decir en el intervalo de tiempo $[\bar{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Entonces, si hacemos

$$\begin{aligned}\varphi_1(n) &\equiv \bar{\tau}_1(n) + r_1 = \bar{\tau}_2(n-1) + r_1 + r_2 + \bar{\tau}_1(n) - \tau_1(n) \\ &= \bar{\tau}_2(n-1) + \bar{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r,\end{aligned}$$

y longitud del intervalo

$$\begin{aligned}\xi &\equiv \bar{\tau}_1(n) + r_1 - \bar{\tau}_2(n-1) = \bar{\tau}_2(n-1) + \bar{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r - \bar{\tau}_2(n-1) \\ &= \bar{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r.\end{aligned}$$

Entonces, determinemos la probabilidad del evento no arribos a Q_2 en $[\bar{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]$:

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\bar{\mu}_2 \xi}. \quad (88)$$

De manera análoga, tenemos que la probabilidad de no arribos a Q_1 en $[\bar{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]$ esta dada por

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\bar{\mu}_1 \xi}, \quad (89)$$

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\bar{\mu}_2 \xi}. \quad (90)$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ y } Q_2 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} \\ = \mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} \\ \times \mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\bar{\mu}_1 \xi} e^{-\bar{\mu}_2 \xi} = e^{-\bar{\mu} \xi}.\end{aligned} \quad (91)$$

Para el segundo sistema, consideremos nuevamente $\bar{\tau}_1(n) + r_1$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $m > 0$ tal que $\bar{\tau}_3(m) < \bar{\tau}_1(n) + r_1 < \tau_4(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_3(m), \bar{\tau}_1(n) + r_1]\} = e^{-\bar{\mu}_3 \xi_3}, \quad (92)$$

donde

$$\xi_3 = \bar{\tau}_1(n) + r_1 - \bar{\tau}_3(m) = \bar{\tau}_1(n) - \bar{\tau}_3(m) + r_1, \quad (93)$$

mientras que para Q_4 al igual que con Q_2 escribiremos $\tau_4(m)$ en términos de $\bar{\tau}_4(m-1)$:
 $\varphi_2 \equiv \tau_4(m) = \bar{\tau}_4(m-1) + r_4 + \bar{\tau}_3(m) - \tau_3(m) + r_3 = \bar{\tau}_4(m-1) + \bar{\tau}_3(m) - \tau_3(m) + \hat{r}$, además,
 $\xi_2 \equiv \varphi_2(m) - \bar{\tau}_1(n) - r_1 = \bar{\tau}_4(m-1) + \bar{\tau}_3(m) - \tau_3(m) - \bar{\tau}_1(n) + \hat{r} - r_1$.
 Entonces

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_4 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]\} = e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_2}, \quad (94)$$

mientras que para Q_3 se tiene que

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_2} \quad (95)$$

Por tanto

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_3 \wedge Q_4 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]\} = e^{-\hat{\mu} \xi_2} \quad (96)$$

donde $\hat{\mu} = \tilde{\mu}_3 + \tilde{\mu}_4$.

Ahora, definamos los intervalos $\mathcal{I}_1 = [\bar{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_1(n)]$ y $\mathcal{I}_2 = [\bar{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]$, entonces, sea $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ el intervalo donde cada una de las colas se encuentran vacías, es decir, si tomamos $T^* \in \mathcal{I}$, entonces $L_1(T^*) = L_2(T^*) = L_3(T^*) = L_4(T^*) = 0$.

Ahora, dado que por construcción $\mathcal{I} \neq \emptyset$ y que para $T^* \in \mathcal{I}$ en ninguna de las colas han llegado usuarios, se tiene que no hay transferencia entre las colas, por lo tanto, el sistema 1 y el sistema 2 son condicionalmente independientes en \mathcal{I} , es decir

$$\mathbb{P}\{L_1(T^*), L_2(T^*), L_3(T^*), L_4(T^*) | T^* \in \mathcal{I}\} = \prod_{j=1}^4 \mathbb{P}\{L_j(T^*)\}, \quad (97)$$

para $T^* \in \mathcal{I}$.

Definición 173 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 103. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1 , implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos R_1, R_2, \dots , que satisfacen la propiedad deseada [127].*

Nota 104. *Para la cola GI/GI/1 los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n , los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) $T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son i.i.d. e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 174. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 105. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X .*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 106. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 107. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 108. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 175. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 176. *Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 177. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 100. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 34. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 178. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (98)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 179. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 109. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Nota 110. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 101 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 68. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 180. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 69. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 102 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 70. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 111. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 103. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{99}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{100}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 35 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (101)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 181. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 104. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (102)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (103)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 36. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (104)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 71. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 112. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 105. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (105)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (106)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 37 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (107)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 182. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 106. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (108)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (109)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 38. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (110)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 72. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 113. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 107. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (111)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (112)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 39 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (113)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 183. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 108. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (114)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (115)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 40. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (116)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 73. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 114. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 109. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (117)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (118)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 41 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (119)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 184. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la *fluctuación máxima* de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 110. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (120)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (121)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 42. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (122)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 74. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 115. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$*

Teorema 111. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (123)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (124)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 43 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (125)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 185. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 112. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (126)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (127)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 44. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (128)$$

Definición 186. *Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (129)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 75. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).*

Teorema 113 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 187. *La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.*

Proposición 76. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 188. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 77. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 116. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 114. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 45 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], t \geq 0,$$

Definición 189. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (130)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 190. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 117. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno de gane las otras variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Definición 191. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (131)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 192. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 118. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 78. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Ejemplo 5 (Proceso Poisson). Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ con tasa λ . Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ .

Nota 119. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 115. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (132)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (133)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 46 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (134)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 193. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 116. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (135)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (136)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 47. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (137)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 194. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 79. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 195. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 80. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 120. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 117. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 48 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 196. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (138)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 81. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 118 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 197. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 82. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 198. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{\hat{n}*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 83. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 121. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 119. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 49 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], t \geq 0,$$

Definición 199. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), t \geq 0, \quad (139)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 84. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 120 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 122. Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 121 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 85. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 200. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 86. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 122 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 123. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 123 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 87. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 201. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 88. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 124 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 202. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 124. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 125. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 126. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S , espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 203. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 127. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 125 (Procesos Regenerativos). *Suponga que el proceso*

Definición 204 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t , que es el tiempo desde la última renovación para t .
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t , residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t .
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t .

Nota 128. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n , y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MARKOV a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados \mathbb{R}_+ . Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \quad (140)$$

Ejemplo 6 (Tiempos de recurrencia Poisson). Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ , entonces de la expresión (4.80) se tiene que

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 129. Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 205. Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k$ y $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \dots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \dots, X(s_k)).$$

Nota 130. Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbf{1}(\tau_n \leq t)$ en \mathbb{R}_+ , con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$.

Proposición 89. Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 126. Los siguientes enunciados son equivalentes

- i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.
- ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.
- iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,
- iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - F(s)] ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 131. Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.

Corolario 50. El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renovación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.

Nota 132. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 133. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 206 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Definición 207. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 134. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 208. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 135. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 136. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 209 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 137. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 210. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 138. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (puntos de regeneración) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 211. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 212. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 213. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 127. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [81]

Definición 214 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 139. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1 , implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos R_1, R_2, \dots , que satisfacen la propiedad deseada [127].*

Nota 140. *Para la cola GI/GI/1 los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n , los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) $T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son i.i.d. e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 215. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 141. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X .*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 142. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 143. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 144. a) *Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

- b) *Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞*

0.42 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [127]

Definición 216 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 145. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1 , implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos R_1, R_2, \dots , que satisfacen la propiedad deseada [127].*

Nota 146. *Para la cola GI/GI/1 los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n , los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) $T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son i.i.d. e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 217. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 147. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X .*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 148. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 149. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 150. a) *Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) *Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞*

0.43 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 90. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 151. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 128. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (141)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (142)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 51 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (143)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 218. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 129. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (144)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (145)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 52. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (146)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 91. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 152. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$*

Teorema 130. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (147)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (148)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 53 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (149)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 219. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 131. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (150)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (151)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 54. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (152)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 92. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 153. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 132. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (153)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (154)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 55 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (155)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 220. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 133. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (156)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (157)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 56. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (158)$$

0.44 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 93. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 154. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 134. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (159)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (160)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 57 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (161)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 221. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 135. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (162)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (163)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 58. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (164)$$

0.45 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 222. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 223. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 224. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 136. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

0.46 Procesos de Renovación

Definición 225. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}(T_n \leq t), \quad (165)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 226. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 155. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno de una de las otras variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

0.47 Teorema Principal de Renovación

Nota 156. Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 137 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 94. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 227. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 95. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 138 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

0.48 Función de Renovación

Definición 228. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (166)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 96. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 139 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

0.49 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 97. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 157. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 140. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \end{aligned} \quad (167) \quad (168)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 59 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (169)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 229. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 141. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (170)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (171)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 60. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (172)$$

0.50 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 230. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 98. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 231. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 99. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 158. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 142. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 61 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

0.51 Procesos de Renovación

Definición 232. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (173)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 233. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 159. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

0.52 Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\{T_1^i, T_2^i, \dots, T_k^i, \dots\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_i$. Además se sabe que para

$$T^* = \min \{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\},$$

T^* se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^* = \sum_{i=1}^4 \mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad \text{y} \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min \{\tilde{r}, \hat{r}\},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \bar{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \bar{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\bar{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

0.53 Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\{T_1^i, T_2^i, \dots, T_k^i, \dots\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_i$. Además se sabe que para

$$T^* = \min \{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\},$$

T^* se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^* = \sum_{i=1}^4 \mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad \text{y} \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min \{ \tilde{r}, \hat{r} \},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \bar{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \bar{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\bar{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primera cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

0.54 Resultados para Procesos de Salida

En [127] prueban que para la existencia de una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1 , donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados (S, \mathcal{R}) , con \mathcal{R} σ -álgebra.

Proposición 100. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R_1}X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de (X, R_1, \dots, R_k) , dado $\theta_{\tau_k}X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

Teorema 143. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso I es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

- a) *Los tiempos de servicio son idénticamente cero;*
- b) *$L = 0$, para cualquier proceso de servicio S ;*
- c) *$L = 1$ y $G = D$;*

d) $L = \infty$ y $G = M$.

En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;

b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;

c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;

d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostró que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso el proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

Teorema 144. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

a) $s = \infty$

b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.

c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$

d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

Teorema 145. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B , tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [100] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

Teorema 146. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-\theta D_n}) &= \mu(\mu + \theta)^{-1} [\delta\theta - \mu(1 - \delta)\alpha(\theta)] [\theta - \mu(1 - \delta)^{-1}] \\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}[e^{-\theta T_0}] \\ \text{var}(D_n) &= \text{var}(T_0) - (\tau^{-1} - \delta^{-1}) 2\delta(\mathbb{E}(S_0))^2 (1 - \delta)^{-1}. \end{aligned}$$

Teorema 147. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 148. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

0.55 Procesos Regenerativos

Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [81]

Definición 234 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,*
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$*

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 160. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1 , implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos R_1, R_2, \dots , que satisfacen la propiedad deseada [127].*

Nota 161. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n , los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) $T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son i.i.d. e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 235. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 162. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X .*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 163. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 164. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Nota 165. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (puntos de regeneración) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 236. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 237. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 238. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 149. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 62. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 239. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (174)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 240. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 166. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Nota 167. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 150 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 101. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 241. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 102. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 151 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 103. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 168. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$*

Teorema 152. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (175)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (176)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)/t$ la cumple.

Corolario 63 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (177)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 242. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 153. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (178)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (179)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 64. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (180)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 104. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 169. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 154. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (181)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (182)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 65 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (183)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 243. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 155. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (184)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (185)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 66. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (186)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 105. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 170. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 156. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (187)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (188)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 67 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (189)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 244. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 157. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (190)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (191)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 68. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (192)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 106. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 171. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 158. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (193)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (194)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 69 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (195)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 245. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 159. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (196)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (197)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 70. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (198)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 107. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 172. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 160. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (199)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (200)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 71 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (201)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 246. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la *fluctuación máxima* de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 161. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (202)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (203)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 72. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (204)$$

Definición 247. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (205)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 108. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 162 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 248. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 109. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 249. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 110. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 173. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 163. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 73 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 250. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (206)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 251. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 174. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Definición 252. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (207)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 253. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 175. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 111. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Ejemplo 7 (Proceso Poisson). Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ con tasa λ . Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ .

Nota 176. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 164. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (208)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (209)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 74 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (210)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 254. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 165. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (211)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (212)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 75. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (213)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 255. *La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 112. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 256. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 113. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 177. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 166. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 76 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 257. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (214)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 114. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 167 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 258. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 115. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 259. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 116. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.

Nota 178. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 168. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 77 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 260. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (215)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 117. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 169 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 179. Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 170 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 118. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 261. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 119. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 171 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 180. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 172 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 120. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 262. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 121. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 173 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 263. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 181. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 182. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Nota 183. Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S , espacio métrico.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 264. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 184. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Teorema 174 (Procesos Regenerativos). Suponga que el proceso

Definición 265 (Renewal Process Trinity). Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t , que es el tiempo desde la última renovación para t .
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t , residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t .
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t .

Nota 185. El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n , y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de Markov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados \mathbb{R}_+ . Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \quad (216)$$

Ejemplo 8 (Tiempos de recurrencia Poisson). Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ , entonces de la expresión (4.80) se tiene que

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 186. Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 266. Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k$ y $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \dots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \dots, X(s_k)).$$

Nota 187. Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en \mathbb{R}_+ , con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$.

Proposición 122. Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 175. Los siguientes enunciados son equivalentes

- i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.
- ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.
- iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,
- iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - F(s)] ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 188. Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.

Corolario 78. El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renovación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.

Nota 189. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 190. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 267 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Definición 268. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y definanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned} \overline{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 191. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 269. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectorias muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamente distribuidos.

Nota 192. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 193. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 270 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 194. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 271. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 195. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 272. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 273. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 274. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 176. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 275. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 276. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 277. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 177. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Sea la función generadora de momentos para L_i , el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces

Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t . Entonces, determinando el primer momento es posible ver que

Definición 278. El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\bar{\tau}_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.

Definición 279. El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)$.

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \bar{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\bar{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E} \left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))} \right] = \mathbb{E} \left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1) - \bar{\tau}(m)} \right]$$

entonces, si $I_i(z) = \mathbb{E} \left[z^{\tau_i(m+1) - \bar{\tau}(m)} \right]$ se tiene que $F_i(z) = I_i[P_i(z)]$ para $i = 1, 2$.

Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (815), sean T_1, T_2, \dots los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 280. Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.

Definición 281. Para T_i se define, M_i , el número de ciclos de visita a la cola Q_i , durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.

Definición 282. Para cada uno de los M_i 's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \dots, M_i$, que a su vez, también es un proceso de renovación.

2

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 283. Un elemento aleatorio en un espacio medible (E, \mathcal{E}) en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a (E, \mathcal{E}) , es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.

Nota 196. También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E , es decir, es \mathcal{F}/\mathcal{E} medible.

Definición 284. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible (E_i, \mathcal{E}_i) . Se define el espacio producto $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := (\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i)$, donde $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i 's, y $\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i$ es la σ -álgebra producto, es decir, es la σ -álgebra más pequeña en $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ que hace al i -ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ -álgebra inducida por los mapeos proyección.

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i := \sigma \{ \{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i \}.$$

Definición 285. Un espacio de probabilidad $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a \mathbb{P} como distribución.

Teorema 178. Sea \mathbb{I} un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible (E_i, \mathcal{E}_i) . Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i$ en $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i \left(y \in \prod_{i \in \mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \dots, y_n \in A_{i_n} \right) = P_{i_1}(A_{i_1}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \dots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

²In Stidham and Heyman [128] shows that is sufficient for the regenerative process to be stationary that the mean regenerative cycle time is finite: $\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)} \right] < \infty$,

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^N \mu_k < 1$.

La medida $\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := (\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 286. Un espacio medible (E, \mathcal{E}) es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E , y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que \mathcal{E} es generado por conjuntos abiertos.

Definición 287. Dos espacios medibles (E, \mathcal{E}) y (G, \mathcal{G}) son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \rightarrow G$ tal que f es \mathcal{E}/\mathcal{G} medible y su inversa f^{-1} es \mathcal{G}/\mathcal{E} medible. La biyección es una equivalencia de Borel.

Definición 288. Un espacio medible (E, \mathcal{E}) es un espacio estándar si es Borel equivalente a (G, \mathcal{G}) , donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y \mathcal{G} son los subconjuntos de Borel de G .

Nota 197. Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.

Definición 289. Un proceso estocástico con conjunto de índices \mathbb{I} y espacio de estados (E, \mathcal{E}) es una familia $Z = (Z_s)_{s \in \mathbb{I}}$ donde Z_s son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en (E, \mathcal{E}) .

Definición 290. Un proceso estocástico one-sided continuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.

Sea $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$ denota el espacio producto $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}) := \otimes_{s \in \mathbb{I}} (E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar Z como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s \in \mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 198. La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.

Nota 199. En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales

$$\mathbb{P}(Z_{t_1} \leq x_1, \dots, Z_{t_n} \leq x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \quad (217)$$

Nota 200. Para espacios polacos (E, \mathcal{E}) el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.

Definición 291. Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z .

Nota 201. Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$ sino en (H, \mathcal{H}) , donde \mathcal{H} es la σ -álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A \mathcal{H} se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\}. \quad (218)$$

Nota 202. Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de (Ω, \mathcal{F}) a (H, \mathcal{H}) . Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H , al espacio (H, \mathcal{H}) se le llama el espacio de trayectorias de Z .

Nota 203. La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias (H, \mathcal{H}) es la distribución de Z como un elemento aleatorio en (H, \mathcal{H}) . La distribución, nuevamente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.

Definición 292. Sea Z un PEOSCT con espacio de estados (E, \mathcal{E}) y sea T un tiempo aleatorio en $[0, \infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) \cdot w \in \Omega.$$

Definición 293. Un PEOSCT Z es conjuntamente medible (**CM**) si el mapeo que toma $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Nota 204. Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F} / \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Definición 294. Un PEOSCT con espacio de estados (H, \mathcal{H}) es canónicamente conjuntamente medible (**CCM**) si el mapeo $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Nota 205. Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0, \infty)$ a E , es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w, t) en $(Z(w), t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w), t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.

Definición 295. Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z , es internamente shift-invariante (**ISI**) si

$$\left\{ (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)} : z \in H \right\} = H, \quad t \in [0, \infty).$$

Definición 296. Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t , $t \in [0, \infty)$, de H a H por

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)}, \quad z \in H.$$

Definición 297. Se dice que un proceso Z es shift-medible (**SM**) si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H}$ medible.

Nota 206. Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM

Nota 207. • Dado el espacio polaco (E, \mathcal{E}) se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0, \infty)$ que es ISI, entonces cumple con ser CCM.

- Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G , y como G es segundo numerable como subespacio de E , lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.

Nota 208. Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.

Teorema 179. El producto numerable de espacios polacos es polaco.

Definición 298. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s \in [0, \infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados (E, \mathcal{E}) y espacio de trayectorias (H, \mathcal{H}) y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \dots \rightarrow \infty$. Considerando S como un mapeo medible de (Ω, \mathcal{F}) al espacio sucesión (L, \mathcal{L}) , donde

$$L = \left\{ (s_k)_0^\infty \in [0, \infty)^{\{0, 1, \dots\}} : s_0 < s_1 < \dots \rightarrow \infty \right\},$$

donde \mathcal{L} son los subconjuntos de Borel de L , es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0, 1, \dots\}}$.

Así el par (Z, S) es un mapeo medible de (Ω, \mathcal{F}) en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0, \infty), \mathcal{B}[0, \infty))$.

Definición 299. Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por

$$\theta_t(z, (s_k)_0^\infty) = \theta_t(z, (s_{n_{t-}+k} - t)_0^\infty)$$

donde $n_{t-} = \inf \{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 209. Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Definición 300. Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z , se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si

$$\theta_{S_n}(Z, S) = (Z^0, S^0), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $((Z_s)_{s \in [0, S_n]}, S_0, \dots, S_n)$. Si lo anterior se cumple, al par (Z, S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 210. Si el par (Z, S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos X_1, X_2, \dots , son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0 , es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.

Teorema 180. Supóngase que el par (Z, S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S) . Además, si X_1 es lattice con span d , entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periódicamente estacionaria de (Z, S) con periodo d .

Definición 301. Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx > 0$ con X_2, X_3, \dots, X_n copias i.i.d de X_1 ,

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \in B) \geq \int_B f(x) dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 302. Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z, S) = (Z^0, S^0)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de (S_0, S_1, \dots, S_n) para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z, S) es WSR si lo anterior se cumple.

Nota 211. • El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0, \infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.

- Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z , entonces (Z, S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico

Nota 212. Para cualquier proceso estocástico Z , el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0, \infty)}$ es siempre un proceso de Markov.

Teorema 181. Supongase que el par (Z, S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S) .

Teorema 182. Supongase que (Z, S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0, 1)$ e independiente de (Z^0, S^0) y sea \mathbb{P}^* la medida de probabilidad en (Ω, \mathcal{P}) definida por

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*(\theta_{U X_1}(Z^0, S^0) \in \cdot)$. Entonces (Z^*, S^*) es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f(\theta_s(Z^0, S^0)) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 183. Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \quad (219)$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n} (Z, S) = (Z^0, S^0), n \geq 0, \text{ en distribución,} \quad (220)$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \dots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \quad (221)$$

Also the intervisit time I_i is defined as the period beginning at the time of its service completion in a cycle and ending at the time when it is polled in the next cycle; its duration is given by $\tau_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)$.

So we the following are still true

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_i] &= \mu_i \mathbb{E}[I_i], & \mathbb{E}[C_i] &= \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)}, \\ \mathbb{E}[S_i] &= \mu_i \mathbb{E}[C_i], & \mathbb{E}[I_i] &= (1-\mu_i) \mathbb{E}[C_i], \\ \text{Var}[L_i] &= \mu_i^2 \text{Var}[I_i] + \sigma^2 \mathbb{E}[I_i], & \text{Var}[C_i] &= \frac{\text{Var}[L_i^*]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}, \\ \text{Var}[S_i] &= \frac{\text{Var}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^2} + \frac{\sigma^2 \mathbb{E}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^3}, & \text{Var}[I_i] &= \frac{\text{Var}[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i). \end{aligned} \quad (222)$$

Definición 303. El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\bar{\tau}_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.

Definición 304. El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)$.

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \bar{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\bar{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E} \left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))} \right] = \mathbb{E} \left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1) - \bar{\tau}(m)} \right]$$

entonces, si $I_i(z) = \mathbb{E} \left[z^{\tau_i(m+1) - \bar{\tau}(m)} \right]$ se tiene que $F_i(z) = I_i[P_i(z)]$ para $i = 1, 2$.

Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (815), sean T_1, T_2, \dots los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 305. Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.

Definición 306. Para T_i se define, M_i , el número de ciclos de visita a la cola Q_1 , durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.

Definición 307. Para cada uno de los M_i 's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \dots, M_i$, que a su vez, también es un proceso de renovación.

Sea la función generadora de momentos para L_i , el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E} \left[z^{L_i(t)} \right] = \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right]}{\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m) \right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty^3$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] &= \mathbb{E}[M_i] \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] \\ \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m) \right] &= \mathbb{E}[M_i] \mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)] \end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (??): $n \rightarrow t - \tau_i(m)$, $T \rightarrow \bar{\tau}_i(m) - \tau_i(m)$, $L_n \rightarrow L_i(t)$ y $F(z) = \mathbb{E}[z^{L_0}] \rightarrow F_i(z) = \mathbb{E}[z^{L_i \tau_i(m)}]$, se puede ver que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n} \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\bar{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} \right] = z \frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} \quad (223)$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i , $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\bar{\tau}_i(m)-1} \{P_i(z)\}^{t-\bar{\tau}_i(m)} \right] = \frac{1 - \mathbb{E}[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\bar{\tau}_i(m)}]}{1 - P_i(z)} \\ &= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)} \end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] = \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Por lo tanto

³En Stidham[128] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un proceso estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)} \right] < \infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^N \mu_k < 1$.

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right]}{\mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]} = \frac{1}{\mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]} \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] \\
&= \frac{1}{\mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]} \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\bar{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} + \sum_{t=\bar{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] \\
&= \frac{1}{\mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]} \left\{ \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\bar{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{t=\bar{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]} \left\{ z \frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} + \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)} \right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E} [C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)}
\end{aligned}$$

es decir

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E} [C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \quad (224)$$

Si hacemos:

$$S(z) = 1 - F(z) \quad (225)$$

$$T(z) = z - P(z) \quad (226)$$

$$U(z) = 1 - P(z) \quad (227)$$

entonces

$$\mathbb{E} [C_i] Q(z) = \frac{(z - 1) S(z) P(z)}{T(z) U(z)} \quad (228)$$

A saber, si $a_k = P\{L(t) = k\}$

$$S(z) = 1 - F(z) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

entonces

$S'(z) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}$, por tanto $S^{(1)}(1) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k = -\mathbb{E}[L(t)]$, luego $S''(z) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k z^{k-2}$ y $S^{(2)}(1) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k = \mathbb{E}[L(L-1)]$; de la misma manera $S'''(z) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2) a_k z^{k-3}$ y $S^{(3)}(1) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2) a_k = -\mathbb{E}[L(L-1)(L-2)] = -\mathbb{E}[L^3] + 3\mathbb{E}[L^2] - 2\mathbb{E}[L]$.

Es decir

$$S^{(1)}(1) = -\mathbb{E}[L(t)],$$

$$S^{(2)}(1) = -\mathbb{E}[L(L-1)] = -\mathbb{E}[L^2] + \mathbb{E}[L],$$

$$S^{(3)}(1) = -\mathbb{E}[L(L-1)(L-2)] = -\mathbb{E}[L^3] + 3\mathbb{E}[L^2] - 2\mathbb{E}[L].$$

Expandiendo alrededor de $z = 1$

$$\begin{aligned}
S(z) &= S(1) + \frac{S'(1)}{1!} (z-1) + \frac{S''(1)}{2!} (z-1)^2 + \frac{S'''(1)}{3!} (z-1)^3 + \dots + \\
&= (z-1) \left\{ S'(1) + \frac{S''(1)}{2!} (z-1) + \frac{S'''(1)}{3!} (z-1)^2 + \dots \right\} \\
&= (z-1) R_1(z)
\end{aligned}$$

con $R_1(z) \neq 0$, pues

$$R_1(z) = -\mathbb{E}[L] \quad (229)$$

entonces

$$R_1(z) = S'(1) + \frac{S''(1)}{2!}(z-1) + \frac{S'''(1)}{3!}(z-1)^2 + \frac{S^{iv}(1)}{4!}(z-1)^3 + \dots + \quad (230)$$

Calculando las derivadas y evaluando en $z = 1$

$$R_1(1) = S^{(1)}(1) = -\mathbb{E}[L] \quad (231)$$

$$R_1^{(1)}(1) = \frac{1}{2}S^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}[L^2] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[L] \quad (232)$$

$$R_1^{(2)}(1) = \frac{2}{3!}S^{(3)}(1) = -\frac{1}{3}\mathbb{E}[L^3] + \mathbb{E}[L^2] - \frac{2}{3}\mathbb{E}[L] \quad (233)$$

De manera análoga se puede ver que para $T(z) = z - P(z)$ se puede encontrar una expansión alrededor de $z = 1$

Expandiendo alrededor de $z = 1$

$$\begin{aligned} T(z) &= T(1) + \frac{T'(1)}{1!}(z-1) + \frac{T''(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{T'''(1)}{3!}(z-1)^3 + \dots + \\ &= (z-1) \left\{ T'(1) + \frac{T''(1)}{2!}(z-1) + \frac{T'''(1)}{3!}(z-1)^2 + \dots + \right\} \\ &= (z-1) R_2(z) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} T^{(1)}(1) &= -\mathbb{E}[X(t)] = -\mu, \\ T^{(2)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)] = -\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[X] = -\mathbb{E}[X^2] + \mu, \\ T^{(3)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)] = -\mathbb{E}[X^3] + 3\mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X] \\ &= -\mathbb{E}[X^3] + 3\mathbb{E}[X^2] - 2\mu. \end{aligned}$$

Por lo tanto $R_2(1) \neq 0$, pues

$$R_2(1) = 1 - \mathbb{E}[X] = 1 - \mu \quad (234)$$

entonces

$$R_2(z) = T'(1) + \frac{T''(1)}{2!}(z-1) + \frac{T'''(1)}{3!}(z-1)^2 + \frac{T^{(iv)}(1)}{4!}(z-1)^3 + \dots + \quad (235)$$

Calculando las derivadas y evaluando en $z = 1$

$$R_2(1) = T^{(1)}(1) = 1 - \mu \quad (236)$$

$$R_2^{(1)}(1) = \frac{1}{2}T^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}[X^2] + \frac{1}{2}\mu \quad (237)$$

$$R_2^{(2)}(1) = \frac{2}{3!}T^{(3)}(1) = -\frac{1}{3}\mathbb{E}[X^3] + \mathbb{E}[X^2] - \frac{2}{3}\mu \quad (238)$$

Finalmente para de manera análoga se puede ver que para $U(z) = 1 - P(z)$ se puede encontrar una expansión alrededor de $z = 1$

$$\begin{aligned} U(z) &= U(1) + \frac{U'(1)}{1!}(z-1) + \frac{U''(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{U'''(1)}{3!}(z-1)^3 + \dots + \\ &= (z-1) \left\{ U'(1) + \frac{U''(1)}{2!}(z-1) + \frac{U'''(1)}{3!}(z-1)^2 + \dots + \right\} \\ &= (z-1) R_3(z) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} U^{(1)}(1) &= -\mathbb{E}[X(t)] = -\mu, \\ U^{(2)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)] = -\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[X] = -\mathbb{E}[X^2] + \mu, \\ U^{(3)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)] = -\mathbb{E}[X^3] + 3\mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X] \\ &= -\mathbb{E}[X^3] + 3\mathbb{E}[X^2] - 2\mu. \end{aligned}$$

Por lo tanto $R_3(1) \neq 0$, pues

$$R_3(1) = -\mathbb{E}[X] = -\mu \quad (239)$$

entonces

$$R_3(z) = U'(1) + \frac{U''(1)}{2!}(z-1) + \frac{U'''(1)}{3!}(z-1)^2 + \frac{U^{(iv)}(1)}{4!}(z-1)^3 + \dots + \quad (240)$$

Calculando las derivadas y evaluando en $z = 1$

$$R_3(1) = U^{(1)}(1) = -\mu \quad (241)$$

$$R_3^{(1)}(1) = \frac{1}{2}U^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}[X^2] + \frac{1}{2}\mu \quad (242)$$

$$R_3^{(2)}(1) = \frac{2}{3!}U^{(3)}(1) = -\frac{1}{3}\mathbb{E}[X^3] + \mathbb{E}[X^2] - \frac{2}{3}\mu \quad (243)$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}[C_i]Q(z) = \frac{(z-1)(z-1)R_1(z)P(z)}{(z-1)R_2(z)(z-1)R_3(z)} = \frac{R_1(z)P(z)}{R_2(z)R_3(z)} \equiv \frac{R_1P}{R_2R_3} \quad (244)$$

Entonces

$$\left[\frac{R_1(z)P(z)}{R_2(z)R_3(z)} \right]' = \frac{PR_2R_3R_1' + R_1R_2R_3P' - R_3R_1PR_2 - R_2R_1PR_3'}{(R_2R_3)^2} \quad (245)$$

Evaluable en $z = 1$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{R_2(1)R_3(1)R_1^{(1)}(1) + R_1(1)R_2(1)R_3(1)P'(1) - R_3(1)R_1(1)R_2(1)^{(1)} - R_2(1)R_1(1)R_3'(1)}{(R_2(1)R_3(1))^2} \\
 &= \frac{1}{(1-\mu)^2\mu^2} \left\{ \left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}L \right) (1-\mu)(-\mu) + (-\mathbb{E}L)(1-\mu)(-\mu)\mu \right. \\
 &\quad \left. - \left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2 + \frac{1}{2}\mu \right) (-\mu)(-\mathbb{E}L) - (1-\mu)(-\mathbb{E}L) \left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2 + \frac{1}{2}\mu \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{(1-\mu)^2\mu^2} \left\{ \left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}L \right) (\mu^2 - \mu) + (\mu^2 - \mu^3)\mathbb{E}L \right. \\
 &\quad \left. - \mu\mathbb{E}L \left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2 + \frac{1}{2}\mu \right) + (\mathbb{E}L - \mu\mathbb{E}L) \left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2 + \frac{1}{2}\mu \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{(1-\mu)^2\mu^2} \left\{ -\frac{1}{2}\mu^2\mathbb{E}L^2 + \frac{1}{2}\mu\mathbb{E}L^2 + \frac{1}{2}\mu^2\mathbb{E}L - \mu^3\mathbb{E}L + \mu\mathbb{E}L\mathbb{E}X^2 - \frac{1}{2}\mathbb{E}L\mathbb{E}X^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{(1-\mu)^2\mu^2} \left\{ \frac{1}{2}\mu\mathbb{E}L^2(1-\mu) + \mathbb{E}L \left(\frac{1}{2} - \mu \right) (\mu^2 - \mathbb{E}X^2) \right\} \\
 &= \frac{1}{2\mu(1-\mu)}\mathbb{E}L^2 - \frac{\frac{1}{2} - \mu}{(1-\mu)^2\mu^2}\sigma^2\mathbb{E}L
 \end{aligned}$$

por lo tanto (para Takagi)

$$Q^{(1)} = \frac{1}{\mathbb{E}C} \left\{ \frac{1}{2\mu(1-\mu)}\mathbb{E}L^2 - \frac{\frac{1}{2} - \mu}{(1-\mu)^2\mu^2}\sigma^2\mathbb{E}L \right\}$$

donde

$$\mathbb{E}C = \frac{\mathbb{E}L}{\mu(1-\mu)}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 Q^{(1)} &= \frac{1}{2} \frac{\mathbb{E}L^2}{\mathbb{E}L} - \frac{\frac{1}{2} - \mu}{(1-\mu)\mu}\sigma^2 = \frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}L} - \frac{\sigma^2}{2} \left\{ \frac{2\mu - 1}{(1-\mu)\mu} \right\} \\
 &= \frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}L} + \frac{\sigma^2}{2} \left\{ \frac{1}{1-\mu} + \frac{1}{\mu} \right\}
 \end{aligned}$$

Mientras que para nosotros

$$Q^{(1)} = \frac{1}{\mu(1-\mu)} \frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}C} - \sigma^2 \frac{\mathbb{E}L}{2\mathbb{E}C} \cdot \frac{1-2\mu}{(1-\mu)^2\mu^2}$$

Retomando la ecuación (245)

$$\left[\frac{R_1(z)P(z)}{R_2(z)R_3(z)} \right]' = \frac{PR_2R_3R_1' + R_1R_2R_3P' - R_3R_1PR_2 - R_2R_1PR_3'}{(R_2R_3)^2} = \frac{F(z)}{G(z)}$$

donde

$$\begin{aligned}
 F(z) &= PR_2R_3R_1' + R_1R_2R_3P' - R_3R_1PR_2' - R_2R_1PR_3' \\
 G(z) &= R_2^2R_3^2 \\
 G^2(z) &= R_2^4R_3^4 = (1-\mu)^4\mu^4
 \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} G'(z) &= 2R_2R_3 \left[R_2'R_3 + R_2R_3' \right] \\ G'(1) &= -2(1-\mu)\mu \left[\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}[X^2] + \frac{1}{2}\mu \right) (-\mu) + (1-\mu) \left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}[X^2] + \frac{1}{2}\mu \right) \right] \end{aligned}$$

$$F'(z) = \left[(R_2R_3)R_1'' - (R_1R_3)R_2'' - (R_1R_2)R_3'' - 2(R_2'R_3')R_1 \right] P + 2(R_2R_3)R_1'P' + (R_1R_2R_3)P''$$

Por lo tanto, encontremos $F'(z)G(z) + F(z)G'(z)$:

$$\begin{aligned} F'(z)G(z) + F(z)G'(z) &= \left\{ \left[(R_2R_3)R_1'' - (R_1R_3)R_2'' - (R_1R_2)R_3'' - 2(R_2'R_3')R_1 \right] P \right. \\ &\quad \left. + 2(R_2R_3)R_1'P' + (R_1R_2R_3)P'' \right\} R_2^2R_3^2 - \left\{ \left[PR_2R_3R_1' + R_1R_2R_3P' - R_3R_1PR_2' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - R_2R_1PR_3' \right] \left[2R_2R_3(R_2'R_3 + R_2R_3') \right] \right\} \end{aligned}$$

Evalutando en $z = 1$

$$\begin{aligned} &= (1+R_3)^3 R_3^3 R_1'' - (1+R_3)^2 R_1 R_3^3 R_2'' - (1+R_3)^3 R_3^2 R_1 R_3'' - 2(1+R_3)^2 R_3^2 (R_3')^2 \\ &\quad + 2(1+R_3)^3 R_3^3 R_1'P' + (1+R_3)^3 R_3^3 R_1P'' - 2(1+R_3)^2 R_3^2 (1+2R_3) R_3' R_1' \\ &\quad - 2(1+R_3)^2 R_3^2 R_1 R_3' (1+2R_3) P' + 2(1+R_3)(1+2R_3) R_3^3 R_1 (R_3')^2 \\ &\quad + 2(1+R_3)^2 (1+2R_3) R_1 R_3 R_3' \\ &= -(1-\mu)^3 \mu^3 R_1'' - (1-\mu)^2 \mu^2 R_1 (1-2\mu) R_3'' - (1-\mu)^3 \mu^3 R_1 P'' \\ &\quad + 2(1-\mu) \mu^2 [(1-2\mu) R_1 - (1-\mu)] (R_3')^2 - 2(1-\mu)^2 \mu R_1 (1-2\mu) R_3' \\ &\quad - 2(1-\mu)^3 \mu^4 R_1' - 2\mu(1-\mu)(1-2\mu) R_3' R_1' - 2\mu^3 (1-\mu)^2 (1-2\mu) R_1 R_1' \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \left[\frac{F(z)}{G(z)} \right]' &= \frac{1}{\mu^3 (1-\mu)^3} \left\{ -(1-\mu)^2 \mu^2 R_1'' - \mu(1-\mu)(1-2\mu) R_1 R_3'' - \mu^2 (1-\mu)^2 R_1 P'' \right. \\ &\quad \left. + 2\mu [(1-2\mu) R_1 - (1-\mu)] (R_3')^2 - 2(1-\mu)(1-2\mu) R_1 R_3' - 2\mu^3 (1-\mu)^2 R_1' \right. \\ &\quad \left. - 2(1-2\mu) R_3' R_1' - 2\mu^2 (1-\mu)(1-2\mu) R_1 R_1' \right\} \end{aligned}$$

recordemos que

$$\begin{aligned}
R_1 &= -\mathbb{E}L \\
R_3 &= -\mu \\
R_1' &= -\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}L \\
R_3' &= -\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2 + \frac{1}{2}\mu \\
R_1'' &= -\frac{1}{3}\mathbb{E}L^3 + \mathbb{E}L^2 - \frac{2}{3}\mathbb{E}L \\
R_3'' &= -\frac{1}{3}\mathbb{E}X^3 + \mathbb{E}X^2 - \frac{2}{3}\mu \\
R_1R_3' &= \frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L - \frac{1}{2}\mathbb{E}X\mathbb{E}L \\
R_1R_1' &= \frac{1}{2}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}L + \frac{1}{2}\mathbb{E}^2L \\
R_3'R_1' &= \frac{1}{4}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L^2 - \frac{1}{4}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L - \frac{1}{4}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}X + \frac{1}{4}\mathbb{E}X\mathbb{E}L \\
R_1R_3'' &= \frac{1}{6}\mathbb{E}X^3\mathbb{E}L^2 - \frac{1}{6}\mathbb{E}X^3\mathbb{E}L - \frac{1}{2}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}X^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L + \frac{1}{3}\mathbb{E}X\mathbb{E}L^2 - \frac{1}{3}\mathbb{E}X\mathbb{E}L \\
R_1P'' &= -\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L \\
(R_3')^2 &= \frac{1}{4}\mathbb{E}^2X^2 - \frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}X + \frac{1}{4}\mathbb{E}^2X
\end{aligned}$$

Definición 308. Let L_i^* be the number of users at queue Q_i when it is polled, then

$$\mathbb{E}[L_i^*] = f_i(i), \quad \text{Var}[L_i^*] = f_i(i, i) + \mathbb{E}[L_i^*] - \mathbb{E}[L_i^*]^2. \quad (246)$$

Definición 309. The cycle time C_i for the queue Q_i is the period beginning at the time when it is polled in a cycle and ending at the time when it is polled in the next cycle; it's duration is given by $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, equivalently $\bar{\tau}_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)$ under steady state assumption.

Definición 310. The intervisit time I_i is defined as the period beginning at the time of its service completion in a cycle and ending at the time when it is polled in the next cycle; its duration is given by $\tau_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)$.

The intervisit time duration $\tau_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)$ given the number of users found at queue Q_i at time $t = \tau_i(m+1)$ is equal to the number of arrivals during the preceding intervisit time $[\bar{\tau}_i(m), \tau_i(m+1)]$.

So we have

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)}\right]$$

if $I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)}\right]$ we have $F_i(z) = I_i[P_i(z)]$ for $i = 1, 2$. Futhermore can be proved that

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L_i] &= \mu_i \mathbb{E}[I_i], & \mathbb{E}[C_i] &= \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)}, \\
\mathbb{E}[S_i] &= \mu_i \mathbb{E}[C_i], & \mathbb{E}[I_i] &= (1-\mu_i) \mathbb{E}[C_i], \\
\text{Var}[L_i] &= \mu_i^2 \text{Var}[I_i] + \sigma^2 \mathbb{E}[I_i], & \text{Var}[C_i] &= \frac{\text{Var}[L_i^*]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}, \\
\text{Var}[S_i] &= \frac{\text{Var}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^2} + \frac{\sigma^2 \mathbb{E}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^3}, & \text{Var}[I_i] &= \frac{\text{Var}[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).
\end{aligned} \quad (247)$$

Let consider the points when the process $[L_1(1), L_2(1), L_3(1), L_4(1)]$ becomes zero at the same time, this points, T_1, T_2, \dots will be denoted as regeneration points, then we have that

Definición 311. the interval between two such succesive regeneration points will be called regenerative cycle.

Definición 312. Para T_i se define, M_i , el número de ciclos de visita a la cola Q_i , durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.

Definición 313. Para cada uno de los M_i 's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \dots, M_i$, que a su vez, también es un proceso de renovación.

Sea la función generadora de momentos para L_i , el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)}. \quad (248)$$

Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t . Entonces, determinando el primer momento es posible ver que

M_i is an stopping time for the regenerative process with $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, from Wald's lemma follows that:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] &= \mathbb{E}[M_i] \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] \\ \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m) \right] &= \mathbb{E}[M_i] \mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)] \end{aligned}$$

therefore

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

Doing the following substitutions en (??): $n \rightarrow t - \tau_i(m)$, $T \rightarrow \bar{\tau}_i(m) - \tau_i(m)$, $L_n \rightarrow L_i(t)$ and $F(z) = \mathbb{E}[z^{L_0}] \rightarrow F_i(z) = \mathbb{E}[z^{L_i \tau_i(m)}]$, we obtain

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n} \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\bar{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} \right] = z \frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} \quad (249)$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i , $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\bar{\tau}_i(m)} \right] = \frac{1 - \mathbb{E}[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\bar{\tau}_i(m)}]}{1 - P_i(z)} \\ &= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)} \end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] = \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right]}{\mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]} = \frac{1}{\mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]} \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] \\
&= \frac{1}{\mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]} \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\bar{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} + \sum_{t=\bar{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] \\
&= \frac{1}{\mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]} \left\{ \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\bar{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{t=\bar{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]} \left\{ z \frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} + \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)} \right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E} [C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)}
\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}
S'(z) &= - \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}, & S^{(1)}(1) &= - \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k = -\mathbb{E}[L(t)], \\
S''(z) &= - \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k z^{k-2}, & S^{(2)}(1) &= - \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k = \mathbb{E}[L(L-1)], \\
S'''(z) &= - \sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2) a_k z^{k-3}, & S^{(3)}(1) &= - \sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2) a_k \\
&= -\mathbb{E}[L(L-1)(L-2)] \\
&= -\mathbb{E}[L^3] + 3 - \mathbb{E}[L^2] - 2 - \mathbb{E}[L];
\end{aligned} \tag{250}$$

0.56 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [81]

Definición 314 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 213. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1 , implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos R_1, R_2, \dots , que satisfacen la propiedad deseada [127].*

Nota 214. *Para la cola GI/GI/1 los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n , los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) $T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son i.i.d. e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 315. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 215. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X .*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 216. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 217. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 218. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

0.57 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 316. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 317. *Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 318. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 184. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 79. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

0.58 Procesos de Renovación

Definición 319. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (251)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 320. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 219. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Nota 220. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 185 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 123. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 321. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 124. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 186 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

0.59 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 125. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 221. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 187. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (252)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (253)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 80 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (254)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 322. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 188. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (255)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (256)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 81. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (257)$$

0.60 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 126. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 222. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 189. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (258)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (259)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 82 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (260)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 323. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 190. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (261)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (262)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 83. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (263)$$

0.61 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 127. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 223. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 191. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (264)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (265)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 84 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (266)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 324. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la *fluctuación máxima* de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 192. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (267)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (268)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 85. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (269)$$

0.62 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 128. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 224. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$*

Teorema 193. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (270)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (271)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 86 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (272)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 325. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 194. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (273)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (274)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 87. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (275)$$

0.63 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 129. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 225. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 195. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (276)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (277)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 88 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (278)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 326. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la *fluctuación máxima* de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 196. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (279)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (280)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 89. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (281)$$

0.64 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 130. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 226. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 197. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (282)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (283)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números si y sólo si $N(t)$ la cumple.

Corolario 90 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (284)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 327. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 198. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (285)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (286)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 91. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (287)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 131. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 227. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 199. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (288)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (289)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 92 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (290)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 328. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la *fluctuación máxima* de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 200. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (291)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (292)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 93. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (293)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 132. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 228. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$*

Teorema 201. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (294)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (295)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 94 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (296)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 329. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 202. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (297)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (298)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 95. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (299)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 133. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 229. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 203. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (300)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (301)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números si y sólo si $N(t)$ la cumple.

Corolario 96 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (302)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 330. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la *fluctuación máxima* de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 204. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (303)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (304)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 97. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (305)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 134. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 230. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 205. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (306)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (307)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 98 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (308)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 331. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 206. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (309)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (310)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 99. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (311)$$

0.65 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 135. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 231. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 207. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (312)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (313)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 100 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (314)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 332. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 208. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (315)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (316)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 101. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (317)$$

0.66 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 136. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 232. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 209. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (318)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (319)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 102 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (320)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 333. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 210. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (321)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (322)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 103. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (323)$$

0.67 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 137. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 233. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 211. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (324)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (325)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 104 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (326)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 334. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 212. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (327)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (328)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 105. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (329)$$

0.68 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 138. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 234. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 213. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (330)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (331)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 106 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (332)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 335. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 214. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (333)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (334)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 107. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (335)$$

0.69 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 139. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 235. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 215. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (336)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (337)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 108 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (338)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 336. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 216. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (339)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (340)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 109. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (341)$$

0.70 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 140. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 236. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$*

Teorema 217. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (342)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (343)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 110 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (344)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 337. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 218. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (345)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (346)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 111. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (347)$$

0.71 Función de Renovación

Definición 338. *Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (348)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 141. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).*

Teorema 219 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

0.72 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 339. *La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 142. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 340. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 143. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 237. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 220. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 112 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

0.73 Función de Renovación

Definición 341. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (349)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 144. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 221 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 342. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 145. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 343. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 146. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 238. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 222. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 113 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 344. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (350)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 345. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 239. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

0.74 Procesos de Renovación

Definición 346. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (351)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 347. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 240. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Definición 348. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (352)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 349. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 241. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno de gane las otras variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 147. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Ejemplo 9 (Proceso Poisson). Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ con tasa λ . Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ .

Nota 242. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 223. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (353)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (354)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 114 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (355)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 350. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 224. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (356)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (357)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 115. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (358)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 351. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 148. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 352. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 149. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 243. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 225. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 116 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 353. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (359)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 150. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 226 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 354. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 151. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 355. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 152. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.

Nota 244. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 227. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 117 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 356. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (360)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 153. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 228 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 245. Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 229 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 154. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \quad \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 357. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 155. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 230 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 246. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 231 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 156. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 358. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 157. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 232 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 359. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 247. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 248. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Nota 249. Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S , espacio métrico.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 360. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 250. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Teorema 233 (Procesos Regenerativos). Suponga que el proceso

Definición 361 (Renewal Process Trinity). Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t , que es el tiempo desde la última renovación para t .
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t , residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t .
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t .

Nota 251. El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n , y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de Markov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados \mathbb{R}_+ . Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \quad (361)$$

Ejemplo 10 (Tiempos de recurrencia Poisson). Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ , entonces de la expresión (4.80) se tiene que

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 252. Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 362. Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k$ y $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \dots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \dots, X(s_k)).$$

Nota 253. Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en \mathbb{R}_+ , con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$.

Proposición 158. Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 234. Los siguientes enunciados son equivalentes

- i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.
- ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.
- iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,
- iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - F(s)] ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 254. Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.

Corolario 118. El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renovación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.

0.75 Procesos Regenerativos

Nota 255. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 256. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 363 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Definición 364. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 257. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

0.76 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 365. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 258. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 259. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 366 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 260. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 367. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 261. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

0.77 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 368. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 369. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 370. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 235. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

0.78 Existencia de Tiempos de Regeneración

0.79 Procesos Regenerativos: Thorisson

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 371. Un elemento aleatorio en un espacio medible (E, \mathcal{E}) en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a (E, \mathcal{E}) , es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.

Nota 262. También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E , es decir, es \mathcal{F}/\mathcal{E} medible.

Definición 372. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible (E_i, \mathcal{E}_i) . Se define el espacio producto $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := (\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i)$, donde $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i 's, y $\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i$ es la σ -álgebra producto, es decir, es la σ -álgebra más pequeña en $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ que hace al i -ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ -álgebra inducida por los mapeos proyección.

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i := \sigma \{ \{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i \}.$$

Definición 373. Un espacio de probabilidad $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a \mathbb{P} como distribución.

Teorema 236. Sea \mathbb{I} un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible (E_i, \mathcal{E}_i) . Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i$ en $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i \left(y \in \prod_{i \in \mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \dots, y_n \in A_{i_n} \right) = P_{i_1}(A_{i_1}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \dots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := (\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 374. Un espacio medible (E, \mathcal{E}) es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E , y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que \mathcal{E} es generado por conjuntos abiertos.

Definición 375. Dos espacios medibles (E, \mathcal{E}) y (G, \mathcal{G}) son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \rightarrow G$ tal que f es \mathcal{E}/\mathcal{G} medible y su inversa f^{-1} es \mathcal{G}/\mathcal{E} medible. La biyección es una equivalencia de Borel.

Definición 376. Un espacio medible (E, \mathcal{E}) es un espacio estándar si es Borel equivalente a (G, \mathcal{G}) , donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y \mathcal{G} son los subconjuntos de Borel de G .

Nota 263. Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.

Definición 377. Un proceso estocástico con conjunto de índices \mathbb{I} y espacio de estados (E, \mathcal{E}) es una familia $Z = (Z_s)_{s \in \mathbb{I}}$ donde Z_s son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en (E, \mathcal{E}) .

Definición 378. Un proceso estocástico one-sided continuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.

Sea $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$ denota el espacio producto $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}) := \otimes_{s \in \mathbb{I}} (E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar \mathbb{Z} como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s \in \mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 264. La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$. La distribución de Z está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.

Nota 265. En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales

$$\mathbb{P}(Z_{t_1} \leq x_1, \dots, Z_{t_n} \leq x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \quad (362)$$

Nota 266. Para espacios polacos (E, \mathcal{E}) el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.

Definición 379. Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z .

Nota 267. Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$ sino en (H, \mathcal{H}) , donde \mathcal{H} es la σ -álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A \mathcal{H} se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\}. \quad (363)$$

Nota 268. Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de (Ω, \mathcal{F}) a (H, \mathcal{H}) . Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H , al espacio (H, \mathcal{H}) se le llama el espacio de trayectorias de Z .

Nota 269. La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias (H, \mathcal{H}) es la distribución de Z como un elemento aleatorio en (H, \mathcal{H}) . La distribución, nuevamente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.

Definición 380. Sea Z un PEOSCT con espacio de estados (E, \mathcal{E}) y sea T un tiempo aleatorio en $[0, \infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w), w \in \Omega.$$

Definición 381. Un PEOSCT Z es conjuntamente medible (**CM**) si el mapeo que toma $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Nota 270. Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F} / \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Definición 382. Un PEOSCT con espacio de estados (H, \mathcal{H}) es canónicamente conjuntamente medible (**CCM**) si el mapeo $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Nota 271. Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0, \infty)$ a E , es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w, t) en $(Z(w), t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w), t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.

Definición 383. Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z , es internamente shift-invariante (**ISI**) si

$$\{(z_{t+s})_{s \in [0, \infty)} : z \in H\} = H, t \in [0, \infty).$$

Definición 384. Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t , $t \in [0, \infty)$, de H a H por

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)}, z \in H.$$

Definición 385. Se dice que un proceso Z es *shift-medible (SM)* si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H}$ medible.

Nota 272. Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es *shift-medible* si y sólo si es CCM

Nota 273. • Dado el espacio polaco (E, \mathcal{E}) se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0, \infty)$ que es ISI, entonces cumple con ser CCM.

- Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G , y como G es segundo numerable como subespacio de E , lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.

Nota 274. Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.

Teorema 237. El producto numerable de espacios polacos es polaco.

Definición 386. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s \in [0, \infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados (E, \mathcal{E}) y espacio de trayectorias (H, \mathcal{H}) y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \dots \rightarrow \infty$. Considerando S como un mapeo medible de (Ω, \mathcal{F}) al espacio sucesión (L, \mathcal{L}) , donde

$$L = \left\{ (s_k)_0^\infty \in [0, \infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \dots \rightarrow \infty \right\},$$

donde \mathcal{L} son los subconjuntos de Borel de L , es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.

Así el par (Z, S) es un mapeo medible de (Ω, \mathcal{F}) en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0, \infty), \mathcal{B}[0, \infty))$.

Definición 387. Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por

$$\theta_t(z, (s_k)_0^\infty) = \theta_t(z, (s_{n_{t-}+k} - t)_0^\infty)$$

donde $n_{t-} = \inf \{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 275. Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es *shit-medible*, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Definición 388. Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z , se dice *regenerativo clásico* con tiempos de regeneración S si

$$\theta_{S_n}(Z, S) = (Z^0, S^0), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $((Z_s)_{s \in [0, S_n)}, S_0, \dots, S_n)$. Si lo anterior se cumple, al par (Z, S) se le llama *regenerativo clásico*.

Nota 276. Si el par (Z, S) es *regenerativo clásico*, entonces las longitudes de los ciclos X_1, X_2, \dots , son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0 , es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.

Teorema 238. Supóngase que el par (Z, S) es *regenerativo clásico* con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S) . Además, si X_1 es lattice con span d , entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periódicamente estacionaria de (Z, S) con periodo d .

Definición 389. Una variable aleatoria X_1 es *spread out* si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx > 0$ con X_2, X_3, \dots, X_n copias i.i.d de X_1 ,

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \in B) \geq \int_B f(x) dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 390. Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z, S) = (Z^0, S^0)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de (S_0, S_1, \dots, S_n) para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z, S) es WSR si lo anterior se cumple.

Nota 277. • El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0, \infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.

- Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z , entonces (Z, S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico

Nota 278. Para cualquier proceso estocástico Z , el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0, \infty)}$ es siempre un proceso de Markov.

Teorema 239. Supongase que el par (Z, S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S) .

Teorema 240. Supongase que (Z, S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0, 1)$ e independiente de (Z^0, S^0) y sea \mathbb{P}^* la medida de probabilidad en (Ω, \mathbb{P}) definida por

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*(\theta_{U X_1}(Z^0, S^0) \in \cdot)$. Entonces (Z^*, S^*) es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f(\theta_s(Z^0, S^0)) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 241. Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \quad (364)$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z, S) = (Z^0, S^0), n \geq 0, \text{ en distribución,} \quad (365)$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \dots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \quad (366)$$

Definición 391. Un elemento aleatorio en un espacio medible (E, \mathcal{E}) en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a (E, \mathcal{E}) , es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.

Nota 279. También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E , es decir, es \mathcal{F}/\mathcal{E} medible.

Definición 392. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible (E_i, \mathcal{E}_i) . Se define el espacio producto $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := (\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i)$, donde $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i 's, y $\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i$ es la σ -álgebra producto, es decir, es la σ -álgebra más pequeña en $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ que hace al i -ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ -álgebra inducida por los mapeos proyección.

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i := \sigma\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\}.$$

Definición 393. Un espacio de probabilidad $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a \mathbb{P} como distribución.

Teorema 242. Sea \mathbb{I} un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible (E_i, \mathcal{E}_i) . Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i$ en $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i \left(y \in \prod_{i \in \mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \dots, y_n \in A_{i_n} \right) = P_{i_1}(A_{i_1}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \dots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := (\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 394. Un espacio medible (E, \mathcal{E}) es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E , y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que \mathcal{E} es generado por conjuntos abiertos.

Definición 395. Dos espacios medibles (E, \mathcal{E}) y (G, \mathcal{G}) son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \rightarrow G$ tal que f es \mathcal{E}/\mathcal{G} medible y su inversa f^{-1} es \mathcal{G}/\mathcal{E} medible. La biyección es una equivalencia de Borel.

Definición 396. Un espacio medible (E, \mathcal{E}) es un espacio estándar si es Borel equivalente a (G, \mathcal{G}) , donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y \mathcal{G} son los subconjuntos de Borel de G .

Nota 280. Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.

Definición 397. Un proceso estocástico con conjunto de índices \mathbb{I} y espacio de estados (E, \mathcal{E}) es una familia $Z = (Z_s)_{s \in \mathbb{I}}$ donde Z_s son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en (E, \mathcal{E}) .

Definición 398. Un proceso estocástico one-sided continuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.

Sea $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$ denota el espacio producto $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}) := \otimes_{s \in \mathbb{I}} (E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar \mathbb{Z} como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s \in \mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 281. La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.

Nota 282. En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales

$$\mathbb{P}(Z_{t_1} \leq x_1, \dots, Z_{t_n} \leq x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \quad (367)$$

Nota 283. Para espacios polacos (E, \mathcal{E}) el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.

Definición 399. Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z .

Nota 284. Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$ sino en (H, \mathcal{H}) , donde \mathcal{H} es la σ -álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A \mathcal{H} se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\}. \quad (368)$$

Nota 285. Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de (Ω, \mathcal{F}) a (H, \mathcal{H}) . Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H , al espacio (H, \mathcal{H}) se le llama el espacio de trayectorias de Z .

Nota 286. La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias (H, \mathcal{H}) es la distribución de Z como un elemento aleatorio en (H, \mathcal{H}) . La distribución, nuevamente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.

Definición 400. Sea Z un PEOSCT con espacio de estados (E, \mathcal{E}) y sea T un tiempo aleatorio en $[0, \infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) \cdot w \in \Omega.$$

Definición 401. Un PEOSCT Z es conjuntamente medible (**CM**) si el mapeo que toma $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Nota 287. Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F} / \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Definición 402. Un PEOSCT con espacio de estados (H, \mathcal{H}) es canónicamente conjuntamente medible (**CCM**) si el mapeo $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Nota 288. Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0, \infty)$ a E , es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w, t) en $(Z(w), t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w), t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.

Definición 403. Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z , es internamente shift-invariante (**ISI**) si

$$\left\{ (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)} : z \in H \right\} = H, \quad t \in [0, \infty).$$

Definición 404. Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t , $t \in [0, \infty)$, de H a H por

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)}, \quad z \in H.$$

Definición 405. Se dice que un proceso Z es shift-medible (**SM**) si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H}$ medible.

Nota 289. Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM

Nota 290. • Dado el espacio polaco (E, \mathcal{E}) se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0, \infty)$ que es ISI, entonces cumple con ser CCM.

- Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G , y como G es segundo numerable como subespacio de E , lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.

Nota 291. Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.

Teorema 243. El producto numerable de espacios polacos es polaco.

Definición 406. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s \in [0, \infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados (E, \mathcal{E}) y espacio de trayectorias (H, \mathcal{H}) y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \dots \rightarrow \infty$. Considerando S como un mapeo medible de (Ω, \mathcal{F}) al espacio sucesión (L, \mathcal{L}) , donde

$$L = \left\{ (s_k)_0^\infty \in [0, \infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \dots \rightarrow \infty \right\},$$

donde \mathcal{L} son los subconjuntos de Borel de L , es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.

Así el par (Z, S) es un mapeo medible de (Ω, \mathcal{F}) en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0, \infty), \mathcal{B}[0, \infty))$.

Definición 407. Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por

$$\theta_t(z, (s_k)_0^\infty) = \theta_t(z, (s_{n_{t-}+k} - t)_0^\infty)$$

donde $n_{t-} = \inf \{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 292. Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Definición 408. Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z , se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si

$$\theta_{S_n}(Z, S) = (Z^0, S^0), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $((Z_s)_{s \in [0, S_n]}, S_0, \dots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z, S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 293. Si el par (Z, S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos X_1, X_2, \dots , son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0 , es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.

Teorema 244. Supóngase que el par (Z, S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S) . Además, si X_1 es lattice con span d , entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periódicamente estacionaria de (Z, S) con periodo d .

Definición 409. Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx > 0$ con X_2, X_3, \dots, X_n copias i.i.d de X_1 ,

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \in B) \geq \int_B f(x) dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 410. Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z, S) = (Z^0, S^0)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de (S_0, S_1, \dots, S_n) para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z, S) es WSR si lo anterior se cumple.

Nota 294. • El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0, \infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.

- Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z , entonces (Z, S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico

Nota 295. Para cualquier proceso estocástico Z , el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0, \infty)}$ es siempre un proceso de Markov.

Teorema 245. Supongase que el par (Z, S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S) .

Teorema 246. Supongase que (Z, S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0, 1)$ e independiente de (Z^0, S^0) y sea \mathbb{P}^* la medida de probabilidad en (Ω, \mathbb{P}) definida por

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*(\theta_{U X_1}(Z^0, S^0) \in \cdot)$. Entonces (Z^*, S^*) es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f(\theta_s(Z^0, S^0)) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 247. Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \quad (369)$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n} (Z, S) = (Z^0, S^0), n \geq 0, \text{ en distribución,} \quad (370)$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \dots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \quad (371)$$

Definición 411. Un elemento aleatorio en un espacio medible (E, \mathcal{E}) en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a (E, \mathcal{E}) , es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.

Nota 296. También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E , es decir, es \mathcal{F}/\mathcal{E} medible.

Definición 412. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible (E_i, \mathcal{E}_i) . Se define el espacio producto $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := (\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i)$, donde $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i 's, y $\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i$ es la σ -álgebra producto, es decir, es la σ -álgebra más pequeña en $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ que hace al i -ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ -álgebra inducida por los mapeos proyección.

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i := \sigma \{ \{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i \}.$$

Definición 413. Un espacio de probabilidad $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a \mathbb{P} como distribución.

Teorema 248. Sea \mathbb{I} un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible (E_i, \mathcal{E}_i) . Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i$ en $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i \left(y \in \prod_{i \in \mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \dots, y_n \in A_{i_n} \right) = P_{i_1}(A_{i_1}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \dots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := (\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 414. Un espacio medible (E, \mathcal{E}) es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E , y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que \mathcal{E} es generado por conjuntos abiertos.

Definición 415. Dos espacios medibles (E, \mathcal{E}) y (G, \mathcal{G}) son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \rightarrow G$ tal que f es \mathcal{E}/\mathcal{G} medible y su inversa f^{-1} es \mathcal{G}/\mathcal{E} medible. La biyección es una equivalencia de Borel.

Definición 416. Un espacio medible (E, \mathcal{E}) es un espacio estándar si es Borel equivalente a (G, \mathcal{G}) , donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y \mathcal{G} son los subconjuntos de Borel de G .

Nota 297. Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.

Definición 417. Un proceso estocástico con conjunto de índices \mathbb{I} y espacio de estados (E, \mathcal{E}) es una familia $Z = (Z_s)_{s \in \mathbb{I}}$ donde Z_s son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en (E, \mathcal{E}) .

Definición 418. Un proceso estocástico one-sided continuous time (PEOSCT) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.

Sea $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$ denota el espacio producto $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}) := \otimes_{s \in \mathbb{I}} (E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar \mathbb{Z} como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s \in \mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 298. La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.

Nota 299. En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales

$$\mathbb{P}(Z_{t_1} \leq x_1, \dots, Z_{t_n} \leq x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \quad (372)$$

Nota 300. Para espacios polacos (E, \mathcal{E}) el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.

Definición 419. Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z .

Nota 301. Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$ sino en (H, \mathcal{H}) , donde \mathcal{H} es la σ -álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A \mathcal{H} se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\}. \quad (373)$$

Nota 302. Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de (Ω, \mathcal{F}) a (H, \mathcal{H}) . Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H , al espacio (H, \mathcal{H}) se le llama el espacio de trayectorias de Z .

Nota 303. La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias (H, \mathcal{H}) es la distribución de Z como un elemento aleatorio en (H, \mathcal{H}) . La distribución, nuevamente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.

Definición 420. Sea Z un PEOSCT con espacio de estados (E, \mathcal{E}) y sea T un tiempo aleatorio en $[0, \infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) \cdot w \in \Omega.$$

Definición 421. Un PEOSCT Z es conjuntamente medible (**CM**) si el mapeo que toma $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Nota 304. Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F} / \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Definición 422. Un PEOSCT con espacio de estados (H, \mathcal{H}) es canónicamente conjuntamente medible (**CCM**) si el mapeo $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Nota 305. Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0, \infty)$ a E , es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w, t) en $(Z(w), t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w), t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.

Definición 423. Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z , es internamente shift-invariante (**ISI**) si

$$\{(z_{t+s})_{s \in [0, \infty)} : z \in H\} = H, t \in [0, \infty).$$

Definición 424. Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t , $t \in [0, \infty)$, de H a H por

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)}, z \in H.$$

Definición 425. Se dice que un proceso Z es *shift-medible (SM)* si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H}$ medible.

Nota 306. Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es *shift-medible* si y sólo si es CCM

Nota 307. • Dado el espacio polaco (E, \mathcal{E}) se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0, \infty)$ que es ISI, entonces cumple con ser CCM.

- Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuya cerradura este contenida en G , y como G es segundo numerable como subespacio de E , lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.

Nota 308. Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.

Teorema 249. El producto numerable de espacios polacos es polaco.

Definición 426. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s \in [0, \infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados (E, \mathcal{E}) y espacio de trayectorias (H, \mathcal{H}) y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \dots \rightarrow \infty$. Considerando S como un mapeo medible de (Ω, \mathcal{F}) al espacio sucesión (L, \mathcal{L}) , donde

$$L = \left\{ (s_k)_0^\infty \in [0, \infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \dots \rightarrow \infty \right\},$$

donde \mathcal{L} son los subconjuntos de Borel de L , es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.

Así el par (Z, S) es un mapeo medible de (Ω, \mathcal{F}) en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0, \infty), \mathcal{B}[0, \infty))$.

Definición 427. Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por

$$\theta_t(z, (s_k)_0^\infty) = \theta_t(z, (s_{n_{t-}+k} - t)_0^\infty)$$

donde $n_{t-} = \inf \{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 309. Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es *shit-medible*, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Definición 428. Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z , se dice *regenerativo clásico* con tiempos de regeneración S si

$$\theta_{S_n}(Z, S) = (Z^0, S^0), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $((Z_s)_{s \in [0, S_n)}, S_0, \dots, S_n)$. Si lo anterior se cumple, al par (Z, S) se le llama *regenerativo clásico*.

Nota 310. Si el par (Z, S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos X_1, X_2, \dots , son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0 , es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.

Teorema 250. Supóngase que el par (Z, S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S) . Además, si X_1 es lattice con span d , entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periódicamente estacionaria de (Z, S) con periodo d .

Definición 429. Una variable aleatoria X_1 es *spread out* si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx > 0$ con X_2, X_3, \dots, X_n copias i.i.d de X_1 ,

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \in B) \geq \int_B f(x) dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 430. Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z, S) = (Z^0, S^0)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de (S_0, S_1, \dots, S_n) para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z, S) es WSR si lo anterior se cumple.

Nota 311. • El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0, \infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.

- Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z , entonces (Z, S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico

Nota 312. Para cualquier proceso estocástico Z , el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0, \infty)}$ es siempre un proceso de Markov.

Teorema 251. Supongase que el par (Z, S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S) .

Teorema 252. Supongase que (Z, S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0, 1)$ e independiente de (Z^0, S^0) y sea \mathbb{P}^* la medida de probabilidad en (Ω, \mathbb{P}) definida por

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*(\theta_{U X_1}(Z^0, S^0) \in \cdot)$. Entonces (Z^*, S^*) es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f(\theta_s(Z^0, S^0)) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 253. Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \quad (374)$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z, S) = (Z^0, S^0), n \geq 0, \text{ en distribución,} \quad (375)$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \dots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \quad (376)$$

Definición 431. Un elemento aleatorio en un espacio medible (E, \mathcal{E}) en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a (E, \mathcal{E}) , es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.

Nota 313. También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E , es decir, es \mathcal{F}/\mathcal{E} medible.

Definición 432. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible (E_i, \mathcal{E}_i) . Se define el espacio producto $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := (\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i)$, donde $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i 's, y $\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i$ es la σ -álgebra producto, es decir, es la σ -álgebra más pequeña en $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ que hace al i -ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ -álgebra inducida por los mapeos proyección.

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i := \sigma\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\}.$$

Definición 433. Un espacio de probabilidad $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a \mathbb{P} como distribución.

Teorema 254. Sea \mathbb{I} un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible (E_i, \mathcal{E}_i) . Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i$ en $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i \left(y \in \prod_{i \in \mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \dots, y_n \in A_{i_n} \right) = P_{i_1}(A_{i_1}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \dots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := (\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 434. Un espacio medible (E, \mathcal{E}) es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E , y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que \mathcal{E} es generado por conjuntos abiertos.

Definición 435. Dos espacios medibles (E, \mathcal{E}) y (G, \mathcal{G}) son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \rightarrow G$ tal que f es \mathcal{E}/\mathcal{G} medible y su inversa f^{-1} es \mathcal{G}/\mathcal{E} medible. La biyección es una equivalencia de Borel.

Definición 436. Un espacio medible (E, \mathcal{E}) es un espacio estándar si es Borel equivalente a (G, \mathcal{G}) , donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y \mathcal{G} son los subconjuntos de Borel de G .

Nota 314. Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.

Definición 437. Un proceso estocástico con conjunto de índices \mathbb{I} y espacio de estados (E, \mathcal{E}) es una familia $Z = (Z_s)_{s \in \mathbb{I}}$ donde Z_s son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en (E, \mathcal{E}) .

Definición 438. Un proceso estocástico one-sided continuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.

Sea $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$ denota el espacio producto $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}) := \otimes_{s \in \mathbb{I}} (E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar \mathbb{Z} como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s \in \mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 315. La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.

Nota 316. En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales

$$\mathbb{P}(Z_{t_1} \leq x_1, \dots, Z_{t_n} \leq x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \quad (377)$$

Nota 317. Para espacios polacos (E, \mathcal{E}) el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.

Definición 439. Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z .

Nota 318. Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$ sino en (H, \mathcal{H}) , donde \mathcal{H} es la σ -álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A \mathcal{H} se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\}. \quad (378)$$

Nota 319. Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de (Ω, \mathcal{F}) a (H, \mathcal{H}) . Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H , al espacio (H, \mathcal{H}) se le llama el espacio de trayectorias de Z .

Nota 320. La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias (H, \mathcal{H}) es la distribución de Z como un elemento aleatorio en (H, \mathcal{H}) . La distribución, nuevamente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.

Definición 440. Sea Z un PEOSCT con espacio de estados (E, \mathcal{E}) y sea T un tiempo aleatorio en $[0, \infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) \cdot w \in \Omega.$$

Definición 441. Un PEOSCT Z es conjuntamente medible (**CM**) si el mapeo que toma $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Nota 321. Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F} / \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Definición 442. Un PEOSCT con espacio de estados (H, \mathcal{H}) es canónicamente conjuntamente medible (**CCM**) si el mapeo $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Nota 322. Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0, \infty)$ a E , es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w, t) en $(Z(w), t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w), t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.

Definición 443. Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z , es internamente shift-invariante (**ISI**) si

$$\left\{ (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)} : z \in H \right\} = H, \quad t \in [0, \infty).$$

Definición 444. Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t , $t \in [0, \infty)$, de H a H por

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)}, \quad z \in H.$$

Definición 445. Se dice que un proceso Z es shift-medible (**SM**) si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H}$ medible.

Nota 323. Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM

Nota 324. • Dado el espacio polaco (E, \mathcal{E}) se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0, \infty)$ que es ISI, entonces cumple con ser CCM.

- Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G , y como G es segundo numerable como subespacio de E , lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.

Nota 325. Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.

Teorema 255. El producto numerable de espacios polacos es polaco.

Definición 446. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s \in [0, \infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados (E, \mathcal{E}) y espacio de trayectorias (H, \mathcal{H}) y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \dots \rightarrow \infty$. Considerando S como un mapeo medible de (Ω, \mathcal{F}) al espacio sucesión (L, \mathcal{L}) , donde

$$L = \left\{ (s_k)_0^\infty \in [0, \infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \dots \rightarrow \infty \right\},$$

donde \mathcal{L} son los subconjuntos de Borel de L , es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.

Así el par (Z, S) es un mapeo medible de (Ω, \mathcal{F}) en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0, \infty), \mathcal{B}[0, \infty))$.

Definición 447. Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por

$$\theta_t(z, (s_k)_0^\infty) = \theta_t(z, (s_{n_{t-}+k} - t)_0^\infty)$$

donde $n_{t-} = \inf \{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 326. Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es *shit-medible*, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Definición 448. Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z , se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si

$$\theta_{S_n}(Z, S) = (Z^0, S^0), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $((Z_s)_{s \in [0, S_n]}, S_0, \dots, S_n)$. Si lo anterior se cumple, al par (Z, S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 327. Si el par (Z, S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos X_1, X_2, \dots , son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0 , es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.

Teorema 256. Supóngase que el par (Z, S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S) . Además, si X_1 es lattice con span d , entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periódicamente estacionaria de (Z, S) con periodo d .

Definición 449. Una variable aleatoria X_1 es *spread out* si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx > 0$ con X_2, X_3, \dots, X_n copias i.i.d de X_1 ,

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \in B) \geq \int_B f(x) dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 450. Dado un proceso estocástico Z se le llama *wide-sense regenerative (WSR)* con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z, S) = (Z^0, S^0)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de (S_0, S_1, \dots, S_n) para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z, S) es WSR si lo anterior se cumple.

Nota 328. • El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0, \infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.

- Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z , entonces (Z, S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico

Nota 329. Para cualquier proceso estocástico Z , el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0, \infty)}$ es siempre un proceso de Markov.

Teorema 257. Supongase que el par (Z, S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S) .

Teorema 258. Supongase que (Z, S) es *cycle-stationary* con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0, 1)$ e independiente de (Z^0, S^0) y sea \mathbb{P}^* la medida de probabilidad en (Ω, \mathbb{P}) definida por

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*(\theta_{U X_1}(Z^0, S^0) \in \cdot)$. Entonces (Z^*, S^*) es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f(\theta_s(Z^0, S^0)) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 259. Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \quad (379)$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n} (Z, S) = (Z^0, S^0), n \geq 0, \text{ en distribución,} \quad (380)$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \dots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \quad (381)$$

0.80 Procesos Regenerativos

0.81 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [127]

Definición 451 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 330. La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1 , implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos R_1, R_2, \dots , que satisfacen la propiedad deseada [127].

Nota 331. Para la cola GI/GI/1 los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n , los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) $T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son i.i.d. e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.

Definición 452. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 332. Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X .

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 333. Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.

Nota 334. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Nota 335. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

0.82 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 453. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 454. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 455. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 260. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 119. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

0.83 Procesos de Renovación

Definición 456. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (382)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 457. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 336. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

0.84 Teorema Principal de Renovación

Nota 337. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 261 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 159. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 458. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 160. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 262 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

0.85 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 161. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 338. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$*

Teorema 263. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (383)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (384)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 120 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (385)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 459. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 264. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (386)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (387)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 121. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (388)$$

0.86 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 162. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 339. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 265. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (389)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (390)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 122 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (391)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 460. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 266. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (392)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (393)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 123. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (394)$$

0.87 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 163. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 340. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 267. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (395)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (396)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 124 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (397)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 461. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 268. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (398)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (399)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 125. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (400)$$

0.88 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 164. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 341. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 269. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (401)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (402)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 126 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (403)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 462. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 270. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (404)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (405)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 127. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (406)$$

0.89 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 165. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 342. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 271. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (407)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (408)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 128 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (409)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 463. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 272. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (410)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (411)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 129. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (412)$$

0.90 Función de Renovación

Definición 464. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (413)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 166. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 273 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

0.91 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 465. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 167. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 466. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 168. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.

Nota 343. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 274. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 130 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

0.92 Procesos de Renovación

Definición 467. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (414)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 468. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 344. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otras variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

0.93 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]

Definición 469. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (415)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 470. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 345. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 169. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 346. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 275. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (416)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (417)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 131 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (418)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 471. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 276. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (419)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (420)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 132. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (421)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 472. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 170. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 473. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 171. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.

Nota 347. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 277. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 133 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 474. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (422)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 172. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 278 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 475. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 173. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 476. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{\hat{n}\star}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 174. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 348. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 279. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 134 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 477. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (423)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 175. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 280 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 349. Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 281 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 176. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 478. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 177. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 282 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 350. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 283 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 178. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 479. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 179. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 284 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

0.94 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]

Definición 480. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (424)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 481. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 351. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue la otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 180. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Ejemplo 11 (Proceso Poisson). Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ con tasa λ . Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ .

Nota 352. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 285. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (425)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (426)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números si y sólo si $N(t)$ la cumple.

Corolario 135 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (427)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 482. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 286. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (428)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (429)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 136. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (430)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 483. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 181. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 484. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 182. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 353. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 287. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 137 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], t \geq 0,$$

Definición 485. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), t \geq 0, \quad (431)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 183. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 288 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 486. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 184. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 487. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 185. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 354. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 289. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 138 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 488. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (432)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 186. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 290 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 355. Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 291 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 187. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 489. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 188. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 292 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 356. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 293 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 189. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 490. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 190. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 294 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 491. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 357. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 358. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 359. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S , espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 492. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 360. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 295 (Procesos Regenerativos). *Suponga que el proceso*

Definición 493 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t , que es el tiempo desde la última renovación para t .
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t , residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t .
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t .

Nota 361. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n , y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MARKOV a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados \mathbb{R}_+ . Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \quad (433)$$

Ejemplo 12 (Tiempos de recurrencia Poisson). Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ , entonces de la expresión (4.80) se tiene que

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 494. Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k$ y $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \dots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \dots, X(s_k)).$$

Nota 362. Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considere el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en \mathbb{R}_+ , con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$.

Proposición 191. Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 296. Los siguientes enunciados son equivalentes

- i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.
- ii) El proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.
- iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,
- iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - F(s)] ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 363. Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.

Corolario 139. El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renovación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.

0.95 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]

Definición 495. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (434)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 496. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 364. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 192. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Ejemplo 13 (Proceso Poisson). Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ con tasa λ . Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ .

Nota 365. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 297. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (435)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (436)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 140 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (437)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 497. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 298. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (438)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (439)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 141. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (440)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 498. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 193. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 499. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 194. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 366. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 299. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 142 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 500. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (441)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 195. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 300 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 501. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 196. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 502. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n\star}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 197. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 367. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 301. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 143 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 503. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (442)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 198. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 302 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 368. Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 303 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 199. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \quad \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 504. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \quad \text{para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 200. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 304 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 369. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 305 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 201. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 505. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 202. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 306 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 506. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 370. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f: \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 371. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Nota 372. Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S , espacio métrico.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 507. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamentnte distribuidos.

Nota 373. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Teorema 307 (Procesos Regenerativos). Suponga que el proceso

Definición 508 (Renewal Process Trinity). Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t , que es el tiempo desde la última renovación para t .
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t , residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t .
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t .

Nota 374. El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n , y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MARKOV a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados \mathbb{R}_+ . Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \quad (443)$$

Ejemplo 14 (Tiempos de recurrencia Poisson). Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ , entonces de la expresión (4.80) se tiene que

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 509. Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k$ y $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \dots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \dots, X(s_k)).$$

Nota 375. Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en \mathbb{R}_+ , con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$.

Proposición 203. Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 308. Los siguientes enunciados son equivalentes

- i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.
- ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.
- iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,
- iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - F(s)] ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 376. Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.

Corolario 144. El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renovación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.

0.96 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]

Definición 510. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (444)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 511. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 377. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 204. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Ejemplo 15 (Proceso Poisson). Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ con tasa λ . Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ .

Nota 378. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 309. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (445)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (446)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 145 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (447)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 512. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 310. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (448)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (449)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 146. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (450)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 513. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 205. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 514. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 206. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 379. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 311. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 147 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 515. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (451)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 207. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 312 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 516. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 208. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 517. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 209. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 380. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 313. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 148 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 518. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (452)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 210. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 314 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 381. Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 315 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 211. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \quad \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 519. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \quad \text{para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 212. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \quad \text{donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 316 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 382. Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 317 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 213. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 520. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 214. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 318 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 521. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n]$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 383. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 384. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Nota 385. Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S , espacio métrico.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 522. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n]$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 386. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Teorema 319 (Procesos Regenerativos). Suponga que el proceso

Definición 523 (Renewal Process Trinity). Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t , que es el tiempo desde la última renovación para t .
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t , residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t .
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t .

Nota 387. El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n , y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de Markov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados \mathbb{R}_+ . Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \quad (453)$$

Ejemplo 16 (Tiempos de recurrencia Poisson). Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ , entonces de la expresión (4.80) se tiene que

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 524. Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k$ y $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \dots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \dots, X(s_k)).$$

Nota 388. Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considere el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en \mathbb{R}_+ , con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$.

Proposición 215. Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 320. Los siguientes enunciados son equivalentes

- i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.
- ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.
- iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,
- iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - F(s)] ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 389. Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.

Corolario 149. El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renovación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.

0.97 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]

Definición 525. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (454)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 526. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 390. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue la otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 216. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Ejemplo 17 (Proceso Poisson). Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ con tasa λ . Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ .

Nota 391. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 321. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (455)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (456)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 150 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (457)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 527. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 322. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (458)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (459)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 151. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (460)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 528. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 217. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 529. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 218. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 392. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 323. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 152 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], t \geq 0,$$

Definición 530. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), t \geq 0, \quad (461)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 219. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 324 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 531. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 220. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 532. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 221. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 393. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 325. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 153 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 533. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \tag{462}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 222. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 326 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 394. Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 327 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 223. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 534. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 224. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 328 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 395. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 329 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 225. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 535. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 226. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 330 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 536. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 396. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 397. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 398. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S , espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 537. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 399. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 331 (Procesos Regenerativos). *Suponga que el proceso*

Definición 538 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t , que es el tiempo desde la última renovación para t .
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t , residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t .
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t .

Nota 400. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n , y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MARKOV a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados \mathbb{R}_+ . Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \quad (463)$$

Ejemplo 18 (Tiempos de recurrencia Poisson). Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ , entonces de la expresión (4.80) se tiene que

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 539. Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k$ y $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \dots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \dots, X(s_k)).$$

Nota 401. Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considere el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en \mathbb{R}_+ , con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$.

Proposición 227. Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 332. Los siguientes enunciados son equivalentes

- i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.
- ii) El proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.
- iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,
- iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - F(s)] ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 402. Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.

Corolario 154. El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renovación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.

0.98 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]

Definición 540. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (464)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 541. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 403. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 228. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 404. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 333. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (465)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (466)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)/t$ la cumple.

Corolario 155 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (467)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 542. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 334. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (468)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (469)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 156. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (470)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 543. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 229. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 544. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 230. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 405. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 335. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 157 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 545. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (471)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 231. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (471).

Teorema 336 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 546. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 232. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 547. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 233. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 406. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 337. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 158 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 548. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (472)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 234. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 338 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 407. Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 339 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 235. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \quad \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 549. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \quad \text{para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 236. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 340 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 408. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 341 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 237. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 550. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 238. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 342 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

0.99 Procesos Regenerativos

Nota 409. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 410. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 551 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Definición 552. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y definan los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 411. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 553. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectorias muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamente distribuidos.

Nota 412. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 413. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 554 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 414. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 555. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y definan los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 415. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (puntos de regeneración) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado primer ciclo de regeneración de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el segundo ciclo de regeneración, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 556. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 557. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 558. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 343. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (puntos de regeneración) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 559. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 560. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 561. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 344. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

0.100 Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\{T_1^i, T_2^i, \dots, T_k^i, \dots\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/\mu_i$. Además se sabe que para

$$T^* = \min \{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\},$$

T^* se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^* = \sum_{i=1}^4 \mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad \text{y} \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min \{\tilde{r}, \hat{r}\},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \bar{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \bar{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\bar{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

0.101 Resultados para Procesos de Salida

0.102 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 562. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectorias muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamente distribuidos.

Observación 13. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Observación 14. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 563 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 416. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 564. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y definan los tiempos promedio

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 417. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

0.103 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]

Definición 565. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (473)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 566. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 418. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue la otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 239. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 419. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 345. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (474)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (475)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 159 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (476)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 567. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 346. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (477)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (478)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 160. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (479)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 568. *La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 240. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 569. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 241. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 420. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 347. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 161 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 570. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (480)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 242. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 348 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 571. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 243. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 572. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 244. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.

Nota 421. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 349. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 162 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 573. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (481)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 245. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 350 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 422. Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 351 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 246. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \quad \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 574. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 247. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 352 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 423. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 353 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 248. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 575. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 249. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 354 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

0.104 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 576. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamente distribuidos.

Observación 15. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Observación 16. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 577 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 424. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 578. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y definanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 425. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

0.105 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 579. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 17. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Observación 18. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 580 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 426. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 581. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y definanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 427. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

0.106 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 582. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 583. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 584. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 355. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

0.107 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 585. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 586. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 587. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 356. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

0.108 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^\infty P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^\infty F^{n*}(t)$$

Proposición 250. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 428. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 357. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (482)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (483)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 163 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (484)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 588. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la *fluctuación máxima* de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 358. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (485)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (486)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 164. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (487)$$

0.109 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 251. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 429. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 359. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (488)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (489)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números si y sólo si N/t la cumple.

Corolario 165 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (490)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 589. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 360. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (491)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (492)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 166. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (493)$$

0.110 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 252. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 430. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 361. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (494)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (495)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 167 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (496)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 590. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 362. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (497)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (498)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 168. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (499)$$

0.111 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 253. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 431. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 363. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (500)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (501)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 169 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (502)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 591. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 364. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (503)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (504)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 170. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (505)$$

0.112 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 592. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 593. *Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 594. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 365. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

0.113 Procesos de Renovación

Definición 595. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (506)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 596. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 432. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degenere las otras variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

0.114 Teorema Principal de Renovación

Nota 433. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 366 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 254. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 597. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 255. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 367 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{X(t) : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

0.115 Función de Renovación

Definición 598. *Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (507)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 256. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).*

Teorema 368 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

0.116 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 257. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 434. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 369. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (508)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (509)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 171 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (510)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 599. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 370. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (511)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (512)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 172. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (513)$$

0.117 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 600. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 258. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 601. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 259. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 435. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 371. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 173 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

0.118 Procesos de Renovación

Definición 602. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (514)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 603. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t]$*

Nota 436. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

0.119 Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\{T_1^i, T_2^i, \dots, T_k^i, \dots\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/\mu_i$. Además se sabe que para

$$T^* = \min \{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\},$$

T^* se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^* = \sum_{i=1}^4 \mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad \text{y} \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min \{\tilde{r}, \hat{r}\},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \bar{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \bar{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\bar{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

0.120 Resultados para Procesos de Salida

En [127] prueban que para la existencia de una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1 , donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados (S, \mathcal{R}) , con \mathcal{R} σ -álgebra.

Proposición 260. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R_1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de (X, R_1, \dots, R_k) , dado $\theta_{\tau_k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

Teorema 372. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso I es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

- a) *Los tiempos de servicio son idénticamente cero;*
- b) *$L = 0$, para cualquier proceso de servicio S ;*
- c) *$L = 1$ y $G = D$;*
- d) *$L = \infty$ y $G = M$.*

En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

- a) *$1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;*
- b) *$1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;*
- c) *$1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;*
- d) *$1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.*

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostró que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso el proceso de salida es de renovación.

- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

Teorema 373. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

- $s = \infty$
- La disciplina de servicio es de procesador compartido.
- La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$
- $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

Teorema 374. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B , tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [100] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

Teorema 375. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{-\theta D_n}) &= \mu(\mu + \theta)^{-1} [\delta\theta - \mu(1 - \delta)\alpha(\theta)] [\theta - \mu(1 - \delta)^{-1}] \\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}[e^{-\theta T_0}] \\ \text{var}(D_n) &= \text{var}(T_0) - (\tau^{-1} - \delta^{-1}) 2\delta(\mathbb{E}(S_0))^2(1 - \delta)^{-1}.\end{aligned}$$

Teorema 376. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 377. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

0.121 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 604. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamente distribuidos.

Observación 19. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f: \tilde{S} \rightarrow S$.

Observación 20. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 605 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 437. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 606. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 438. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

0.122 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]

Definición 607. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (515)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 608. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 439. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 261. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 440. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 378. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (516)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (517)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)/t$ la cumple.

Corolario 174 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (518)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 609. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 379. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (519)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (520)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 175. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (521)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 610. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 262. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 611. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 263. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 441. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 380. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 176 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 612. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (522)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 264. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 381 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 613. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 265. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 614. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 266. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 442. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 382. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 177 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 615. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (523)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 267. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 383 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 443. Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 384 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 268. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \quad \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 616. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \quad \text{para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 269. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 385 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 444. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 386 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 270. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 617. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 271. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 387 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

0.123 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 618. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectorias muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamente distribuidos.

Observación 21. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Observación 22. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 619 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 445. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 620. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 446. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

0.124 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 621. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectorias muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamente distribuidos.

Observación 23. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Observación 24. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 622 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 447. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 623. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 448. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

0.125 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 272. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 449. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 388. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (524)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (525)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 178 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (526)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 624. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la *fluctuación máxima* de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 389. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (527)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (528)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 179. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (529)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 273. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 450. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 390. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \end{aligned} \quad (530) \quad (531)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 180 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (532)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 625. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 391. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (533)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (534)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 181. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (535)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 274. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 451. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 392. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (536)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (537)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 182 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (538)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 626. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 393. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (539)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (540)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 183. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (541)$$

0.126 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 275. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 452. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 394. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (542)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (543)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 184 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (544)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 627. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 395. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (545)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (546)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 185. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (547)$$

0.127 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 628. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 629. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 630. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 396. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

0.128 Procesos de Renovación

Definición 631. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (548)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 632. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 453. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

0.129 Teorema Principal de Renovación

Nota 454. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 397 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 276. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 633. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 277. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 398 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

0.130 Función de Renovación

Definición 634. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \tag{549}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 278. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 399 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

0.131 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 279. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 455. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 400. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (550)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (551)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 186 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (552)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 635. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 401. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (553)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (554)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 187. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (555)$$

0.132 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 636. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 280. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 637. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 281. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 456. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 402. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 188 (Identidad de Wald para Renovaciones). *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E} [T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E} [N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

0.133 Procesos de Renovación

Definición 638. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (556)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 639. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 457. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

0.134 Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\{T_1^i, T_2^i, \dots, T_k^i, \dots\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/\mu_i$. Además se sabe que para

$$T^* = \min \{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\},$$

T^* se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^* = \sum_{i=1}^4 \mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad \text{y} \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min \{\tilde{r}, \hat{r}\},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \bar{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \bar{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\bar{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

0.135 Resultados para Procesos de Salida

En [127] prueban que para la existencia de una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1 , donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados (S, \mathcal{R}) , con \mathcal{R} σ -álgebra.

Proposición 282. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R_1}X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de (X, R_1, \dots, R_k) , dado $\theta_{\tau_k}X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

Teorema 403. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso \mathbf{I} es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

- Los tiempos de servicio son idénticamente cero;*
- $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S ;*
- $L = 1$ y $G = D$;*
- $L = \infty$ y $G = M$.*

En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

- $1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0$;*
- $1 - e^{-\lambda t} * F(t), t \geq 0$;*
- $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t), t \geq 0$;*
- $1 - e^{-\lambda t} * F(t), t \geq 0$.*

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

Teorema 404. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

- a) $s = \infty$
- b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*
- c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$*
- d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

Teorema 405. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B , tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [100] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

Teorema 406. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{-\theta D_n}) &= \mu(\mu + \theta)^{-1} [\delta\theta - \mu(1 - \delta)\alpha(\theta)] [\theta - \mu(1 - \delta)^{-1}] \\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}[e^{-\theta T_0}] \\ \text{var}(D_n) &= \text{var}(T_0) - (\tau^{-1} - \delta^{-1}) 2\delta(\mathbb{E}(S_0))^2(1 - \delta)^{-1}.\end{aligned}$$

Teorema 407. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 408. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

0.136 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [81]

Definición 640 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 458. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1 , implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos R_1, R_2, \dots , que satisfacen la propiedad deseada [127].*

Nota 459. *Para la cola GI/GI/1 los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n , los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) $T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son i.i.d. e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 641. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 460. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X .*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 461. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 462. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 463. a) *Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) *Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞*

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 642. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 643. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 644. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 409. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 189. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 645. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t]$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (557)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 646. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 464. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Nota 465. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 410 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 283. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 647. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 284. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 411 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 285. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 466. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 412. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (558)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (559)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 190 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (560)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 648. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la *fluctuación máxima* de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 413. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (561)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (562)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 191. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (563)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 286. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 467. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 414. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \end{aligned} \quad (564) \quad (565)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 192 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (566)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 649. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 415. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (567)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (568)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 193. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (569)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 287. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 468. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$*

Teorema 416. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (570)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (571)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 194 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (572)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 650. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 417. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (573)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (574)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 195. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (575)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 288. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 469. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 418. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (576)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (577)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números si y sólo si $N(t)$ la cumple.

Corolario 196 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (578)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 651. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la *fluctuación máxima* de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 419. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (579)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (580)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 197. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (581)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 289. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 470. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 420. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (582)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (583)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)/t$ la cumple.

Corolario 198 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (584)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 652. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 421. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (585)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (586)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 199. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (587)$$

Definición 653. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (588)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 290. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 422 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 654. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 291. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 655. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 292. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 471. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 423. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 200 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 656. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (589)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 657. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 472. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Definición 658. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (590)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 659. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 473. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 293. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Ejemplo 19 (Proceso Poisson). Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ con tasa λ . Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ .

Nota 474. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 424. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (591)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (592)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)/t$ la cumple.

Corolario 201 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (593)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 660. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 425. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (594)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (595)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 202. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (596)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 661. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 294. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 662. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 295. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 475. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 426. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 203 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 663. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (597)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 296. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 427 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 664. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 297. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 665. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 298. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 476. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 428. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 204 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 666. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (598)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 299. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 429 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 477. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 430 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 300. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 667. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 301. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 431 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 478. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 432 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 302. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 668. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 303. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 433 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 669. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 479. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 480. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Nota 481. Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S , espacio métrico.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 670. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 482. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Teorema 434 (Procesos Regenerativos). Suponga que el proceso

Definición 671 (Renewal Process Trinity). Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t , que es el tiempo desde la última renovación para t .
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t , residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t .

- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t .

Nota 483. El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n , y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MARKOV a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados \mathbb{R}_+ . Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \quad (599)$$

Ejemplo 20 (Tiempos de recurrencia Poisson). Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ , entonces de la expresión (4.80) se tiene que

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 484. Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 672. Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k$ y $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \dots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \dots, X(s_k)).$$

Nota 485. Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en \mathbb{R}_+ , con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$.

Proposición 304. Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 435. Los siguientes enunciados son equivalentes

- i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.
- ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.
- iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,
- iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - F(s)] ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 486. Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.

Corolario 205. El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renovación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.

Nota 487. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 488. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 673 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Definición 674. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 489. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 675. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectorias muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamente distribuidos.

Nota 490. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 491. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 676 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 492. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 677. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 493. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (puntos de regeneración) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 678. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 679. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 680. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 436. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 681. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 682. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 683. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 437. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Sean T_1, T_2, \dots los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Sea la función generadora de momentos para L_i , el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E} \left[z^{L_i(t)} \right] = \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right]}{\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m) \right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty^4$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] &= \mathbb{E}[M_i] \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] \\ \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m) \right] &= \mathbb{E}[M_i] \mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)] \end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right]}{\mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (??): $n \rightarrow t - \tau_i(m)$, $T \rightarrow \bar{\tau}_i(m) - \tau_i(m)$, $L_n \rightarrow L_i(t)$ y $F(z) = \mathbb{E} [z^{L_0}] \rightarrow F_i(z) = \mathbb{E} [z^{L_i \tau_i(m)}]$, se puede ver que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n} \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\bar{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} \right] = z \frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} \quad (600)$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i , $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\tau_i(m)} \right] = \frac{1 - \mathbb{E} [\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\tau_i(m)}]}{1 - P_i(z)} \\ &= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)} \end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] = \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Por lo tanto

⁴En Stidham[128] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un proceso estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)} \right] < \infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^N \mu_k < 1$.

$$\begin{aligned}
 Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right]}{\mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]} \\
 &= \frac{1}{\mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]} \left\{ \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\bar{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{t=\bar{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{\mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]} \left\{ z \frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} + \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)} \right\}
 \end{aligned}$$

es decir

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \quad (601)$$

Teorema 438. *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo M/M/1. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t , $A_j(t) = \{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\}$ para algún tiempo $t \geq 0$ y Q_j la cola j -ésima en la RSVC, para $j = 1, 2, 3, 4$. Existe un intervalo $I \neq \emptyset$ tal que para $T^* \in I$, tal que $\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(Tt^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I\} > 0$.*

Proof. Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.

Sea $n > 0$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j(\bar{\tau}_1(n)) = 0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1(n) > 0$, entonces tenemos que $\tau_2(n) = \bar{\tau}_1(n) + r_1(n)$.

Definamos el intervalo $I_1 \equiv [\bar{\tau}_1(n), \tau_2(n)]$ de longitud $\xi_1 = r_1(n)$. Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$\mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)}. \quad (602)$$

Por otra parte, para la cola Q_2 , el tiempo $\bar{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\bar{\tau}_2(n-1)) = 0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n . Entonces tenemos un segundo intervalo $I_2 \equiv [\bar{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)}, \quad (603)$$

donde $\xi_2(n) = \tau_2(n) - \bar{\tau}_2(n-1)$.

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} &= \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\} \\
 &\geq \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} \\
 &= e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]}.
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]} > 0. \quad (604)$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC, se afirma que existe $m > 0$ tal que $\bar{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$.

Para Q_3 sea $I_3 = [\bar{\tau}_3(m), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_3(m) = r_3(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(n)}. \quad (605)$$

Análogamente que como se hizo para Q_2 , tenemos que para Q_4 se tiene el intervalo $I_4 = [\bar{\tau}_4(m-1), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_4(m) = \tau_4(m) - \bar{\tau}_4(m-1)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} = e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)}. \quad (606)$$

Al igual que para el primer sistema, dado que $I_3(m) \subset I_4(m)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \xi_3(m) \leq \xi_4(m) &\Leftrightarrow -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\ -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m) &\Leftrightarrow e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} \\ \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} &\geq \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} \end{aligned}$$

Entonces, dado que los eventos A_3 y A_4 son independientes, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\} &= \mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(m)\} \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} \\ &\geq \mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(m)\} \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} \\ &= e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)} e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} = e^{-[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)]}. \end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\} = e^{-[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)]} > 0. \quad (607)$$

Por construcción se tiene que $I(n, m) \equiv I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$, entonces en particular se tienen las contenciones $I(n, m) \subseteq I_1(n)$ y $I(n, m) \subseteq I_3(m)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m} \equiv \ell(I(n, m))$ tenemos que

$$\xi_{n,m} \leq \xi_1(n) \text{ y } \xi_{n,m} \leq \xi_3(m) \text{ entonces } -\xi_{n,m} \geq -\xi_1(n) \text{ y } -\xi_{n,m} \leq -\xi_3(m)$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{aligned} -\tilde{\mu}_1 \xi_{n,m} &\geq -\tilde{\mu}_1 \xi_1(n), & -\tilde{\mu}_2 \xi_{n,m} &\geq -\tilde{\mu}_2 \xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_2(n), \\ -\tilde{\mu}_3 \xi_{n,m} &\geq -\tilde{\mu}_3 \xi_3(m), & -\tilde{\mu}_4 \xi_{n,m} &\geq -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m). \end{aligned}$$

Sea $T^* \in I_{n,m}$, entonces dado que en particular $T^* \in I_1(n)$ se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2 , en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4 , es decir, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$, $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I_{n,m}$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4 , por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(T^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I_{n,m}\} &= \prod_{j=1}^4 \mathbb{P}\{A_j(T^*) | T^* \in I_{n,m}\} \\ &\geq \mathbb{P}\{A_1(T^*) | T^* \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(T^*) | T^* \in I_2(n)\} \mathbb{P}\{A_3(T^*) | T^* \in I_3(m)\} \mathbb{P}\{A_4(T^*) | T^* \in I_4(m)\} \quad (608) \\ &= e^{-\mu_1 \xi_1(n)} e^{-\mu_2 \xi_2(n)} e^{-\mu_3 \xi_3(m)} e^{-\mu_4 \xi_4(m)} = e^{-[\mu_1 \xi_1(n) + \mu_2 \xi_2(n) + \mu_3 \xi_3(m) + \mu_4 \xi_4(m)]} > 0. \end{aligned}$$

□

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [100] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.

- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

Teorema 439. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{-\theta D_n}) &= \mu(\mu + \theta)^{-1} [\delta\theta - \mu(1 - \delta)\alpha(\theta)] [\theta - \mu(1 - \delta)^{-1}] \\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}[e^{-\theta T_0}] \\ \text{var}(D_n) &= \text{var}(T_0) - (\tau^{-1} - \delta^{-1}) 2\delta(\mathbb{E}(S_0))^2 (1 - \delta)^{-1}.\end{aligned}$$

Teorema 440. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 441. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

En Sigman, Thorison y Wolff [127] prueban que para la existencia de una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1 , donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados (S, \mathcal{R}) , con \mathcal{R} σ -álgebra.

Proposición 305. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R_1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de (X, R_1, \dots, R_k) , dado $\theta_{\tau_k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

Teorema 442. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso I es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

- Los tiempos de servicio son idénticamente cero;*
- $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S ;*
- $L = 1$ y $G = D$;*
- $L = \infty$ y $G = M$.*

En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

- $1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0$;
- $1 - e^{-\lambda t} * F(t), t \geq 0$;
- $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t), t \geq 0$;
- $1 - e^{-\lambda t} * F(t), t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.

- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

Teorema 443. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

- a) $s = \infty$
- b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*
- c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$*
- d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

Teorema 444. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B , tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [100] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

Teorema 445. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{-\theta D_n}) &= \mu(\mu + \theta)^{-1} [\delta\theta - \mu(1 - \delta)\alpha(\theta)] [\theta - \mu(1 - \delta)^{-1}] \\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}[e^{-\theta T_0}] \\ \text{var}(D_n) &= \text{var}(T_0) - (\tau^{-1} - \delta^{-1}) 2\delta (\mathbb{E}(S_0))^2 (1 - \delta)^{-1}.\end{aligned}$$

Teorema 446. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 447. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

Sean Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 en una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC). Supongamos que cada una de las colas es del tipo $M/M/1$ con tasa de arribo μ_i y que la transferencia de usuarios entre los dos sistemas ocurre entre $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$ con respectiva tasa de arribo igual a la tasa de salida $\hat{\mu}_i = \mu_i$, esto se sabe por lo desarrollado en la sección anterior.

Consideremos, sin pérdida de generalidad como base del análisis, la cola Q_1 además supongamos al servidor lo comenzamos a observar una vez que termina de atender a la misma para desplazarse y llegar a Q_2 , es decir al tiempo τ_2 .

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, ciclo del servidor en que regresa a Q_1 para dar servicio y atender conforme a la política exhaustiva, entonces se tiene que $\bar{\tau}_1(n)$ es el tiempo del servidor en el sistema 1 en que termina de dar servicio a todos los usuarios presentes en la cola, por lo tanto se cumple que $L_1(\bar{\tau}_1(n)) = 0$, entonces el servidor para llegar a Q_2 incurre en un tiempo de traslado r_1 y por tanto se cumple que $\tau_2(n) = \bar{\tau}_1(n) + r_1$. Dado que los tiempos entre arribos son exponenciales se cumple que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_1(n), \bar{\tau}_1(n) + r_1]\} &= e^{-\tilde{\mu}_1 r_1}, \\ \mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_1(n), \bar{\tau}_1(n) + r_1]\} &= e^{-\tilde{\mu}_2 r_1}.\end{aligned}$$

El evento que nos interesa consiste en que no haya arribos desde que el servidor abandonó Q_2 y regresa nuevamente para dar servicio, es decir en el intervalo de tiempo $[\bar{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Entonces, si hacemos

$$\begin{aligned}\varphi_1(n) &\equiv \bar{\tau}_1(n) + r_1 = \bar{\tau}_2(n-1) + r_1 + r_2 + \bar{\tau}_1(n) - \tau_1(n) \\ &= \bar{\tau}_2(n-1) + \bar{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r,\end{aligned}$$

y longitud del intervalo

$$\begin{aligned}\xi &\equiv \bar{\tau}_1(n) + r_1 - \bar{\tau}_2(n-1) = \bar{\tau}_2(n-1) + \bar{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r - \bar{\tau}_2(n-1) \\ &= \bar{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r.\end{aligned}$$

Entonces, determinemos la probabilidad del evento no arribos a Q_2 en $[\bar{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]$:

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi}. \quad (609)$$

De manera análoga, tenemos que la probabilidad de no arribos a Q_1 en $[\bar{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]$ esta dada por

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi}, \quad (610)$$

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi}. \quad (611)$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ y } Q_2 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} \\ = \mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} \\ \times \mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)]\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi} = e^{-\tilde{\mu} \xi}.\end{aligned} \quad (612)$$

Para el segundo sistema, consideremos nuevamente $\bar{\tau}_1(n) + r_1$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $m > 0$ tal que $\bar{\tau}_3(m) < \bar{\tau}_1(n) + r_1 < \tau_4(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_3(m), \bar{\tau}_1(n) + r_1]\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3}, \quad (613)$$

donde

$$\xi_3 = \bar{\tau}_1(n) + r_1 - \bar{\tau}_3(m) = \bar{\tau}_1(n) - \bar{\tau}_3(m) + r_1, \quad (614)$$

mientras que para Q_4 al igual que con Q_2 escribiremos $\tau_4(m)$ en términos de $\bar{\tau}_4(m-1)$:
 $\varphi_2 \equiv \tau_4(m) = \bar{\tau}_4(m-1) + r_4 + \bar{\tau}_3(m) - \tau_3(m) + r_3 = \bar{\tau}_4(m-1) + \bar{\tau}_3(m) - \tau_3(m) + \hat{r}$, además,
 $\xi_2 \equiv \varphi_2(m) - \bar{\tau}_1(n) - r_1 = \bar{\tau}_4(m-1) + \bar{\tau}_3(m) - \tau_3(m) - \bar{\tau}_1(n) + \hat{r} - r_1$.

Entonces

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_4 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]\} = e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_2}, \quad (615)$$

mientras que para Q_3 se tiene que

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_2} \quad (616)$$

Por tanto

$$\mathbb{P}\{0 \text{ arribos en } Q_3 \wedge Q_4 \text{ en el intervalo } [\bar{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]\} = e^{-\hat{\mu} \xi_2} \quad (617)$$

donde $\hat{\mu} = \tilde{\mu}_3 + \tilde{\mu}_4$.

Ahora, definamos los intervalos $\mathcal{I}_1 = [\bar{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_1(n)]$ y $\mathcal{I}_2 = [\bar{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]$, entonces, sea $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ el intervalo donde cada una de las colas se encuentran vacías, es decir, si tomamos $T^* \in \mathcal{I}$, entonces $L_1(T^*) = L_2(T^*) = L_3(T^*) = L_4(T^*) = 0$.

Ahora, dado que por construcción $\mathcal{I} \neq \emptyset$ y que para $T^* \in \mathcal{I}$ en ninguna de las colas han llegado usuarios, se tiene que no hay transferencia entre las colas, por lo tanto, el sistema 1 y el sistema 2 son condicionalmente independientes en \mathcal{I} , es decir

$$\mathbb{P}\{L_1(T^*), L_2(T^*), L_3(T^*), L_4(T^*) | T^* \in \mathcal{I}\} = \prod_{j=1}^4 \mathbb{P}\{L_j(T^*)\}, \quad (618)$$

para $T^* \in \mathcal{I}$.

Definición 684 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 494. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1 , implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos R_1, R_2, \dots , que satisfacen la propiedad deseada [127].*

Nota 495. *Para la cola GI/GI/1 los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n , los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) $T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son i.i.d. e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 685. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 496. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X .*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 497. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 498. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 499. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 686. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 687. *Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 688. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 448. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 206. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 689. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (619)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 690. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 500. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Nota 501. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 449 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 306. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 691. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 307. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 450 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 308. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 502. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 451. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{620}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{621}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 207 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (622)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 692. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 452. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (623)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (624)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 208. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (625)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 309. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 503. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 453. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (626)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (627)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 209 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (628)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 693. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 454. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (629)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (630)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 210. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (631)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 310. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 504. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 455. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (632)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (633)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 211 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (634)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 694. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 456. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (635)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (636)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 212. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (637)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 311. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 505. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 457. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (638)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (639)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 213 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (640)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 695. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la *fluctuación máxima* de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 458. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (641)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (642)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 214. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (643)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 312. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 506. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 459. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (644)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (645)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)/t$ la cumple.

Corolario 215 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (646)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 696. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 460. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (647)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (648)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 216. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (649)$$

Definición 697. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (650)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 313. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 461 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 698. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 314. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 699. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 315. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 507. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 462. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 217 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], t \geq 0,$$

Definición 700. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (651)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 701. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 508. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otras variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Definición 702. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (652)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 703. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 509. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 316. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Ejemplo 21 (Proceso Poisson). Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ con tasa λ . Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ .

Nota 510. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 463. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (653)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (654)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 218 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (655)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 704. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 464. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (656)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (657)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 219. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (658)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 705. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 317. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 706. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 318. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 511. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 465. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 220 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 707. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (659)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 319. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 466 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 708. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 320. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 709. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{\hat{n}*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 321. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 512. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 467. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 221 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], t \geq 0,$$

Definición 710. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), t \geq 0, \quad (660)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 322. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 468 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 513. Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 469 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 323. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 711. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 324. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 470 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 514. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 471 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 325. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 712. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 326. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 472 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 713. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 515. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 516. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 517. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S , espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 714. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 518. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 473 (Procesos Regenerativos). *Suponga que el proceso*

Definición 715 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t , que es el tiempo desde la última renovación para t .
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t , residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t .
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t .

Nota 519. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n , y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MARKOV a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados \mathbb{R}_+ . Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \quad (661)$$

Ejemplo 22 (Tiempos de recurrencia Poisson). Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ , entonces de la expresión (4.80) se tiene que

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 520. Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 716. Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k$ y $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \dots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \dots, X(s_k)).$$

Nota 521. Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en \mathbb{R}_+ , con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$.

Proposición 327. Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 474. Los siguientes enunciados son equivalentes

- i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.
- ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.
- iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,
- iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - F(s)] ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 522. Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.

Corolario 222. El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renovación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.

Nota 523. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 524. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 717 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Definición 718. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 525. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 719. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 526. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 527. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 720 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 528. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 721. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 529. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 722. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 723. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 724. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 475. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 725. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 726. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 727. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 476. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Sea la función generadora de momentos para L_i , el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces

Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t . Entonces, determinando el primer momento es posible ver que

Definición 728. El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\bar{\tau}_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.

Definición 729. El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)$.

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\bar{\tau}_i(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E} \left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))} \right] = \mathbb{E} \left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)} \right]$$

entonces, si $I_i(z) = \mathbb{E} \left[z^{\tau_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)} \right]$ se tiene que $F_i(z) = I_i[P_i(z)]$ para $i = 1, 2$.

Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (815), sean T_1, T_2, \dots los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 730. Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.

Definición 731. Para T_i se define, M_i , el número de ciclos de visita a la cola Q_i , durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.

Definición 732. Para cada uno de los M_i 's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \dots, M_i$, que a su vez, también es un proceso de renovación.

5

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 733. Un elemento aleatorio en un espacio medible (E, \mathcal{E}) en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a (E, \mathcal{E}) , es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.

Nota 530. También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E , es decir, es \mathcal{F}/\mathcal{E} medible.

Definición 734. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible (E_i, \mathcal{E}_i) . Se define el espacio producto $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := (\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i)$, donde $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i 's, y $\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i$ es la σ -álgebra producto, es decir, es la σ -álgebra más pequeña en $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ que hace al i -ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ -álgebra inducida por los mapeos proyección.

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i := \sigma \{ \{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i \}.$$

Definición 735. Un espacio de probabilidad $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a \mathbb{P} como distribución.

Teorema 477. Sea \mathbb{I} un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible (E_i, \mathcal{E}_i) . Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i$ en $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que

⁵In Stidham and Heyman [128] shows that is sufficient for the regenerative process to be stationary that the mean regenerative cycle time is finite: $\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)} \right] < \infty$,

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^N \mu_k < 1$.

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i \left(y \in \prod_{i \in \mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \dots, y_n \in A_{i_n} \right) = P_{i_1}(A_{i_1}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \dots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := (\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 736. Un espacio medible (E, \mathcal{E}) es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E , y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que \mathcal{E} es generado por conjuntos abiertos.

Definición 737. Dos espacios medibles (E, \mathcal{E}) y (G, \mathcal{G}) son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \rightarrow G$ tal que f es \mathcal{E}/\mathcal{G} medible y su inversa f^{-1} es \mathcal{G}/\mathcal{E} medible. La biyección es una equivalencia de Borel.

Definición 738. Un espacio medible (E, \mathcal{E}) es un espacio estándar si es Borel equivalente a (G, \mathcal{G}) , donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y \mathcal{G} son los subconjuntos de Borel de G .

Nota 531. Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.

Definición 739. Un proceso estocástico con conjunto de índices \mathbb{I} y espacio de estados (E, \mathcal{E}) es una familia $Z = (Z_s)_{s \in \mathbb{I}}$ donde Z_s son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en (E, \mathcal{E}) .

Definición 740. Un proceso estocástico one-sided continuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.

Sea $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$ denota el espacio producto $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}) := \otimes_{s \in \mathbb{I}} (E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar Z como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s \in \mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 532. La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.

Nota 533. En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales

$$\mathbb{P}(Z_{t_1} \leq x_1, \dots, Z_{t_n} \leq x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \quad (662)$$

Nota 534. Para espacios polacos (E, \mathcal{E}) el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posea tales distribuciones finito dimensionales.

Definición 741. Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z .

Nota 535. Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}})$ sino en (H, \mathcal{H}) , donde \mathcal{H} es la σ -álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A \mathcal{H} se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\}. \quad (663)$$

Nota 536. Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de (Ω, \mathcal{F}) a (H, \mathcal{H}) . Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H , al espacio (H, \mathcal{H}) se le llama el espacio de trayectorias de Z .

Nota 537. La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias (H, \mathcal{H}) es la distribución de Z como un elemento aleatorio en (H, \mathcal{H}) . La distribución, nuevamente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.

Definición 742. Sea Z un PEOSCT con espacio de estados (E, \mathcal{E}) y sea T un tiempo aleatorio en $[0, \infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) \cdot w \in \Omega.$$

Definición 743. Un PEOSCT Z es conjuntamente medible (**CM**) si el mapeo que toma $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Nota 538. Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F} / \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Definición 744. Un PEOSCT con espacio de estados (H, \mathcal{H}) es canónicamente conjuntamente medible (**CCM**) si el mapeo $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Nota 539. Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0, \infty)$ a E , es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w, t) en $(Z(w), t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w), t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.

Definición 745. Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z , es internamente shift-invariante (**ISI**) si

$$\left\{ (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)} : z \in H \right\} = H, \quad t \in [0, \infty).$$

Definición 746. Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t , $t \in [0, \infty)$, de H a H por

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)}, \quad z \in H.$$

Definición 747. Se dice que un proceso Z es shift-medible (**SM**) si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H}$ medible.

Nota 540. Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM

Nota 541. • Dado el espacio polaco (E, \mathcal{E}) se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0, \infty)$ que es ISI, entonces cumple con ser CCM.

- Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G , y como G es segundo numerable como subespacio de E , lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.

Nota 542. Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.

Teorema 478. El producto numerable de espacios polacos es polaco.

Definición 748. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s \in [0, \infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados (E, \mathcal{E}) y espacio de trayectorias (H, \mathcal{H}) y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \dots \rightarrow \infty$. Considerando S como un mapeo medible de (Ω, \mathcal{F}) al espacio sucesión (L, \mathcal{L}) , donde

$$L = \left\{ (s_k)_0^\infty \in [0, \infty)^{\{0, 1, \dots\}} : s_0 < s_1 < \dots \rightarrow \infty \right\},$$

donde \mathcal{L} son los subconjuntos de Borel de L , es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0, 1, \dots\}}$.

Así el par (Z, S) es un mapeo medible de (Ω, \mathcal{F}) en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0, \infty), \mathcal{B}[0, \infty))$.

Definición 749. Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por

$$\theta_t(z, (s_k)_0^\infty) = \theta_t(z, (s_{n_{t-}+k} - t)_0^\infty)$$

donde $n_{t-} = \inf \{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 543. Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es *shit-medible*, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.

Definición 750. Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z , se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si

$$\theta_{S_n}(Z, S) = (Z^0, S^0), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $((Z_s)_{s \in [0, S_n]}, S_0, \dots, S_n)$. Si lo anterior se cumple, al par (Z, S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 544. Si el par (Z, S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos X_1, X_2, \dots , son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0 , es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.

Teorema 479. Supóngase que el par (Z, S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S) . Además, si X_1 es lattice con span d , entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periódicamente estacionaria de (Z, S) con periodo d .

Definición 751. Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx > 0$ con X_2, X_3, \dots, X_n copias i.i.d de X_1 ,

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \in B) \geq \int_B f(x) dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 752. Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z, S) = (Z^0, S^0)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de (S_0, S_1, \dots, S_n) para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z, S) es WSR si lo anterior se cumple.

Nota 545. • El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0, \infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.

- Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z , entonces (Z, S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico

Nota 546. Para cualquier proceso estocástico Z , el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0, \infty)}$ es siempre un proceso de Markov.

Teorema 480. Supongase que el par (Z, S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S) .

Teorema 481. Supongase que (Z, S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0, 1)$ e independiente de (Z^0, S^0) y sea \mathbb{P}^* la medida de probabilidad en (Ω, \mathbb{P}) definida por

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*(\theta_{U X_1}(Z^0, S^0) \in \cdot)$. Entonces (Z^*, S^*) es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f(\theta_s(Z^0, S^0)) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 482. Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \quad (664)$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n} (Z, S) = (Z^0, S^0), n \geq 0, \text{ en distribución,} \quad (665)$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \dots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \quad (666)$$

0.137 Output Process and Regenerative Processes

En Sigman, Thorison y Wolff [127] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1 , donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados (S, \mathcal{R}) , con \mathcal{R} σ -álgebra.

Proposición 328. Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R_1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,

$$\theta_k (X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de (X, R_1, \dots, R_k) , dado $\theta_{\tau_k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

Teorema 483. Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso I es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:

- a) Los tiempos de servicio son idénticamente cero;
- b) $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S ;
- c) $L = 1$ y $G = D$;
- d) $L = \infty$ y $G = M$.

En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

- a) $1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0$;
- b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t), t \geq 0$;
- c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t), t \geq 0$;
- d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t), t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.

- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

Teorema 484. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

- a) $s = \infty$
- b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.
- c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$
- d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

Teorema 485. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B , tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

0.138 Output Process and Regenerative Processes

En Sigman, Thorison y Wolff [127] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1 , donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados (S, \mathcal{R}) , con \mathcal{R} σ -álgebra.

Proposición 329. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R_1}X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de (X, R_1, \dots, R_k) , dado $\theta_{\tau_k}X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

Teorema 486. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso I es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

- a) Los tiempos de servicio son idénticamente cero;
- b) $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S ;
- c) $L = 1$ y $G = D$;
- d) $L = \infty$ y $G = M$.

En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

- a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
- b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;

- c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{I}_a(t), t \geq 0;$
- d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t), t \geq 0.$

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

Teorema 487. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

- a) $s = \infty$
- b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*
- c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$*
- d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

Teorema 488. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B , tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Definición 753 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,*
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$*

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 547. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1 , implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos R_1, R_2, \dots , que satisfacen la propiedad deseada [127].*

Nota 548. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n , los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) $T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son i.i.d. e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 754. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 549. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X .*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 550. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 551. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 552. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 755. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 756. *Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 757. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 489. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 223. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 758. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (667)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 759. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 553. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Nota 554. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 490 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 330. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 760. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 331. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 491 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 332. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 555. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 492. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{668}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{669}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 224 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (670)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 761. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 493. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (671)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (672)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 225. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (673)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 333. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 556. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 494. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (674)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (675)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 226 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (676)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 762. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 495. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (677)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (678)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 227. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (679)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 334. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 557. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 496. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (680)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (681)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo si $N(t)$ la cumple.

Corolario 228 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (682)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 763. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 497. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (683)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (684)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 229. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (685)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 335. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 558. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 498. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (686)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (687)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 230 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (688)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 764. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la *fluctuación máxima* de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 499. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (689)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (690)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 231. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (691)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 336. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 559. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$*

Teorema 500. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (692)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (693)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 232 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (694)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 765. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 501. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (695)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (696)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 233. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (697)$$

Definición 766. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (698)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 337. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 502 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 767. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 338. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 768. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 339. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 560. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 503. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 234 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], t \geq 0,$$

Definición 769. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (699)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 770. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 561. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degenere las otras variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Definición 771. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (700)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 772. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 562. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 340. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Ejemplo 23 (Proceso Poisson). Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ con tasa λ . Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ .

Nota 563. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 504. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (701)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (702)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 235 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (703)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 773. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 505. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (704)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (705)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 236. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (706)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 774. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 341. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 775. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 342. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 564. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 506. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 237 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 776. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (707)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 343. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 507 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 777. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 344. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 778. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{\hat{n}*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 345. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 565. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 508. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 238 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], t \geq 0,$$

Definición 779. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), t \geq 0, \quad (708)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 346. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 509 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 566. Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 510 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 347. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 780. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 348. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 511 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 567. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

- a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*
- b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 512 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 349. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 781. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 350. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 513 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 782. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 568. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 569. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 570. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S , espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 783. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 571. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 514 (Procesos Regenerativos). *Suponga que el proceso*

Definición 784 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t , que es el tiempo desde la última renovación para t .
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t , residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t .
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t .

Nota 572. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n , y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MARKOV a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados \mathbb{R}_+ . Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \quad (709)$$

Ejemplo 24 (Tiempos de recurrencia Poisson). Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ , entonces de la expresión (4.80) se tiene que

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 573. Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 785. Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k$ y $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \dots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \dots, X(s_k)).$$

Nota 574. Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en \mathbb{R}_+ , con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$.

Proposición 351. Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 515. Los siguientes enunciados son equivalentes

- i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.
- ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.
- iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,
- iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - F(s)] ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 575. Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.

Corolario 239. El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renovación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.

Nota 576. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 577. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 786 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Definición 787. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 578. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 788. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 579. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 580. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 789 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}, \}$
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 581. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 790. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 582. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 791. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 792. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 793. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 516. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 794. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 795. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 796. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 517. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

0.139 Procesos Regenerativos

0.140 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [81]

Definición 797 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 583. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1 , implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos R_1, R_2, \dots , que satisfacen la propiedad deseada [127].*

Nota 584. *Para la cola GI/GI/1 los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n , los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) $T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son i.i.d. e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 798. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 585. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X .*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 586. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 587. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 588. a) *Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) *Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞*

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 799. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 800. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 801. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 518. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 240. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 802. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t]$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (710)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 803. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 589. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Nota 590. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 519 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 352. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 804. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 353. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 520 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 354. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 591. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 521. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (711)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (712)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 241 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (713)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 805. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la *fluctuación máxima* de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 522. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (714)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (715)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 242. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (716)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 355. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 592. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 523. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (717)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (718)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 243 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (719)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 806. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 524. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (720)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (721)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 244. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (722)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 356. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 593. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 525. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (723)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (724)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 245 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (725)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 807. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 526. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (726)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (727)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 246. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (728)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 357. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 594. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 527. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (729)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (730)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números si y sólo si $N(t)$ la cumple.

Corolario 247 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (731)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 808. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la *fluctuación máxima* de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 528. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (732)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (733)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 248. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (734)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 358. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 595. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 529. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (735)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (736)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo si $N(t)/t$ la cumple.

Corolario 249 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (737)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 809. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 530. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (738)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (739)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 250. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (740)$$

Definición 810. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (741)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 359. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 531 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 811. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 360. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 812. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 361. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 596. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 532. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 251 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 813. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (742)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 814. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 597. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

0.141 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]

Definición 815. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (743)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 816. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 598. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 362. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Ejemplo 25 (Proceso Poisson). Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ con tasa λ . Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ .

Nota 599. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 533. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (744)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (745)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 252 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (746)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 817. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 534. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (747)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (748)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 253. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (749)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 818. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 363. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 819. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 364. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 600. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 535. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 254 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 820. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (750)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 365. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 536 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 821. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 366. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 822. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 367. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 601. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 537. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 255 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 823. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (751)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 368. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 538 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 602. Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 539 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 369. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \quad \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 824. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \quad \text{para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 370. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \quad \text{donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 540 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 603. Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 541 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 371. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 825. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 372. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 542 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 826. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n]$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 604. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 605. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Nota 606. Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S , espacio métrico.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 827. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n]$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 607. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Teorema 543 (Procesos Regenerativos). Suponga que el proceso

Definición 828 (Renewal Process Trinity). Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t , que es el tiempo desde la última renovación para t .
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t , residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t .
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t .

Nota 608. El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n , y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de Markov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados \mathbb{R}_+ . Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \quad (752)$$

Ejemplo 26 (Tiempos de recurrencia Poisson). Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ , entonces de la expresión (4.80) se tiene que

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 609. Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 829. Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k$ y $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \dots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \dots, X(s_k)).$$

Nota 610. Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considere el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en \mathbb{R}_+ , con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$.

Proposición 373. Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 544. Los siguientes enunciados son equivalentes

- i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.
- ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.
- iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,
- iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - F(s)] ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 611. Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.

Corolario 256. El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renovación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.

Nota 612. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f: \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 613. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 830 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Definición 831. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 614. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

- b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 832. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectorias muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamente distribuidos.

Nota 615. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f: \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 616. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 833 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 617. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 834. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 618. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (puntos de regeneración) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado primer ciclo de regeneración de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el segundo ciclo de regeneración, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 835. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 836. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 837. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 545. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

1 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [81]

Definición 838 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 619. La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1 , implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos R_1, R_2, \dots , que satisfacen la propiedad deseada [127].

Nota 620. Para la cola GI/GI/1 los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n , los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) $T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son i.i.d. e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.

Definición 839. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E} [R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 621. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X .*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 622. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 623. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 624. a) *Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) *Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞*

Definición 840. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (753)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 841. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 625. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

1.1 Teorema Principal de Renovación

Nota 626. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

- a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*
- b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 546 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 374. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 842. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 375. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 547 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

1.2 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 376. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 627. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 548. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (754)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (755)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 257 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (756)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 843. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 549. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (757)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (758)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 258. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (759)$$

1.3 Función de Renovación

Definición 844. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (760)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 377. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 550 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

1.4 Procesos de Renovación

Definición 845. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (761)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 846. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 628. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

1.5 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[122]

Definición 847. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (762)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 848. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 629. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 378. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Ejemplo 27 (Proceso Poisson). Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ con tasa λ . Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ .

Nota 630. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 551. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (763)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (764)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo si $N(t)$ la cumple.

Corolario 259 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (765)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 849. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 552. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (766)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (767)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 260. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (768)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 850. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 379. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 851. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 380. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 631. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 553. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 261 (Identidad de Wald para Renovaciones). *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E} [T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E} [N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 852. *Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (769)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 381. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).*

Teorema 554 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 853. *La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.*

Proposición 382. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 854. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 383. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 632. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 555. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 262 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 855. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (770)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 384. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 556 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 633. Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 557 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 385. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 856. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 386. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 558 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 634. Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 559 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 387. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 857. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 388. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 560 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 858. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n]$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 635. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 636. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Nota 637. Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S , espacio métrico.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 859. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n]$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 638. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Teorema 561 (Procesos Regenerativos). Suponga que el proceso

Definición 860 (Renewal Process Trinity). Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t , que es el tiempo desde la última renovación para t .
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t , residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t .
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t .

Nota 639. El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n , y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de Markov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados \mathbb{R}_+ . Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \quad (771)$$

Ejemplo 28 (Tiempos de recurrencia Poisson). Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ , entonces de la expresión (4.80) se tiene que

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 640. Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 861. Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k$ y $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \dots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \dots, X(s_k)).$$

Nota 641. Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considere el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en \mathbb{R}_+ , con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$.

Proposición 389. Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 562. Los siguientes enunciados son equivalentes

- El proceso retardado de renovación N es estacionario.
- EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.
- $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,
- $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - F(s)] ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 642. Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.

Corolario 263. El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renovación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.

1.6 Procesos Regenerativos

Nota 643. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f: \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 644. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 862 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Definición 863. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 645. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

1.7 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 864. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectorias muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamente distribuidos.

Nota 646. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f: \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 647. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 865 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 648. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 866. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y definan los tiempos promedio

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 649. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

1.8 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 867. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 868. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 869. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 563. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

1.9 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (puntos de regeneración) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 870. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 871. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 872. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 564. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

1.10 Procesos Regenerativos

1.11 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [81]

Definición 873 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 650. La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1 , implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos R_1, R_2, \dots , que satisfacen la propiedad deseada [127].

Nota 651. Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n , los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) $T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son i.i.d. e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.

Definición 874. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t) dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 652. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X .*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 653. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 654. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 655. a) *Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) *Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞*

1.12 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 875. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 876. *Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 877. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 565. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) *Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 264. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E} \int_0^X V(s) ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

1.13 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [128]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 878. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 879. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 880. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 566. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 265. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E} \int_0^X V(s) ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

1.14 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in X$, sea $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t , $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t , que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k . Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t , que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k -ésima.

Supóngase que la función $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}_m(\cdot), \bar{T}_m^0(\cdot))$ para $m = 1, 2, \dots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t) \right) \quad (772)$$

para $m = 1, 2, \dots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$. Entonces $(\bar{Q}(t), \bar{T}_m(t), \bar{T}_m^0(t))$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^M \mu_k \bar{T}_{m,k}(t) \quad (773)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$.

$$\bar{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, K, \quad (774)$$

$$\bar{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \bar{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \quad (775)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$,

$$\sum_{k=1}^K \bar{T}_{m,k}^0(t) + \bar{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \dots, M. \quad (776)$$

De acuerdo a Dai [94], se tiene que el conjunto de posibles límites $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot), \bar{T}^0(\cdot))$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (3.348)-(3.351), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 881 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ en (3.347) es un flujo límite de la disciplina. Cualquier solución (3.348)-(3.351) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\bar{Q}(0)| + |\bar{U}| + |\bar{V}| = 1$, se tiene que $\bar{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Al conjunto de ecuaciones dadas en 3.348-3.351 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ se le denotará por \mathcal{Q} .

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 567 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \quad (777)$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\bar{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado \bar{Q}^x es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 882 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 1 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 3.348-3.351 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial \bar{x} satisface que $|\bar{x}| = |\bar{Q}(0)| + |\bar{A}(0)| + |\bar{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 568 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) *Para alguna constante κ_p , y para cada condición inicial $x \in X$*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p, \quad (778)$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) *Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [Q_k(t)^r] = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r] \leq \kappa_r, \quad (779)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para \mathbf{X} .

iii) *El primer momento converge con razón t^{p-1} :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q_k(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)]| = 0. \quad (780)$$

iv) *La Ley Fuerte de los grandes números se cumple:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s) ds = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r], \quad \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \quad (781)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 569 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + \max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js} \bar{N}_s} \right) \delta^* \quad (782)$$

i) *Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 832.*

ii) *Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 830*

Teorema 570. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots)$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribución inicial P_0 y probabilidad de transición p_{mn} , para $m, n = 0, 1, \dots, m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ -álgebra \mathcal{F}_n . Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \quad (783)$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea \mathcal{E} la clase de conjuntos medibles en E :

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde \mathcal{M} son los conjuntos de Borel de M_v . Entonces (E, \mathcal{E}) es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de (\mathbf{x}_t) está determinada por los siguientes objetos:

- i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.
- ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.
- iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \quad (784)$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_v(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \quad (785)$$

∂M_v denota la frontera de M_v .

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H}f(\zeta_t), \quad (786)$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y \mathcal{H} denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que \mathcal{H}_v es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = \inf \{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ , se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de \mathbf{x} para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en (E, \mathcal{E}) para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso (\mathbf{x}_t) comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (787)$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribución $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de (\mathbf{x}_t) para $t \leq T_1$ es⁶

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, Z), & t = T_1. \end{cases}$$

Comenzando en \mathbf{x}_{T_1} se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto \mathbf{x}_{T_2} de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes \mathbf{x}_t con tiempos de salto T_1, T_2, \dots . Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i , con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

⁶Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

Supuestos 1 (Supuesto 3.1, Davis [98]). Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \quad (788)$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 883. Un espacio topológico E es llamado de Radón si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 884. E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada, tight.

Definición 885. Una medida finita, λ en la σ -álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si

$$\lambda(E) = \sup \{ \lambda(K) : K \text{ es compacto en } E \}. \quad (789)$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 571. Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ -álgebra de Borel en E , que se denotará por \mathcal{E} .

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ -álgebra natural definida como $\sigma \{ f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E} \}$. Se considerará una σ -álgebra más general, (\mathcal{G}_t) tal que (X_t) sea \mathcal{E} -adaptado.

Definición 886. Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en (E, \mathcal{E}) , si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}^7$

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B). \quad (790)$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en (E, \mathcal{E}) es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov⁸ (3.309) relativa a (\mathcal{G}_t) si

$$\mathbb{P} \{ f(X_t) | \mathcal{G}_s \} = P_{s,t} f(X_t) \quad s \leq t \in I, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (792)$$

Definición 887. Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) es llamada Semigrupo de Transición de Markov o Semigrupo de Transición si

$$P_{t+s} f(x) = P_t (P_s f)(x), \quad t, s \geq 0, \quad x \in E \quad f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 656. Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (3.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P} \{ f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t \} = P_s f(X_t) \quad t, s \geq 0, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (793)$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t) .

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (3.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t) .

⁷Ecuación de Chapman-Kolmogorov

⁸

$$\mathbb{P} \{ H | \mathcal{G}_t \} = \mathbb{P} \{ H | X_t \} \quad H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \quad (791)$$

Definición 888. Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E .

Definición 889 (HD1). Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición HD1 si, dada una medida de probabilidad μ en E , existe una σ -álgebra \mathcal{E}^* con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un \mathcal{E}^* -proceso E -valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ .

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas \mathbf{P}^x tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y bajo cualquier \mathbf{P}^x , X_t es de Markov con semigrupo (P_t) . \mathbf{P}^x puede considerarse como la distribución condicional de \mathbf{P} dado $X_0 = x$.

Definición 890. Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en (E, \mathcal{E}) . La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso \mathcal{E} -Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que \mathbf{X} satisfaga las siguientes condiciones:

- i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E -valuado continuo por la derecha \mathcal{E}^* -adaptado a (\mathcal{G}_t) ;
- ii) $(\theta_t)_{t \geq 0}$ es una colección de operadores shift para X , es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \quad (794)$$

- iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t \in I}$ tiene la propiedad de Markov (3.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 891 (HD2). Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.

Definición 892. Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:

- i) \mathbf{X} es una realización continua por la derecha, 1198, de (P_t) .
- ii) \mathbf{X} satisface la condición HD2, 1199, relativa a \mathcal{G}_t .
- iii) \mathcal{G}_t es aumentado y continuo por la derecha.

Lema 1 (Lema 4.2, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k(|x_n|t) \rightarrow P'_k t, \text{ u.o.c.,} \quad (795)$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k(t - \bar{U}_k)^+, \text{ u.o.c.,} \quad (796)$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k(t - \bar{V}_k)^+, \text{ u.o.c.,} \quad (797)$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 2 (Lema 4.3, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}_k$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{U}_k - t)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{V}_k - t)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

y

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l , si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t . Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t . Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k .

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \quad (798)$$

para $k = 1, \dots, K$. Para $i = 1, \dots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t . Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i . Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \quad (799)$$

para $i = 1, \dots, d$.

Hacer

$$\begin{aligned} T^x(t) &= (T_1^x(t), \dots, T_K^x(t))', \\ I^x(t) &= (I_1^x(t), \dots, I_K^x(t))' \end{aligned}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \dots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \quad (800)$$

$$Q^x(t) \geq 0, \quad (801)$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \bar{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \quad (802)$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \quad (803)$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t)) dI_t^x(t) = 0, \quad (804)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}^x(\cdot), \bar{T}^x(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (805)$$

donde e es un vector de unos de dimensión d , C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 831:

Teorema 572 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \rightarrow \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \rightarrow \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)) \rightarrow (\bar{Q}(0), \bar{U}, \bar{V}), \quad (806)$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t), T^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t)) \rightarrow (\bar{Q}(t), \bar{T}(t)) \text{ u.o.c.} \quad (807)$$

Además, $(\bar{Q}(t), \bar{T}(t))$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\bar{Q}(t) = Q(0) + (\alpha t - \bar{U})^+ - (I - P)' M^{-1} (\bar{T}(t) - \bar{V})^+, \quad (808)$$

$$\bar{Q}(t) \geq 0, \quad (809)$$

$$\bar{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \quad (810)$$

$$\bar{I}(t) = et - C\bar{T}(t) \text{ es no decreciente,} \quad (811)$$

$$\int_0^\infty (C\bar{Q}(t)) d\bar{I}(t) = 0, \quad (812)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (813)$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 390. *Sea $(\bar{Q}, \bar{T}, \bar{T}^0)$ un flujo límite de 3.197 y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0) \right) \rightarrow (\bar{Q}_k(0), 0, 0, 0)$$

para $k = 1, \dots, K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\bar{T}(t)$ y $\bar{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\bar{T}(0) = \bar{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K [\bar{T}_k(t) + \bar{T}_k^0(t)] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\bar{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\bar{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \bar{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \bar{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\bar{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\bar{T}}_k^0(t)$$

para $\bar{Q}_k(t) > 0$.

Lema 3 (Lema 3.1 [91]). Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.

Teorema 573 (Teorema 5.1 [91]). La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.

Lema 4 (Lema 5.2 [106]). Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo

$$E(t) = \max \{n \geq 1 : \xi(1) + \dots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]} \right)^r \quad (814)$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 574 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E} \left[\frac{N(t)}{t} \right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$.

Proposición 391 (Proposición 5.1 [95]). Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0. \quad (815)$$

Proposición 392 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p) dt \right] \leq C_{p+1} (1 + |x|^{p+1}) \quad (816)$$

Proposición 393 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X , sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C , entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s)) ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \quad (817)$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 575 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (818)$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \quad (819)$$

Teorema 576 (Teorema 6.2 [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\| P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \|_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 577 (Teorema 6.3 [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)} |P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot)|_{f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)} |\mathbb{E}_x [Q_t] - \mathbb{E}_\pi [Q_0]| = 0.$$

Proposición 394 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0 \quad (820)$$

Lema 2 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = \max(n \geq 1 : \zeta(1) + \dots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \quad (821)$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 578 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (822)$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 579 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{f_p}, t \rightarrow \infty, x \in X. \quad (823)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 580 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} \|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0. \quad (824)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q(0)]| = 0.$$

Teorema 581 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en (X, \mathcal{B}_X) , y π la distribución estacionaria de X .*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds = \pi(f) := \int f(x) \pi(dx) \quad (825)$$

\mathbb{P} -c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 582 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, T \geq 0, \quad (826)$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{X \rightarrow \infty\} \geq q. \quad (827)$$

Definición 893. Sea X un conjunto y \mathcal{F} una σ -álgebra de subconjuntos de X , la pareja (X, \mathcal{F}) es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a \mathcal{F} , si $A \in \mathcal{F}$.

Definición 894. Sea (X, \mathcal{F}, μ) espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ -finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.

Definición 895. Sea X el conjunto de los números reales \mathbb{R} . El álgebra de Borel es la σ -álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado Conjunto de Borel.

Definición 896. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a \mathcal{F} . Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 897. Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \dots$, espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \dots)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \dots$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^n \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama cilindro con base B^n , el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i$.

Definición 898. [TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ -álgebras \mathcal{F}_t , para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es \mathcal{F}_t -medible para cada t . Si no se especifica \mathcal{F}_t entonces se toma \mathcal{F}_t como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ -álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.

Definición 899. [TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ -álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ -álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.

Definición 900. Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$ -medible,

Definición 901. Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \quad (828)$$

Nota 657. Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (3.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \quad (829)$$

1.15 Procesos de Estados de Markov

Teorema 583. Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots)$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribución inicial P_0 y probabilidad de transición p_{mn} , para $m, n = 0, 1, \dots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ -álgebra \mathcal{F}_n . Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \quad (830)$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea \mathcal{E} la clase de conjuntos medibles en E :

$$\mathcal{E} = \left\{ \bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v \right\}.$$

donde \mathcal{M} son los conjuntos de Borel de M_v . Entonces (E, \mathcal{E}) es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de (\mathbf{x}_t) está determinada por los siguientes objetos:

- i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.
- ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.
- iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \quad (831)$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_v(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \quad (832)$$

∂M_v denota la frontera de M_v .

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H}f(\zeta_t), \quad (833)$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y \mathcal{H} denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que \mathcal{H}_v es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = \inf \{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ , se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon]$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de \mathbf{x} para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en (E, \mathcal{E}) para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso (\mathbf{x}_t) comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (834)$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribución $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de (\mathbf{x}_t) para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = T_1. \end{cases}$$

Comenzando en \mathbf{x}_{T_1} se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto \mathbf{x}_{T_2} de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes \mathbf{x}_t con tiempos de salto T_1, T_2, \dots . Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i , con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 2 (Supuesto 3.1, Davis [98]). Sea $N_t := \sum_{i=1}^t \mathbb{1}_{\{t_i \geq t\}}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \quad (835)$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov⁹ se cumple para cualquier tiempo de paro.

⁹Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

1.16 Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 902. Una medida finita, λ en la σ -álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si

$$\lambda(E) = \sup \{ \lambda(K) : K \text{ es compacto en } E \}. \quad (836)$$

Definición 903. E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada, tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 584. Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.

1.17 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ -álgebra de Borel en E , que se denotará por \mathcal{E} .

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ -álgebra natural definida como $\sigma \{ f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E} \}$. Se considerará una σ -álgebra más general¹⁰, (\mathcal{G}_t) tal que (X_t) sea \mathcal{E} -adaptado.

Definición 904. Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en (E, \mathcal{E}) , si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B) \quad (837)$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en (E, \mathcal{E}) es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov¹² (3.309) relativa a (\mathcal{G}_t) si

$$\mathbb{P} \{ f(X_t) | \mathcal{G}_s \} = P_{s,t} f(X_t) \quad s \leq t \in I, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (839)$$

Definición 905. Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) es llamada Semigrupo de Transición de Markov o Semigrupo de Transición si

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \quad t, s \geq 0, \quad x \in E \quad f \in b\mathcal{E}^{13}.$$

Nota 658. Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (3.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P} \{ f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t \} = P_s f(X_t) \quad t, s \geq 0, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (840)$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t) .

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (3.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t) .

¹⁰qué se quiere decir con el término: más general?

¹¹Ecuación de Chapman-Kolmogorov

¹²

$$\mathbb{P} \{ H | \mathcal{G}_t \} = \mathbb{P} \{ H | X_t \} \quad H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \quad (838)$$

¹³Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

1.18 Primer Condición de Regularidad

Definición 906. Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E .

Definición 907 (HD1). Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición HD1 si, dada una medida de probabilidad μ en E , existe una σ -álgebra \mathcal{E}^* con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un \mathcal{E}^* -proceso E -valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ .

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas \mathbf{P}^x tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier \mathbf{P}^x , X_t es de Markov con semigrupo (P_t) . \mathbf{P}^x puede considerarse como la distribución condicional de \mathbf{P} dado $X_0 = x$.

Definición 908. Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en (E, \mathcal{E}) . La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso \mathcal{E} -Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que \mathbf{X} satisfaga las siguientes condiciones:

- i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E -valuado continuo por la derecha \mathcal{E}^* -adaptado a (\mathcal{G}_t) ;
- ii) $(\theta_t)_{t \geq 0}$ es una colección de operadores shift para X , es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \quad (841)$$

- iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t \in I}$ tiene la propiedad de Markov (3.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 909 (HD2). Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.

Definición 910. Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:

- i) \mathbf{X} es una realización continua por la derecha, 1198, de (P_t) .
- ii) \mathbf{X} satisface la condición HD2, 1199, relativa a \mathcal{G}_t .
- iii) \mathcal{G}_t es aumentado y continuo por la derecha.

1.19 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 5 (Lema 4.2, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k(|x_n|t) \rightarrow P'_k t, \text{ u.o.c.,} \quad (842)$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k(t - \bar{U}_k)^+, \text{ u.o.c.,} \quad (843)$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k(t - \bar{V}_k)^+, \text{ u.o.c.,} \quad (844)$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 6 (Lema 4.3, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U_k(0) = \bar{U}_k$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V_k(0) = \bar{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{U}_k - t)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{V}_k - t)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

y

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x(t)$ el número total de servicios completados de la clase l , si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t . Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t . Una fracción de estos usuarios, $\Phi_k^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k .

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \quad (845)$$

para $k = 1, \dots, K$. Para $i = 1, \dots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t . Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i . Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \quad (846)$$

para $i = 1, \dots, d$.

Hacer

$$\begin{aligned} T^x(t) &= (T_1^x(t), \dots, T_K^x(t))', \\ I^x(t) &= (I_1^x(t), \dots, I_K^x(t))' \end{aligned}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \dots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \quad (847)$$

$$Q^x(t) \geq 0, \quad (848)$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \bar{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \quad (849)$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \quad (850)$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t)) dI_t^x(t) = 0, \quad (851)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}^x(\cdot), \bar{T}^x(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (852)$$

donde e es un vector de unos de dimensión d , C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 831:

Teorema 585 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \rightarrow \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \rightarrow \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)) \rightarrow (\bar{Q}(0), \bar{U}, \bar{V}), \quad (853)$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t), T^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t)) \rightarrow (\bar{Q}(t), \bar{T}(t)) \text{ u.o.c.} \quad (854)$$

Además, $(\bar{Q}(t), \bar{T}(t))$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\bar{Q}(t) = Q(0) + (\alpha t - \bar{U})^+ - (I - P)' M^{-1} (\bar{T}(t) - \bar{V})^+, \quad (855)$$

$$\bar{Q}(t) \geq 0, \quad (856)$$

$$\bar{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \quad (857)$$

$$\bar{I}(t) = et - C\bar{T}(t) \text{ es no decreciente,} \quad (858)$$

$$\int_0^\infty (C\bar{Q}(t)) d\bar{I}(t) = 0, \quad (859)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (860)$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 395. *Sea $(\bar{Q}, \bar{T}, \bar{T}^0)$ un flujo límite de 3.197 y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0) \right) \rightarrow (\bar{Q}_k(0), 0, 0, 0)$$

para $k = 1, \dots, K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\bar{T}(t)$ y $\bar{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\bar{T}(0) = \bar{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K [\bar{T}_k(t) + \bar{T}_k^0(t)] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\bar{T}}_k(t) = \beta_k$$

$$\text{para } \bar{Q}_k(t) = 0.$$

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \bar{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \bar{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\bar{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\bar{T}}_k^0(t)$$

$$\text{para } \bar{Q}_k(t) > 0.$$

Teorema 586 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces

$$a) \frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu} \text{ a.s., cuando } t \rightarrow \infty.$$

$$b) \mathbb{E} \left[\frac{N(t)}{t} \right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}, \text{ cuando } t \rightarrow \infty \text{ para todo } r > 0..$$

Proposición 396 (Proposición 5.3 [95]). Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p) dt \right] \leq C_{p+1} (1 + |x|^{p+1}) \quad (861)$$

Proposición 397 (Proposición 5.4 [95]). Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X , sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C , entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))] ds \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \quad (862)$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

1.20 Estabilidad

Definición 911 (Definición 3.2, Dai y Meyn [95]). El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $(\bar{A}(0), \bar{B}(0)) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 3.216-3.182, junto con la condición:

$$\bar{Q}(t) = \bar{Q}(0) + (\alpha t - \bar{A}(0))^+ - (I - P') M (\bar{T}(t) - \bar{B}(0))^+ \quad (863)$$

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 912 (Definición 3.1, Dai y Meyn [95]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ de las siguientes ecuaciones, donde $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_1(t), \dots, \bar{Q}_K(t))'$ y $\bar{T}(t) = (\bar{T}_1(t), \dots, \bar{T}_K(t))'$*

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t) + \sum_{l=1}^k P_{lk} \mu_l \bar{T}_l(t) \quad (864)$$

$$\bar{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, K, \quad (865)$$

$$\bar{T}_k(0) = 0, \text{ y } \bar{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente,} \quad (866)$$

$$\bar{T}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \bar{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \quad (867)$$

$$\bar{T}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) dI_i^x(t) = 0 \quad (868)$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } (Q^x(\cdot), T^x(\cdot)) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \quad (869)$$

Lema 7 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 587 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Proposición 398 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0 \quad (870)$$

Lema 3 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = \max(n \geq 1 : \zeta(1) + \dots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \quad (871)$$

Luego, bajo estas condiciones:

$$a) \text{ para cualquier } \delta > 0, \sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] < \infty$$

$$b) \text{ las variables aleatorias } \left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\} \text{ son uniformemente integrables.}$$

Teorema 588 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (872)$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 589 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{f_p}, t \rightarrow \infty, x \in X. \quad (873)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 590 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} \|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0. \quad (874)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 591 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en (X, \mathcal{B}_X) , y π la distribución estacionaria de X .*

i) *Para cualquier $f: X \leftarrow \mathbb{R}_+$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds = \pi(f) := \int f(x) \pi(dx) \quad (875)$$

\mathbb{P} -c.s.

ii) *Para cualquier $f: X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.*

Teorema 592 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \quad T \geq 0, \quad (876)$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \quad (877)$$

Definición 913. *Sea X un conjunto y \mathcal{F} una σ -álgebra de subconjuntos de X , la pareja (X, \mathcal{F}) es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a \mathcal{F} , si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 914. *Sea (X, \mathcal{F}, μ) espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ -finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 915. *Sea X el conjunto de los números reales \mathbb{R} . El álgebra de Borel es la σ -álgebra \mathcal{B} generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en \mathcal{B} es llamado Conjunto de Borel.*

Definición 916. *Una función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a \mathcal{F} . Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 917. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \dots$, espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \dots)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \dots$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^n \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama cilindro con base B^n , el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i$.*

Definición 918. [TSP, Ash [?]] *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ -álgebras \mathcal{F}_t , para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es \mathcal{F}_t -medible para cada t . Si no se especifica \mathcal{F}_t entonces se toma \mathcal{F}_t como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ -álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 919. [TSP, Ash [?]] *Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ -álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ -álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 920. Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$ -medible,

Definición 921. Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \quad (878)$$

Nota 659. Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (3.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \quad (879)$$

Teorema 593. Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots)$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribución inicial P_0 y probabilidad de transición p_{mn} , para $m, n = 0, 1, \dots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ -álgebra \mathcal{F}_n . Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \quad (880)$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea \mathcal{E} la clase de conjuntos medibles en E :

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde \mathcal{M} son los conjuntos de Borel de M_v . Entonces (E, \mathcal{E}) es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de (\mathbf{x}_t) está determinada por los siguientes objetos:

- i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.
- ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.
- iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \quad (881)$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_v(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \quad (882)$$

∂M_v denota la frontera de M_v .

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H}f(\zeta_t), \quad (883)$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y \mathcal{H} denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que \mathcal{H}_v es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = \inf \{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ , se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de \mathbf{x} para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en (E, \mathcal{E}) para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso (\mathbf{x}_t) comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (884)$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribución $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de (\mathbf{x}_t) para $t \leq T_1$ es¹⁴

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = T_1. \end{cases}$$

Comenzando en \mathbf{x}_{T_1} se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto \mathbf{x}_{T_2} de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes \mathbf{x}_t con tiempos de salto T_1, T_2, \dots . Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i , con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 3 (Supuesto 3.1, Davis [98]). Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \quad (885)$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 922. Un espacio topológico E es llamado Luisin si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.

Definición 923. Un espacio topológico E es llamado de Radón si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 924. E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada, tight.

Definición 925. Una medida finita, λ en la σ -álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si

$$\lambda(E) = \sup \{ \lambda(K) : K \text{ es compacto en } E \}. \quad (886)$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 594. Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.

1.21 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ -álgebra de Borel en E , que se denotará por \mathcal{E} .

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ -álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ -álgebra más general, (\mathcal{G}_t) tal que (X_t) sea \mathcal{E} -adaptado.

Definición 926. Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en (E, \mathcal{E}) , si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B) \quad (887)$$

¹⁴Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

¹⁵Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en (E, \mathcal{E}) es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov¹⁶ (3.309) relativa a (\mathcal{G}_t) si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t) \quad s \leq t \in I, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (889)$$

Definición 927. Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) es llamada Semigrupo de Transición de Markov o Semigrupo de Transición si

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_sf)(x), \quad t, s \geq 0, \quad x \in E \quad f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 660. Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (3.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_sf(X_t) \quad t, s \geq 0, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (890)$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t) .

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (3.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t) .

1.22 Primer Condición de Regularidad

Definición 928. Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E .

Definición 929 (HD1). Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición HD1 si, dada una medida de probabilidad μ en E , existe una σ -álgebra \mathcal{E}^* con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un \mathcal{E}^* -proceso E -valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ .

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas \mathbf{P}^x tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y bajo cualquier \mathbf{P}^x , X_t es de Markov con semigrupo (P_t) . \mathbf{P}^x puede considerarse como la distribución condicional de \mathbf{P} dado $X_0 = x$.

Definición 930. Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en (E, \mathcal{E}) . La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso \mathcal{E} -Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que \mathbf{X} satisfaga las siguientes condiciones:

- i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E -valuado continuo por la derecha \mathcal{E}^* -adaptado a (\mathcal{G}_t) ;
- ii) $(\theta_t)_{t \geq 0}$ es una colección de operadores shift para X , es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \quad \text{y} \quad X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \quad (891)$$

- iii) Para cualquier $x \in E$, $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t \in I}$ tiene la propiedad de Markov (3.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 931 (HD2). Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.

Definición 932. Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \quad H \in \mathcal{F}_{\geq t}. \quad (888)$$

i) \mathbf{X} es una realización continua por la derecha, 1198, de (P_t) .

ii) \mathbf{X} satisface la condición HD2, 1199, relativa a \mathcal{G}_t .

iii) \mathcal{G}_t es aumentado y continuo por la derecha.

Lema 8 (Lema 4.2, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k(|x_n|t) \rightarrow P'_k t, \text{ u.o.c.}, \quad (892)$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k (t - \bar{U}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (893)$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k (t - \bar{V}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (894)$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 9 (Lema 4.3, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}_k$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{U}_k - t)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{V}_k - t)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

y

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l , si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t . Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t . Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k .

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \quad (895)$$

para $k = 1, \dots, K$. Para $i = 1, \dots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_j^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t . Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i . Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \quad (896)$$

para $i = 1, \dots, d$.

Hacer

$$\begin{aligned} T^x(t) &= (T_1^x(t), \dots, T_K^x(t))', \\ I^x(t) &= (I_1^x(t), \dots, I_K^x(t))' \end{aligned}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \dots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \quad (897)$$

$$Q^x(t) \geq 0, \quad (898)$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \bar{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \quad (899)$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \quad (900)$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t)) dI_i^x(t) = 0, \quad (901)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}^x(\cdot), \bar{T}^x(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (902)$$

donde e es un vector de unos de dimensión d , C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 831:

Teorema 595 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \rightarrow \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \rightarrow \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)) \rightarrow (\bar{Q}(0), \bar{U}, \bar{V}), \quad (903)$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t), T^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t)) \rightarrow (\bar{Q}(t), \bar{T}(t)) \text{ u.o.c.} \quad (904)$$

Además, $(\bar{Q}(t), \bar{T}(t))$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\bar{Q}(t) = Q(0) + (\alpha t - \bar{U})^+ - (I - P)' M^{-1} (\bar{T}(t) - \bar{V})^+, \quad (905)$$

$$\bar{Q}(t) \geq 0, \quad (906)$$

$$\bar{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero}, \quad (907)$$

$$\bar{I}(t) = et - C\bar{T}(t) \text{ es no decreciente}, \quad (908)$$

$$\int_0^\infty (C\bar{Q}(t)) d\bar{I}(t) = 0, \quad (909)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \quad (910)$$

Definición 933 (Definición 4.1, , Dai [94]). Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ en 3.325 es un flujo límite de la disciplina. Cualquier solución (3.326)-(3.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\bar{Q}(0)| + |\bar{U}| + |\bar{V}| = 1$, se tiene que $\bar{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Teorema 596 (Teorema 4.2, Dai[94]). Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \quad (911)$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\bar{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|x| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado \bar{Q}^x es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 3.216-3.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ se le denotará por \mathcal{Q} .

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 934 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 4 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). Si el modelo de flujo definido por 3.216-3.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial \bar{x} satisface que $|\bar{x}| = |\bar{Q}(0)| + |\bar{A}(0)| + |\bar{B}(0)| \leq 1$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 399. Sea $(\bar{Q}, \bar{T}, \bar{T}^0)$ un flujo límite de 3.197 y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0) \right) \rightarrow (\bar{Q}_k(0), 0, 0, 0)$$

para $k = 1, \dots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\bar{T}(t)$ y $\bar{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\bar{T}(0) = \bar{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K [\bar{T}_k(t) + \bar{T}_k^0(t)] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\bar{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\bar{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \bar{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \bar{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\bar{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\bar{T}}_k^0(t)$$

para $\bar{Q}_k(t) > 0$.

Lema 10 (Lema 3.1 [91]). Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambien es estable.

Teorema 597 (Teorema 5.2 [91]). Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.

Teorema 598 (Teorema 5.1 [91]). La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.

Lema 11 (Lema 5.2 [106]). Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo

$$E(t) = \max \{n \geq 1 : \xi(1) + \dots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]} \right)^r \quad (912)$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 599 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E} \left[\frac{N(t)}{t} \right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$.

Proposición 400 (Proposicin 5.1 [95]). Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adem s suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0. \quad (913)$$

Proposición 401 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p) dt \right] \leq C_{p+1} (1 + |x|^{p+1}) \quad (914)$$

Proposición 402 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X , sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C , entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s)) ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \quad (915)$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 600 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (916)$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \quad (917)$$

Teorema 601 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\| P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \|_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 602 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)|P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot)|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]| = 0}.$$

Proposición 403 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0 \quad (918)$$

Lema 5 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = \max(n \geq 1 : \zeta(1) + \dots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \quad (919)$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 603 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (920)$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 604 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{f_p}, \quad t \rightarrow \infty, x \in X. \quad (921)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 605 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} \|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0. \quad (922)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q(0)]| = 0.$$

Teorema 606 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en (X, \mathcal{B}_X) , y π la distribución estacionaria de X .*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds = \pi(f) := \int f(x) \pi(dx) \quad (923)$$

\mathbb{P} -c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 607 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \quad T \geq 0, \quad (924)$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{X \rightarrow \infty\} \geq q. \quad (925)$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k -ésima cola, son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k -ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$,
- la tasa de servicio para la k -ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$,
- también se define $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.

1.23 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X = \{X(t), t \geq 0\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [108].

1.23.1 Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [98]

.

1.24 Procesos Harris Recurrentes Positivos

Sea el proceso de Markov $X = \{X(t), t \geq 0\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] y Meyn y Down [118] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X , cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

1.25 Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X(t) = (Q(t), U(t), V(t)), \quad (926)$$

donde $Q(t)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U(t)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V(t)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U(t)$ como $V(t)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = (Q(0), U(0), V(0)) = (q, a, b)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde \mathcal{E} es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \dots, K$ se define

$$\begin{aligned} E_l^x(t) &= \max \{r : U_l(0) + \xi_l(1) + \dots + \xi_l(r-1) \leq t\} \quad t \geq 0, \\ S_k^x(t) &= \max \{r : V_k(0) + \eta_k(1) + \dots + \eta_k(r-1) \leq t\} \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^n \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n -ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s -ésima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro P'_k , donde P_k denota el k -ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \{\phi^k(n), n \geq 1\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \dots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 12 (Lema 4.2, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k(|x_n|t) \rightarrow P'_k t, \text{ u.o.c.}, \quad (927)$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k(t - \bar{U}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (928)$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k(t - \bar{V}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (929)$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 13 (Lema 4.3, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}_k$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{U}_k - t)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{V}_k - t)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

y

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l , si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t . Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t . Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k .

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = x_k(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \quad (930)$$

para $k = 1, \dots, K$. Para $i = 1, \dots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t . Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i . Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \quad (931)$$

para $i = 1, \dots, d$.

Hacer

$$\begin{aligned} T^x(t) &= (T_1^x(t), \dots, T_K^x(t))', \\ I^x(t) &= (I_1^x(t), \dots, I_K^x(t))' \end{aligned}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \dots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \quad (932)$$

$$Q^x(t) \geq 0, \quad (933)$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \quad (934)$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \quad (935)$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t)) dI_i^x(t) = 0, \quad (936)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (937)$$

donde e es un vector de unos de dimensión d , C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 831:

Teorema 608 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \rightarrow \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \rightarrow \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)) \rightarrow (\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}), \quad (938)$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t), T^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t)) \rightarrow (\overline{Q}(t), \overline{T}(t)) \text{ u.o.c.} \quad (939)$$

Además, $(\overline{Q}(t), \overline{T}(t))$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + (\alpha t - \overline{U})^+ - (I - P)' M^{-1} (\overline{T}(t) - \overline{V})^+, \quad (940)$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \quad (941)$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \quad (942)$$

$$\bar{I}(t) = et - C\bar{T}(t) \text{ es no decreciente,} \quad (943)$$

$$\int_0^\infty (C\bar{Q}(t)) d\bar{I}(t) = 0, \quad (944)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (945)$$

Definición 935 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ en 3.325 es un flujo límite de la disciplina. Cualquier solución (3.326)-(3.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\bar{Q}(0)| + |\bar{U}| + |\bar{V}| = 1$, se tiene que $\bar{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 609 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \quad (946)$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\bar{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado \bar{Q}^x es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 936 (Definición 3.1, Dai y Meyn [95]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ de las siguientes ecuaciones, donde $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_1(t), \dots, \bar{Q}_K(t))'$ y $\bar{T}(t) = (\bar{T}_1(t), \dots, \bar{T}_K(t))'$*

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t) + \sum_{l=1}^k P_{lk} \mu_l \bar{T}_l(t) \quad (947)$$

$$\bar{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, K, \quad (948)$$

$$\bar{T}_k(0) = 0, \text{ y } \bar{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente,} \quad (949)$$

$$\bar{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \bar{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \quad (950)$$

$$\bar{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) dI_i^x(t) = 0 \quad (951)$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } (Q^x(\cdot), T^x(\cdot)) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \quad (952)$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 3.216-3.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ se le denotará por \mathcal{Q} .

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 937 (Definición 3.2, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $(\bar{A}(0), \bar{B}(0)) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 3.216-3.182, junto con la condición:*

$$\bar{Q}(t) = \bar{Q}(0) + (\alpha t - \bar{A}(0))^+ - (I - P') M (\bar{T}(t) - \bar{B}(0))^+ \quad (953)$$

Definición 938 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 6 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 3.216-3.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial \bar{x} satisfice que $|\bar{x}| = |\bar{Q}(0)| + |\bar{A}(0)| + |\bar{B}(0)| \leq 1$.*

1.26 Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad

1.27 Teorema 2.1

El resultado principal de Down [99] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 610 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) *Para alguna constante κ_p , y para cada condición inicial $x \in X$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p, \quad (954)$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) *Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [Q_k(t)^r] = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r] \leq \kappa_r, \quad (955)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para \mathbf{X} .

iii) *El primer momento converge con razón t^{p-1} :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q_k(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)]| = 0. \quad (956)$$

iv) *La Ley Fuerte de los grandes números se cumple:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s) ds = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r], \quad \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \quad (957)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$.

Proposición 404 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0 \quad (958)$$

Lema 7 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = \max(n \geq 1 : \zeta(1) + \dots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \quad (959)$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) *para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] < \infty$*

b) *las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.*

Teorema 611 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (960)$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 612 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{f_p}, \quad t \rightarrow \infty, x \in X. \quad (961)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 613 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} \|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0. \quad (962)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q(0)]| = 0.$$

Teorema 614 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en (X, \mathcal{B}_X) , y π la distribución estacionaria de X .*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds = \pi(f) := \int f(x) \pi(dx) \quad (963)$$

\mathbb{P} -c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

1.28 Teorema 2.2

Teorema 615 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \quad T \geq 0, \quad (964)$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < \infty$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \quad (965)$$

1.29 Teorema 2.3

Teorema 616 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + \max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js} \bar{N}_s} \right) \delta^* \quad (966)$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 774.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 830

1.30 Definiciones Básicas

Definición 939. Sea X un conjunto y \mathcal{F} una σ -álgebra de subconjuntos de X , la pareja (X, \mathcal{F}) es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a \mathcal{F} , si $A \in \mathcal{F}$.

Definición 940. Sea (X, \mathcal{F}, μ) espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ -finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.

Definición 941. Sea X el conjunto de los números reales \mathbb{R} . El álgebra de Borel es la σ -álgebra \mathcal{B} generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en \mathcal{B} es llamado Conjunto de Borel.

Definición 942. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a \mathcal{F} . Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 943. Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \dots$, espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \dots)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \dots$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^n \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama cilindro con base B^n , el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i$.

Definición 944. [TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ -álgebras \mathcal{F}_t , para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es \mathcal{F}_t -medible para cada t . Si no se especifica \mathcal{F}_t entonces se toma \mathcal{F}_t como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ -álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.

Definición 945. [TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ -álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ -álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.

Definición 946. Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$ -medible,

Definición 947. Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \quad (967)$$

Nota 661. Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (3.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \quad (968)$$

Teorema 617. Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots)$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribución inicial P_0 y probabilidad de transición p_{mn} , para $m, n = 0, 1, \dots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ -álgebra \mathcal{F}_n . Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \quad (969)$$

en $\{T < \infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 405. Sea $(\bar{Q}, \bar{T}, \bar{T}^0)$ un flujo límite de ?? y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0) \right) \rightarrow (\bar{Q}_k(0), 0, 0, 0)$$

para $k = 1, \dots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\bar{T}(t)$ y $\bar{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\bar{T}(0) = \bar{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K [\bar{T}_k(t) + \bar{T}_k^0(t)] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\bar{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\bar{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \bar{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \bar{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\bar{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\bar{T}}_k^0(t)$$

para $\bar{Q}_k(t) > 0$.

Lema 14 (Lema 3.1 [91]). Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.

Teorema 618 (Teorema 5.2 [91]). Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.

Teorema 619 (Teorema 5.1 [91]). La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.

Lema 15 (Lema 5.2 [106]). Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo

$$E(t) = \max \{n \geq 1 : \xi(1) + \dots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]} \right)^r \quad (970)$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 620 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E} \left[\frac{N(t)}{t} \right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$.

Proposición 406 (Proposición 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0. \quad (971)$$

Proposición 407 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p) dt \right] \leq C_{p+1} (1 + |x|^{p+1}) \quad (972)$$

Proposición 408 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X , sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C , entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))] ds \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \quad (973)$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 621 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (974)$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \quad (975)$$

Teorema 622 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\| P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \|_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 623 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)} |P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot)|_{f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)} |\mathbb{E}_x [Q_t] - \mathbb{E}_\pi [Q_0]| = 0.$$

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s , única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

$$(S1.) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(x)] = \bar{N} > 0. \quad (976)$$

$$(S2.) \quad \mathbb{E}[N(x)] \leq \bar{N}, \quad (977)$$

para cualquier valor de x .

- La n -ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)] \geq 0$.
- Se define

$$\delta^* := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)]. \quad (978)$$

- Los tiempos de inter-arribo a la cola k , son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k -ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k -ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = (Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)) \quad (979)$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \quad (980)$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k , incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k -ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k .
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t)$, $B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([94])

- Los tiempos de interarribo a la cola k , son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k -ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k -ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

1.31 Preliminares

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s , única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(x)] = \bar{N} > 0$
- 2) $\mathbb{E}[N(x)] \leq \bar{N}$ para cualquier valor de x .

La manera en que atiende el servidor m -ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j , el servidor se cambia a la cola j' con probabilidad $r_{j,j'}^m = r_{j,j'}$
- La n -ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}[\delta_{j,j'}(1)] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $(r_{j,j'})$.
- Finalmente, se define

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}[\delta_{j,j'}(i)]. \quad (981)$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k -ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k , $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k ; para cada servidor m , se denota por $B_m(t)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t ; $B_m^0(t)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t , finalmente sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t .

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = (Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)) \quad (982)$$

para $k = 1, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

- A1) $\xi_1, \dots, \xi_K, \eta_1, \dots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.
- A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi_l(1)^{p+1}] &< \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y} \\ \mathbb{E}[\eta_k(1)^{p+1}] &< \infty \text{ para } k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

donde \mathcal{A} es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \dots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en \mathbb{R}_+ , y un entero j_k , tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \quad (983)$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x) dx, \quad 0 \leq a < b. \quad (984)$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto A2) para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X , cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición 1208.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de A3') es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

1.32 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [98], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (12), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([98], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [95]

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [123]) en el espacio de estados medible (X, \mathcal{B}_X) . El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en (Ω, \mathcal{F}) y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x -c.s. Donde τ es un \mathcal{F}_t -tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la σ -álgebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_X$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D)$$

Definición 948. Una medida no cero π en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_X)$ es **invariante** para X si π es σ -finita y

$$\pi(D) = \int_{\mathbf{X}} P^t(x, D) \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_X$, con $t \geq 0$.

Definición 949. El proceso de Markov X es llamado **Harris recurrente** si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_X)$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_X$

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 662. i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [105]).

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama *Proceso Harris recurrente positivo*.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot) \pi(dx)$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente.

Definición 950. Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ es llamado *pequeño* si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [94]:

Lema 16 (Lema 3.1, Dai[94]). Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \quad (985)$$

donde $\tau_B(\delta) = \inf \{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris Recurrente Positivo.

Lema 17 (Lema 3.1, Dai [94]). Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{|x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.

Teorema 624 (Teorema 3.1, Dai[94]). Si existe un $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}[X^x(|x|\delta)] = 0, \quad (986)$$

entonces la ecuación (3.358) se cumple para $B = \{|x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.

Nota 663. En Meyn and Tweedie [116] muestran que si $P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos A1)-A3), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.33 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbf{X}$, sea $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t , $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t , que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k . Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t , que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k -ésima.

Supóngase que la función $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}_m(\cdot), \bar{T}_m^0(\cdot))$ para $m = 1, 2, \dots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t) \right) \quad (987)$$

para $m = 1, 2, \dots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$. Entonces $(\bar{Q}(t), \bar{T}_m(t), \bar{T}_m^0(t))$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^M \mu_k \bar{T}_{m,k}(t) \quad (988)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$.

$$\bar{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, K, \quad (989)$$

$$\bar{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \bar{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \quad (990)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$,

$$\sum_{k=1}^K \bar{T}_{m,k}^0(t) + \bar{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \dots, M. \quad (991)$$

De acuerdo a Dai [94], se tiene que el conjunto de posibles límites $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot), \bar{T}^0(\cdot))$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (3.348)-(3.351), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 951 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ en (3.347) es un flujo límite de la disciplina. Cualquier solución (3.348)-(3.351) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\bar{Q}(0)| + |\bar{U}| + |\bar{V}| = 1$, se tiene que $\bar{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Al conjunto de ecuaciones dadas en 3.348-3.351 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ se le denotará por \mathcal{Q} .

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 625 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \quad (992)$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\bar{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado \bar{Q}^x es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 952 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 8 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 3.348-3.351 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial \bar{x} satisface que $|\bar{x}| = |\bar{Q}(0)| + |\bar{A}(0)| + |\bar{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 626 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p , y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p, \quad (993)$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [Q_k(t)^r] = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r] \leq \kappa_r, \quad (994)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para \mathbf{X} .

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1} :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q_k(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)]| = 0. \quad (995)$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números se cumple:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s) ds = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r], \quad \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \quad (996)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 627 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + \max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js} \bar{N}_s} \right) \delta^* \quad (997)$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 832.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 830

Teorema 628. Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots)$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribución inicial P_0 y probabilidad de transición p_{mn} , para $m, n = 0, 1, \dots, m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ -álgebra \mathcal{F}_n . Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \quad (998)$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea \mathcal{E} la clase de conjuntos medibles en E :

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde \mathcal{M} son los conjuntos de Borel de M_v . Entonces (E, \mathcal{E}) es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de (\mathbf{x}_t) está determinada por los siguientes objetos:

- i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.
- ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.
- iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \quad (999)$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_v(t, \zeta) = z \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \quad (1000)$$

∂M_v denota la frontera de M_v .

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $z \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H}f(\zeta_t), \quad (1001)$$

con $\zeta_0 = z$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y \mathcal{H} denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, z)$. Además se supone que \mathcal{H}_v es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = \inf \{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ , se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de \mathbf{x} para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en (E, \mathcal{E}) para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso (\mathbf{x}_t) comenzando en $\mathbf{x} = (n, z) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, z)) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1002)$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribución $Q(\cdot; \phi_n(T_1, z))$. La trayectoria de (\mathbf{x}_t) para $t \leq T_1$ es¹⁷

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, z)), & t < T_1, \\ (N, Z), & t = T_1. \end{cases}$$

Comenzando en \mathbf{x}_{T_1} se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto \mathbf{x}_{T_2} de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes \mathbf{x}_t con tiempos de salto T_1, T_2, \dots . Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i , con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 4 (Supuesto 3.1, Davis [98]). Sea $N_t := \sum_{i=1}^t \mathbb{1}_{(t_i \leq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \quad (1003)$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 953. Un espacio topológico E es llamado de Radón si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

¹⁷Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

Definición 954. E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada, tight.

Definición 955. Una medida finita, λ en la σ -álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si

$$\lambda(E) = \sup \{ \lambda(K) : K \text{ es compacto en } E \}. \quad (1004)$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 629. Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ -álgebra de Borel en E , que se denotará por \mathcal{E} .

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ -álgebra natural definida como $\sigma \{ f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E} \}$. Se considerará una σ -álgebra más general, (\mathcal{G}_t) tal que (X_t) sea \mathcal{E} -adaptado.

Definición 956. Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en (E, \mathcal{E}) , si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}^{18}$

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B). \quad (1005)$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en (E, \mathcal{E}) es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov¹⁹ (3.309) relativa a (\mathcal{G}_t) si

$$\mathbb{P} \{ f(X_t) | \mathcal{G}_s \} = P_{s,t} f(X_t) \quad s \leq t \in I, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (1007)$$

Definición 957. Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) es llamada Semigrupo de Transición de Markov o Semigrupo de Transición si

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \quad t, s \geq 0, \quad x \in E \quad f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 664. Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (3.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P} \{ f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t \} = P_s f(X_t) \quad t, s \geq 0, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (1008)$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t) .

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (3.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t) .

Definición 958. Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E .

Definición 959 (HD1). Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición HD1 si, dada una medida de probabilidad μ en E , existe una σ -álgebra \mathcal{E}^* con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un \mathcal{E}^* -proceso E -valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ .

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas \mathbf{P}^x tales que $\mathbf{P}^x \{X_0 = x\}$, y bajo cualquier \mathbf{P}^x , X_t es de Markov con semigrupo (P_t) . \mathbf{P}^x puede considerarse como la distribución condicional de \mathbf{P} dado $X_0 = x$.

¹⁸Ecuación de Chapman-Kolmogorov

¹⁹

$$\mathbb{P} \{ H | \mathcal{G}_t \} = \mathbb{P} \{ H | X_t \} \quad H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \quad (1006)$$

Definición 960. Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en (E, \mathcal{E}) . La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso \mathcal{E} -Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que \mathbf{X} satisfaga las siguientes condiciones:

- i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E -valuado continuo por la derecha \mathcal{E}^* -adaptado a (\mathcal{G}_t) ;
- ii) $(\theta_t)_{t \geq 0}$ es una colección de operadores shift para X , es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \quad (1009)$$

- iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t \in I}$ tiene la propiedad de Markov (3.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 961 (HD2). Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.

Definición 962. Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:

- i) \mathbf{X} es una realización continua por la derecha, 1198, de (P_t) .
- ii) \mathbf{X} satisface la condicion HD2, 1199, relativa a \mathcal{G}_t .
- iii) \mathcal{G}_t es aumentado y continuo por la derecha.

Lema 18 (Lema 4.2, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k(|x_n|t) \rightarrow P'_k t, \text{ u.o.c.}, \quad (1010)$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k(t - \bar{U}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (1011)$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k(t - \bar{V}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (1012)$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 19 (Lema 4.3, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}_k$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{U}_k - t)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{V}_k - t)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

y

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l , si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t . Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t . Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k .

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \quad (1013)$$

para $k = 1, \dots, K$. Para $i = 1, \dots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t . Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i . Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \quad (1014)$$

para $i = 1, \dots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \dots, T_K^x(t))',$$

$$I^x(t) = (I_1^x(t), \dots, I_K^x(t))'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \dots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \quad (1015)$$

$$Q^x(t) \geq 0, \quad (1016)$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \bar{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \quad (1017)$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \quad (1018)$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t)) dI_i^x(t) = 0, \quad (1019)$$

Condiciones adicionales en $(\bar{Q}^x(\cdot), \bar{T}^x(\cdot))$ específicas de la disciplina de la cola, (1020)

donde e es un vector de unos de dimensión d , C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 831:

Teorema 630 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \rightarrow \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \rightarrow \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)) \rightarrow (\bar{Q}(0), \bar{U}, \bar{V}), \quad (1021)$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t), T^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t)) \rightarrow (\bar{Q}(t), \bar{T}(t)) \text{ u.o.c.} \quad (1022)$$

Además, $(\bar{Q}(t), \bar{T}(t))$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\bar{Q}(t) = Q(0) + (\alpha t - \bar{U})^+ - (I - P)' M^{-1} (\bar{T}(t) - \bar{V})^+, \quad (1023)$$

$$\bar{Q}(t) \geq 0, \quad (1024)$$

$$\bar{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \quad (1025)$$

$$\bar{I}(t) = et - C\bar{T}(t) \text{ es no decreciente,} \quad (1026)$$

$$\int_0^\infty (C\bar{Q}(t)) d\bar{I}(t) = 0, \quad (1027)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (1028)$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 409. Sea $(\bar{Q}, \bar{T}, \bar{T}^0)$ un flujo límite de 3.197 y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0) \right) \rightarrow (\bar{Q}_k(0), 0, 0, 0)$$

para $k = 1, \dots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\bar{T}(t)$ y $\bar{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\bar{T}(0) = \bar{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K [\bar{T}_k(t) + \bar{T}_k^0(t)] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\bar{T}}_k(t) = \beta_k$$

$$\text{para } \bar{Q}_k(t) = 0.$$

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \bar{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \bar{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\bar{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\bar{T}}_k^0(t)$$

para $\bar{Q}_k(t) > 0$.

Lema 20 (Lema 3.1 [91]). Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.

Teorema 631 (Teorema 5.1 [91]). La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.

Lema 21 (Lema 5.2 [106]). Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo

$$E(t) = \max \{n \geq 1 : \xi(1) + \dots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]} \right)^r \quad (1029)$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 632 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E} \left[\left(\frac{N(t)}{t} \right)^r \right] \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$.

Proposición 410 (Proposición 5.1 [95]). Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0. \quad (1030)$$

Proposición 411 (Proposición 5.3 [95]). Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p) dt \right] \leq C_{p+1} (1 + |x|^{p+1}) \quad (1031)$$

Proposición 412 (Proposición 5.4 [95]). Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X , sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C , entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))] ds \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \quad (1032)$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 633 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (1033)$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \quad (1034)$$

Teorema 634 (Teorema 6.2 [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\|P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 635 (Teorema 6.3 [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)} |P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot)|_f = 0,$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)} |\mathbb{E}_x [Q_t] - \mathbb{E}_\pi [Q_0]| = 0.$$

Proposición 413 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0 \quad (1035)$$

Lema 9 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = \max(n \geq 1 : \zeta(1) + \dots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \quad (1036)$$

Luego, bajo estas condiciones:

$$a) \text{ para cualquier } \delta > 0, \sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] < \infty$$

$$b) \text{ las variables aleatorias } \left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\} \text{ son uniformemente integrables.}$$

Teorema 636 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (1037)$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 637 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{f_p}, t \rightarrow \infty, x \in X. \quad (1038)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 638 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} \|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0. \quad (1039)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q(0)]| = 0.$$

Teorema 639 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en (X, \mathcal{B}_X) , y π la distribución estacionaria de X .*

i) *Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds = \pi(f) := \int f(x) \pi(dx) \quad (1040)$$

\mathbb{P} -c.s.

ii) *Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.*

Teorema 640 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, T \geq 0, \quad (1041)$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < \infty$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \quad (1042)$$

Definición 963. *Sea X un conjunto y \mathcal{F} una σ -álgebra de subconjuntos de X , la pareja (X, \mathcal{F}) es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a \mathcal{F} , si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 964. *Sea (X, \mathcal{F}, μ) espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ -finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 965. *Sea X el conjunto de los números reales \mathbb{R} . El álgebra de Borel es la σ -álgebra \mathcal{B} generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en \mathcal{B} es llamado Conjunto de Borel.*

Definición 966. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a \mathcal{F} . Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 967. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \dots$, espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \dots)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \dots$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^n \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama cilindro con base B^n , el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i$.*

Definición 968. [TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ -álgebras \mathcal{F}_t , para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es \mathcal{F}_t -medible para cada t . Si no se especifica \mathcal{F}_t entonces se toma \mathcal{F}_t como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ -álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.

Definición 969. [TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ -álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ -álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.

Definición 970. Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$ -medible,

Definición 971. Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \quad (1043)$$

Nota 665. Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (3.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \quad (1044)$$

1.34 Procesos de Estados de Markov

Teorema 641. Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots)$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribución inicial P_0 y probabilidad de transición p_{mn} , para $m, n = 0, 1, \dots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ -álgebra \mathcal{F}_n . Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \quad (1045)$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea \mathcal{E} la clase de conjuntos medibles en E :

$$\mathcal{E} = \left\{ \bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v \right\}.$$

donde \mathcal{M} son los conjuntos de Borel de M_v . Entonces (E, \mathcal{E}) es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de (\mathbf{x}_t) está determinada por los siguientes objetos:

- i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.
- ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.
- iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \quad (1046)$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_v(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \quad (1047)$$

∂M_v denota la frontera de M_v .

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H}f(\zeta_t), \quad (1048)$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y \mathcal{H} denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que \mathcal{H}_v es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = \inf \{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ , se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de \mathbf{x} para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en (E, \mathcal{E}) para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso (\mathbf{x}_t) comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1049)$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribución $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de (\mathbf{x}_t) para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, Z), & t = T_1. \end{cases}$$

Comenzando en \mathbf{x}_{T_1} se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto \mathbf{x}_{T_2} de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes \mathbf{x}_t con tiempos de salto T_1, T_2, \dots . Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i , con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 5 (Supuesto 3.1, Davis [98]). Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \quad (1050)$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov²⁰ se cumple para cualquier tiempo de paro.

1.35 Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 972. Una medida finita, λ en la σ -álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si

$$\lambda(E) = \sup \{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \quad (1051)$$

Definición 973. E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada, tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 642. Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.

²⁰Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

1.36 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ -álgebra de Borel en E , que se denotará por \mathcal{E} .

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ -álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ -álgebra más general²¹, (\mathcal{G}_t) tal que (X_t) sea \mathcal{E} -adaptado.

Definición 974. Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en (E, \mathcal{E}) , si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B) \quad (1052)$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en (E, \mathcal{E}) es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov²³ (3.309) relativa a (\mathcal{G}_t) si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t) \quad s \leq t \in I, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (1054)$$

Definición 975. Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) es llamada Semigrupo de Transición de Markov o Semigrupo de Transición si

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x), \quad t, s \geq 0, \quad x \in E \quad f \in b\mathcal{E}^{24}.$$

Nota 666. Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (3.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \quad t, s \geq 0, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (1055)$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t) .

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (3.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t) .

1.37 Primer Condición de Regularidad

Definición 976. Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E .

Definición 977 (HD1). Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición HD1 si, dada una medida de probabilidad μ en E , existe una σ -álgebra \mathcal{E}^* con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un \mathcal{E}^* -proceso E -valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ .

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas \mathbf{P}^x tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier \mathbf{P}^x , X_t es de Markov con semigrupo (P_t) . \mathbf{P}^x puede considerarse como la distribución condicional de \mathbf{P} dado $X_0 = x$.

Definición 978. Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en (E, \mathcal{E}) . La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso \mathcal{E} -Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que \mathbf{X} satisfaga las siguientes condiciones:

²¹qué se quiere decir con el término: más general?

²²Ecuación de Chapman-Kolmogorov

²³

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \quad H \in \mathcal{F}_{\geq t}. \quad (1053)$$

²⁴Definir los términos $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

- i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E -valuado continuo por la derecha \mathcal{E}^* -adaptado a (\mathcal{G}_t) ;
- ii) $(\theta_t)_{t \geq 0}$ es una colección de operadores shift para X , es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \quad (1056)$$

- iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t \in I}$ tiene la propiedad de Markov (3.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 979 (HD2). Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.

Definición 980. Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:

- i) \mathbf{X} es una realización continua por la derecha, 1198, de (P_t) .
- ii) \mathbf{X} satisface la condicion HD2, 1199, relativa a \mathcal{G}_t .
- iii) \mathcal{G}_t es aumentado y continuo por la derecha.

1.38 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 22 (Lema 4.2, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k(|x_n|t) \rightarrow P'_k t, \text{ u.o.c.}, \quad (1057)$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k (t - \bar{U}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (1058)$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k (t - \bar{V}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (1059)$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 23 (Lema 4.3, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U_k(0) = \bar{U}_k$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V_k(0) = \bar{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{U}_k - t)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{V}_k - t)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$y \quad \left\{ \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x(t)$ el número total de servicios completados de la clase l , si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t . Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t . Una fracción de estos usuarios, $\Phi_k^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k .

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \quad (1060)$$

para $k = 1, \dots, K$. Para $i = 1, \dots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t . Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i . Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \quad (1061)$$

para $i = 1, \dots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \dots, T_K^x(t))',$$

$$I^x(t) = (I_1^x(t), \dots, I_K^x(t))'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \dots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \quad (1062)$$

$$Q^x(t) \geq 0, \quad (1063)$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \bar{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \quad (1064)$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \quad (1065)$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t)) dI_i^x(t) = 0, \quad (1066)$$

Condiciones adicionales en $(\bar{Q}^x(\cdot), \bar{T}^x(\cdot))$ específicas de la disciplina de la cola, (1067)

donde e es un vector de unos de dimensión d , C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 831:

Teorema 643 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \rightarrow \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \rightarrow \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)) \rightarrow (\bar{Q}(0), \bar{U}, \bar{V}), \quad (1068)$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t), T^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t)) \rightarrow (\bar{Q}(t), \bar{T}(t)) \text{ u.o.c.} \quad (1069)$$

Además, $(\bar{Q}(t), \bar{T}(t))$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\bar{Q}(t) = Q(0) + (\alpha t - \bar{U})^+ - (I - P)' M^{-1} (\bar{T}(t) - \bar{V})^+, \quad (1070)$$

$$\bar{Q}(t) \geq 0, \quad (1071)$$

$$\bar{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \quad (1072)$$

$$\bar{I}(t) = et - C\bar{T}(t) \text{ es no decreciente,} \quad (1073)$$

$$\int_0^\infty (C\bar{Q}(t)) d\bar{I}(t) = 0, \quad (1074)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (1075)$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 414. Sea $(\bar{Q}, \bar{T}, \bar{T}^0)$ un flujo límite de 3.197 y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0) \right) \rightarrow (\bar{Q}_k(0), 0, 0, 0)$$

para $k = 1, \dots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\bar{T}(t)$ y $\bar{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\bar{T}(0) = \bar{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K [\bar{T}_k(t) + \bar{T}_k^0(t)] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\bar{T}}_k(t) = \beta_k$$

$$\text{para } \bar{Q}_k(t) = 0.$$

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \bar{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \bar{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\bar{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\bar{T}}_k^0(t)$$

para $\bar{Q}_k(t) > 0$.

Teorema 644 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E} \left[\frac{N(t)}{t} \right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$.

Proposición 415 (Proposición 5.3 [95]). Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p) dt \right] \leq C_{p+1} (1 + |x|^{p+1}) \quad (1076)$$

Proposición 416 (Proposición 5.4 [95]). Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X , sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C , entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s)) ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \quad (1077)$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

1.39 Estabilidad

Definición 981 (Definición 3.2, Dai y Meyn [95]). El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $(\bar{A}(0), \bar{B}(0)) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 3.216-3.182, junto con la condición:

$$\bar{Q}(t) = \bar{Q}(0) + (\alpha t - \bar{A}(0))^+ - (I - P') M (\bar{T}(t) - \bar{B}(0))^+ \quad (1078)$$

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 982 (Definición 3.1, Dai y Meyn [95]). Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ de las siguientes ecuaciones, donde $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_1(t), \dots, \bar{Q}_K(t))'$ y $\bar{T}(t) = (\bar{T}_1(t), \dots, \bar{T}_K(t))'$

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t) + \sum_{l=1}^k P_{lk} \mu_l \bar{T}_l(t) \quad (1079)$$

$$\bar{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, K, \quad (1080)$$

$$\bar{T}_k(0) = 0, \text{ y } \bar{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente,} \quad (1081)$$

$$\bar{T}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \bar{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \quad (1082)$$

$$\bar{T}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) dI_i^x(t) = 0 \quad (1083)$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } (Q^x(\cdot), T^x(\cdot)) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \quad (1084)$$

Lema 24 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambien es estable.*

Teorema 645 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Proposición 417 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0 \quad (1085)$$

Lema 10 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = \max(n \geq 1 : \zeta(1) + \dots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \quad (1086)$$

Luego, bajo estas condiciones:

- a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] < \infty$
- b) las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 646 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (1087)$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 647 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{f_p}, \quad t \rightarrow \infty, x \in X. \quad (1088)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 648 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} \|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0. \quad (1089)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q(0)]| = 0.$$

Teorema 649 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en (X, \mathcal{B}_X) , y π la distribución estacionaria de X .*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds = \pi(f) := \int f(x) \pi(dx) \quad (1090)$$

\mathbb{P} -c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 650 (Teorema 2.2, Down [99]). Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \quad T \geq 0, \quad (1091)$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < \infty$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \quad (1092)$$

Definición 983. Sea X un conjunto y \mathcal{F} una σ -álgebra de subconjuntos de X , la pareja (X, \mathcal{F}) es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a \mathcal{F} , si $A \in \mathcal{F}$.

Definición 984. Sea (X, \mathcal{F}, μ) espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ -finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.

Definición 985. Sea X el conjunto de los números reales \mathbb{R} . El álgebra de Borel es la σ -álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado Conjunto de Borel.

Definición 986. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X . Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 987. Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \dots$, espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \dots)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \dots$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^n \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama cilindro con base B^n , el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i$.

Definición 988. [TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ -álgebras \mathcal{F}_t , para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es \mathcal{F}_t -medible para cada t . Si no se especifica \mathcal{F}_t entonces se toma \mathcal{F}_t como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ -álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.

Definición 989. [TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ -álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ -álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.

Definición 990. Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$ -medible,

Definición 991. Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \quad (1093)$$

Nota 667. Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (3.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \quad (1094)$$

Teorema 651. Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots, \infty)$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribución inicial P_0 y probabilidad de transición p_{mn} , para $m, n = 0, 1, \dots, m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ -álgebra \mathcal{F}_n . Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, \infty\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(S), B) \quad (1095)$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea \mathcal{E} la clase de conjuntos medibles en E :

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde \mathcal{M} son los conjuntos de Borel de M_v . Entonces (E, \mathcal{E}) es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de (\mathbf{x}_t) está determinada por los siguientes objetos:

- i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.
- ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.
- iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \quad (1096)$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_v(t, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \quad (1097)$$

∂M_v denota la frontera de M_v .

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H}f(\zeta_t), \quad (1098)$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y \mathcal{H} denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que \mathcal{H}_v es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = \inf \{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ , se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon]$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de \mathbf{x} para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en (E, \mathcal{E}) para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso (\mathbf{x}_t) comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1099)$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribución $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de (\mathbf{x}_t) para $t \leq T_1$ es²⁵

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, Z), & t = T_1. \end{cases}$$

²⁵Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

Comenzando en \mathbf{x}_{T_1} se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto \mathbf{x}_{T_2} de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes \mathbf{x}_t con tiempos de salto T_1, T_2, \dots . Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i , con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 6 (Supuesto 3.1, Davis [98]). Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \quad (1100)$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 992. Un espacio topológico E es llamado Luisin si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.

Definición 993. Un espacio topológico E es llamado de Radón si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 994. E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada, tight.

Definición 995. Una medida finita, λ en la σ -álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si

$$\lambda(E) = \sup \{ \lambda(K) : K \text{ es compacto en } E \}. \quad (1101)$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 652. Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.

1.40 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ -álgebra de Borel en E , que se denotará por \mathcal{E} .

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ -álgebra natural definida como $\sigma \{ f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E} \}$. Se considerará una σ -álgebra más general, (\mathcal{G}_t) tal que (X_t) sea \mathcal{E} -adaptado.

Definición 996. Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en (E, \mathcal{E}) , si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B) \quad (1102)$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en (E, \mathcal{E}) es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov²⁷ (3.309) relativa a (\mathcal{G}_t) si

$$\mathbb{P} \{ f(X_t) | \mathcal{G}_s \} = P_{s,t} f(X_t) \quad s \leq t \in I, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (1104)$$

Definición 997. Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) es llamada Semigrupo de Transición de Markov o Semigrupo de Transición si

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \quad t, s \geq 0, \quad x \in E \quad f \in b\mathcal{E}.$$

²⁶Ecuación de Chapman-Kolmogorov
²⁷

$$\mathbb{P} \{ H | \mathcal{G}_t \} = \mathbb{P} \{ H | X_t \} \quad H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \quad (1103)$$

Nota 668. Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (3.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \quad t, s \geq 0, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (1105)$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t) .

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (3.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t) .

1.41 Primer Condición de Regularidad

Definición 998. Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E .

Definición 999 (HD1). Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición HD1 si, dada una medida de probabilidad μ en E , existe una σ -álgebra \mathcal{E}^* con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un \mathcal{E}^* -proceso E -valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ .

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas \mathbf{P}^x tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier \mathbf{P}^x , X_t es de Markov con semigrupo (P_t) . \mathbf{P}^x puede considerarse como la distribución condicional de \mathbf{P} dado $X_0 = x$.

Definición 1000. Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en (E, \mathcal{E}) . La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso \mathcal{E} -Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que \mathbf{X} satisfaga las siguientes condiciones:

- i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E -valuado continuo por la derecha \mathcal{E}^* -adaptado a (\mathcal{G}_t) ;
- ii) $(\theta_t)_{t \geq 0}$ es una colección de operadores shift para X , es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \quad \text{y} \quad X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \quad (1106)$$

- iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t \in I}$ tiene la propiedad de Markov (3.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 1001 (HD2). Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.

Definición 1002. Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:

- i) \mathbf{X} es una realización continua por la derecha, 1198, de (P_t) .
- ii) \mathbf{X} satisface la condición HD2, 1199, relativa a \mathcal{G}_t .
- iii) \mathcal{G}_t es aumentado y continuo por la derecha.

Lema 25 (Lema 4.2, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k (|x_n|t) \rightarrow P'_k t, \text{ u.o.c.}, \quad (1107)$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n} (|x_n|t) \rightarrow \alpha_k (t - \bar{U}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (1108)$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n} (|x_n|t) \rightarrow \mu_k (t - \bar{V}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (1109)$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 26 (Lema 4.3, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}_k$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n} (|x_n|t) = (\bar{U}_k - t)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n} (|x_n|t) = (\bar{V}_k - t)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n} (|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

y

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n} (|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l , si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t . Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t . Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k .

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = \overset{x}{x}_k(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \quad (1110)$$

para $k = 1, \dots, K$. Para $i = 1, \dots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t . Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i . Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \quad (1111)$$

para $i = 1, \dots, d$.

Hacer

$$\begin{aligned} T^x(t) &= (T_1^x(t), \dots, T_K^x(t))', \\ I^x(t) &= (I_1^x(t), \dots, I_K^x(t))' \end{aligned}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \dots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \quad (1112)$$

$$Q^x(t) \geq 0, \quad (1113)$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \bar{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \quad (1114)$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \quad (1115)$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t)) dI_i^x(t) = 0, \quad (1116)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}^x(\cdot), \bar{T}^x(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (1117)$$

donde e es un vector de unos de dimensión d , C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 831:

Teorema 653 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \rightarrow \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \rightarrow \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)) \rightarrow (\bar{Q}(0), \bar{U}, \bar{V}), \quad (1118)$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t), T^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t)) \rightarrow (\bar{Q}(t), \bar{T}(t)) \text{ u.o.c.} \quad (1119)$$

Además, $(\bar{Q}(t), \bar{T}(t))$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\bar{Q}(t) = Q(0) + (\alpha t - \bar{U})^+ - (I - P)' M^{-1} (\bar{T}(t) - \bar{V})^+, \quad (1120)$$

$$\bar{Q}(t) \geq 0, \quad (1121)$$

$$\bar{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \quad (1122)$$

$$\bar{I}(t) = et - C\bar{T}(t) \text{ es no decreciente,} \quad (1123)$$

$$\int_0^\infty (C\bar{Q}(t)) d\bar{I}(t) = 0, \quad (1124)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (1125)$$

Definición 1003 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ en 3.325 es un flujo límite de la disciplina. Cualquier solución (3.326)-(3.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\bar{Q}(0)| + |\bar{U}| + |\bar{V}| = 1$, se tiene que $\bar{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 654 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \quad (1126)$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\bar{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|x| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado \bar{Q}^x es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 3.216-3.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ se le denotará por \mathcal{Q} .

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1004 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 11 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 3.216-3.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial \bar{x} satisface que $|\bar{x}| = |\bar{Q}(0)| + |\bar{A}(0)| + |\bar{B}(0)| \leq 1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 418. *Sea $(\bar{Q}, \bar{T}, \bar{T}^0)$ un flujo límite de 3.197 y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0) \right) \rightarrow (\bar{Q}_k(0), 0, 0, 0)$$

para $k = 1, \dots, K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) *Los vectores de tiempo ocupado $\bar{T}(t)$ y $\bar{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\bar{T}(0) = \bar{T}^0(0) = 0$.*

ii) *Para todo $t \geq 0$*

$$\sum_{k=1}^K \left[\bar{T}_k(t) + \bar{T}_k^0(t) \right] = t$$

iii) *Para todo $1 \leq k \leq K$*

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t)$$

iv) *Para todo $1 \leq k \leq K$*

$$\dot{\bar{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\bar{Q}_k(t) = 0$.

v) *Para todo k, j*

$$\mu_k^0 \bar{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \bar{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\bar{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\bar{T}}_k^0(t)$$

para $\bar{Q}_k(t) > 0$.

Lema 27 (Lema 3.1 [91]). Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.

Teorema 655 (Teorema 5.2 [91]). Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.

Teorema 656 (Teorema 5.1 [91]). La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.

Lema 28 (Lema 5.2 [106]). Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo

$$E(t) = \max \{n \geq 1 : \xi(1) + \dots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]} \right)^r \quad (1127)$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 657 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E} \left[\frac{N(t)}{t} \right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$.

Proposición 419 (Proposicin 5.1 [95]). Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adem s suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0. \quad (1128)$$

Proposición 420 (Proposición 5.3 [95]). Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p) dt \right] \leq C_{p+1} (1 + |x|^{p+1}) \quad (1129)$$

Proposición 421 (Proposición 5.4 [95]). Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X , sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C , entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s)) ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \quad (1130)$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 658 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), ademś suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (1131)$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\text{Limsup}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \quad (1132)$$

Teorema 659 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\| P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \|_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 660 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)|P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot)|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]| = 0}.$$

Proposición 422 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0 \quad (1133)$$

Lema 12 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = \max(n \geq 1 : \zeta(1) + \dots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \quad (1134)$$

Luego, bajo estas condiciones:

$$a) \text{ para cualquier } \delta > 0, \sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] < \infty$$

$$b) \text{ las variables aleatorias } \left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\} \text{ son uniformemente integrables.}$$

Teorema 661 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (1135)$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 662 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{f_p}, t \rightarrow \infty, x \in X. \quad (1136)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 663 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} \|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0. \quad (1137)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q(0)]| = 0.$$

Teorema 664 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en (X, \mathcal{B}_X) , y π la distribución estacionaria de X .*

i) *Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds = \pi(f) := \int f(x) \pi(dx) \quad (1138)$$

\mathbb{P} -c.s.

ii) *Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.*

Teorema 665 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, T \geq 0, \quad (1139)$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < \infty$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{X \rightarrow \infty\} \geq q. \quad (1140)$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k -ésima cola, son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k -ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$,
- la tasa de servicio para la k -ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$,
- también se define $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.

1.42 Procesos de Estados Markoviano para el Sistema

1.43 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X = \{X(t), t \geq 0\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [108].

1.43.1 Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [98]

.

1.44 Procesos Harris Recurrentes Positivos

Sea el proceso de Markov $X = \{X(t), t \geq 0\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] y Meyn y Down [118] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X , cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

1.45 Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X(t) = (Q(t), U(t), V(t)), \quad (1141)$$

donde $Q(t)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U(t)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V(t)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U(t)$ como $V(t)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = (Q(0), U(0), V(0)) = (q, a, b)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde \mathcal{E} es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \dots, K$ se define

$$\begin{aligned} E_l^x(t) &= \max \{r : U_l(0) + \xi_l(1) + \dots + \xi_l(r-1) \leq t\} \quad t \geq 0, \\ S_k^x(t) &= \max \{r : V_k(0) + \eta_k(1) + \dots + \eta_k(r-1) \leq t\} \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^n \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n -ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la $s(k)$ -ésima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro P'_k , donde P_k denota el k -ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \{\phi^k(n), n \geq 1\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \dots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 29 (Lema 4.2, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k(|x_n|t) \rightarrow P'_k t, \text{ u.o.c.}, \quad (1142)$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k(t - \bar{U}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (1143)$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k(t - \bar{V}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (1144)$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 30 (Lema 4.3, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}_k$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{U}_k - t)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{V}_k - t)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

y

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l , si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t . Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t . Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k .

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = \frac{x}{k}(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \quad (1145)$$

para $k = 1, \dots, K$. Para $i = 1, \dots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t . Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i . Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \quad (1146)$$

para $i = 1, \dots, d$.

Hacer

$$\begin{aligned} T^x(t) &= (T_1^x(t), \dots, T_K^x(t))', \\ I^x(t) &= (I_1^x(t), \dots, I_K^x(t))' \end{aligned}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \dots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \quad (1147)$$

$$Q^x(t) \geq 0, \quad (1148)$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \bar{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \quad (1149)$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \quad (1150)$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t)) dI_i^x(t) = 0, \quad (1151)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}^x(\cdot), \bar{T}^x(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (1152)$$

donde e es un vector de unos de dimensión d , C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 831:

Teorema 666 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \rightarrow \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \rightarrow \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)) \rightarrow (\bar{Q}(0), \bar{U}, \bar{V}), \quad (1153)$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t), T^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t)) \rightarrow (\bar{Q}(t), \bar{T}(t)) \text{ u.o.c.} \quad (1154)$$

Además, $(\bar{Q}(t), \bar{T}(t))$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\bar{Q}(t) = Q(0) + (\alpha t - \bar{U})^+ - (I - P)' M^{-1} (\bar{T}(t) - \bar{V})^+, \quad (1155)$$

$$\bar{Q}(t) \geq 0, \quad (1156)$$

$$\bar{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \quad (1157)$$

$$\bar{I}(t) = et - C\bar{T}(t) \text{ es no decreciente,} \quad (1158)$$

$$\int_0^\infty (C\bar{Q}(t)) d\bar{I}(t) = 0, \quad (1159)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (1160)$$

Definición 1005 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ en 3.325 es un flujo límite de la disciplina. Cualquier solución (3.326)-(3.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\bar{Q}(0)| + |\bar{U}| + |\bar{V}| = 1$, se tiene que $\bar{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 667 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \quad (1161)$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\bar{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|x| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado \bar{Q}^x es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1006 (Definición 3.1, Dai y Meyn [95]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ de las siguientes ecuaciones, donde $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_1(t), \dots, \bar{Q}_K(t))'$ y $\bar{T}(t) = (\bar{T}_1(t), \dots, \bar{T}_K(t))'$*

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t) + \sum_{l=1}^k P_{lk} \mu_l \bar{T}_l(t) \quad (1162)$$

$$\bar{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, K, \quad (1163)$$

$$\bar{T}_k(0) = 0, \text{ y } \bar{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente,} \quad (1164)$$

$$\bar{T}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \bar{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \quad (1165)$$

$$\bar{T}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) dI_i^x(t) = 0 \quad (1166)$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } (Q^x(\cdot), T^x(\cdot)) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \quad (1167)$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 3.216-3.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ se le denotará por \mathcal{Q} .

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1007 (Definición 3.2, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $(\bar{A}(0), \bar{B}(0)) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 3.216-3.182, junto con la condición:*

$$\bar{Q}(t) = \bar{Q}(0) + (\alpha t - \bar{A}(0))^+ - (I - P') M (\bar{T}(t) - \bar{B}(0))^+ \quad (1168)$$

Definición 1008 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 13 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 3.216-3.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial \bar{x} satisface que $|\bar{x}| = |\bar{Q}(0)| + |\bar{A}(0)| + |\bar{B}(0)| \leq 1$.*

1.46 Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad

1.47 Teorema 2.1

El resultado principal de Down [99] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 668 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) *Para alguna constante κ_p , y para cada condición inicial $x \in X$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p, \quad (1169)$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) *Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [Q_k(t)^r] = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r] \leq \kappa_r, \quad (1170)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para \mathbf{X} .

iii) *El primer momento converge con razón t^{p-1} :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q_k(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)]| = 0. \quad (1171)$$

iv) *La Ley Fuerte de los grandes números se cumple:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s) ds = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r], \quad \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \quad (1172)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$.

Proposición 423 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0 \quad (1173)$$

Lema 14 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = \max(n \geq 1 : \zeta(1) + \dots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \quad (1174)$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) *para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] < \infty$*

b) *las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.*

Teorema 669 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (1175)$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 670 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{f_p}, t \rightarrow \infty, x \in X. \quad (1176)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 671 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} \|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0. \quad (1177)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q(0)]| = 0.$$

Teorema 672 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en (X, \mathcal{B}_X) , y π la distribución estacionaria de X .*

i) *Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds = \pi(f) := \int f(x) \pi(dx) \quad (1178)$$

\mathbb{P} -c.s.

ii) *Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.*

1.48 Teorema 2.2

Teorema 673 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, T \geq 0, \quad (1179)$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \quad (1180)$$

1.49 Teorema 2.3

Teorema 674 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + \max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js} \bar{N}_s} \right) \delta^* \quad (1181)$$

i) *Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 774.*

ii) *Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 830*

1.50 Definiciones Básicas

Definición 1009. Sea X un conjunto y \mathcal{F} una σ -álgebra de subconjuntos de X , la pareja (X, \mathcal{F}) es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a \mathcal{F} , si $A \in \mathcal{F}$.

Definición 1010. Sea (X, \mathcal{F}, μ) espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ -finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.

Definición 1011. Sea X el conjunto de los números reales \mathbb{R} . El álgebra de Borel es la σ -álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado Conjunto de Borel.

Definición 1012. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X . Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1013. Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \dots$, espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \dots)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \dots$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^n \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama cilindro con base B^n , el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i$.

Definición 1014. [TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ -álgebras \mathcal{F}_t , para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es \mathcal{F}_t -medible para cada t . Si no se especifica \mathcal{F}_t entonces se toma \mathcal{F}_t como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ -álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.

Definición 1015. [TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ -álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ -álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.

Definición 1016. Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$ -medible,

Definición 1017. Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \quad (1182)$$

Nota 669. Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (3.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \quad (1183)$$

Teorema 675. Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots)$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribución inicial P_0 y probabilidad de transición p_{mn} , para $m, n = 0, 1, \dots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ -álgebra \mathcal{F}_n . Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \quad (1184)$$

en $\{T < \infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 424. Sea $(\bar{Q}, \bar{T}, \bar{T}^0)$ un flujo límite de ?? y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0) \right) \rightarrow (\bar{Q}_k(0), 0, 0, 0)$$

para $k = 1, \dots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\bar{T}(t)$ y $\bar{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\bar{T}(0) = \bar{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K [\bar{T}_k(t) + \bar{T}_k^0(t)] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\bar{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\bar{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \bar{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \bar{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\bar{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\bar{T}}_k^0(t)$$

para $\bar{Q}_k(t) > 0$.

Lema 31 (Lema 3.1 [91]). Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.

Teorema 676 (Teorema 5.2 [91]). Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.

Teorema 677 (Teorema 5.1 [91]). La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.

Lema 32 (Lema 5.2 [106]). Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo

$$E(t) = \max \{n \geq 1 : \xi(1) + \dots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]} \right)^r \quad (1185)$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 678 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E} \left[\frac{N(t)}{t} \right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$.

Proposición 425 (Proposición 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0. \quad (1186)$$

Proposición 426 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p) dt \right] \leq C_{p+1} (1 + |x|^{p+1}) \quad (1187)$$

Proposición 427 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X , sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C , entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))] ds \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \quad (1188)$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 679 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (1189)$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \quad (1190)$$

Teorema 680 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\| P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \|_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 681 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)} |P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot)|_f = 0,$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)} |\mathbb{E}_x [Q_t] - \mathbb{E}_\pi [Q_0]| = 0.$$

1.51 Proceso de Estados Markoviano para el Sistema

Sean $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k , $A_k(t)$ el tiempo residual de arribos a la cola k , para cada servidor m , sea $H_m(t)$ par ordenado que consiste en la cola que está siendo atendida y la política de servicio que se está utilizando. $B_m(t)$ los tiempos de servicio residuales, $B_m^0(t)$ el tiempo residual de traslado, $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H_m(t)$.

El proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = (Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)) \quad (1191)$$

para $k = 1, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \dots, \xi_K, \eta_1, \dots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\xi_l(1)^{p+1}] &< \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y} \\ \mathbb{E} [\eta_k(1)^{p+1}] &< \infty \text{ para } k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

donde \mathcal{A} es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \dots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en \mathbb{R}_+ , y un entero j_k , tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \quad (1192)$$

$$P(\xi_k(1) + \dots + \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x) dx \text{ y} \quad (1193)$$

$$\int_0^\infty q_k(x) dx > 0 \quad (1194)$$

1.52 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho, Sharpe [123], en el espacio de estados medible (X, \mathcal{B}_X) .

Se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable.

Definición 1018. Un espacio topológico E es llamado Luisin si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.

Definición 1019. Un espacio topológico E es llamado de Radón si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1020. E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada, tight.

Definición 1021. Una medida finita, λ en la σ -álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si

$$\lambda(E) = \sup \{ \lambda(K) : K \text{ es compacto en } E \}. \quad (1195)$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 682. Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.

1.53 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ -álgebra de Borel en E , que se denotará por \mathcal{E} .

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ -álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ -álgebra más general, (\mathcal{G}_t) tal que (X_t) sea \mathcal{E} -adaptado.

Definición 1022. Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en (E, \mathcal{E}) , si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B) \quad (1196)$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en (E, \mathcal{E}) es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov ²⁹ (3.309) relativa a (\mathcal{G}_t) si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t) \quad s \leq t \in I, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (1198)$$

Definición 1023. Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) es llamada Semigrupo de Transición de Markov o Semigrupo de Transición si

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_sf)(x), \quad t, s \geq 0, \quad x \in E \quad f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 670. Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (3.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_sf(X_t) \quad t, s \geq 0, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (1199)$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t) .

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (3.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t) .

1.54 Primer Condición de Regularidad

Definición 1024. Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E .

Definición 1025 (HD1). Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición HD1 si, dada una medida de probabilidad μ en E , existe una σ -álgebra \mathcal{E}^* con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un \mathcal{E}^* -proceso E -valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ .

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas \mathbf{P}^x tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier \mathbf{P}^x , X_t es de Markov con semigrupo (P_t) . \mathbf{P}^x puede considerarse como la distribución condicional de \mathbf{P} dado $X_0 = x$.

Definición 1026. Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en (E, \mathcal{E}) . La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso \mathcal{E} -Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que \mathbf{X} satisfaga las siguientes condiciones:

- i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E -valuado continuo por la derecha \mathcal{E}^* -adaptado a (\mathcal{G}_t) ;

²⁸Ecuación de Chapman-Kolmogorov
²⁹

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \quad H \in \mathcal{F}_{\geq t}. \quad (1197)$$

ii) $(\theta_t)_{t \geq 0}$ es una colección de operadores shift para X , es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \quad (1200)$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t \in I}$ tiene la propiedad de Markov (3.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 1027 (HD2). Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.

Definición 1028. Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:

i) \mathbf{X} es una realización continua por la derecha, 1198, de (P_t) .

ii) \mathbf{X} satisface la condición HD2, 1199, relativa a \mathcal{G}_t .

iii) \mathcal{G}_t es aumentado y continuo por la derecha.

Definición 1029. Sea X un conjunto y \mathcal{F} una σ -álgebra de subconjuntos de X , la pareja (X, \mathcal{F}) es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a \mathcal{F} , si $A \in \mathcal{F}$.

Definición 1030. Sea (X, \mathcal{F}, μ) espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ -finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.

Definición 1031. Sea X el conjunto de los números reales \mathbb{R} . El álgebra de Borel es la σ -álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado Conjunto de Borel.

Definición 1032. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X . Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1033. Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \dots$, espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \dots)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \dots$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^n \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama cilindro con base B^n , el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i$.

Definición 1034. [TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ -álgebras \mathcal{F}_t , para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es \mathcal{F}_t -medible para cada t . Si no se especifica \mathcal{F}_t entonces se toma \mathcal{F}_t como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ -álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.

Definición 1035. [TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ -álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ -álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.

Definición 1036. Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$ -medible,

Definición 1037. Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \quad (1201)$$

Nota 671. Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (3.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \quad (1202)$$

Teorema 683. Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots)$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribución inicial P_0 y probabilidad de transición p_{mn} , para $m, n = 0, 1, \dots, m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ -álgebra \mathcal{F}_n . Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(S), B) \quad (1203)$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea \mathcal{E} la clase de conjuntos medibles en E :

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde \mathcal{M} son los conjuntos de Borel de M_v . Entonces (E, \mathcal{E}) es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de (\mathbf{x}_t) está determinada por los siguientes objetos:

- i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.
- ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.
- iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \quad (1204)$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_v(t, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \quad (1205)$$

∂M_v denota la frontera de M_v .

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H}f(\zeta_t), \quad (1206)$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y \mathcal{H} denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que \mathcal{H}_v es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = \inf \{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ , se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon]$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de \mathbf{x} para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en (E, \mathcal{E}) para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso (\mathbf{x}_t) comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1207)$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribución $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de (\mathbf{x}_t) para $t \leq T_1$ es³⁰

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = T_1. \end{cases}$$

Comenzando en \mathbf{x}_{T_1} se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto \mathbf{x}_{T_2} de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes \mathbf{x}_t con tiempos de salto T_1, T_2, \dots . Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i , con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 7 (Supuesto 3.1, Davis [98]). Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \quad (1208)$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1038. Un espacio topológico E es llamado Luisin si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.

Definición 1039. Un espacio topológico E es llamado de Radón si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1040. E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada, tight.

Definición 1041. Una medida finita, λ en la σ -álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si

$$\lambda(E) = \sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \quad (1209)$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 684. Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.

1.55 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ -álgebra de Borel en E , que se denotará por \mathcal{E} .

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ -álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ -álgebra más general, (\mathcal{G}_t) tal que (X_t) sea \mathcal{E} -adaptado.

Definición 1042. Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en (E, \mathcal{E}) , si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B) \quad (1210)$$

³⁰Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

³¹Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en (E, \mathcal{E}) es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov³² (3.309) relativa a (\mathcal{G}_t) si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t) \quad s \leq t \in I, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (1212)$$

Definición 1043. Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) es llamada Semigrupo de Transición de Markov o Semigrupo de Transición si

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_sf)(x), \quad t, s \geq 0, \quad x \in E \quad f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 672. Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (3.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_sf(X_t) \quad t, s \geq 0, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (1213)$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t) .

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (3.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t) .

1.56 Primer Condición de Regularidad

Definición 1044. Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E .

Definición 1045 (HD1). Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición HD1 si, dada una medida de probabilidad μ en E , existe una σ -álgebra \mathcal{E}^* con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un \mathcal{E}^* -proceso E -valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ .

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas \mathbf{P}^x tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y bajo cualquier \mathbf{P}^x , X_t es de Markov con semigrupo (P_t) . \mathbf{P}^x puede considerarse como la distribución condicional de \mathbf{P} dado $X_0 = x$.

Definición 1046. Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en (E, \mathcal{E}) . La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso \mathcal{E} -Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que \mathbf{X} satisfaga las siguientes condiciones:

- i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E -valuado continuo por la derecha \mathcal{E}^* -adaptado a (\mathcal{G}_t) ;
- ii) $(\theta_t)_{t \geq 0}$ es una colección de operadores shift para X , es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \quad \text{y} \quad X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \quad (1214)$$

- iii) Para cualquier $x \in E$, $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t \in I}$ tiene la propiedad de Markov (3.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 1047 (HD2). Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.

Definición 1048. Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:

³²

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \quad H \in \mathcal{F}_{\geq t}. \quad (1211)$$

i) \mathbf{X} es una realización continua por la derecha, 1198, de (P_t) .

ii) \mathbf{X} satisface la condición HD2, 1199, relativa a \mathcal{G}_t .

iii) \mathcal{G}_t es aumentado y continuo por la derecha.

Lema 33 (Lema 4.2, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k(|x_n|t) \rightarrow P'_k t, \text{ u.o.c.}, \quad (1215)$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k(t - \bar{U}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (1216)$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k(t - \bar{V}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (1217)$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 34 (Lema 4.3, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}_k$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{U}_k - t)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{V}_k - t)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

y

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l , si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t . Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t . Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k .

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \quad (1218)$$

para $k = 1, \dots, K$. Para $i = 1, \dots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_j^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t . Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i . Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \quad (1219)$$

para $i = 1, \dots, d$.

Hacer

$$\begin{aligned} T^x(t) &= (T_1^x(t), \dots, T_K^x(t))', \\ I^x(t) &= (I_1^x(t), \dots, I_K^x(t))' \end{aligned}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \dots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \quad (1220)$$

$$Q^x(t) \geq 0, \quad (1221)$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \bar{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \quad (1222)$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \quad (1223)$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t)) dI_i^x(t) = 0, \quad (1224)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}^x(\cdot), \bar{T}^x(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (1225)$$

donde e es un vector de unos de dimensión d , C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 831:

Teorema 685 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \rightarrow \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \rightarrow \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)) \rightarrow (\bar{Q}(0), \bar{U}, \bar{V}), \quad (1226)$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t), T^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t)) \rightarrow (\bar{Q}(t), \bar{T}(t)) \text{ u.o.c.} \quad (1227)$$

Además, $(\bar{Q}(t), \bar{T}(t))$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\bar{Q}(t) = Q(0) + (\alpha t - \bar{U})^+ - (I - P)' M^{-1} (\bar{T}(t) - \bar{V})^+, \quad (1228)$$

$$\bar{Q}(t) \geq 0, \quad (1229)$$

$$\bar{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero}, \quad (1230)$$

$$\bar{I}(t) = et - C\bar{T}(t) \text{ es no decreciente}, \quad (1231)$$

$$\int_0^\infty (C\bar{Q}(t)) d\bar{I}(t) = 0, \quad (1232)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \quad (1233)$$

Definición 1049 (Definición 4.1, , Dai [94]). Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ en 3.325 es un flujo límite de la disciplina. Cualquier solución (3.326)-(3.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\bar{Q}(0)| + |\bar{U}| + |\bar{V}| = 1$, se tiene que $\bar{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Teorema 686 (Teorema 4.2, Dai[94]). Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \quad (1234)$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\bar{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|x| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado \bar{Q}^x es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 3.216-3.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ se le denotará por \mathcal{Q} .

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1050 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 15 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). Si el modelo de flujo definido por 3.216-3.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial \bar{x} satisface que $|\bar{x}| = |\bar{Q}(0)| + |\bar{A}(0)| + |\bar{B}(0)| \leq 1$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 428. Sea $(\bar{Q}, \bar{T}, \bar{T}^0)$ un flujo límite de 3.197 y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0) \right) \rightarrow (\bar{Q}_k(0), 0, 0, 0)$$

para $k = 1, \dots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\bar{T}(t)$ y $\bar{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\bar{T}(0) = \bar{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K [\bar{T}_k(t) + \bar{T}_k^0(t)] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\bar{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\bar{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \bar{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \bar{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\bar{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\bar{T}}_k^0(t)$$

para $\bar{Q}_k(t) > 0$.

Lema 35 (Lema 3.1 [91]). Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambien es estable.

Teorema 687 (Teorema 5.2 [91]). Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.

Teorema 688 (Teorema 5.1 [91]). La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.

Lema 36 (Lema 5.2 [106]). Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo

$$E(t) = \max \{n \geq 1 : \xi(1) + \dots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]} \right)^r \quad (1235)$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 689 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E} \left[\frac{N(t)}{t} \right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$.

Proposición 429 (Proposicin 5.1 [95]). Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adem s suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0. \quad (1236)$$

Proposición 430 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p) dt \right] \leq C_{p+1} (1 + |x|^{p+1}) \quad (1237)$$

Proposición 431 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X , sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C , entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s)) ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \quad (1238)$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 690 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (1239)$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \quad (1240)$$

Teorema 691 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\| P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \|_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 692 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)|P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot)|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]|} = 0.$$

Proposición 432 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0 \quad (1241)$$

Lema 16 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = \max(n \geq 1 : \zeta(1) + \dots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \quad (1242)$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 693 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (1243)$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 694 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{f_p}, t \rightarrow \infty, x \in X. \quad (1244)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 695 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} \|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0. \quad (1245)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q(0)]| = 0.$$

Teorema 696 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en (X, \mathcal{B}_X) , y π la distribución estacionaria de X .*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds = \pi(f) := \int f(x) \pi(dx) \quad (1246)$$

\mathbb{P} -c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 697 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, T \geq 0, \quad (1247)$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{X \rightarrow \infty\} \geq q. \quad (1248)$$

1.57 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sólo política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

- 1) $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(\omega)] = \bar{N} > 0$;
- 2) $\mathbb{E}[N(\omega)] \leq \bar{N}$ para cualquier valor de ω .

La manera en que atiende el servidor m -ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j , el servidor cambia a la cola j' con probabilidad $r_{j,j'}^m$.
- La n -ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j' , va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}^m(n)$, con $\delta_{j,j'}^m(n)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}[\delta_{j,j'}^m(1)] \geq 0$.
- Sea $\{p_j^m\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $(r_{j,j'}^m)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j^m r_{j,j'}^m \mathbb{E}[\delta_{j,j'}^m(i)]. \quad (1249)$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k -ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geeter [105].

Si denotamos por

- $Q_k(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t ;
- $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k ; para cada servidor m ;
- $B_m(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t ;
- $B_m^0(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t ,
- sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t .

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = (Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)), \quad (1250)$$

para $k = 1, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

1.57.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \dots, \xi_K, \eta_1, \dots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\xi_l (1)^{p+1} \right] &< \infty \text{ para } l = 1, \dots, K \text{ y} \\ \mathbb{E} \left[\eta_k (1)^{p+1} \right] &< \infty \text{ para } k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

donde \mathcal{A} es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \dots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en \mathbb{R}_+ , y un entero j_k , tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \quad (1251)$$

$$P \left\{ a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b \right\} \geq \int_a^b q_k(x) dx, \quad 0 \leq a < b. \quad (1252)$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X , cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición 1208.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de A3') es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [94, 95].

1.58 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [98], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [98], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [95], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [123]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en (Ω, \mathcal{F}) y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x \{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x -c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un \mathcal{F}_t -tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [94, 108].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 1051. Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ -finita y

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D) \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1052. El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = \inf \{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 673. i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [105]).

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}(\cdot) = \int_{\mathbb{X}} P_x(\cdot) \pi(dx),$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [95].

Definición 1053. Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [94]:

Lema 37 (Lema 3.1, Dai [94]). Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \quad (1253)$$

donde $\tau_B(\delta) = \inf \{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 38 (Lema 3.1, Dai [94]). Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.

Teorema 698 (Teorema 3.1, Dai [94]). Si existe un $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \quad (1254)$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x , entonces la ecuación (3.358) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos A1)-A3), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.59 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t ,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t , que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k .

- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t , que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k -ésima.

Supóngase que la función $\left(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}_m(\cdot), \bar{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \dots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \quad (1255)$$

para $m = 1, 2, \dots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$, ver [99]. Entonces $\left(\bar{Q}(t), \bar{T}_m(t), \bar{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por \mathcal{Q} , ver [99, 94, 95].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^M \mu_k \bar{T}_{m,k}(t), \quad (1256)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$.

$$\bar{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, K. \quad (1257)$$

$$\bar{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \bar{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \quad (1258)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$.

$$\sum_{k=1}^K \bar{T}_{m,k}^0(t) + \bar{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \dots, M. \quad (1259)$$

Definición 1054 (Definición 4.1, Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot), \bar{T}^0(\cdot)\right)$ en (3.347) es un flujo límite de la disciplina. Cualquier solución (3.348)-(3.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1055. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\bar{Q}(0)| + |\bar{U}| + |\bar{V}| = 1$, se tiene que $\bar{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 699 (Teorema 4.2, Dai [94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \quad (1260)$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\bar{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado \bar{Q}^x es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1056 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.*

Lema 17 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por (3.348)-(3.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial \bar{x} satisfice que $|\bar{x}| = |\bar{Q}(0)| + |\bar{A}(0)| + |\bar{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 700 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) *Para alguna constante κ_p , y para cada condición inicial $x \in X$*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p, \quad (1261)$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) *Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [Q_k(t)^r] = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r] \leq \kappa_r, \quad (1262)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X .

iii) *El primer momento converge con razón t^{p-1} :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q_k(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)]| = 0. \quad (1263)$$

iv) *La Ley Fuerte de los grandes números se cumple:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s) ds = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r], \quad \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \quad (1264)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 701 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + \max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js} \bar{N}_s} \right) \delta^* \quad (1265)$$

i) *Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 832.*

ii) *Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 830*

Dado el proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ definido en (5.11) que describe la dinámica del sistema de visitas cíclicas, si $U(t)$ es el residual de los tiempos de llegada al tiempo t entre dos usuarios consecutivos y $V(t)$ es el residual de los tiempos de servicio al tiempo t para el usuario que estás siendo atendido por el servidor. Sea \mathbb{X} el espacio de estados que puede tomar el proceso X .

Lema 39 (Lema 4.3, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}_k,$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{U}_k - t)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{V}_k - t)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

y

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea e es un vector de unos, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema (831):

Teorema 702 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \rightarrow \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \rightarrow \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)) \rightarrow (\bar{Q}(0), \bar{U}, \bar{V}), \quad (1266)$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t), T^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t)) \rightarrow (\bar{Q}(t), \bar{T}(t)) \text{ u.o.c.} \quad (1267)$$

Además, $(\bar{Q}(t), \bar{T}(t))$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\bar{Q}(t) = Q(0) + (\alpha t - \bar{U})^+ - (I - P)' M^{-1} (\bar{T}(t) - \bar{V})^+, \quad (1268)$$

$$\bar{Q}(t) \geq 0, \quad (1269)$$

$$\bar{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \quad (1270)$$

$$\bar{I}(t) = et - C\bar{T}(t) \text{ es no decreciente,} \quad (1271)$$

$$\int_0^\infty (C\bar{Q}(t)) d\bar{I}(t) = 0, \quad (1272)$$

$$\text{Condiciones en } (\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (1273)$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 433 (Proposición 4.2, Dai [94]). *Sea $(\bar{Q}, \bar{T}, \bar{T}^0)$ un flujo límite de 3.347 y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0) \right) \rightarrow (\bar{Q}_k(0), 0, 0, 0)$$

para $k = 1, \dots, K$. El flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\bar{T}(t)$ y $\bar{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\bar{T}(0) = \bar{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K [\bar{T}_k(t) + \bar{T}_k^0(t)] = t.$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t).$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\bar{T}}_k(t) = \rho_k$$

para $\bar{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \bar{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \bar{T}_j^0(t).$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\bar{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\bar{T}}_k^0(t),$$

para $\bar{Q}_k(t) > 0$.

Lema 40 (Lema 3.1, Chen [91]). Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.

Lema 41 (Lema 5.2, Gut [106]). Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo

$$E(t) = \max \{n \geq 1 : \xi(1) + \dots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]} \right)^r, \quad (1274)$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] < \infty$.

b) Las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 703 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo, Gut [106]). Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E} \left[\frac{N(t)}{t} \right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$.

Proposición 434 (Proposición 5.1, Dai y Sean [95]). Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0. \quad (1275)$$

Proposición 435 (Proposición 5.3, Dai y Sean [95]). Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p) dt \right] \leq C_{p+1} (1 + |x|^{p+1}). \quad (1276)$$

Proposición 436 (Proposición 5.4, Dai y Sean [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X , sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) dt \right],$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C , entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s)) ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \quad (1277)$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 704 (Teorema 5.5, Dai y Sean [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\}, \quad (1278)$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p. \quad (1279)$$

Teorema 705 (Teorema 6.2 Dai y Sean [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{f_p} \rightarrow 0,$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty,$$

donde

$$\|P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = \sup_{|g| \leq f} \left| \int \pi(dy) g(y) - \int P^t(x, dy) g(y) \right|,$$

para $x \in \mathbb{X}$.

Teorema 706 (Teorema 6.3, Dai y Sean [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)} |P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot)|_f = 0,$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)} |\mathbb{E}_x [Q_t] - \mathbb{E}_\pi [Q_0]| = 0.$$

Proposición 437 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0. \quad (1280)$$

Teorema 707 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\}, \quad (1281)$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 708 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, y π la distribución estacionaria de X .*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds = \pi(f) := \int f(x) \pi(dx), \quad (1282)$$

\mathbb{P} -c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 709 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \quad T \geq 0, \quad (1283)$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \quad (1284)$$

Demostración 1 (Teorema 832). *La demostración de este teorema se da a continuación:*

i) Utilizando la proposición 435 se tiene que la proposición 436 es cierta para $f(x) = 1 + |x|^p$.

ii) es consecuencia directa del Teorema 824.

iii) ver la demostración dada en Dai y Sean [95] páginas 1901-1902.

iv) ver Dai y Sean [95] páginas 1902-1903 ó [117].

1.59.1 Modelo de Flujo y Estabilidad

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^n \phi^k(i). \quad (1.1285)$$

suponiendo que el estado inicial de la red es $x = (q, a, b) \in X$, entonces para cada k

$$E_k^x(t) := \max\{n \geq 0 : A_k^x(0) + \psi_k(1) + \cdots + \psi_k(n-1) \leq t\} \quad (1.1286)$$

$$S_k^x(t) := \max\{n \geq 0 : B_k^x(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(n-1) \leq t\} \quad (1.1287)$$

Sea $T_k^x(t)$ el tiempo acumulado que el servidor $s(k)$ ha utilizado en los usuarios de la clase k en el intervalo $[0, t]$. Entonces se tienen las siguientes ecuaciones:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^k \Phi_k^l S_l^x(T_l^x) - S_k^x(T_k^x) \quad (1.1288)$$

$$Q^x(t) = (Q_1^x(t), \dots, Q_K^x(t))' \geq 0, \quad (1.1289)$$

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \dots, T_K^x(t))' \geq 0, \text{ es no decreciente} \quad (1.1290)$$

$$I_i^x(t) = t - \sum_{k \in C_i} T_k^x(t) \text{ es no decreciente} \quad (1.1291)$$

$$\int_0^\infty \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) dI_i^x(t) = 0 \quad (1.1292)$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } (Q^x(\cdot), T^x(\cdot)) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \quad (1.1293)$$

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \quad (1.1294)$$

Cualquier límite $\bar{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola. Si se hace $|q| \rightarrow \infty$ y se mantienen las componentes restantes fijas, de la condición inicial x , cualquier punto límite del proceso normalizado \bar{Q}^x es una solución del siguiente modelo de flujo, ver [94].

Definición 1057. *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $(Q^x(\cdot), T^x(\cdot))$ de las siguientes ecuaciones, donde $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_1(t), \dots, \bar{Q}_K(t))'$ y $\bar{T}(t) = (\bar{T}_1(t), \dots, \bar{T}_K(t))'$*

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t) + \sum_{l=1}^k P_{lk} \mu_l \bar{T}_l(t) \quad (1.1295)$$

$$\bar{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, K, \quad (1.1296)$$

$$\bar{T}_k(0) = 0, \text{ y } \bar{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente,} \quad (1.1297)$$

$$\bar{T}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \bar{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \quad (1.1298)$$

$$\bar{T}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) dI_i^x(t) = 0 \quad (1.1299)$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } (Q^x(\cdot), T^x(\cdot)) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \quad (1.1300)$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 3.216-3.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ se le denotará por \mathcal{Q} .

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1058. *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $(\bar{A}(0), \bar{B}(0)) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 3.216-3.182, junto con la condición:*

$$\bar{Q}(t) = \bar{Q}(0) + (\alpha t - \bar{A}(0))^+ - (I - P') M (\bar{T}(t) - \bar{B}(0))^+ \quad (1.1301)$$

Definición 1059. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en [91].

Lema 18. *Si el modelo de flujo definido por 3.216-3.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial \bar{x} satisface que $|\bar{x}| = |\bar{Q}(0)| + |\bar{A}(0)| + |\bar{B}(0)| \leq 1$.*

1.59.2 Resultados principales

Supuestos necesarios sobre la red

Supuestos 8. *A1) $\psi_1, \dots, \psi_K, \eta_1, \dots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E} [\psi_l(1)^{p+1}] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$

$$\mathbb{E} [\eta_k(1)^{p+1}] < \infty \text{ para } k = 1, \dots, K.$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en \mathbb{R}_+ , y un entero j_k , tal que

$$P(\psi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \quad (1.1302)$$

$$P(\psi_k(1) + \dots + \psi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x) dx \text{ y} \quad (1.1303)$$

$$\int_0^\infty q_k(x) dx > 0 \quad (1.1304)$$

El argumento dado en [?] en el lema 33 se puede aplicar para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños. Entonces la condición A3) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X , cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 710. Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:

i) Para alguna constante κ_p , y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(t)|^p] ds \leq \kappa_p \quad (1.1305)$$

donde p es el entero dado por A2). Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x[Q_k(t)^r] = \mathbb{E}_\pi[Q_k(0)^r] \leq \kappa_r \quad (1.1306)$$

para $r = 1, \dots, p$ y $k = 1, \dots, K$.

iii) EL primer momento converge con razón t^{p-1} :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0. \quad (1.1307)$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s) ds = \mathbb{E}_\pi[Q_k(0)^r] \quad (1.1308)$$

\mathbb{P} -c.s., para $r = 1, \dots, p$ y $k = 1, \dots, K$.

Demostración 2. La demostración de este resultado se da aplicando los teoremas 782, 824, 825 y 785

1.59.3 Definiciones Generales

Definimos un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada. Bajo cualquier *preemptive buffer priority* disciplina de servicio, el estado $\mathbb{X}(t)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}(t) = (Q_k(t), A_l(t), B_k(t) : k = 1, 2, \dots, K, l \in \mathcal{A}) \quad (1.1309)$$

donde $Q_k(t)$ es la longitud de la cola para los usuarios de la clase k , incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k(t)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio. Los tiempos de arribo residuales, que son iguales al tiempo que queda hasta que el próximo usuario de la clase k llega, se denotan por $A_k(t)$. Tanto $B_k(t)$ como $A_k(t)$ se suponen continuos por la derecha.

Sea \mathbb{X} el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x = (q, a, b)$ un estado genérico en \mathbb{X} , la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = (q, a, b) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x\| = |q| + |a| + |b|$. En [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso \mathbb{X} es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho en el espacio de estadio medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, est definida en (Ω, \mathcal{F}) y est adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; $\{P_x, x \in X\}$ son medidas de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) tales que para todo $x \in X$

$$P_x \{\mathbb{X}(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x -c.s. Donde τ es un \mathcal{F}_t -tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{\mathbb{X}(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la sigma algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(\mathbb{X}(t) \in D)$$

Definición 1060. Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ -finita y

$$\pi(D) = \int_X P^t(x, D) \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1061. El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = \inf \{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

- Si X es Harris recurrente, entonces una única medida invariante π existe ([105]).
- Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama *Harris recurrente positiva*.
- Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) [= \int_X P_x(\cdot) \pi(dx)$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, as, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π

Definición 1062. Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.³³

³³En [116] muestran que si $P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ solamente para uno conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris recurrente

1.59.4 Definiciones y Descripción del Modelo

El modelo está compuesto por c colas de capacidad infinita, etiquetadas de 1 a c las cuales son atendidas por s servidores. Los servidores atienden de acuerdo a una cadena de Markov independiente $(X_n^i)_n$ con $1 \leq i \leq s$ y $n \in \{1, 2, \dots, c\}$ con la misma matriz de transición $r_{k,l}$ y única medida invariante (p_k) . Cada servidor permanece atendiendo en la cola un periodo llamado de visita y determinada por la política de servicio asignada a la cola.

Los usuarios llegan a la cola k con una tasa λ_k y son atendidos a una razón μ_k . Las sucesiones de tiempos de interarribo $(\tau_k(n))_n$, la de tiempos de servicio $(\sigma_k^i(n))_n$ y la de tiempos de cambio $(\sigma_{k,l}^{0,i}(n))_n$ requeridas en la cola k para el servidor i son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas con distribución general independiente de i , con media $\sigma_k = \frac{1}{\mu_k}$, respectivamente $\sigma_{k,l}^0 = \frac{1}{\mu_{k,l}^0}$, e independiente de las cadenas de Markov $(X_n^i)_n$. Además se supone que los tiempos de interarribo se asume son acotados, para cada $\rho_k = \lambda_k \sigma_k < s$ para asegurar la estabilidad de la cola k cuando opera como una cola $M/GM/1$.

1.59.5 Políticas de Servicio

Una política de servicio determina el número de usuarios que serán atendidos sin interrupción en periodo de servicio por los servidores que atienden a la cola. Para un solo servidor esta se define a través de una función f donde $f(x, a)$ es el número de usuarios que son atendidos sin interrupción cuando el servidor llega a la cola y encuentra x usuarios esperando dado el tiempo transcurrido de interarribo a . Sea $v(x, a)$ la duración del periodo de servicio para una sola condición inicial (x, a) .

Las políticas de servicio consideradas satisfacen las siguientes propiedades:

- i) Hay conservación del trabajo, es decir

$$v(x, a) = \sum_{l=1}^{f(x,a)} \sigma(l)$$

con $f(0, a) = v(0, a) = 0$, donde $(\sigma(l))_l$ es una sucesión independiente e idénticamente distribuida de los tiempos de servicio solicitados.

- ii) La selección de usuarios para se atendidos es independiente de sus correspondientes tiempos de servicio y del pasado hasta el inicio del periodo de servicio. Así las distribución (f, v) no depende del orden en el cuál son atendidos los usuarios.
- iii) La política de servicio es monótona en el sentido de que para cada $a \geq 0$ los números $f(x, a)$ son monótonos en distribución en x y su límite en distribución cuando $x \rightarrow \infty$ es una variable aleatoria F^{*0} que no depende de a .
- iv) El número de usuarios atendidos por cada servidor es acotado por $f^{min}(x)$ de la longitud de la cola x que además converge monótonamente en distribución a F^* cuando $x \rightarrow \infty$

1.59.6 Proceso de Estados

El sistema de colas se describe por medio del proceso de Markov $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$ como se define a continuación. El estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = (Q(t), P(t), A(t), R(t), C(t))$$

donde

- $Q(t) = (Q_k(t))_{k=1}^c$, número de usuarios en la cola k al tiempo t .
- $P(t) = (P^i(t))_{i=1}^s$, es la posición del servidor i .
- $A(t) = (A_k(t))_{k=1}^c$, es el residual del tiempo de arribo en la cola k al tiempo t .
- $R(t) = (R_k^i(t), R_{k,l}^{0,i}(t))_{k,l,i=1}^{c,c,s}$, el primero es el residual del tiempo de servicio del usuario atendido por servidor i en la cola k al tiempo t , la segunda componente es el residual del tiempo de cambio del servidor i de la cola k a la cola l al tiempo t .

- $C(t) = (C_k^i(t))_{k,i=1}^{c,s}$, es la componente correspondiente a la cola k y al servidor i que está determinada por la política de servicio en la cola k y que hace al proceso $X(t)$ un proceso de Markov.

Todos los procesos definidos arriba se suponen continuos por la derecha.

El proceso X tiene la propiedad fuerte de Markov y su espacio de estados es el espacio producto

$$\mathcal{X} = \mathbb{N}^c \times E^s \times \mathbb{R}_+^c \times \mathbb{R}_+^{cs} \times \mathbb{R}_+^{c^2s} \times \mathcal{C}$$

donde $E = \{1, 2, \dots, c\}^2 \cup \{1, 2, \dots, c\}$ y \mathcal{C} depende de las políticas de servicio.

1.59.7 Introducción

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s , única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(x)] = \bar{N} > 0 \quad (1.1310)$$

$$2. \quad \mathbb{E}[N(x)] \leq \bar{N} \quad (1.1311)$$

para cualquier valor de x .

La manera en que atiende el servidor m -ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j , el servidor se cambia a la cola j' con probabilidad $r_{j,j'}^m = r_{j,j'}$
- La n -ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}[\delta_{j,j'}(1)] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $(r_{j,j'})$.
- Finalmente, se define

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}[\delta_{j,j'}(1)]. \quad (1.1312)$$

1.59.8 Colas Cíclicas

El *token passing ring* es una estación de un solo servidor con K clases de usuarios. Cada clase tiene su propio regulador en la estación. Los usuarios llegan al regulador con razón α_k y son atendidos con tasa μ_k .

La red se puede modelar como un Proceso de Markov con espacio de estados continuo, continuo en el tiempo:

$$X(t)^T = (Q_k(t), A_l(t), B_k(t), B_k^0(t), C(t) : k = 1, \dots, K, l \in \mathcal{A}) \quad (1.1313)$$

donde $Q_k(t)$, $B_k(t)$ y $A_k(t)$ se define como en 3.210, $B_k^0(t)$ es el tiempo residual de cambio de la clase k a la clase $k+1 \pmod{K}$; $C(t)$ indica el número de servicios que han sido comenzados y/o completados durante la sesión activa del buffer.

Los parámetros cruciales son la carga nominal de la cola k : $\beta_k = \alpha_k/\mu_k$ y la carga total es $\rho_0 = \sum \beta_k$, la media total del tiempo de cambio en un ciclo del token está definido por

$$u^0 = \sum_{k=1}^K \mathbb{E}[\eta_k^0(1)] = \sum_{k=1}^K \frac{1}{\mu_k^0} \quad (1.1314)$$

El proceso de la longitud de la cola $Q_k^x(t)$ y el proceso de acumulación del tiempo de servicio $T_k^x(t)$ para el buffer k y para el estado inicial x se definen como antes. Sea $T_k^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo

t que el token tarda en cambiar del buffer k al $k+1 \pmod K$. Suponga que la función $(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot))$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T^{x,0}(|x|t) \right) \quad (1.1315)$$

cuando $|x| \rightarrow \infty$. Entonces $(\overline{Q}(t), \overline{T}(t), \overline{T}^0(t))$ es un flujo límite retrasado del token ring.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado

Proposición 438. Sea $(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0)$ un flujo límite de 3.197 y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0) \right) \rightarrow (\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0)$$

para $k = 1, \dots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K [\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

1.59.9 Resultados Previos

Lema 19. El proceso estocástico Φ es un proceso de markov fuerte, temporalmente homogéneo, con trayectorias muestrales continuas por la derecha, cuyo espacio de estados Y es igual a $X \times \mathbb{R}$

Proposición 439. Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0 \quad (1.1316)$$

Lema 20. Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = \max(n \geq 1 : \zeta(1) + \dots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \quad (1.1317)$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 711. Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (1.1318)$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 712. Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{f_p}, t \rightarrow \infty, x \in X. \quad (1.1319)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 713. Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} \|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0. \quad (1.1320)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q(0)]| = 0.$$

Teorema 714. Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en (X, \mathcal{B}_X) , y π la distribución estacionaria de X .

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds = \pi(f) := \int f(x) \pi(dx) \quad (1.1321)$$

\mathbb{P} -c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

1.59.10 Teorema de Estabilidad: Descripción

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s , única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0 \quad (1.1322)$$

2.

$$\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N} \quad (1.1323)$$

para cualquier valor de x .

La manera en que atiende el servidor m -ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j , el servidor se cambia a la cola j' con probabilidad $r_{j,j'}^m = r_{j,j'}$

- La n -ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}[\delta_{j,j'}(1)] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $(r_{j,j'})$.
- Finalmente, se define

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}[\delta_{j,j'}(1)]. \quad (1.1324)$$

1.60 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sola política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

- 1) $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(\omega)] = \bar{N} > 0$;
- 2) $\mathbb{E}[N(\omega)] \leq \bar{N}$ para cualquier valor de ω .

La manera en que atiende el servidor m -ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j , el servidor cambia a la cola j' con probabilidad $r_{j,j'}^m$.
- La n -ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j' , va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}^m(n)$, con $\delta_{j,j'}^m(n)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}[\delta_{j,j'}^m(1)] \geq 0$.
- Sea $\{p_j^m\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $(r_{j,j'}^m)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j^m r_{j,j'}^m \mathbb{E}[\delta_{j,j'}^m(i)]. \quad (1.1325)$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k -ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geeter [105].

Si denotamos por

- $Q_k(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t ;
- $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k ; para cada servidor m ;

- $B_m(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t ;
- $B_m^0(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t ,
- sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t .

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = (Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)), \quad (1.1326)$$

para $k = 1, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

1.60.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \dots, \xi_K, \eta_1, \dots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\xi_l(1)^{p+1}] &< \infty \text{ para } l = 1, \dots, K \text{ y} \\ \mathbb{E} [\eta_k(1)^{p+1}] &< \infty \text{ para } k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

donde \mathcal{A} es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \dots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en \mathbb{R}_+ , y un entero j_k , tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \quad (1.1327)$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x) dx, \quad 0 \leq a < b. \quad (1.1328)$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X , cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición 1208.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de A3') es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [94, 95].

1.61 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [98], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [98], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [95], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [123]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en (Ω, \mathcal{F}) y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x -c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un \mathcal{F}_t -tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [94, 108].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 1063. Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ -finita y

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D) \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1064. El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 674. i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Gettoor [105]).

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbb{X}} P_x(\cdot) \pi(dx),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [95].

Definición 1065. Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D$, $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [94]:

Lema 42 (Lema 3.1, Dai [94]). Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \quad (1.1329)$$

donde $\tau_B(\delta) = \inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 43 (Lema 3.1, Dai [94]). Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.

Teorema 715 (Teorema 3.1, Dai [94]). Si existe un $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \quad (1.1330)$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x , entonces la ecuación (3.358) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos A1)-A3), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.62 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t ,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t , que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k .
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t , que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k -ésima.

Supóngase que la función $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}_m(\cdot), \bar{T}_m^0(\cdot))$ para $m = 1, 2, \dots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t) \right) \quad (1.1331)$$

para $m = 1, 2, \dots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$, ver [99]. Entonces $(\bar{Q}(t), \bar{T}_m(t), \bar{T}_m^0(t))$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por \mathcal{Q} , ver [99, 94, 95].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^M \mu_k \bar{T}_{m,k}(t), \quad (1.1332)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$.

$$\bar{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, K. \quad (1.1333)$$

$$\bar{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \bar{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \quad (1.1334)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$.

$$\sum_{k=1}^K \bar{T}_{m,k}^0(t) + \bar{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \dots, M. \quad (1.1335)$$

Definición 1066 (Definición 4.1, Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot), \bar{T}^0(\cdot))$ en (3.347) es un flujo límite de la disciplina. Cualquier solución (3.348)-(3.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1067. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\bar{Q}(0)| + |\bar{U}| + |\bar{V}| = 1$, se tiene que $\bar{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 716 (Teorema 4.2, Dai [94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t). \quad (1.1336)$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\bar{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado \bar{Q}^x es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1068 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.*

Lema 21 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por (3.348)-(3.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial \bar{x} satisface que $|\bar{x}| = |\bar{Q}(0)| + |\bar{A}(0)| + |\bar{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 717 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) *Para alguna constante κ_p , y para cada condición inicial $x \in X$*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p, \quad (1.1337)$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) *Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [Q_k(t)^r] = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r] \leq \kappa_r, \quad (1.1338)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X .

iii) *El primer momento converge con razón t^{p-1} :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q_k(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)]| = 0. \quad (1.1339)$$

iv) *La Ley Fuerte de los grandes números se cumple:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s) ds = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r], \quad \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \quad (1.1340)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 718 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + \max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js} \bar{N}_s} \right) \delta^* \quad (1.1341)$$

i) *Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 832.*

ii) *Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 830*

1.63 Modelo de Flujo

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Sea x el número de usuarios en la cola esperando por servicio y $N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política dada y fija mientras el servidor permanece dando servicio, entonces se asume que:

$$(S1.) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(x)] = \bar{N} > 0. \quad (1.1342)$$

$$(S2.) \quad \mathbb{E}[N(x)] \leq \bar{N}, \quad (1.1343)$$

para cualquier valor de x .

El tiempo que tarda un servidor en volver a dar servicio después de abandonar la cola inmediata anterior y llegar a la próxima se llama tiempo de traslado o de cambio de cola, al momento de la n -ésima visita del servidor a la cola j se genera una sucesión de variables aleatorias $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con la propiedad de que $\mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)] \geq 0$.

Se define

$$\delta^* := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)]. \quad (1.1344)$$

Los tiempos entre arribos a la cola k , son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos. Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos. Para la k -ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Para el caso más sencillo podemos definir un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada, el estado $\mathbb{X}(t)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}(t) = (Q_k(t), A_l(t), B_k(t) : k = 1, 2, \dots, K, l \in \mathcal{A}), \quad (1.1345)$$

donde $Q_k(t)$ es la longitud de la cola k para los usuarios esperando servicio, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k(t)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio.

Los tiempos entre arribos residuales, que son el tiempo que queda hasta que el próximo usuario llega a la cola para recibir servicio, se denotan por $A_k(t)$. Tanto $B_k(t)$ como $A_k(t)$ se suponen continuos por la derecha [?].

Sea \mathcal{X} el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x = (q, a, b)$ un estado genérico en \mathbb{X} , la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = (q, a, b) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x\| = |q| + |a| + |b|$. En [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso \mathbb{X} es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de *Borel Derecho* en el espacio de estados medible $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(\mathbb{X}(t) \in D).$$

Definición 1069. Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ -finita y

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D) \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1070. El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = \inf \{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Definición 1071. Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

Nota 675. i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π ([105]).

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso a la medida se le llama **Harris recurrente positiva**.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria; se define

$$P_{\pi}(\cdot) = \int_{\mathbb{X}} P_x(\cdot) \pi(dx).$$

Se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, así, el proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_{π} .

iv) En [116] se muestra que si $P_x \{\tau_D < \infty\} = 1$ incluso para solamente un conjunto pequeño, entonces el proceso de Harris es recurrente.

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = (Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)) \quad (1.1346)$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \quad (1.1347)$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k , incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k -ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k .
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([94]).

Dada una condición inicial $x \in \mathcal{X}$, $Q_k^x(t)$ es la longitud de la cola k al tiempo t y $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en atender a los usuarios de la cola k . De igual manera se define $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en cambiar de cola para volver a atender a los usuarios.

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \quad (1.1348)$$

$$\bar{T}_m^x(t) = \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \quad (1.1349)$$

$$\bar{T}_m^{x,0}(t) = \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t). \quad (1.1350)$$

Cualquier límite $\bar{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola, al conjunto de todos los posibles flujos límite se le llamará **modelo de flujo**, ([?]).

Definición 1072. *Un flujo límite para un sistema de visitas bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}_m(\cdot), \bar{T}_m^0(\cdot))$ de las siguientes ecuaciones, donde $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_1(t), \dots, \bar{Q}_K(t))$ y $\bar{T}(t) = (\bar{T}_1(t), \dots, \bar{T}_K(t))$*

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^M \mu_k \bar{T}_{m,k}(t) \quad (1.1351)$$

$$\bar{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, K, \quad (1.1352)$$

$$\bar{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \bar{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \quad (1.1353)$$

$$\sum_{k=1}^K \bar{T}_{m,k}^0(t) + \bar{T}_{m,k}(t) = t \text{ param } = 1, 2, \dots, M \quad (1.1354)$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en (3.216)-(3.219) se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ se le denotará por \mathcal{Q} .

Definición 1073. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.*

1.64 Estabilidad de los Sistemas de Visitas Cíclicas

Es necesario realizar los siguientes supuestos, ver ([?]) y ([95]):

A1) $\xi_1, \dots, \xi_K, \eta_1, \dots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\xi_k(1)^{p+1} \right] &< \infty \text{ para } k \in \mathcal{A} \text{ y} \\ \mathbb{E} \left[\eta_k(1)^{p+1} \right] &< \infty \text{ para } k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en \mathbb{R}_+ , y un entero j_k , tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \quad (1.1355)$$

$$P(\xi_k(1) + \dots + \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x) dx \text{ y} \quad (1.1356)$$

$$\int_0^\infty q_k(x) dx > 0 \quad (1.1357)$$

En [?] se da un argumento para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños. Entonces la condición A3) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X , cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 719. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) *Para alguna constante κ_p , y para cada condición inicial $x \in X$*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(t)|^p] ds \leq \kappa_p \quad (1.1358)$$

donde p es el entero dado por A2).

Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) *Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [Q_k(t)^r] = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r] \leq \kappa_r \quad (1.1359)$$

para $r = 1, \dots, p$ y $k = 1, \dots, K$.

iii) *El primer momento converge con razón t^{p-1} :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q(0)]| = 0. \quad (1.1360)$$

iv) *Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s) ds = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r] \quad (1.1361)$$

\mathbb{P} -c.s., para $r = 1, \dots, p$ y $k = 1, \dots, K$.

Teorema 720. *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \text{ con } T \geq 0, \quad (1.1362)$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \quad (1.1363)$$

1.65 Resultados principales

En el caso particular de un modelo con un solo servidor, $M = 1$, se tiene que si se define

Definición 1074.

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + \max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{N} \right) \delta^*. \quad (1.1364)$$

entonces

Teorema 721. i) *Si $\rho < 1$, entonces la red es estable, es decir el teorema (786) se cumple.*

ii) *De lo contrario, es decir, si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, el teorema (787).*

1.66 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sólo política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

- 1) $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(\omega)] = \bar{N} > 0$;
- 2) $\mathbb{E}[N(\omega)] \leq \bar{N}$ para cualquier valor de ω .

La manera en que atiende el servidor m -ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j , el servidor cambia a la cola j' con probabilidad $r_{j,j'}^m$.
- La n -ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j' , va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}^m(n)$, con $\delta_{j,j'}^m(n)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}[\delta_{j,j'}^m(1)] \geq 0$.
- Sea $\{p_j^m\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $(r_{j,j'}^m)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j^m r_{j,j'}^m \mathbb{E}[\delta_{j,j'}^m(i)]. \quad (1.1365)$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k -ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geeter [105].

Si denotamos por

- $Q_k(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t ;
- $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k ; para cada servidor m ;
- $B_m(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t ;
- $B_m^0(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t ,
- sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t .

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = (Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)), \quad (1.1366)$$

para $k = 1, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

1.66.1 Supuestos Básicos

- A1) Los procesos $\xi_1, \dots, \xi_K, \eta_1, \dots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.
- A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi_l(1)^{p+1}] &< \infty \text{ para } l = 1, \dots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}[\eta_k(1)^{p+1}] &< \infty \text{ para } k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

donde \mathcal{A} es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \dots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en \mathbb{R}_+ , y un entero j_k , tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \quad (1.1367)$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x) dx, \quad 0 \leq a < b. \quad (1.1368)$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X , cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición 1208.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de A3') es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [94, 95].

1.67 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [98], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [98], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [95], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [123]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en (Ω, \mathcal{F}) y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x -c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un \mathcal{F}_t -tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [94, 108].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 1075. Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ -finita y

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D) \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1076. El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 676. i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Gethoor [105]).

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}(\cdot) = \int_{\mathbb{X}} P_x(\cdot) \pi(dx),$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [95].

Definición 1077. Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [94]:

Lema 44 (Lema 3.1, Dai [94]). Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \quad (1.1369)$$

donde $\tau_B(\delta) = \inf \{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 45 (Lema 3.1, Dai [94]). Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.

Teorema 722 (Teorema 3.1, Dai [94]). Si existe un $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \quad (1.1370)$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x , entonces la ecuación (3.358) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos A1)-A3), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.68 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t ,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t , que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k .
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t , que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k -ésima.

Supóngase que la función $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}_m(\cdot), \bar{T}_m^0(\cdot))$ para $m = 1, 2, \dots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t) \right) \quad (1.1371)$$

para $m = 1, 2, \dots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$, ver [99]. Entonces $(\bar{Q}(t), \bar{T}_m(t), \bar{T}_m^0(t))$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por \mathcal{Q} , ver [99, 94, 95].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^M \mu_k \bar{T}_{m,k}(t), \quad (1.1372)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$.

$$\bar{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, K. \quad (1.1373)$$

$$\bar{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \bar{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \quad (1.1374)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$.

$$\sum_{k=1}^K \bar{T}_{m,k}^0(t) + \bar{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \dots, M. \quad (1.1375)$$

Definición 1078 (Definición 4.1, Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot), \bar{T}^0(\cdot))$ en (3.347) es un flujo límite de la disciplina. Cualquier solución (3.348)-(3.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1079. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\bar{Q}(0)| + |\bar{U}| + |\bar{V}| = 1$, se tiene que $\bar{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 723 (Teorema 4.2, Dai [94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t). \quad (1.1376)$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\bar{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado \bar{Q}^x es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1080 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.*

Lema 22 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por (3.348)-(3.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial \bar{x} satisface que $|\bar{x}| = |\bar{Q}(0)| + |\bar{A}(0)| + |\bar{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 724 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) *Para alguna constante κ_p , y para cada condición inicial $x \in X$*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p, \quad (1.1377)$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [Q_k(t)^r] = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r] \leq \kappa_r, \quad (1.1378)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X .

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1} :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q_k(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)]| = 0. \quad (1.1379)$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números se cumple:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s) ds = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r], \quad \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \quad (1.1380)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 725 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + \max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js} \bar{N}_s} \right) \delta^* \quad (1.1381)$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 832.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 830

1.69 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sola política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

- 1) $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbb{E} [N(\omega)] = \bar{N} > 0$;
- 2) $\mathbb{E} [N(\omega)] \leq \bar{N}$ para cualquier valor de ω .

La manera en que atiende el servidor m -ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j , el servidor cambia a la cola j' con probabilidad $r_{j,j'}^m$.
- La n -ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j' , va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}^m(n)$, con $\delta_{j,j'}^m(n)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E} [\delta_{j,j'}^m(1)] \geq 0$.
- Sea $\{p_j^m\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $(r_{j,j'}^m)$, se supone que ésta existe.

- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j^m r_{j,j'}^m \mathbb{E} \left[\delta_{j,j'}^m(i) \right]. \quad (1.1382)$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k -ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geeter [105].

Si denotamos por

- $Q_k(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t ;
- $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k ; para cada servidor m ;
- $B_m(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t ;
- $B_m^0(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t ,
- sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t .

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = (Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)), \quad (1.1383)$$

para $k = 1, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

1.69.1 Supuestos Básicos

- A1) Los procesos $\xi_1, \dots, \xi_K, \eta_1, \dots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.
- A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\xi_l(1)^{p+1} \right] &< \infty \text{ para } l = 1, \dots, K \text{ y} \\ \mathbb{E} \left[\eta_k(1)^{p+1} \right] &< \infty \text{ para } k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

donde \mathcal{A} es la clase de posibles arribos.

- A3) Para cada $k = 1, 2, \dots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en \mathbb{R}_+ , y un entero j_k , tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \quad (1.1384)$$

$$P \left\{ a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b \right\} \geq \int_a^b q_k(x) dx, \quad 0 \leq a < b. \quad (1.1385)$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

- A3') Para el Proceso de Markov X , cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición 1208.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de A3') es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [94, 95].

1.70 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [98], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [98], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [95], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [123]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en (Ω, \mathcal{F}) y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x \{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x -c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un \mathcal{F}_t -tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [94, 108].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 1081. Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ -finita y

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D) \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1082. El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = \inf \{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 677. i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Gettoor [105]).

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbb{X}} P_x(\cdot) \pi(dx),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [95].

Definición 1083. Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [94]:

Lema 46 (Lema 3.1, Dai [94]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x [\tau_B(\delta)] < \infty, \quad (1.1386)$$

donde $\tau_B(\delta) = \inf \{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 47 (Lema 3.1, Dai [94]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 726 (Teorema 3.1, Dai [94]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E} |X^x(|x|\delta)| = 0, \quad (1.1387)$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x , entonces la ecuación (3.358) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos A1)-A3), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.71 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t ,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t , que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k .
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t , que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k -ésima.

Supóngase que la función $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}_m(\cdot), \bar{T}_m^0(\cdot))$ para $m = 1, 2, \dots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t) \right) \quad (1.1388)$$

para $m = 1, 2, \dots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$, ver [99]. Entonces $(\bar{Q}(t), \bar{T}_m(t), \bar{T}_m^0(t))$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por \mathcal{Q} , ver [99, 94, 95].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^M \mu_k \bar{T}_{m,k}(t), \quad (1.1389)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$.

$$\bar{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, K. \quad (1.1390)$$

$$\bar{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \bar{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \quad (1.1391)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$.

$$\sum_{k=1}^K \bar{T}_{m,k}^0(t) + \bar{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \dots, M. \quad (1.1392)$$

Definición 1084 (Definición 4.1, Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot), \bar{T}^0(\cdot))$ en (3.347) es un flujo límite de la disciplina. Cualquier solución (3.348)-(3.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1085. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\bar{Q}(0)| + |\bar{U}| + |\bar{V}| = 1$, se tiene que $\bar{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 727 (Teorema 4.2, Dai [94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t). \quad (1.1393)$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\bar{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado \bar{Q}^x es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1086 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.*

Lema 23 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por (3.348)-(3.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial \bar{x} satisface que $|\bar{x}| = |\bar{Q}(0)| + |\bar{A}(0)| + |\bar{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 728 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) *Para alguna constante κ_p , y para cada condición inicial $x \in X$*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p, \quad (1.1394)$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) *Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [Q_k(t)^r] = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r] \leq \kappa_r, \quad (1.1395)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X .

iii) *El primer momento converge con razón t^{p-1} :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q_k(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)]| = 0. \quad (1.1396)$$

iv) *La Ley Fuerte de los grandes números se cumple:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s) ds = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r], \quad \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \quad (1.1397)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 729 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + \max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js} \bar{N}_s} \right) \delta^* \quad (1.1398)$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 832.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 830

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

1.71.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \dots, \xi_K, \eta_1, \dots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\xi_l (1)^{p+1} \right] &< \infty \text{ para } l = 1, \dots, K \text{ y} \\ \mathbb{E} \left[\eta_k (1)^{p+1} \right] &< \infty \text{ para } k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

donde \mathcal{A} es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \dots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en \mathbb{R}_+ , y un entero j_k , tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \quad (1.1399)$$

$$P \left\{ a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b \right\} \geq \int_a^b q_k(x) dx, \quad 0 \leq a < b. \quad (1.1400)$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X , cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición 1208.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de A3') es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [94, 95].

1.72 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [98], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [98], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [95], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [123]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en (Ω, \mathcal{F}) y está

adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x \{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x -c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un \mathcal{F}_t -tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [94, 108].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 1087. Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ -finita y

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D) \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1088. El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = \inf \{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 678. i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [105]).

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbb{X}} P_x(\cdot) \pi(dx),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [95].

Definición 1089. Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D$, $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [94]:

Lema 48 (Lema 3.1, Dai [94]). Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{1.1401}$$

donde $\tau_B(\delta) = \inf \{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 49 (Lema 3.1, Dai [94]). Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.

Teorema 730 (Teorema 3.1, Dai [94]). Si existe un $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{1.1402}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x , entonces la ecuación (3.358) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos A1)-A3), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.73 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t ,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t , que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k .
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t , que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k -ésima.

Supóngase que la función $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}_m(\cdot), \bar{T}_m^0(\cdot))$ para $m = 1, 2, \dots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t) \right) \quad (1.1403)$$

para $m = 1, 2, \dots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$, ver [99]. Entonces $(\bar{Q}(t), \bar{T}_m(t), \bar{T}_m^0(t))$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por \mathcal{Q} , ver [99, 94, 95].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^M \mu_k \bar{T}_{m,k}(t), \quad (1.1404)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$.

$$\bar{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, K. \quad (1.1405)$$

$$\bar{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \bar{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \quad (1.1406)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$.

$$\sum_{k=1}^K \bar{T}_{m,k}^0(t) + \bar{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \dots, M. \quad (1.1407)$$

Definición 1090 (Definición 4.1, Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot), \bar{T}^0(\cdot))$ en (3.347) es un flujo límite de la disciplina. Cualquier solución (3.348)-(3.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1091. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\bar{Q}(0)| + |\bar{U}| + |\bar{V}| = 1$, se tiene que $\bar{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 731 (Teorema 4.2, Dai [94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t). \quad (1.1408)$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\bar{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado \bar{Q}^x es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1092 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.*

Lema 24 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por (3.348)-(3.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial \bar{x} satisface que $|\bar{x}| = |\bar{Q}(0)| + |\bar{A}(0)| + |\bar{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 732 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) *Para alguna constante κ_p , y para cada condición inicial $x \in X$*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p, \quad (1.1409)$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) *Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [Q_k(t)^r] = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r] \leq \kappa_r, \quad (1.1410)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X .

iii) *El primer momento converge con razón t^{p-1} :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q_k(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)]| = 0. \quad (1.1411)$$

iv) *La Ley Fuerte de los grandes números se cumple:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s) ds = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r], \quad \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \quad (1.1412)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 733 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + \max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js} \bar{N}_s} \right) \delta^* \quad (1.1413)$$

i) *Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 832.*

ii) *Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 830*

1.74 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sólo política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

- 1) $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(\omega)] = \bar{N} > 0$;
- 2) $\mathbb{E}[N(\omega)] \leq \bar{N}$ para cualquier valor de ω .

La manera en que atiende el servidor m -ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j , el servidor cambia a la cola j' con probabilidad $r_{j,j'}^m$.
- La n -ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j' , va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}^m(n)$, con $\delta_{j,j'}^m(n)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}[\delta_{j,j'}^m(1)] \geq 0$.
- Sea $\{p_j^m\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $(r_{j,j'}^m)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j^m r_{j,j'}^m \mathbb{E}[\delta_{j,j'}^m(i)]. \quad (1.1414)$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k -ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geeter [105].

Si denotamos por

- $Q_k(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t ;
- $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k ; para cada servidor m ;
- $B_m(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t ;
- $B_m^0(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t ,
- sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t .

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = (Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)), \quad (1.1415)$$

para $k = 1, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

1.74.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \dots, \xi_K, \eta_1, \dots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\xi_l (1)^{p+1} \right] &< \infty \text{ para } l = 1, \dots, K \text{ y} \\ \mathbb{E} \left[\eta_k (1)^{p+1} \right] &< \infty \text{ para } k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

donde \mathcal{A} es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \dots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en \mathbb{R}_+ , y un entero j_k , tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \quad (1.1416)$$

$$P \left\{ a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b \right\} \geq \int_a^b q_k(x) dx, \quad 0 \leq a < b. \quad (1.1417)$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X , cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición 1208.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de A3') es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [94, 95].

1.75 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [98], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [98], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [95], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [123]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en (Ω, \mathcal{F}) y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x \{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x -c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un \mathcal{F}_t -tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [94, 108].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 1093. Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ -finita y

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D) \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1094. El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = \inf \{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 679. i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [105]).

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}(\cdot) = \int_{\mathbb{X}} P_x(\cdot) \pi(dx),$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [95].

Definición 1095. Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [94]:

Lema 50 (Lema 3.1, Dai [94]). Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \quad (1.1418)$$

donde $\tau_B(\delta) = \inf \{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 51 (Lema 3.1, Dai [94]). Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.

Teorema 734 (Teorema 3.1, Dai [94]). Si existe un $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \quad (1.1419)$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x , entonces la ecuación (3.358) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos A1)-A3), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

1.76 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t ,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t , que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k .

- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t , que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k -ésima.

Supóngase que la función $\left(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}_m(\cdot), \bar{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \dots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \quad (1.1420)$$

para $m = 1, 2, \dots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$, ver [99]. Entonces $\left(\bar{Q}(t), \bar{T}_m(t), \bar{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por \mathcal{Q} , ver [99, 94, 95].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^M \mu_k \bar{T}_{m,k}(t), \quad (1.1421)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$.

$$\bar{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, K. \quad (1.1422)$$

$$\bar{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \bar{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \quad (1.1423)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$.

$$\sum_{k=1}^K \bar{T}_{m,k}^0(t) + \bar{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \dots, M. \quad (1.1424)$$

Definición 1096 (Definición 4.1, Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot), \bar{T}^0(\cdot)\right)$ en (3.347) es un flujo límite de la disciplina. Cualquier solución (3.348)-(3.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1097. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\bar{Q}(0)| + |\bar{U}| + |\bar{V}| = 1$, se tiene que $\bar{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 735 (Teorema 4.2, Dai [94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \quad (1.1425)$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\bar{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado \bar{Q}^x es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1098 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.*

Lema 25 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por (3.348)-(3.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial \bar{x} satisface que $|\bar{x}| = |\bar{Q}(0)| + |\bar{A}(0)| + |\bar{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 736 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) *Para alguna constante κ_p , y para cada condición inicial $x \in X$*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p, \quad (1.1426)$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) *Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [Q_k(t)^r] = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r] \leq \kappa_r, \quad (1.1427)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X .

iii) *El primer momento converge con razón t^{p-1} :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q_k(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)]| = 0. \quad (1.1428)$$

iv) *La Ley Fuerte de los grandes números se cumple:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s) ds = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r], \quad \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \quad (1.1429)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 737 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + \max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js} \bar{N}_s} \right) \delta^* \quad (1.1430)$$

i) *Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 832.*

ii) *Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 830*

2 Preliminares: Modelos de Flujo

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sola política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

- 1) $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(\omega)] = \bar{N} > 0$;
- 2) $\mathbb{E}[N(\omega)] \leq \bar{N}$ para cualquier valor de ω .

La manera en que atiende el servidor m -ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j , el servidor cambia a la cola j' con probabilidad $r_{j,j'}^m$.
- La n -ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j' , va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}^m(n)$, con $\delta_{j,j'}^m(n)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}[\delta_{j,j'}^m(1)] \geq 0$.
- Sea $\{p_j^m\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $(r_{j,j'}^m)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j^m r_{j,j'}^m \mathbb{E}[\delta_{j,j'}^m(i)]. \quad (2.1)$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k -ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geeter [105].

Si denotamos por

- $Q_k(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t ;
- $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k ; para cada servidor m ;
- $B_m(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t ;
- $B_m^0(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t ,
- sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t .

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = (Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)), \quad (2.2)$$

para $k = 1, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

2.1 Supuestos Básicos

- A1) Los procesos $\xi_1, \dots, \xi_K, \eta_1, \dots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.
- A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi_l(1)^{p+1}] &< \infty \text{ para } l = 1, \dots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}[\eta_k(1)^{p+1}] &< \infty \text{ para } k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

donde \mathcal{A} es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \dots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en \mathbb{R}_+ , y un entero j_k , tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \quad (2.3)$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x) dx, \quad 0 \leq a < b. \quad (2.4)$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X , cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición 1208.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de A3') es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [94, 95].

2.2 Procesos Regenerativos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sólo política de servicio.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s , única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

$$(S1.) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(x)] = \bar{N} > 0. \quad (2.5)$$

$$(S2.) \quad \mathbb{E}[N(x)] \leq \bar{N}, \quad (2.6)$$

para cualquier valor de x .

- La n -ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)] \geq 0$.

- Se define

$$\delta^* := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)]. \quad (2.7)$$

- Los tiempos de inter-arribo a la cola k , son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k -ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k -ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = (Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)) \quad (2.8)$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \quad (2.9)$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k , incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k -ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k .
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t)$, $B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([94])

- Los tiempos de interarribo a la cola k , son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k -ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k -ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

2.3 Preliminares

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s , única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(x)] = \bar{N} > 0$
- 2) $\mathbb{E}[N(x)] \leq \bar{N}$ para cualquier valor de x .

La manera en que atiende el servidor m -ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j , el servidor se cambia a la cola j' con probabilidad $r_{j,j'}^m = r_{j,j'}$
- La n -ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}[\delta_{j,j'}(1)] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $(r_{j,j'})$.
- Finalmente, se define

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}[\delta_{j,j'}(i)] . \quad (2.10)$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k -ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k , $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k ; para cada servidor m , se denota por $B_m(t)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t ; $B_m^0(t)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t , finalmente sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t .

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = (Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)) \quad (2.11)$$

para $k = 1, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \dots, \xi_K, \eta_1, \dots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi_l(1)^{p+1}] &< \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y} \\ \mathbb{E}[\eta_k(1)^{p+1}] &< \infty \text{ para } k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

donde \mathcal{A} es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \dots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en \mathbb{R}_+ , y un entero j_k , tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \quad (2.12)$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x) dx, \quad 0 \leq a < b. \quad (2.13)$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto A2) para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X , cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición 1208.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de A3') es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

2.4 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [98], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (12), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([98], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [95]

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [123]) en el espacio de estados medible (X, \mathcal{B}_X) . El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en (Ω, \mathcal{F}) y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x \{X(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x -c.s. Donde τ es un \mathcal{F}_t -tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la σ -álgebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_X$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D)$$

Definición 1099. Una medida no cero π en (X, \mathcal{B}_X) es **invariante** para X si π es σ -finita y

$$\pi(D) = \int_X P^t(x, D) \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_X$, con $t \geq 0$.

Definición 1100. El proceso de Markov X es llamado *Harris recurrente* si existe una medida de probabilidad ν en (X, \mathcal{B}_X) , tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_X$

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = \inf \{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 680. i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [105]).

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama *Proceso Harris recurrente positivo*.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_X P_x(\cdot) \pi(dx)$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente.

Definición 1101. Un conjunto $D \in \mathcal{B}_X$ es llamado *pequeño* si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en \mathcal{B}_X , y un $\delta > 0$ tal que

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A)$$

para $x \in D$, $A \in \mathcal{B}_X$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [94]:

Lema 52 (Lema 3.1, Dai[94]). Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que

$$\sup E_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \quad (2.14)$$

donde $\tau_B(\delta) = \inf \{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris Recurrente Positivo.

Lema 53 (Lema 3.1, Dai [94]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{|x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 738 (Teorema 3.1, Dai[94]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \quad (2.15)$$

entonces la ecuación (3.358) se cumple para $B = \{|x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.

Nota 681. *En Meyn and Tweedie [116] muestran que si $P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos A1)-A3), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

3 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in X$, sea $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t , $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t , que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k . Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t , que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k -ésima.

Supóngase que la función $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}_m(\cdot), \bar{T}_m^0(\cdot))$ para $m = 1, 2, \dots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t) \right) \quad (3.1)$$

para $m = 1, 2, \dots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$. Entonces $(\bar{Q}(t), \bar{T}_m(t), \bar{T}_m^0(t))$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^M \mu_k \bar{T}_{m,k}(t) \quad (3.2)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$.

$$\bar{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, K, \quad (3.3)$$

$$\bar{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \bar{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \quad (3.4)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$,

$$\sum_{k=1}^K \bar{T}_{m,k}^0(t) + \bar{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \dots, M. \quad (3.5)$$

De acuerdo a Dai [94], se tiene que el conjunto de posibles límites $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot), \bar{T}^0(\cdot))$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (3.348)-(3.351), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 1102 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ en (3.347) es un flujo límite de la disciplina. Cualquier solución (3.348)-(3.351) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\bar{Q}(0)| + |\bar{U}| + |\bar{V}| = 1$, se tiene que $\bar{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Al conjunto de ecuaciones dadas en 3.348-3.351 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ se le denotará por \mathcal{Q} .

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 739 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \quad (3.6)$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\bar{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado \bar{Q}^x es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1103 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 26 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 3.348-3.351 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial \bar{x} satisface que $|\bar{x}| = |\bar{Q}(0)| + |\bar{A}(0)| + |\bar{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 740 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) *Para alguna constante κ_p , y para cada condición inicial $x \in X$*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p, \quad (3.7)$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) *Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x[Q_k(t)^r] = \mathbb{E}_\pi[Q_k(0)^r] \leq \kappa_r, \quad (3.8)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para \mathbf{X} .

iii) *El primer momento converge con razón t^{p-1} :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x[Q_k(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q_k(0)]| = 0. \quad (3.9)$$

iv) *La Ley Fuerte de los grandes números se cumple:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s) ds = \mathbb{E}_\pi[Q_k(0)^r], \quad \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \quad (3.10)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 741 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + \max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js} \bar{N}_s} \right) \delta^* \quad (3.11)$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 832.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 830

Teorema 742. Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots, \infty)$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribución inicial P_0 y probabilidad de transición p_{mn} , para $m, n = 0, 1, \dots, m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ -álgebra \mathcal{F}_n . Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, \infty\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \quad (3.12)$$

en $\{T < \infty\}$.

3.1 Teoría de Procesos Estocásticos y Medibilidad

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea \mathcal{E} la clase de conjuntos medibles en E :

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde \mathcal{M} son los conjuntos de Borel de M_v . Entonces (E, \mathcal{E}) es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de (\mathbf{x}_t) está determinada por los siguientes objetos:

- i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.
- ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.
- iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \quad (3.13)$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_v(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \quad (3.14)$$

∂M_v denota la frontera de M_v .

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H}f(\zeta_t), \quad (3.15)$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y \mathcal{H} denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que \mathcal{H}_v es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = \inf \{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ , se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de \mathbf{x} para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en (E, \mathcal{E}) para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso (\mathbf{x}_t) comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.16)$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribución $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de (\mathbf{x}_t) para $t \leq T_1$ es³⁴

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = T_1. \end{cases}$$

Comenzando en \mathbf{x}_{T_1} se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto \mathbf{x}_{T_2} de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes \mathbf{x}_t con tiempos de salto T_1, T_2, \dots . Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i , con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 9 (Supuesto 3.1, Davis [98]). Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \quad (3.17)$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1104. Un espacio topológico E es llamado de Radón si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1105. E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada, tight.

Definición 1106. Una medida finita, λ en la σ -álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si

$$\lambda(E) = \sup \{ \lambda(K) : K \text{ es compacto en } E \}. \quad (3.18)$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 743. Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ -álgebra de Borel en E , que se denotará por \mathcal{E} .

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ -álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ -álgebra más general, (\mathcal{G}_t) tal que (X_t) sea \mathcal{E} -adaptado.

Definición 1107. Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en (E, \mathcal{E}) , si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$ ³⁵

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B). \quad (3.19)$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en (E, \mathcal{E}) es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov³⁶ (3.309) relativa a (\mathcal{G}_t) si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t) \quad s \leq t \in I, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (3.21)$$

³⁴Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

³⁵Ecuación de Chapman-Kolmogorov

³⁶

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \quad H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \quad (3.20)$$

Definición 1108. Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) es llamada Semigrupo de Transición de Markov o Semigrupo de Transición si

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_sf)(x), \quad t, s \geq 0, \quad x \in E \quad f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 682. Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (3.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_sf(X_t) \quad t, s \geq 0, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (3.22)$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t) .

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (3.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t) .

Definición 1109. Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E .

Definición 1110 (HD1). Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición HD1 si, dada una medida de probabilidad μ en E , existe una σ -álgebra \mathcal{E}^* con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un \mathcal{E}^* -proceso E -valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ .

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas \mathbf{P}^x tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier \mathbf{P}^x , X_t es de Markov con semigrupo (P_t) . \mathbf{P}^x puede considerarse como la distribución condicional de \mathbf{P} dado $X_0 = x$.

Definición 1111. Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en (E, \mathcal{E}) . La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso \mathcal{E} -Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que \mathbf{X} satisfaga las siguientes condiciones:

- i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E -valuado continuo por la derecha \mathcal{E}^* -adaptado a (\mathcal{G}_t) ;
- ii) $(\theta_t)_{t \geq 0}$ es una colección de operadores shift para X , es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \quad \text{y} \quad X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \quad (3.23)$$

- iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t \in I}$ tiene la propiedad de Markov (3.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 1112 (HD2). Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.

Definición 1113. Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:

- i) \mathbf{X} es una realización continua por la derecha, 1198, de (P_t) .
- ii) \mathbf{X} satisface la condición HD2, 1199, relativa a \mathcal{G}_t .
- iii) \mathcal{G}_t es aumentado y continuo por la derecha.

Lema 54 (Lema 4.2, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k(|x_n|t) \rightarrow P'_k t, \text{ u.o.c.}, \quad (3.24)$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k(t - \bar{U}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (3.25)$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k(t - \bar{V}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (3.26)$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 55 (Lema 4.3, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}_k$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{U}_k - t)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{V}_k - t)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

y

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l , si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t . Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t . Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k .

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = x_k(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \quad (3.27)$$

para $k = 1, \dots, K$. Para $i = 1, \dots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t . Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i . Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \quad (3.28)$$

para $i = 1, \dots, d$.

Hacer

$$\begin{aligned} T^x(t) &= (T_1^x(t), \dots, T_K^x(t))', \\ I^x(t) &= (I_1^x(t), \dots, I_K^x(t))' \end{aligned}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \dots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \quad (3.29)$$

$$Q^x(t) \geq 0, \quad (3.30)$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \bar{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \quad (3.31)$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \quad (3.32)$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t)) dI_i^x(t) = 0, \quad (3.33)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}^x(\cdot), \bar{T}^x(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (3.34)$$

donde e es un vector de unos de dimensión d , C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 831:

Teorema 744 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \rightarrow \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \rightarrow \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)) \rightarrow (\bar{Q}(0), \bar{U}, \bar{V}), \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t), T^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t)) \rightarrow (\bar{Q}(t), \bar{T}(t)) \text{ u.o.c.} \quad (3.36)$$

Además, $(\bar{Q}(t), \bar{T}(t))$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\bar{Q}(t) = Q(0) + (\alpha t - \bar{U})^+ - (I - P)' M^{-1} (\bar{T}(t) - \bar{V})^+, \quad (3.37)$$

$$\bar{Q}(t) \geq 0, \quad (3.38)$$

$$\bar{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \quad (3.39)$$

$$\bar{I}(t) = et - C\bar{T}(t) \text{ es no decreciente,} \quad (3.40)$$

$$\int_0^\infty (C\bar{Q}(t)) d\bar{I}(t) = 0, \quad (3.41)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (3.42)$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 440. Sea $(\bar{Q}, \bar{T}, \bar{T}^0)$ un flujo límite de 3.197 y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0) \right) \rightarrow (\bar{Q}_k(0), 0, 0, 0)$$

para $k = 1, \dots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\bar{T}(t)$ y $\bar{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\bar{T}(0) = \bar{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K [\bar{T}_k(t) + \bar{T}_k^0(t)] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\bar{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\bar{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \bar{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \bar{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\bar{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\bar{T}}_k^0(t)$$

para $\bar{Q}_k(t) > 0$.

Lema 56 (Lema 3.1 [91]). Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.

Teorema 745 (Teorema 5.1 [91]). La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.

Lema 57 (Lema 5.2 [106]). Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo

$$E(t) = \max \{n \geq 1 : \xi(1) + \dots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]} \right)^r \quad (3.43)$$

de aquí, bajo estas condiciones

$$a) \text{ Para cualquier } t > 0, \sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right]$$

b) Las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 746 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E} \left[\frac{N(t)}{t} \right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$.

Proposición 441 (Proposición 5.1 [95]). Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0. \quad (3.44)$$

Proposición 442 (Proposición 5.3 [95]). Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p) dt \right] \leq C_{p+1} (1 + |x|^{p+1}) \quad (3.45)$$

Proposición 443 (Proposición 5.4 [95]). Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X , sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C , entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s)) ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \quad (3.46)$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 747 (Teorema 5.5 [95]). Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (3.47)$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \quad (3.48)$$

Teorema 748 (Teorema 6.2 [95]). Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que

$$\| P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \|_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 749 (Teorema 6.3 [95]). Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)} |P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot)|_f = 0,$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)} |\mathbb{E}_x [Q_t] - \mathbb{E}_\pi [Q_0]| = 0.$$

Proposición 444 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0 \quad (3.49)$$

Lema 27 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = \max(n \geq 1 : \zeta(1) + \dots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \quad (3.50)$$

Luego, bajo estas condiciones:

- a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] < \infty$
- b) las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 750 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (3.51)$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 751 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{f_p}, t \rightarrow \infty, x \in X. \quad (3.52)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 752 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} \|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0. \quad (3.53)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q(0)]| = 0.$$

Teorema 753 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en (X, \mathcal{B}_X) , y π la distribución estacionaria de X .*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds = \pi(f) := \int f(x) \pi(dx) \quad (3.54)$$

\mathbb{P} -c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 754 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, T \geq 0, \quad (3.55)$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < \infty$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{X \rightarrow \infty\} \geq q. \quad (3.56)$$

3.2 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 58 (Lema 4.2, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k(|x_n|t) \rightarrow P'_k t, \text{ u.o.c.}, \quad (3.57)$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k (t - \bar{U}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (3.58)$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k (t - \bar{V}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (3.59)$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 59 (Lema 4.3, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U_k(0) = \bar{U}_k$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V_k(0) = \bar{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{U}_k - t)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{V}_k - t)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

y

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x(t)$ el número total de servicios completados de la clase l , si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t . Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t . Una fracción de estos usuarios, $\Phi_k^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k .

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \quad (3.60)$$

para $k = 1, \dots, K$. Para $i = 1, \dots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t . Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i . Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \quad (3.61)$$

para $i = 1, \dots, d$.

Hacer

$$\begin{aligned} T^x(t) &= (T_1^x(t), \dots, T_K^x(t))', \\ I^x(t) &= (I_1^x(t), \dots, I_K^x(t))' \end{aligned}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \dots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \quad (3.62)$$

$$Q^x(t) \geq 0, \quad (3.63)$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \bar{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \quad (3.64)$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \quad (3.65)$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t)) dI_i^x(t) = 0, \quad (3.66)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}^x(\cdot), \bar{T}^x(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (3.67)$$

donde e es un vector de unos de dimensión d , C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 831:

Teorema 755 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \rightarrow \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \rightarrow \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)) \rightarrow (\bar{Q}(0), \bar{U}, \bar{V}), \quad (3.68)$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t), T^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t)) \rightarrow (\bar{Q}(t), \bar{T}(t)) \text{ u.o.c.} \quad (3.69)$$

Además, $(\bar{Q}(t), \bar{T}(t))$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\bar{Q}(t) = Q(0) + (\alpha t - \bar{U})^+ - (I - P)' M^{-1} (\bar{T}(t) - \bar{V})^+, \quad (3.70)$$

$$\bar{Q}(t) \geq 0, \quad (3.71)$$

$$\bar{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero}, \quad (3.72)$$

$$\bar{I}(t) = et - C\bar{T}(t) \text{ es no decreciente}, \quad (3.73)$$

$$\int_0^\infty (C\bar{Q}(t)) d\bar{I}(t) = 0, \quad (3.74)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \quad (3.75)$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 445. Sea $(\bar{Q}, \bar{T}, \bar{T}^0)$ un flujo límite de 3.197 y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0) \right) \rightarrow (\bar{Q}_k(0), 0, 0, 0)$$

para $k = 1, \dots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\bar{T}(t)$ y $\bar{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\bar{T}(0) = \bar{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K [\bar{T}_k(t) + \bar{T}_k^0(t)] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\bar{T}}_k(t) = \beta_k$$

$$\text{para } \bar{Q}_k(t) = 0.$$

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \bar{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \bar{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\bar{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\bar{T}}_k^0(t)$$

$$\text{para } \bar{Q}_k(t) > 0.$$

Teorema 756 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces

$$a) \frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu} \text{ a.s., cuando } t \rightarrow \infty.$$

$$b) \mathbb{E} \left[\left[\frac{N(t)}{t} \right]^r \right] \rightarrow \frac{1}{\mu^r}, \text{ cuando } t \rightarrow \infty \text{ para todo } r > 0..$$

Proposición 446 (Proposición 5.3 [95]). Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p) dt \right] \leq C_{p+1} (1 + |x|^{p+1}) \quad (3.76)$$

Proposición 447 (Proposición 5.4 [95]). Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X , sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C , entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s)) ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \quad (3.77)$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Definición 1114. Sea X un conjunto y \mathcal{F} una σ -álgebra de subconjuntos de X , la pareja (X, \mathcal{F}) es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a \mathcal{F} , si $A \in \mathcal{F}$.

Definición 1115. Sea (X, \mathcal{F}, μ) espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ -finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.

Definición 1116. Sea X el conjunto de los números reales \mathbb{R} . El álgebra de Borel es la σ -álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado Conjunto de Borel.

Definición 1117. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X . Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1118. Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \dots$, espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \dots)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \dots$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^n \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama cilindro con base B^n , el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i$.

Definición 1119. [TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ -álgebras \mathcal{F}_t , para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es \mathcal{F}_t -medible para cada t . Si no se especifica \mathcal{F}_t entonces se toma \mathcal{F}_t como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ -álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.

Definición 1120. [TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ -álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ -álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.

Definición 1121. Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$ -medible,

Definición 1122. Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \quad (3.78)$$

Nota 683. Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (3.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \quad (3.79)$$

Teorema 757. Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots, \infty)$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribución inicial P_0 y probabilidad de transición p_{mn} , para $m, n = 0, 1, \dots, m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ -álgebra \mathcal{F}_n . Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, \infty\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \quad (3.80)$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea \mathcal{E} la clase de conjuntos medibles en E :

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde \mathcal{M} son los conjuntos de Borel de M_v . Entonces (E, \mathcal{E}) es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de (\mathbf{x}_t) está determinada por los siguientes objetos:

- i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.
- ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.
- iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \quad (3.81)$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_v(t, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \quad (3.82)$$

∂M_v denota la frontera de M_v .

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H}f(\zeta_t), \quad (3.83)$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y \mathcal{H} denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que \mathcal{H}_v es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = \inf \{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ , se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon]$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de \mathbf{x} para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en (E, \mathcal{E}) para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso (\mathbf{x}_t) comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.84)$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribución $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de (\mathbf{x}_t) para $t \leq T_1$ es³⁷

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, Z), & t = T_1. \end{cases}$$

³⁷Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

Comenzando en \mathbf{x}_{T_1} se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto \mathbf{x}_{T_2} de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes \mathbf{x}_t con tiempos de salto T_1, T_2, \dots . Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i , con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 10 (Supuesto 3.1, Davis [98]). Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \quad (3.85)$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1123. Un espacio topológico E es llamado Luisin si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.

Definición 1124. Un espacio topológico E es llamado de Radón si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1125. E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada, tight.

Definición 1126. Una medida finita, λ en la σ -álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si

$$\lambda(E) = \sup \{ \lambda(K) : K \text{ es compacto en } E \}. \quad (3.86)$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 758. Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ -álgebra de Borel en E , que se denotará por \mathcal{E} .

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ -álgebra natural definida como $\sigma \{ f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E} \}$. Se considerará una σ -álgebra más general, (\mathcal{G}_t) tal que (X_t) sea \mathcal{E} -adaptado.

Definición 1127. Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en (E, \mathcal{E}) , si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B) \quad (3.87)$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en (E, \mathcal{E}) es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov³⁹ (3.309) relativa a (\mathcal{G}_t) si

$$\mathbb{P} \{ f(X_t) | \mathcal{G}_s \} = P_{s,t} f(X_t) \quad s \leq t \in I, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (3.89)$$

Definición 1128. Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) es llamada Semigrupo de Transición de Markov o Semigrupo de Transición si

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \quad t, s \geq 0, \quad x \in E \quad f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 684. Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.

³⁸Ecuación de Chapman-Kolmogorov
³⁹

$$\mathbb{P} \{ H | \mathcal{G}_t \} = \mathbb{P} \{ H | X_t \} \quad H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \quad (3.88)$$

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (3.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \quad t, s \geq 0, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (3.90)$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t) .

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (3.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t) .

Definición 1129. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E .*

Definición 1130 (HD1). *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición HD1 si, dada una medida de probabilidad μ en E , existe una σ -álgebra \mathcal{E}^* con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un \mathcal{E}^* -proceso E -valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ .*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas \mathbf{P}^x tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y bajo cualquier \mathbf{P}^x , X_t es de Markov con semigrupo (P_t) . \mathbf{P}^x puede considerarse como la distribución condicional de \mathbf{P} dado $X_0 = x$.

Definición 1131. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en (E, \mathcal{E}) . La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso \mathcal{E} -Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que \mathbf{X} satisfaga las siguientes condiciones:*

- i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E -valuado continuo por la derecha \mathcal{E}^* -adaptado a (\mathcal{G}_t) ;
- ii) $(\theta_t)_{t \geq 0}$ es una colección de operadores shift para X , es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \quad \text{y} \quad X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \quad (3.91)$$

- iii) Para cualquier $x \in E$, $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t \in I}$ tiene la propiedad de Markov (3.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 1132 (HD2). *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1133. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

- i) \mathbf{X} es una realización continua por la derecha, 1198, de (P_t) .
- ii) \mathbf{X} satisface la condición HD2, 1199, relativa a \mathcal{G}_t .
- iii) \mathcal{G}_t es aumentado y continuo por la derecha.

Lema 60 (Lema 4.2, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k(|x_n|t) \rightarrow P'_k t, \quad \text{u.o.c.}, \quad (3.92)$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k(t - \bar{U}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (3.93)$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k(t - \bar{V}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (3.94)$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 61 (Lema 4.3, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}_k$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{U}_k - t)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{V}_k - t)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

y

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l , si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t . Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t . Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k .

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \quad (3.95)$$

para $k = 1, \dots, K$. Para $i = 1, \dots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_j^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t . Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i . Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \quad (3.96)$$

para $i = 1, \dots, d$.

Hacer

$$\begin{aligned} T^x(t) &= (T_1^x(t), \dots, T_K^x(t))', \\ I^x(t) &= (I_1^x(t), \dots, I_K^x(t))' \end{aligned}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \dots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \quad (3.97)$$

$$Q^x(t) \geq 0, \quad (3.98)$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \bar{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \quad (3.99)$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \quad (3.100)$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t)) dI_i^x(t) = 0, \quad (3.101)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}^x(\cdot), \bar{T}^x(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (3.102)$$

donde e es un vector de unos de dimensión d , C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 831:

Teorema 759 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \rightarrow \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \rightarrow \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)) \rightarrow (\bar{Q}(0), \bar{U}, \bar{V}), \quad (3.103)$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t), T^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t)) \rightarrow (\bar{Q}(t), \bar{T}(t)) \text{ u.o.c.} \quad (3.104)$$

Además, $(\bar{Q}(t), \bar{T}(t))$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\bar{Q}(t) = Q(0) + (\alpha t - \bar{U})^+ - (I - P)' M^{-1} (\bar{T}(t) - \bar{V})^+, \quad (3.105)$$

$$\bar{Q}(t) \geq 0, \quad (3.106)$$

$$\bar{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \quad (3.107)$$

$$\bar{I}(t) = et - C\bar{T}(t) \text{ es no decreciente,} \quad (3.108)$$

$$\int_0^\infty (C\bar{Q}(t)) d\bar{I}(t) = 0, \quad (3.109)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (3.110)$$

Definición 1134 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ en 3.325 es un flujo límite de la disciplina. Cualquier solución (3.326)-(3.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\bar{Q}(0)| + |\bar{U}| + |\bar{V}| = 1$, se tiene que $\bar{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 760 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \quad (3.111)$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\bar{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|x| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado \bar{Q}^x es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 3.216-3.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ se le denotará por \mathcal{Q} .

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1135 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 28 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 3.216-3.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial \bar{x} satisface que $|\bar{x}| = |\bar{Q}(0)| + |\bar{A}(0)| + |\bar{B}(0)| \leq 1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 448. *Sea $(\bar{Q}, \bar{T}, \bar{T}^0)$ un flujo límite de 3.197 y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0) \right) \rightarrow (\bar{Q}_k(0), 0, 0, 0)$$

para $k = 1, \dots, K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) *Los vectores de tiempo ocupado $\bar{T}(t)$ y $\bar{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\bar{T}(0) = \bar{T}^0(0) = 0$.*

ii) *Para todo $t \geq 0$*

$$\sum_{k=1}^K [\bar{T}_k(t) + \bar{T}_k^0(t)] = t$$

iii) *Para todo $1 \leq k \leq K$*

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t)$$

iv) *Para todo $1 \leq k \leq K$*

$$\dot{\bar{T}}_k(t) = \beta_k$$

$$\text{para } \bar{Q}_k(t) = 0.$$

v) *Para todo k, j*

$$\mu_k^0 \bar{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \bar{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\bar{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\bar{T}}_k^0(t)$$

para $\bar{Q}_k(t) > 0$.

Lema 62 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 761 (Teorema 5.2 [91]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 762 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 63 (Lema 5.2 [106]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = \max \{n \geq 1 : \xi(1) + \dots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]} \right)^r \quad (3.112)$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) *Para cualquier $t > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right]$*

b) *Las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.*

Teorema 763 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E} \left[\frac{N(t)}{t} \right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$.

Proposición 449 (Proposicin 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adem s suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0. \quad (3.113)$$

Proposición 450 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p) dt \right] \leq C_{p+1} (1 + |x|^{p+1}) \quad (3.114)$$

Proposición 451 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X , sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C , entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s)) ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \quad (3.115)$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 764 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), ademś suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (3.116)$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\text{Limsup}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \quad (3.117)$$

Teorema 765 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\| P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \|_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 766 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)|P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot)|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]| = 0}.$$

Proposición 452 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0 \quad (3.118)$$

Lema 29 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = \max(n \geq 1 : \zeta(1) + \dots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \quad (3.119)$$

Luego, bajo estas condiciones:

$$a) \text{ para cualquier } \delta > 0, \sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] < \infty$$

$$b) \text{ las variables aleatorias } \left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\} \text{ son uniformemente integrables.}$$

Teorema 767 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (3.120)$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 768 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{f_p}, t \rightarrow \infty, x \in X. \quad (3.121)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 769 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} \|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0. \quad (3.122)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q(0)]| = 0.$$

Teorema 770 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en (X, \mathcal{B}_X) , y π la distribución estacionaria de X .*

i) *Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds = \pi(f) := \int f(x) \pi(dx) \quad (3.123)$$

\mathbb{P} -c.s.

ii) *Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.*

Teorema 771 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, T \geq 0, \quad (3.124)$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < \infty$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{X \rightarrow \infty\} \geq q. \quad (3.125)$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k -ésima cola, son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k -ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$,
- la tasa de servicio para la k -ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$,
- también se define $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.

En Dai [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X = \{X(t), t \geq 0\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [108].

Sea el proceso de Markov $X = \{X(t), t \geq 0\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] y Meyn y Down [118] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X , cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X(t) = (Q(t), U(t), V(t)), \quad (3.126)$$

donde $Q(t)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U(t)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V(t)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U(t)$ como $V(t)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = (Q(0), U(0), V(0)) = (q, a, b)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde \mathcal{E} es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \dots, K$ se define

$$\begin{aligned} E_l^x(t) &= \max \{r : U_l(0) + \xi_l(1) + \dots + \xi_l(r-1) \leq t\} \quad t \geq 0, \\ S_k^x(t) &= \max \{r : V_k(0) + \eta_k(1) + \dots + \eta_k(r-1) \leq t\} \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^n \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n -ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s -ésima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro P'_k , donde P_k denota el k -ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \{\phi^k(n), n \geq 1\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \dots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 64 (Lema 4.2, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k(|x_n|t) \rightarrow P'_k t, \quad u.o.c., \quad (3.127)$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k(t - \bar{U}_k)^+, \quad u.o.c., \quad (3.128)$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k(t - \bar{V}_k)^+, \quad u.o.c., \quad (3.129)$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 65 (Lema 4.3, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}_k$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{U}_k - t)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{V}_k - t)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

y

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l , si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t . Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t . Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k .

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \quad (3.130)$$

para $k = 1, \dots, K$. Para $i = 1, \dots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t . Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i . Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \quad (3.131)$$

para $i = 1, \dots, d$.

Hacer

$$\begin{aligned} T^x(t) &= (T_1^x(t), \dots, T_K^x(t))', \\ I^x(t) &= (I_1^x(t), \dots, I_K^x(t))' \end{aligned}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \dots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \quad (3.132)$$

$$Q^x(t) \geq 0, \quad (3.133)$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \bar{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \quad (3.134)$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \quad (3.135)$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t)) dI_t^x(t) = 0, \quad (3.136)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}^x(\cdot), \bar{T}^x(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (3.137)$$

donde e es un vector de unos de dimensión d , C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 831:

Teorema 772 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \rightarrow \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \rightarrow \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)) \rightarrow (\bar{Q}(0), \bar{U}, \bar{V}), \quad (3.138)$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t), T^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t)) \rightarrow (\bar{Q}(t), \bar{T}(t)) \text{ u.o.c.} \quad (3.139)$$

Además, $(\bar{Q}(t), \bar{T}(t))$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\bar{Q}(t) = Q(0) + (\alpha t - \bar{U})^+ - (I - P)' M^{-1} (\bar{T}(t) - \bar{V})^+, \quad (3.140)$$

$$\bar{Q}(t) \geq 0, \quad (3.141)$$

$$\bar{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \quad (3.142)$$

$$\bar{I}(t) = et - C\bar{T}(t) \text{ es no decreciente,} \quad (3.143)$$

$$\int_0^\infty (C\bar{Q}(t)) d\bar{I}(t) = 0, \quad (3.144)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (3.145)$$

Definición 1136 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ en 3.325 es un flujo límite de la disciplina. Cualquier solución (3.326)-(3.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\bar{Q}(0)| + |\bar{U}| + |\bar{V}| = 1$, se tiene que $\bar{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 773 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \quad (3.146)$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\bar{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado \bar{Q}^x es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1137 (Definición 3.1, Dai y Meyn [95]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ de las siguientes ecuaciones, donde $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_1(t), \dots, \bar{Q}_K(t))'$ y $\bar{T}(t) = (\bar{T}_1(t), \dots, \bar{T}_K(t))'$*

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t) + \sum_{l=1}^k P_{lk} \mu_l \bar{T}_l(t) \quad (3.147)$$

$$\bar{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, K, \quad (3.148)$$

$$\bar{T}_k(0) = 0, \text{ y } \bar{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente,} \quad (3.149)$$

$$\bar{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \bar{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \quad (3.150)$$

$$\bar{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) dI_i^x(t) = 0 \quad (3.151)$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } (Q^x(\cdot), T^x(\cdot)) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \quad (3.152)$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 3.216-3.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ se le denotará por \mathcal{Q} .

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1138 (Definición 3.2, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $(\bar{A}(0), \bar{B}(0)) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 3.216-3.182, junto con la condición:*

$$\bar{Q}(t) = \bar{Q}(0) + (\alpha t - \bar{A}(0))^+ - (I - P') M (\bar{T}(t) - \bar{B}(0))^+ \quad (3.153)$$

Definición 1139 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 30 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 3.216-3.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial \bar{x} satisface que $|\bar{x}| = |\bar{Q}(0)| + |\bar{A}(0)| + |\bar{B}(0)| \leq 1$.*

El resultado principal de Down [99] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 774 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) *Para alguna constante κ_p , y para cada condición inicial $x \in X$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p, \quad (3.154)$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [Q_k(t)^r] = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r] \leq \kappa_r, \quad (3.155)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para \mathbf{X} .

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1} :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q_k(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q(0)]| = 0. \quad (3.156)$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números se cumple:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s) ds = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r], \quad \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \quad (3.157)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$.

Proposición 453 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0 \quad (3.158)$$

Lema 31 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = \max(n \geq 1 : \zeta(1) + \dots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \quad (3.159)$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 775 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (3.160)$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 776 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{f_p}, \quad t \rightarrow \infty, x \in X. \quad (3.161)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 777 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} \|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0. \quad (3.162)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q(0)]| = 0.$$

Teorema 778 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en (X, \mathcal{B}_X) , y π la distribución estacionaria de X .*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds = \pi(f) := \int f(x) \pi(dx) \quad (3.163)$$

\mathbb{P} -c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 779 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \quad T \geq 0, \quad (3.164)$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < \infty$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \quad (3.165)$$

Teorema 780 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + \max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js} \bar{N}_s} \right) \delta^* \quad (3.166)$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema 774.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema 830

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^n \phi^k(i). \quad (3.167)$$

suponiendo que el estado inicial de la red es $x = (q, a, b) \in X$, entonces para cada k

$$E_k^x(t) := \max \{n \geq 0 : A_k^x(0) + \psi_k(1) + \dots + \psi_k(n-1) \leq t\} \quad (3.168)$$

$$S_k^x(t) := \max \{n \geq 0 : B_k^x(0) + \eta_k(1) + \dots + \eta_k(n-1) \leq t\} \quad (3.169)$$

Sea $T_k^x(t)$ el tiempo acumulado que el servidor $s(k)$ ha utilizado en los usuarios de la clase k en el intervalo $[0, t]$. Entonces se tienen las siguientes ecuaciones:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^k \Phi_k^l S_l^x(T_l^x) - S_k^x(T_k^x) \quad (3.170)$$

$$Q^x(t) = (Q_1^x(t), \dots, Q_K^x(t))' \geq 0, \quad (3.171)$$

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \dots, T_K^x(t))' \geq 0, \text{ es no decreciente} \quad (3.172)$$

$$I_i^x(t) = t - \sum_{k \in C_i} T_k^x(t) \text{ es no decreciente} \quad (3.173)$$

$$\int_0^\infty \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) dI_i^x(t) = 0 \quad (3.174)$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } (Q^x(\cdot), T^x(\cdot)) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \quad (3.175)$$

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \quad (3.176)$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola. Si se hace $|q| \rightarrow \infty$ y se mantienen las componentes restantes fijas, de la condición inicial x , cualquier punto límite del proceso normalizado \overline{Q}^x es una solución del siguiente modelo de flujo, ver [94].

Definición 1140. *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $(Q^x(\cdot), T^x(\cdot))$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}(t) = (\overline{Q}_1(t), \dots, \overline{Q}_K(t))'$ y $\overline{T}(t) = (\overline{T}_1(t), \dots, \overline{T}_K(t))'$*

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^k P_{lk} \mu_l \overline{T}_l(t) \quad (3.177)$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, K, \quad (3.178)$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente,} \quad (3.179)$$

$$\overline{T}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \quad (3.180)$$

$$\overline{T}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) dI_i^x(t) = 0 \quad (3.181)$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } (Q^x(\cdot), T^x(\cdot)) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \quad (3.182)$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en 3.216-3.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot))$ se le denotará por \mathcal{Q} .

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1141. *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $(\overline{A}(0), \overline{B}(0)) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en 3.216-3.182, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + (\alpha t - \overline{A}(0))^+ - (I - P') M (\overline{T}(t) - \overline{B}(0))^+ \quad (3.183)$$

Definición 1142. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en [91].

Lema 32. *Si el modelo de flujo definido por 3.216-3.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial \overline{x} satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Supuestos necesarios sobre la red

Supuestos 11. *A1) $\psi_1, \dots, \psi_K, \eta_1, \dots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\psi_l(1)^{p+1}] &< \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y} \\ \mathbb{E} [\eta_k(1)^{p+1}] &< \infty \text{ para } k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en \mathbb{R}_+ , y un entero j_k , tal que

$$P(\psi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \quad (3.184)$$

$$P(\psi_k(1) + \dots + \psi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x) dx \quad (3.185)$$

$$\int_0^\infty q_k(x) dx > 0 \quad (3.186)$$

El argumento dado en [?] en el lema 33 se puede aplicar para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños. Entonces la condición A3) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X , cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 781. Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:

i) Para alguna constante κ_p , y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p \quad (3.187)$$

donde p es el entero dado por A2). Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x[Q_k(t)^r] = \mathbb{E}_\pi[Q_k(0)^r] \leq \kappa_r \quad (3.188)$$

para $r = 1, \dots, p$ y $k = 1, \dots, K$.

iii) EL primer momento converge con razón t^{p-1} :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0. \quad (3.189)$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s) ds = \mathbb{E}_\pi[Q_k(0)^r] \quad (3.190)$$

\mathbb{P} -c.s., para $r = 1, \dots, p$ y $k = 1, \dots, K$.

Demostración 3. La demostración de este resultado se da aplicando los teoremas 782, 824, 825 y 785

Definimos un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada. Bajo cualquier *preemptive buffer priority* disciplina de servicio, el estado $\mathbb{X}(t)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}(t) = (Q_k(t), A_l(t), B_k(t) : k = 1, 2, \dots, K, l \in \mathcal{A}) \quad (3.191)$$

donde $Q_k(t)$ es la longitud de la cola para los usuarios de la clase k , incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k(t)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio. Los tiempos de arribo residuales, que son iguales al tiempo que queda hasta que el próximo usuario de la clase k llega, se denotan por $A_k(t)$. Tanto $B_k(t)$ como $A_k(t)$ se suponen continuos por la derecha.

Sea \mathbb{X} el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x = (q, a, b)$ un estado genérico en \mathbb{X} , la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = (q, a, b) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x\| = |q| + |a| + |b|$. En [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso \mathbb{X} es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho en el espacio de estadio medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, est definida en (Ω, \mathcal{F}) y est adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; $\{P_x, x \in X\}$ son medidas de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) tales que para todo $x \in X$

$$P_x \{\mathbb{X}(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x -c.s. Donde τ es un \mathcal{F}_t -tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{\mathbb{X}(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la sigma algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(\mathbb{X}(t) \in D)$$

Definición 1143. Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ -finita y

$$\pi(D) = \int_X P^t(x, D) \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1144. El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = \inf \{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

- Si X es Harris recurrente, entonces una única medida invariante π existe ([105]).
- Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama *Harris recurrente positiva*.
- Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) [= \int_X P_x(\cdot) \pi(dx)$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, as, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π

Definición 1145. Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.⁴⁰

El modelo está compuesto por c colas de capacidad infinita, etiquetadas de 1 a c las cuales son atendidas por s servidores. Los servidores atienden de acuerdo a una cadena de Markov independiente $(X_n^i)_n$ con $1 \leq i \leq s$ y $n \in \{1, 2, \dots, c\}$ con la misma matriz de transición $r_{k,l}$ y única medida invariante (p_k) . Cada servidor permanece atendiendo en la cola un periodo llamado de visita y determinada por la política de servicio asignada a la cola.

Los usuarios llegan a la cola k con una tasa λ_k y son atendidos a una razón μ_k . Las sucesiones de tiempos de interarribo $(\tau_k(n))_n$, la de tiempos de servicio $(\sigma_k^i(n))_n$ y la de tiempos de cambio $(\sigma_{k,l}^{0,i}(n))_n$

⁴⁰En [116] muestran que si $P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ solamente para uno conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris recurrente

requeridas en la cola k para el servidor i son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas con distribución general independiente de i , con media $\sigma_k = \frac{1}{\mu_k}$, respectivamente $\sigma_{k,l}^0 = \frac{1}{\mu_{k,l}^0}$, e independiente de las cadenas de Markov $(X_n^i)_n$. Además se supone que los tiempos de interarribo se asume son acotados, para cada $\rho_k = \lambda_k \sigma_k < s$ para asegurar la estabilidad de la cola k cuando opera como una cola $M/GM/1$. Una política de servicio determina el número de usuarios que serán atendidos sin interrupción en periodo de servicio por los servidores que atienden a la cola. Para un solo servidor esta se define a través de una función f donde $f(x, a)$ es el número de usuarios que son atendidos sin interrupción cuando el servidor llega a la cola y encuentra x usuarios esperando dado el tiempo transcurrido de interarribo a . Sea $v(x, a)$ la duración del periodo de servicio para una sola condición inicial (x, a) .

Las políticas de servicio consideradas satisfacen las siguientes propiedades:

- i) Hay conservación del trabajo, es decir

$$v(x, a) = \sum_{l=1}^{f(x,a)} \sigma(l)$$

con $f(0, a) = v(0, a) = 0$, donde $(\sigma(l))_l$ es una sucesión independiente e idénticamente distribuida de los tiempos de servicio solicitados.

- ii) La selección de usuarios para se atendidos es independiente de sus correspondientes tiempos de servicio y del pasado hasta el inicio del periodo de servicio. Así las distribución (f, v) no depende del orden en el cuál son atendidos los usuarios.
- iii) La política de servicio es monótona en el sentido de que para cada $a \geq 0$ los números $f(x, a)$ son monótonos en distribución en x y su límite en distribución cuando $x \rightarrow \infty$ es una variable aleatoria F^{*0} que no depende de a .
- iv) El número de usuarios atendidos por cada servidor es acotado por $f^{min}(x)$ de la longitud de la cola x que además converge monótonamente en distribución a F^* cuando $x \rightarrow \infty$

El sistema de colas se describe por medio del proceso de Markov $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$ como se define a continuación. El estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = (Q(t), P(t), A(t), R(t), C(t))$$

donde

- $Q(t) = (Q_k(t))_{k=1}^c$, número de usuarios en la cola k al tiempo t .
- $P(t) = (P^i(t))_{i=1}^s$, es la posición del servidor i .
- $A(t) = (A_k(t))_{k=1}^c$, es el residual del tiempo de arribo en la cola k al tiempo t .
- $R(t) = \left(R_k^i(t), R_{k,l}^{0,i}(t) \right)_{k,l,i=1}^{c,c,s}$, el primero es el residual del tiempo de servicio del usuario atendido por servidor i en la cola k al tiempo t , la segunda componente es el residual del tiempo de cambio del servidor i de la cola k a la cola l al tiempo t .
- $C(t) = (C_k^i(t))_{k,i=1}^{c,s}$, es la componente correspondiente a la cola k y al servidor i que está determinada por la política de servicio en la cola k y que hace al proceso $X(t)$ un proceso de Markov.

Todos los procesos definidos arriba se suponen continuos por la derecha.

El proceso X tiene la propiedad fuerte de Markov y su espacio de estados es el espacio producto

$$\mathcal{X} = \mathbb{N}^c \times E^s \times \mathbb{R}_+^c \times \mathbb{R}_+^{cs} \times \mathbb{R}_+^{c^2s} \times \mathcal{C}$$

donde $E = \{1, 2, \dots, c\}^2 \cup \{1, 2, \dots, c\}$ y \mathcal{C} depende de las políticas de servicio.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s , única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(x)] = \bar{N} > 0 \quad (3.192)$$

2.

$$\mathbb{E}[N(x)] \leq \bar{N} \quad (3.193)$$

para cualquier valor de x .

La manera en que atiende el servidor m -ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j , el servidor se cambia a la cola j' con probabilidad $r_{j,j'}^m = r_{j,j'}$
- La n -ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}[\delta_{j,j'}(1)] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $(r_{j,j'})$.
- Finalmente, se define

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}[\delta_{j,j'}(1)]. \quad (3.194)$$

El *token passing ring* es una estación de un solo servidor con K clases de usuarios. Cada clase tiene su propio regulador en la estación. Los usuarios llegan al regulador con razón α_k y son atendidos con tasa μ_k .

La red se puede modelar como un Proceso de Markov con espacio de estados continuo, continuo en el tiempo:

$$X(t)^T = (Q_k(t), A_l(t), B_k(t), B_k^0(t), C(t) : k = 1, \dots, K, l \in \mathcal{A}) \quad (3.195)$$

donde $Q_k(t)$, $B_k(t)$ y $A_k(t)$ se define como en 3.210, $B_k^0(t)$ es el tiempo residual de cambio de la clase k a la clase $k+1 \pmod{K}$; $C(t)$ indica el número de servicios que han sido comenzados y/o completados durante la sesión activa del buffer.

Los parámetros cruciales son la carga nominal de la cola k : $\beta_k = \alpha_k / \mu_k$ y la carga total es $\rho_0 = \sum \beta_k$, la media total del tiempo de cambio en un ciclo del token está definido por

$$u^0 = \sum_{k=1}^K \mathbb{E}[\eta_k^0(1)] = \sum_{k=1}^K \frac{1}{\mu_k^0} \quad (3.196)$$

El proceso de la longitud de la cola $Q_k^x(t)$ y el proceso de acumulación del tiempo de servicio $T_k^x(t)$ para el buffer k y para el estado inicial x se definen como antes. Sea $T_k^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el token tarda en cambiar del buffer k al $k+1 \pmod{K}$. Suponga que la función $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot), \bar{T}^0(\cdot))$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T^{x,0}(|x|t) \right) \quad (3.197)$$

cuando $|x| \rightarrow \infty$. Entonces $(\bar{Q}(t), \bar{T}(t), \bar{T}^0(t))$ es un flujo límite retrasado del token ring.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado

Proposición 454. Sea $(\bar{Q}, \bar{T}, \bar{T}^0)$ un flujo límite de 3.197 y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0) \right) \rightarrow (\bar{Q}_k(0), 0, 0, 0)$$

para $k = 1, \dots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\bar{T}(t)$ y $\bar{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\bar{T}(0) = \bar{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K [\bar{T}_k(t) + \bar{T}_k^0(t)] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\bar{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\bar{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \bar{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \bar{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\bar{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\bar{T}}_k^0(t)$$

para $\bar{Q}_k(t) > 0$.

Lema 33. El proceso estocástico Φ es un proceso de markov fuerte, temporalmente homogéneo, con trayectorias muestrales continuas por la derecha, cuyo espacio de estados Y es igual a $X \times \mathbb{R}$

Proposición 455. Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0 \quad (3.198)$$

Lema 34. Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = \max(n \geq 1 : \zeta(1) + \dots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \quad (3.199)$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 782. Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (3.200)$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 783. Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{f_p}, t \rightarrow \infty, x \in X. \quad (3.201)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 784. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} \|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0. \quad (3.202)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 785. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en (X, \mathcal{B}_X) , y π la distribución estacionaria de X .*

i) *Para cualquier $f: X \leftarrow \mathbb{R}_+$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds = \pi(f) := \int f(x) \pi(dx) \quad (3.203)$$

\mathbb{P} -c.s.

ii) *Para cualquier $f: X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.*

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s , única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(x)] = \bar{N} > 0 \quad (3.204)$$

2.

$$\mathbb{E}[N(x)] \leq \bar{N} \quad (3.205)$$

para cualquier valor de x .

La manera en que atiende el servidor m -ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j , el servidor se cambia a la cola j' con probabilidad $r_{j,j'}^m = r_{j,j'}$
- La n -ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}[\delta_{j,j'}(1)] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $(r_{j,j'})$.
- Finalmente, se define

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}[\delta_{j,j'}(1)]. \quad (3.206)$$

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Sea x el número de usuarios en la cola esperando por servicio y $N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política dada y fija mientras el servidor permanece dando servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(x)] = \bar{N} > 0. \quad (3.207)$$

(S2.)

$$\mathbb{E}[N(x)] \leq \bar{N}, \quad (3.208)$$

para cualquier valor de x .

El tiempo que tarda un servidor en volver a dar servicio después de abandonar la cola inmediata anterior y llegar a la próxima se llama tiempo de traslado o de cambio de cola, al momento de la n -ésima visita del servidor a la cola j se genera una sucesión de variables aleatorias $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con la propiedad de que $\mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)] \geq 0$.

Se define

$$\delta^* := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)]. \quad (3.209)$$

Los tiempos entre arribos a la cola k , son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos. Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos. Para la k -ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Para el caso más sencillo podemos definir un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada, el estado $\mathbb{X}(t)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}(t) = (Q_k(t), A_l(t), B_k(t) : k = 1, 2, \dots, K, l \in \mathcal{A}), \quad (3.210)$$

donde $Q_k(t)$ es la longitud de la cola k para los usuarios esperando servicio, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k(t)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio.

Los tiempos entre arribos residuales, que son el tiempo que queda hasta que el próximo usuario llega a la cola para recibir servicio, se denotan por $A_k(t)$. Tanto $B_k(t)$ como $A_k(t)$ se suponen continuos por la derecha [?].

Sea \mathcal{X} el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x = (q, a, b)$ un estado genérico en \mathbb{X} , la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = (q, a, b) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x\| = |q| + |a| + |b|$. En [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso \mathbb{X} es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de *Borel Derecho* en el espacio de estados medible $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(\mathbb{X}(t) \in D).$$

Definición 1146. Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ -finita y

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D) \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1147. El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

Definición 1148. Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D$, $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

Nota 685. i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π ([105]).

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso a la medida se le llama **Harris recurrente positiva**.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria; se define

$$P_\pi(\cdot) = \int_X P_x(\cdot) \pi(dx).$$

Se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, así, el proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π .

iv) En [116] se muestra que si $P_x\{\tau_D < \infty\} = 1$ incluso para solamente un conjunto pequeño, entonces el proceso de Harris es recurrente.

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = (Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)) \quad (3.211)$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \quad (3.212)$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k , incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k -ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k .
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t)$, $B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([94]).

Dada una condición inicial $x \in \mathcal{X}$, $Q_k^x(t)$ es la longitud de la cola k al tiempo t y $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en atender a los usuarios de la cola k . De igual manera se define $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en cambiar de cola para volver a atender a los usuarios.

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \quad (3.213)$$

$$\bar{T}_m^x(t) = \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \quad (3.214)$$

$$\bar{T}_m^{x,0}(t) = \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t). \quad (3.215)$$

Cualquier límite $\bar{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola, al conjunto de todos los posibles flujos límite se le llamará **modelo de flujo**, ([?]).

Definición 1149. Un flujo límite para un sistema de visitas bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}_m(\cdot), \bar{T}_m^0(\cdot))$ de las siguientes ecuaciones, donde $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_1(t), \dots, \bar{Q}_K(t))$ y $\bar{T}(t) = (\bar{T}_1(t), \dots, \bar{T}_K(t))$

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^M \mu_k \bar{T}_{m,k}(t) \quad (3.216)$$

$$\bar{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, K, \quad (3.217)$$

$$\bar{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \bar{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \quad (3.218)$$

$$\sum_{k=1}^K \bar{T}_{m,k}^0(t) + \bar{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \dots, M \quad (3.219)$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en (3.216)-(3.219) se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ se le denotará por \mathcal{Q} .

Definición 1150. El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.

Es necesario realizar los siguientes supuestos, ver ([?]) y ([95]):

A1) $\xi_1, \dots, \xi_K, \eta_1, \dots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\xi_k(1)^{p+1} \right] &< \infty \text{ para } k \in \mathcal{A} \text{ y} \\ \mathbb{E} \left[\eta_k(1)^{p+1} \right] &< \infty \text{ para } k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en \mathbb{R}_+ , y un entero j_k , tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \quad (3.220)$$

$$P(\xi_k(1) + \dots + \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x) dx \quad (3.221)$$

$$\int_0^\infty q_k(x) dx > 0 \quad (3.222)$$

En [?] se da un argumento para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños. Entonces la condición A3) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X , cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 786. Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:

i) Para alguna constante κ_p , y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p \quad (3.223)$$

donde p es el entero dado por A2).

Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [Q_k(t)^r] = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r] \leq \kappa_r \quad (3.224)$$

para $r = 1, \dots, p$ y $k = 1, \dots, K$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1} :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q(0)]| = 0. \quad (3.225)$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s) ds = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r] \quad (3.226)$$

\mathbb{P} -c.s., para $r = 1, \dots, p$ y $k = 1, \dots, K$.

Teorema 787. Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \text{ con } T \geq 0, \quad (3.227)$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \quad (3.228)$$

En el caso particular de un modelo con un solo servidor, $M = 1$, se tiene que si se define

Definición 1151.

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + \max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{N} \right) \delta^*. \quad (3.229)$$

entonces

Teorema 788. i) Si $\rho < 1$, entonces la red es estable, es decir el teorema (786) se cumple.

ii) De lo contrario, es decir, si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, el teorema (787).

Proposición 456. Sea $(\bar{Q}, \bar{T}, \bar{T}^0)$ un flujo límite de ?? y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0) \right) \rightarrow (\bar{Q}_k(0), 0, 0, 0)$$

para $k = 1, \dots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\bar{T}(t)$ y $\bar{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\bar{T}(0) = \bar{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K [\bar{T}_k(t) + \bar{T}_k^0(t)] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\bar{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\bar{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \bar{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \bar{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\bar{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\bar{T}}_k^0(t)$$

para $\bar{Q}_k(t) > 0$.

Lema 66 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 789 (Teorema 5.2 [91]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 790 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 67 (Lema 5.2 [106]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = \max \{n \geq 1 : \xi(1) + \dots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]} \right)^r \quad (3.230)$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) *Para cualquier $t > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right]$*

b) *Las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.*

Teorema 791 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E} \left[\frac{N(t)}{t} \right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$.

Proposición 457 (Proposicin 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adem s suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0. \quad (3.231)$$

Proposición 458 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p) dt \right] \leq C_{p+1} (1 + |x|^{p+1}) \quad (3.232)$$

Proposición 459 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X , sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C , entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s)) ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \quad (3.233)$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 792 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), ademś suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (3.234)$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$\text{Limsup}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \quad (3.235)$$

Teorema 793 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\| P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \|_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 794 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)|P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot)|_{f=0}},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s , única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

$$(S1.) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(x)] = \bar{N} > 0. \quad (3.236)$$

$$(S2.) \quad \mathbb{E}[N(x)] \leq \bar{N}, \quad (3.237)$$

para cualquier valor de x .

- La n -ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)] \geq 0$.

- Se define

$$\delta^* := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)]. \quad (3.238)$$

- Los tiempos de inter-arribo a la cola k , son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k -ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k -ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = (Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)) \quad (3.239)$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \quad (3.240)$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k , incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k -ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k .
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t)$, $B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([94])

- Los tiempos de interarribo a la cola k , son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k -ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k -ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ -álgebra de Borel en E , que se denotará por \mathcal{E} .

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ -álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ -álgebra más general, (\mathcal{G}_t) tal que (X_t) sea \mathcal{E} -adaptado.

Definición 1152. Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en (E, \mathcal{E}) , si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B) \quad (3.241)$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en (E, \mathcal{E}) es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov⁴² (3.309) relativa a (\mathcal{G}_t) si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t) \quad s \leq t \in I, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (3.243)$$

⁴¹Ecuación de Chapman-Kolmogorov

⁴²

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \quad H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \quad (3.242)$$

Definición 1153. Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) es llamada Semigrupo de Transición de Markov o Semigrupo de Transición si

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_sf)(x), \quad t, s \geq 0, \quad x \in E \quad f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 686. Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (3.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_sf(X_t) \quad t, s \geq 0, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (3.244)$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t) .

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (3.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t) .

Definición 1154. Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E .

Definición 1155 (HD1). Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición HD1 si, dada una medida de probabilidad μ en E , existe una σ -álgebra \mathcal{E}^* con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un \mathcal{E}^* -proceso E -valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ .

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas \mathbf{P}^x tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier \mathbf{P}^x , X_t es de Markov con semigrupo (P_t) . \mathbf{P}^x puede considerarse como la distribución condicional de \mathbf{P} dado $X_0 = x$.

Definición 1156. Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en (E, \mathcal{E}) . La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso \mathcal{E} -Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que \mathbf{X} satisfaga las siguientes condiciones:

- i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E -valuado continuo por la derecha \mathcal{E}^* -adaptado a (\mathcal{G}_t) ;
- ii) $(\theta_t)_{t \geq 0}$ es una colección de operadores shift para X , es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \quad \text{y} \quad X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \quad (3.245)$$

- iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t \in I}$ tiene la propiedad de Markov (3.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 1157 (HD2). Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.

Definición 1158. Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:

- i) \mathbf{X} es una realización continua por la derecha, 1198, de (P_t) .
- ii) \mathbf{X} satisface la condición HD2, 1199, relativa a \mathcal{G}_t .
- iii) \mathcal{G}_t es aumentado y continuo por la derecha.

Lema 68 (Lema 4.2, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k(|x_n|t) \rightarrow P'_k t, \text{ u.o.c.}, \quad (3.246)$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k(t - \bar{U}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (3.247)$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k(t - \bar{V}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (3.248)$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 69 (Lema 4.3, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}_k$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{U}_k - t)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{V}_k - t)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

y

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l , si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t . Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t . Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k .

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = x_k(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \quad (3.249)$$

para $k = 1, \dots, K$. Para $i = 1, \dots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t . Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i . Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \quad (3.250)$$

para $i = 1, \dots, d$.

Hacer

$$\begin{aligned} T^x(t) &= (T_1^x(t), \dots, T_K^x(t))', \\ I^x(t) &= (I_1^x(t), \dots, I_K^x(t))' \end{aligned}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \dots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \quad (3.251)$$

$$Q^x(t) \geq 0, \quad (3.252)$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \bar{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \quad (3.253)$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \quad (3.254)$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t)) dI_i^x(t) = 0, \quad (3.255)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}^x(\cdot), \bar{T}^x(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (3.256)$$

donde e es un vector de unos de dimensión d , C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 831:

Teorema 795 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \rightarrow \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \rightarrow \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)) \rightarrow (\bar{Q}(0), \bar{U}, \bar{V}), \quad (3.257)$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t), T^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t)) \rightarrow (\bar{Q}(t), \bar{T}(t)) \text{ u.o.c.} \quad (3.258)$$

Además, $(\bar{Q}(t), \bar{T}(t))$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\bar{Q}(t) = Q(0) + (\alpha t - \bar{U})^+ - (I - P)' M^{-1} (\bar{T}(t) - \bar{V})^+, \quad (3.259)$$

$$\bar{Q}(t) \geq 0, \quad (3.260)$$

$$\bar{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \quad (3.261)$$

$$\bar{I}(t) = et - C\bar{T}(t) \text{ es no decreciente,} \quad (3.262)$$

$$\int_0^\infty (C\bar{Q}(t)) d\bar{I}(t) = 0, \quad (3.263)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (3.264)$$

Definición 1159 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ en 3.325 es un flujo límite de la disciplina. Cualquier solución (3.326)-(3.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\bar{Q}(0)| + |\bar{U}| + |\bar{V}| = 1$, se tiene que $\bar{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 796 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \quad (3.265)$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\bar{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado \bar{Q}^x es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 3.216-3.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ se le denotará por \mathcal{Q} .

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1160 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 35 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 3.216-3.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial \bar{x} satisface que $|\bar{x}| = |\bar{Q}(0)| + |\bar{A}(0)| + |\bar{B}(0)| \leq 1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 460. *Sea $(\bar{Q}, \bar{T}, \bar{T}^0)$ un flujo límite de 3.197 y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0) \right) \rightarrow (\bar{Q}_k(0), 0, 0, 0)$$

para $k = 1, \dots, K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) *Los vectores de tiempo ocupado $\bar{T}(t)$ y $\bar{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\bar{T}(0) = \bar{T}^0(0) = 0$.*

ii) *Para todo $t \geq 0$*

$$\sum_{k=1}^K [\bar{T}_k(t) + \bar{T}_k^0(t)] = t$$

iii) *Para todo $1 \leq k \leq K$*

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\bar{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\bar{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \bar{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \bar{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\bar{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\bar{T}}_k^0(t)$$

para $\bar{Q}_k(t) > 0$.

Lema 70 (Lema 3.1 [91]). Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambien es estable.

Teorema 797 (Teorema 5.2 [91]). Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.

Teorema 798 (Teorema 5.1 [91]). La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.

Lema 71 (Lema 5.2 [106]). Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo

$$E(t) = \max \{n \geq 1 : \xi(1) + \dots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]} \right)^r \quad (3.266)$$

de aqu, bajo estas condiciones

$$a) \text{ Para cualquier } t > 0, \sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right]$$

$$b) \text{ Las variables aleatorias } \left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\} \text{ son uniformemente integrables.}$$

Teorema 799 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces

$$a) \frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu} \text{ a.s., cuando } t \rightarrow \infty.$$

$$b) \mathbb{E} \left[\frac{N(t)}{t} \right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}, \text{ cuando } t \rightarrow \infty \text{ para todo } r > 0..$$

Proposición 461 (Proposicin 5.1 [95]). Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adem s suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0. \quad (3.267)$$

Proposición 462 (Proposición 5.3 [95]). Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p) dt \right] \leq C_{p+1} (1 + |x|^{p+1}) \quad (3.268)$$

Proposición 463 (Proposición 5.4 [95]). Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X , sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C , entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s)) ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \quad (3.269)$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 800 (Teorema 5.5 [95]). Suponga que se cumplen (A1) y (A2), ademś suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (3.270)$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\text{Limsup}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \quad (3.271)$$

Teorema 801 (Teorema 6.2[95]). Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que

$$\| P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \|_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 802 (Teorema 6.3[95]). Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)|P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot)|_f} = 0,$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]|} = 0.$$

Proposición 464 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0 \quad (3.272)$$

Lema 36 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = \max(n \geq 1 : \zeta(1) + \dots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \quad (3.273)$$

Luego, bajo estas condiciones:

- a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] < \infty$
- b) las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 803 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (3.274)$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 804 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{f_p}, \quad t \rightarrow \infty, x \in X. \quad (3.275)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 805 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} \|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0. \quad (3.276)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q(0)]| = 0.$$

Teorema 806 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en (X, \mathcal{B}_X) , y π la distribución estacionaria de X .*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds = \pi(f) := \int f(x) \pi(dx) \quad (3.277)$$

\mathbb{P} -c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 807 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \quad T \geq 0, \quad (3.278)$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \quad (3.279)$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k -ésima cola, son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k -ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$,
- la tasa de servicio para la k -ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$,

- también se define $\rho_k := \lambda_k / \mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.

Definición 1161. Sea X un conjunto y \mathcal{F} una σ -álgebra de subconjuntos de X , la pareja (X, \mathcal{F}) es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a \mathcal{F} , si $A \in \mathcal{F}$.

Definición 1162. Sea (X, \mathcal{F}, μ) espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ -finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.

Definición 1163. Sea X el conjunto de los números reales \mathbb{R} . El álgebra de Borel es la σ -álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado Conjunto de Borel.

Definición 1164. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X . Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1165. Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \dots$, espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \dots)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \dots$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^n \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama cilindro con base B^n , el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i$.

Definición 1166. [TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ -álgebras \mathcal{F}_t , para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es \mathcal{F}_t -medible para cada t . Si no se especifica \mathcal{F}_t entonces se toma \mathcal{F}_t como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ -álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.

Definición 1167. [TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ -álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ -álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.

Definición 1168. Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$ -medible,

Definición 1169. Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \quad (3.280)$$

Nota 687. Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (3.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \quad (3.281)$$

Teorema 808. Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots)$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribución inicial P_0 y probabilidad de transición p_{mn} , para $m, n = 0, 1, \dots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ -álgebra \mathcal{F}_n . Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \quad (3.282)$$

en $\{T < \infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 465. Sea $(\bar{Q}, \bar{T}, \bar{T}^0)$ un flujo límite de ?? y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0) \right) \rightarrow (\bar{Q}_k(0), 0, 0, 0)$$

para $k = 1, \dots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\bar{T}(t)$ y $\bar{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\bar{T}(0) = \bar{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K [\bar{T}_k(t) + \bar{T}_k^0(t)] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\bar{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\bar{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \bar{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \bar{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\bar{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\bar{T}}_k^0(t)$$

para $\bar{Q}_k(t) > 0$.

Lema 72 (Lema 3.1 [91]). Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.

Teorema 809 (Teorema 5.2 [91]). Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.

Teorema 810 (Teorema 5.1 [91]). La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.

Lema 73 (Lema 5.2 [106]). Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo

$$E(t) = \max \{n \geq 1 : \xi(1) + \dots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]} \right)^r \quad (3.283)$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 811 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E} \left[\frac{N(t)}{t} \right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$.

Proposición 466 (Proposición 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0. \quad (3.284)$$

Proposición 467 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p) dt \right] \leq C_{p+1} (1 + |x|^{p+1}) \quad (3.285)$$

Proposición 468 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X , sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C , entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))] ds \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \quad (3.286)$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 812 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (3.287)$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \quad (3.288)$$

Teorema 813 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\| P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \|_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 814 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)} |P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot)|_f = 0,$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)} |\mathbb{E}_x [Q_t] - \mathbb{E}_\pi [Q_0]| = 0.$$

Sean $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k , $A_k(t)$ el tiempo residual de arribos a la cola k , para cada servidor m , sea $H_m(t)$ par ordenado que consiste en la cola que está siendo atendida y la política de servicio que se está utilizando. $B_m(t)$ los tiempos de servicio residuales, $B_m^0(t)$ el tiempo residual de traslado, $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H_m(t)$.

El proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = (Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)) \quad (3.289)$$

para $k = 1, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \dots, \xi_K, \eta_1, \dots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\xi_l(1)^{p+1}] &< \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y} \\ \mathbb{E} [\eta_k(1)^{p+1}] &< \infty \text{ para } k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

donde \mathcal{A} es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \dots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en \mathbb{R}_+ , y un entero j_k , tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \quad (3.290)$$

$$P(\xi_k(1) + \dots + \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x) dx \quad (3.291)$$

$$\int_0^\infty q_k(x) dx > 0 \quad (3.292)$$

En Dai [94] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho, Sharpe [123], en el espacio de estados medible (X, \mathcal{B}_X) .

Se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable.

Definición 1170. Un espacio topológico E es llamado Luisin si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.

Definición 1171. Un espacio topológico E es llamado de Radón si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1172. E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada, tight.

Definición 1173. Una medida finita, λ en la σ -álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si

$$\lambda(E) = \sup \{ \lambda(K) : K \text{ es compacto en } E \}. \quad (3.293)$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 815. Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ -álgebra de Borel en E , que se denotará por \mathcal{E} .

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ -álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ -álgebra más general, (\mathcal{G}_t) tal que (X_t) sea \mathcal{E} -adaptado.

Definición 1174. Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en (E, \mathcal{E}) , si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B) \quad (3.294)$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en (E, \mathcal{E}) es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov ⁴⁴ (3.309) relativa a (\mathcal{G}_t) si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t) \quad s \leq t \in I, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (3.296)$$

Definición 1175. Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) es llamada Semigrupo de Transición de Markov o Semigrupo de Transición si

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_sf)(x), \quad t, s \geq 0, \quad x \in E \quad f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 688. Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (3.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_sf(X_t) \quad t, s \geq 0, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (3.297)$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t) .

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (3.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t) .

Definición 1176. Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E .

Definición 1177 (HD1). Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición HD1 si, dada una medida de probabilidad μ en E , existe una σ -álgebra \mathcal{E}^* con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un \mathcal{E}^* -proceso E -valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ .

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas \mathbf{P}^x tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier \mathbf{P}^x , X_t es de Markov con semigrupo (P_t) . \mathbf{P}^x puede considerarse como la distribución condicional de \mathbf{P} dado $X_0 = x$.

Definición 1178. Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en (E, \mathcal{E}) . La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso \mathcal{E} -Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que \mathbf{X} satisfaga las siguientes condiciones:

- i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E -valuado continuo por la derecha \mathcal{E}^* -adaptado a (\mathcal{G}_t) ;
- ii) $(\theta_t)_{t \geq 0}$ es una colección de operadores shift para X , es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \quad \text{y} \quad X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \quad (3.298)$$

⁴³Ecuación de Chapman-Kolmogorov

⁴⁴

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \quad H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \quad (3.295)$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t \in I}$ tiene la propiedad de Markov (3.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 1179 (HD2). Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.

Definición 1180. Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:

- i) \mathbf{X} es una realización continua por la derecha, 1198, de (P_t) .
- ii) \mathbf{X} satisface la condición HD2, 1199, relativa a \mathcal{G}_t .
- iii) \mathcal{G}_t es aumentado y continuo por la derecha.

Definición 1181. Sea X un conjunto y \mathcal{F} una σ -álgebra de subconjuntos de X , la pareja (X, \mathcal{F}) es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a \mathcal{F} , si $A \in \mathcal{F}$.

Definición 1182. Sea (X, \mathcal{F}, μ) espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ -finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.

Definición 1183. Sea X el conjunto de los números reales \mathbb{R} . El álgebra de Borel es la σ -álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado Conjunto de Borel.

Definición 1184. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X . Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1185. Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \dots$, espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \dots)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \dots$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^n \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama cilindro con base B^n , el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i$.

Definición 1186. [TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ -álgebras \mathcal{F}_t , para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es \mathcal{F}_t -medible para cada t . Si no se especifica \mathcal{F}_t entonces se toma \mathcal{F}_t como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ -álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.

Definición 1187. [TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ -álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ -álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.

Definición 1188. Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$ -medible,

Definición 1189. Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \quad (3.299)$$

Nota 689. Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (3.299) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \quad (3.300)$$

Teorema 816. Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots, \infty)$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribución inicial P_0 y probabilidad de transición p_{mn} , para $m, n = 0, 1, \dots, m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ -álgebra \mathcal{F}_n . Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, \infty\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \quad (3.301)$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea \mathcal{E} la clase de conjuntos medibles en E :

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde \mathcal{M} son los conjuntos de Borel de M_v . Entonces (E, \mathcal{E}) es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de (\mathbf{x}_t) está determinada por los siguientes objetos:

- i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.
- ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.
- iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \quad (3.302)$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_v(t, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \quad (3.303)$$

∂M_v denota la frontera de M_v .

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H}f(\zeta_t), \quad (3.304)$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y \mathcal{H} denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que \mathcal{H}_v es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = \inf \{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ , se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon]$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de \mathbf{x} para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en (E, \mathcal{E}) para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso (\mathbf{x}_t) comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.305)$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribución $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de (\mathbf{x}_t) para $t \leq T_1$ es⁴⁵

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, Z), & t = T_1. \end{cases}$$

⁴⁵Revisar página 362, y 364 de Davis [98].

Comenzando en \mathbf{x}_{T_1} se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto \mathbf{x}_{T_2} de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes \mathbf{x}_t con tiempos de salto T_1, T_2, \dots . Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i , con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 12 (Supuesto 3.1, Davis [98]). Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \quad (3.306)$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1190. Un espacio topológico E es llamado *Lusin* si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.

Definición 1191. Un espacio topológico E es llamado de *Radón* si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1192. E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada, tight.

Definición 1193. Una medida finita, λ en la σ -álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice *cerrada* si

$$\lambda(E) = \sup \{ \lambda(K) : K \text{ es compacto en } E \}. \quad (3.307)$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 817. Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ -álgebra de Borel en E , que se denotará por \mathcal{E} .

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ -álgebra natural definida como $\sigma \{ f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E} \}$. Se considerará una σ -álgebra más general, (\mathcal{G}_t) tal que (X_t) sea \mathcal{E} -adaptado.

Definición 1194. Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en (E, \mathcal{E}) , si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B) \quad (3.308)$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en (E, \mathcal{E}) es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov⁴⁷ (3.309) relativa a (\mathcal{G}_t) si

$$\mathbb{P} \{ f(X_t) | \mathcal{G}_s \} = P_{s,t} f(X_t) \quad s \leq t \in I, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (3.310)$$

Definición 1195. Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en (E, \mathcal{E}) es llamada *Semigrupo de Transición de Markov* o *Semigrupo de Transición* si

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \quad t, s \geq 0, \quad x \in E \quad f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 690. Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada *homogénea* si $P_{s,t} = P_{t-s}$.

⁴⁶Ecuación de Chapman-Kolmogorov
⁴⁷

$$\mathbb{P} \{ H | \mathcal{G}_t \} = \mathbb{P} \{ H | X_t \} \quad H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \quad (3.309)$$

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (3.310) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \quad t, s \geq 0, \quad f \in b\mathcal{E}. \quad (3.311)$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t) .

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (3.311) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t) .

Definición 1196. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E .*

Definición 1197 (HD1). *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición HD1 si, dada una medida de probabilidad μ en E , existe una σ -álgebra \mathcal{E}^* con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un \mathcal{E}^* -proceso E -valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ .*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas \mathbf{P}^x tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y bajo cualquier \mathbf{P}^x , X_t es de Markov con semigrupo (P_t) . \mathbf{P}^x puede considerarse como la distribución condicional de \mathbf{P} dado $X_0 = x$.

Definición 1198. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en (E, \mathcal{E}) . La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso \mathcal{E} -Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que \mathbf{X} satisfaga las siguientes condiciones:*

- i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E -valuado continuo por la derecha \mathcal{E}^* -adaptado a (\mathcal{G}_t) ;
- ii) $(\theta_t)_{t \geq 0}$ es una colección de operadores shift para X , es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \quad \text{y} \quad X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \quad (3.312)$$

- iii) Para cualquier $x \in E$, $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t \in I}$ tiene la propiedad de Markov (3.311) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 1199 (HD2). *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1200. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

- i) \mathbf{X} es una realización continua por la derecha, 1198, de (P_t) .
- ii) \mathbf{X} satisface la condición HD2, 1199, relativa a \mathcal{G}_t .
- iii) \mathcal{G}_t es aumentado y continuo por la derecha.

Lema 74 (Lema 4.2, Dai[94]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k(|x_n|t) \rightarrow P'_k t, \quad \text{u.o.c.}, \quad (3.313)$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k(t - \bar{U}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (3.314)$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k(t - \bar{V}_k)^+, \text{ u.o.c.}, \quad (3.315)$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 75 (Lema 4.3, Dai[94]). Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \bar{U}_k$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \bar{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{U}_k - t)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = (\bar{V}_k - t)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

y

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l , si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t . Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t . Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k .

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \quad (3.316)$$

para $k = 1, \dots, K$. Para $i = 1, \dots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_j^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t . Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i . Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \quad (3.317)$$

para $i = 1, \dots, d$.

Hacer

$$\begin{aligned} T^x(t) &= (T_1^x(t), \dots, T_K^x(t))', \\ I^x(t) &= (I_1^x(t), \dots, I_K^x(t))' \end{aligned}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \dots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^K \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \quad (3.318)$$

$$Q^x(t) \geq 0, \quad (3.319)$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \bar{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \quad (3.320)$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \quad (3.321)$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t)) dI_i^x(t) = 0, \quad (3.322)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}^x(\cdot), \bar{T}^x(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (3.323)$$

donde e es un vector de unos de dimensión d , C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema 831:

Teorema 818 (Teorema 4.1, Dai [94]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \rightarrow \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \rightarrow \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)) \rightarrow (\bar{Q}(0), \bar{U}, \bar{V}), \quad (3.324)$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|} (Q^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t), T^{x_{n_j}}(|x_{n_j}|t)) \rightarrow (\bar{Q}(t), \bar{T}(t)) \text{ u.o.c.} \quad (3.325)$$

Además, $(\bar{Q}(t), \bar{T}(t))$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\bar{Q}(t) = Q(0) + (\alpha t - \bar{U})^+ - (I - P)' M^{-1} (\bar{T}(t) - \bar{V})^+, \quad (3.326)$$

$$\bar{Q}(t) \geq 0, \quad (3.327)$$

$$\bar{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \quad (3.328)$$

$$\bar{I}(t) = et - C\bar{T}(t) \text{ es no decreciente,} \quad (3.329)$$

$$\int_0^\infty (C\bar{Q}(t)) d\bar{I}(t) = 0, \quad (3.330)$$

$$\text{Condiciones adicionales en } (\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot)) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \quad (3.331)$$

Definición 1201 (Definición 4.1, , Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ en 3.325 es un flujo límite de la disciplina. Cualquier solución (3.326)-(3.331) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\bar{Q}(0)| + |\bar{U}| + |\bar{V}| = 1$, se tiene que $\bar{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 819 (Teorema 4.2, Dai[94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \quad (3.332)$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\bar{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|x| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado \bar{Q}^x es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en 3.216-3.182 se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ se le denotará por \mathcal{Q} .

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1202 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [91].

Lema 37 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por 3.216-3.182 es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial \bar{x} satisface que $|\bar{x}| = |\bar{Q}(0)| + |\bar{A}(0)| + |\bar{B}(0)| \leq 1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 469. *Sea $(\bar{Q}, \bar{T}, \bar{T}^0)$ un flujo límite de 3.197 y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0) \right) \rightarrow (\bar{Q}_k(0), 0, 0, 0)$$

para $k = 1, \dots, K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) *Los vectores de tiempo ocupado $\bar{T}(t)$ y $\bar{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\bar{T}(0) = \bar{T}^0(0) = 0$.*

ii) *Para todo $t \geq 0$*

$$\sum_{k=1}^K [\bar{T}_k(t) + \bar{T}_k^0(t)] = t$$

iii) *Para todo $1 \leq k \leq K$*

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \bar{T}_k(t)$$

iv) *Para todo $1 \leq k \leq K$*

$$\dot{\bar{T}}_k(t) = \beta_k$$

$$\text{para } \bar{Q}_k(t) = 0.$$

v) *Para todo k, j*

$$\mu_k^0 \bar{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \bar{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\bar{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\bar{T}}_k^0(t)$$

para $\bar{Q}_k(t) > 0$.

Lema 76 (Lema 3.1 [91]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 820 (Teorema 5.2 [91]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 821 (Teorema 5.1 [91]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 77 (Lema 5.2 [106]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = \max \{n \geq 1 : \xi(1) + \dots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]} \right)^r \quad (3.333)$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) *Para cualquier $t > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right]$*

b) *Las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.*

Teorema 822 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [106]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. entonces*

a) *$\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.*

b) *$\mathbb{E} \left[\frac{N(t)}{t} \right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$.*

Proposición 470 (Proposicin 5.1 [95]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adem s suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0. \quad (3.334)$$

Proposición 471 (Proposición 5.3 [95]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p) dt \right] \leq C_{p+1} (1 + |x|^{p+1}) \quad (3.335)$$

Proposición 472 (Proposición 5.4 [95]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X , sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C , entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s)) ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \quad (3.336)$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 823 (Teorema 5.5 [95]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), ademś suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (3.337)$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\text{Limsup}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq k_p \quad (3.338)$$

Teorema 824 (Teorema 6.2[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\| P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \|_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 825 (Teorema 6.3[95]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)|P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot)|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]| = 0}.$$

Proposición 473 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x [|X(t_0|x)|^{p+1}] = 0 \quad (3.339)$$

Lema 38 (Lema 5.2, Dai y Meyn [95]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = \max(n \geq 1 : \zeta(1) + \dots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \quad (3.340)$$

Luego, bajo estas condiciones:

$$a) \text{ para cualquier } \delta > 0, \sup_{t \geq \delta} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] < \infty$$

$$b) \text{ las variables aleatorias } \left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\} \text{ son uniformemente integrables.}$$

Teorema 826 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [95]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \quad (3.341)$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 827 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{f_p}, t \rightarrow \infty, x \in X. \quad (3.342)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 828 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} \|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f = 0. \quad (3.343)$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q(0)]| = 0.$$

Teorema 829 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [95]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en (X, \mathcal{B}_X) , y π la distribución estacionaria de X .*

i) *Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds = \pi(f) := \int f(x) \pi(dx) \quad (3.344)$$

\mathbb{P} -c.s.

ii) *Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.*

Teorema 830 (Teorema 2.2, Down [99]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, T \geq 0, \quad (3.345)$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \quad (3.346)$$

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t ,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t , que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k .
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t , que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k -ésima.

Supóngase que la función $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}_m(\cdot), \bar{T}_m^0(\cdot))$ para $m = 1, 2, \dots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t) \right) \quad (3.347)$$

para $m = 1, 2, \dots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$, ver [99]. Entonces $(\bar{Q}(t), \bar{T}_m(t), \bar{T}_m^0(t))$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por \mathcal{Q} , ver [99, 94, 95].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\bar{Q}_k(t) = \bar{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^M \mu_k \bar{T}_{m,k}(t), \quad (3.348)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$.

$$\bar{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, K. \quad (3.349)$$

$$\bar{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \bar{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \quad (3.350)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$.

$$\sum_{k=1}^K \bar{T}_{m,k}^0(t) + \bar{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \dots, M. \quad (3.351)$$

Definición 1203 (Definición 4.1, Dai [94]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $(\bar{Q}(\cdot), \bar{T}(\cdot), \bar{T}^0(\cdot))$ en (3.347) es un flujo límite de la disciplina. Cualquier solución (3.348)-(3.351) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1204. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\bar{Q}(0)| + |\bar{U}| + |\bar{V}| = 1$, se tiene que $\bar{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 831 (Teorema 4.2, Dai [94]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\bar{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t). \quad (3.352)$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\bar{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado \bar{Q}^x es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1205 (Definición 3.3, Dai y Meyn [95]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\bar{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\bar{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\bar{Q}(0)| = 1$.*

Lema 39 (Lema 3.1, Dai y Meyn [95]). *Si el modelo de flujo definido por (3.348)-(3.351) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial \bar{x} satisface que $|\bar{x}| = |\bar{Q}(0)| + |\bar{A}(0)| + |\bar{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 832 (Teorema 2.1, Down [99]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) *Para alguna constante κ_p , y para cada condición inicial $x \in X$*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p] ds \leq \kappa_p, \quad (3.353)$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [Q_k(t)^r] = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r] \leq \kappa_r, \quad (3.354)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X .

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1} :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x [Q_k(t)] - \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)]| = 0. \quad (3.355)$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números se cumple:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s) ds = \mathbb{E}_\pi [Q_k(0)^r], \quad \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \quad (3.356)$$

para $r = 1, 2, \dots, p$ y $k = 1, 2, \dots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 833 (Teorema 2.3, Down [99]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + \max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js} \bar{N}_s} \right) \delta^* \quad (3.357)$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema 832.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema 830

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [98], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [98], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [95], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [123]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en (Ω, \mathcal{F}) y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x \{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x -c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un \mathcal{F}_t -tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [94, 108].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 1206. Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ -finita y

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D) \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1207. El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = \inf \{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 691. i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Gethoor [105]).

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}(\cdot) = \int_{\mathbb{X}} P_x(\cdot) \pi(dx),$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [95].

Definición 1208. Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [94]:

Lema 78 (Lema 3.1, Dai [94]). Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \quad (3.358)$$

donde $\tau_B(\delta) = \inf \{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 79 (Lema 3.1, Dai [94]). Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.

Teorema 834 (Teorema 3.1, Dai [94]). Si existe un $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \quad (3.359)$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x , entonces la ecuación (3.358) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos A1)-A3), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

3.3 Ya revisado

Definanse los puntos de regeneración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \dots, L_N(t)]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j(\tau_i(m)) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \dots, M_i$ la duración del m -ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}[C_i]$ como

$$\mathbb{E}[C_i] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}[M_i]}$$

Sea la función generadora de momentos para L_i , el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i] \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\ \mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i] \mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)] \end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo. Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z \frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i , $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\tau_i(m)}\right] = \frac{1 - \mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\tau_i(m)}\right]}{1 - P_i(z)} \\ &= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)} \end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned} Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \\ &= \frac{\mu_i(1 - \mu_i)}{f_i(i)} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \end{aligned}$$

Definición 1209. Sea L_i^* el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces

$$\mathbb{E}[L_i^*] = f_i(i) \quad (3.360)$$

$$\text{Var}[L_i^*] = f_i(i, i) + \mathbb{E}[L_i^*] - \mathbb{E}[L_i^*]^2. \quad (3.361)$$

Definición 1210. El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)$.

Recordemos las siguientes expresiones:

$$S_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\bar{\tau}_i(m) - \tau_i(m)}\right] = F_i(\theta(z)),$$

$$F(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],$$

$$P(z) = \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],$$

$$F_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right], \theta_i(z) = zP_i$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{1 - \mu_i} = \frac{f_i(i)}{1 - \mu_i}, \\ \text{Var}[S_i] &= \frac{\text{Var}[L_i^*]}{(1 - \mu_i)^2} + \frac{\sigma^2 \mathbb{E}[L_i^*]}{(1 - \mu_i)^3} \end{aligned}$$

donde recordemos que

$$\text{Var}[L_i^*] = f_i(i, i) + f_i(i) - f_i(i)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \bar{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\bar{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1) - \bar{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1) - \bar{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i(z) = I_i[P_i(z)]$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_i^*] &= \mu_i \mathbb{E}[I_i] \\ \text{Var}[L_i^*] &= \mu_i^2 \text{Var}[I_i] + \sigma^2 \mathbb{E}[I_i] \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},$$

además

$$\text{Var}[I_i] = \frac{\text{Var}[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).$$

Si $C_i(z) = \mathbb{E}[z^{\bar{\tau}(m+1) - \bar{\tau}_i(m)}]$ el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i(z) = I_i[\theta_i(z)],$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i] \mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{\mu_i} \frac{1}{1 - \mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1 - \mu_i)} \\ \text{Var}[C_i] &= \frac{\text{Var}[L_i^*]}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2}. \end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_i] &= \mu_i \mathbb{E}[C_i], \\ \mathbb{E}[I_i] &= (1 - \mu_i) \mathbb{E}[C_i] \end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned} \frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1 - F_i(z)) P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \\ &- \frac{(1 - z) P_i(z) F_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \\ &- \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) (P_i'(z) - 1)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)^2} \\ &+ \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \\ &+ \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z))^2 (P_i(z) - z)} \end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z \rightarrow 1^+$:

$$Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{dQ_i(z)}{dz} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - F_i(z)) P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \quad (3.362)$$

$$- \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) P_i(z) F_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \quad (3.363)$$

$$- \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) (P_i'(z) - 1)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)^2} \quad (3.364)$$

$$+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \quad (3.365)$$

$$+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z))^2 (P_i(z) - z)} \quad (3.366)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - F_i(z)) P_i(z)}{(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} [(1 - F_i(z)) P_i(z)]}{\frac{d}{dz} [(1 - P_i(z)) (-z + P_i(z))]} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-P_i(z) F_i'(z) + (1 - F_i(z)) P_i'(z)}{(1 - P_i(z)) (-1 + P_i'(z)) - (-z + P_i(z)) P_i'(z)} \\
 \\
 \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) P_i(z) F_i'(z)}{(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} [(1 - z) P_i(z) F_i'(z)]}{\frac{d}{dz} [(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)]} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-P_i(z) F_i'(z) + (1 - z) F_i'(z) P_i'(z) + (1 - z) P_i(z) F_i''(z)}{(1 - P_i(z)) (-1 + P_i'(z)) - (-z + P_i(z)) P_i'(z)} \\
 \\
 \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) (P_i'(z) - 1)}{(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)^2} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} [(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) (P_i'(z) - 1)]}{\frac{d}{dz} [(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)^2]} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{- (1 - F_i(z)) P_i(z) (-1 + P_i'(z)) - (1 - z) P_i(z) F_i'(z) (-1 + P_i'(z))}{2 (1 - P_i(z)) (-z + P_i(z)) (-1 + P_i'(z)) - (-z + P_i(z))^2 P_i'(z)} \\
 &\quad + (1 - z) (1 - F_i(z)) (-1 + P_i'(z)) P_i'(z) \\
 &+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) P_i''(z)}{2 (1 - P_i(z)) (-z + P_i(z)) (-1 + P_i'(z)) - (-z + P_i(z))^2 P_i'(z)} \\
 \\
 \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i'(z)}{(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} [(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i'(z)]}{\frac{d}{dz} [(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)]} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{- (1 - F_i(z)) P_i'(z) - (1 - z) F_i'(z) P_i'(z) + (1 - z) (1 - F_i(z)) P_i''(z)}{(1 - P_i(z)) (-1 + P_i'(z)) - (-z + P_i(z)) P_i'(z)} \\
 \\
 \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) P_i'(z)}{(1 - P_i(z))^2 (P_i(z) - z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} [(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) P_i'(z)]}{\frac{d}{dz} [(1 - P_i(z))^2 (P_i(z) - z)]} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{- (1 - F_i(z)) P_i(z) P_i'(z) - (1 - z) P_i(z) F_i'(z) P_i'(z)}{(1 - P_i(z))^2 (-1 + P_i'(z)) - 2 (1 - P_i(z)) (-z + P_i(z)) P_i'(z)} \\
 &\quad + \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i'(z)^2 + (1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) P_i''(z)}{(1 - P_i(z))^2 (-1 + P_i'(z)) - 2 (1 - P_i(z)) (-z + P_i(z)) P_i'(z)}
 \end{aligned}$$

En nuestra notación $V(t) \equiv C_i$ y $X_i = C_i^{(m)}$ para nuestra segunda definición, mientras que para la primera la notación es: $X(t) \equiv C_i$ y $R_i \equiv C_i^{(m)}$.

Definición 1211. Sea L_i^* el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces

$$\mathbb{E}[L_i^*] = f_i(i) \quad (3.367)$$

$$Var[L_i^*] = f_i(i, i) + \mathbb{E}[L_i^*] - \mathbb{E}[L_i^*]^2. \quad (3.368)$$

Definición 1212. El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\bar{\tau}_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.

Definición 1213. El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)$.

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} S_i(z) &= \mathbb{E} \left[z^{\bar{\tau}_i(m) - \tau_i(m)} \right] = F_i(\theta(z)), \\ F(z) &= \mathbb{E} \left[z^{L_0} \right], \\ P(z) &= \mathbb{E} \left[z^{X_n} \right], \\ F_i(z) &= \mathbb{E} \left[z^{L_i(\tau_i(m))} \right], \theta_i(z) = zP_i \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{1 - \mu_i} = \frac{f_i(i)}{1 - \mu_i}, \\ Var[S_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{(1 - \mu_i)^2} + \frac{\sigma^2 \mathbb{E}[L_i^*]}{(1 - \mu_i)^3} \end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var[L_i^*] = f_i(i, i) + f_i(i) - f_i(i)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \bar{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\bar{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E} \left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))} \right] = \mathbb{E} \left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1) - \bar{\tau}(m)} \right]$$

entonces, si

$$I_i(z) = \mathbb{E} \left[z^{\tau_i(m+1) - \bar{\tau}(m)} \right]$$

se tienen que

$$F_i(z) = I_i[P_i(z)]$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_i^*] &= \mu_i \mathbb{E}[I_i] \\ Var[L_i^*] &= \mu_i^2 Var[I_i] + \sigma^2 \mathbb{E}[I_i] \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},$$

además

$$\text{Var}[I_i] = \frac{\text{Var}[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).$$

Si $C_i(z) = \mathbb{E}[z^{\bar{\tau}(m+1) - \bar{\tau}_i(m)}]$ el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i(z) = I_i[\theta_i(z)],$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i] \mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{\mu_i} \frac{1}{1 - \mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1 - \mu_i)} \\ \text{Var}[C_i] &= \frac{\text{Var}[L_i^*]}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2}. \end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_i] &= \mu_i \mathbb{E}[C_i], \\ \mathbb{E}[I_i] &= (1 - \mu_i) \mathbb{E}[C_i] \end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regeneración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \dots, L_N(t)]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j(\tau_i(m)) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \dots, M_i$ la duración del m -ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}[C_i]$ como

$$\mathbb{E}[C_i] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}[M_i]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un proceso estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}[C_i] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^N \mu_k < 1.$$

Nota 692. En Stidham[128] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un proceso estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)} \right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}[C_i] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^N \mu_k < 1.$$

Nota incompleta!!

4 Procesos de Renovación y Regenerativos

Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] = z \frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i , $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\bar{\tau}_i(m)} \right] = \frac{1 - \mathbb{E} \left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\bar{\tau}_i(m)} \right]}{1 - P_i(z)} \\ &= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)} \end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] = \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que
Sea

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Consideremos una cola de la red de sistemas de visitas cíclicas fija, Q_l .

Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (815), sean T_1, T_2, \dots los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_l es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 1214. *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 1215. *Para T_i se define, M_i , el número de ciclos de visita a la cola Q_i , durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 1216. *Para cada uno de los M_i 's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \dots, M_i$, que a su vez, también es un proceso de renovación.*

En nuestra notación $V(t) \equiv C_i$ y $X_i = C_i^{(m)}$ para nuestra segunda definición, mientras que para la primera la notación es: $X(t) \equiv C_i$ y $R_i \equiv C_i^{(m)}$.

Definición 1217. *Sea L_i^* el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\mathbb{E}[L_i^*] = f_i(i) \quad (4.1)$$

$$\text{Var}[L_i^*] = f_i(i, i) + \mathbb{E}[L_i^*] - \mathbb{E}[L_i^*]^2. \quad (4.2)$$

Definición 1218. *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\bar{\tau}_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} S_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\bar{\tau}_i(m) - \tau_i(m)}\right] = F_i(\theta(z)), \\ F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right], \\ P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right], \\ F_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right], \theta_i(z) = zP_i \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{1 - \mu_i} = \frac{f_i(i)}{1 - \mu_i}, \\ \text{Var}[S_i] &= \frac{\text{Var}[L_i^*]}{(1 - \mu_i)^2} + \frac{\sigma_i^2 \mathbb{E}[L_i^*]}{(1 - \mu_i)^3} \end{aligned}$$

donde recordemos que

$$\text{Var}[L_i^*] = f_i(i, i) + f_i(i) - f_i(i)^2.$$

por tanto

$$\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},$$

además

$$\text{Var}[I_i] = \frac{\text{Var}[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).$$

Si $C_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\bar{\tau}(m+1) - \bar{\tau}_i(m)}\right]$ el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i(z) = I_i[\theta_i(z)],$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i] \mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{\mu_i} \frac{1}{1 - \mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1 - \mu_i)} \\ \text{Var}[C_i] &= \frac{\text{Var}[L_i^*]}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_i] &= \mu_i \mathbb{E}[C_i], \\ \mathbb{E}[I_i] &= (1 - \mu_i) \mathbb{E}[C_i]\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regeneración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \dots, L_N(t)]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j(\tau_i(m)) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \dots, M_i$ la duración del m -ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}[C_i]$ como

$$\mathbb{E}[C_i] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}[M_i]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un proceso estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}[C_i] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^N \mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i , el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] &= \mathbb{E} [M_i] \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] \\ \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m) \right] &= \mathbb{E} [M_i] \mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right]}{\mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo. Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] = z \frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i , $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\bar{\tau}_i(m)} \right] = \frac{1 - \mathbb{E} [\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\bar{\tau}_i(m)}]}{1 - P_i(z)} \\ &= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)}\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] = \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \\ &= \frac{\mu_i(1 - \mu_i)}{f_i(i)} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)}\end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1 - F_i(z)) P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \\ &- \frac{(1 - z) P_i(z) F_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \\ &- \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) (P_i'(z) - 1)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)^2} \\ &+ \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \\ &+ \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z))^2 (P_i(z) - z)}\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z \rightarrow 1^+$:

$$Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{dQ_i(z)}{dz} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - F_i(z)) P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \quad (4.3)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) P_i(z) F'_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \quad (4.4)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) (P'_i(z) - 1)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)^2} \quad (4.5)$$

$$+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P'_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \quad (4.6)$$

$$+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) P'_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z))^2 (P_i(z) - z)} \quad (4.7)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - F_i(z)) P_i(z)}{(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} [(1 - F_i(z)) P_i(z)]}{\frac{d}{dz} [(1 - P_i(z)) (-z + P_i(z))]} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-P_i(z) F'_i(z) + (1 - F_i(z)) P'_i(z)}{(1 - P_i(z)) (-1 + P'_i(z)) - (-z + P_i(z)) P'_i(z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) P_i(z) F'_i(z)}{(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} [(1 - z) P_i(z) F'_i(z)]}{\frac{d}{dz} [(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)]} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-P_i(z) F'_i(z) + (1 - z) F'_i(z) P'_i(z) + (1 - z) P_i(z) F''_i(z)}{(1 - P_i(z)) (-1 + P'_i(z)) - (-z + P_i(z)) P'_i(z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) (P'_i(z) - 1)}{(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)^2} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} [(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) (P'_i(z) - 1)]}{\frac{d}{dz} [(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)^2]} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{- (1 - F_i(z)) P_i(z) (-1 + P'_i(z)) - (1 - z) P_i(z) F'_i(z) (-1 + P'_i(z))}{2 (1 - P_i(z)) (-z + P_i(z)) (-1 + P'_i(z)) - (-z + P_i(z))^2 P'_i(z)} \\ &+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) (-1 + P'_i(z)) P'_i(z)}{2 (1 - P_i(z)) (-z + P_i(z)) (-1 + P'_i(z)) - (-z + P_i(z))^2 P'_i(z)} \\ &+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) P''_i(z)}{2 (1 - P_i(z)) (-z + P_i(z)) (-1 + P'_i(z)) - (-z + P_i(z))^2 P'_i(z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P'_i(z)}{(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} [(1 - z) (1 - F_i(z)) P'_i(z)]}{\frac{d}{dz} [(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)]} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{- (1 - F_i(z)) P'_i(z) - (1 - z) F'_i(z) P'_i(z) + (1 - z) (1 - F_i(z)) P''_i(z)}{(1 - P_i(z)) (-1 + P'_i(z)) - (-z + P_i(z)) P'_i(z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i'(z)}{(1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} \left[(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i'(z) \right]}{\frac{d}{dz} \left[(1-P_i(z))^2(P_i(z)-z) \right]} \\
&= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-(1-F_i(z))P_i(z)P_i'(z) - (1-z)P_i(z)F_i'(z)P_i'(z)}{(1-P_i(z))^2(-1+P_i'(z)) - 2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))P_i'(z)} \\
&+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i'(z)^2 + (1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i''(z)}{(1-P_i(z))^2(-1+P_i'(z)) - 2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))P_i'(z)}
\end{aligned}$$

Definición 1219. Sea L_i^* el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces

$$\mathbb{E}[L_i^*] = f_i(i) \quad (4.8)$$

$$Var[L_i^*] = f_i(i, i) + \mathbb{E}[L_i^*] - \mathbb{E}[L_i^*]^2. \quad (4.9)$$

Definición 1220. El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\bar{\tau}_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.

Definición 1221. El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)$.

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
S_i(z) &= \mathbb{E} \left[z^{\bar{\tau}_i(m) - \tau_i(m)} \right] = F_i(\theta(z)), \\
F(z) &= \mathbb{E} \left[z^{L_0} \right], \\
P(z) &= \mathbb{E} \left[z^{X_n} \right], \\
F_i(z) &= \mathbb{E} \left[z^{L_i(\tau_i(m))} \right], \theta_i(z) = zP_i
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{1 - \mu_i} = \frac{f_i(i)}{1 - \mu_i}, \\
Var[S_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{(1 - \mu_i)^2} + \frac{\sigma^2 \mathbb{E}[L_i^*]}{(1 - \mu_i)^3}
\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var[L_i^*] = f_i(i, i) + f_i(i) - f_i(i)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \bar{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\bar{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E} \left[z^{L_i(\tau_i(m+1))} \right] = \mathbb{E} \left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1) - \bar{\tau}(m)} \right]$$

entonces, si

$$I_i(z) = \mathbb{E} \left[z^{\tau_i(m+1) - \bar{\tau}(m)} \right]$$

se tienen que

$$F_i(z) = I_i[P_i(z)]$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[L_i^*] &= \mu_i \mathbb{E}[I_i] \\ \text{Var}[L_i^*] &= \mu_i^2 \text{Var}[I_i] + \sigma^2 \mathbb{E}[I_i]\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},$$

además

$$\text{Var}[I_i] = \frac{\text{Var}[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).$$

Si $C_i(z) = \mathbb{E}[z^{\bar{\tau}(m+1) - \bar{\tau}_i(m)}]$ el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i(z) = I_i[\theta_i(z)],$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i] \mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{\mu_i} \frac{1}{1 - \mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1 - \mu_i)} \\ \text{Var}[C_i] &= \frac{\text{Var}[L_i^*]}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_i] &= \mu_i \mathbb{E}[C_i], \\ \mathbb{E}[I_i] &= (1 - \mu_i) \mathbb{E}[C_i]\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regeneración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \dots, L_N(t)]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j(\tau_i(m)) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \dots, M_i$ la duración del m -ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}[C_i]$ como

$$\mathbb{E}[C_i] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}[M_i]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un proceso estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)} \right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}[C_i] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^N \mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i , el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}[z^{L_i(t)}] = \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right]}{\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m) \right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] &= \mathbb{E}[M_i] \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] \\ \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m) \right] &= \mathbb{E}[M_i] \mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)] \end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo. Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] = z \frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i , $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\tau_i(m)} \right] = \frac{1 - \mathbb{E}[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\tau_i(m)}]}{1 - P_i(z)} \\ &= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)} \end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] = \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned} Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \\ &= \frac{\mu_i(1 - \mu_i)}{f_i(i)} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \end{aligned}$$

$$\text{Sea } V_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \frac{I_i(z) - 1}{z - P_i(z)}$$

$$\frac{\partial V_i(z)}{\partial z} = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \left[\frac{I_i'(z)(z - P_i(z))}{z - P_i(z)} - \frac{(I_i(z) - 1)(1 - P_i'(z))}{(z - P_i(z))^2} \right]$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$U_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - P_i(z)}{z - P_i(z)} \cdot \frac{I_i(z) - 1}{1 - z}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} V_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \left\{ \frac{d}{dz} \left(\frac{1 - P_i(z)}{z - P_i(z)} \right) \frac{I_i(z) - 1}{1 - z} + \frac{1 - P_i(z)}{z - P_i(z)} \frac{d}{dz} \left(\frac{I_i(z) - 1}{1 - z} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \left\{ \frac{-P_i(z)(z - P_i(z)) - (1 - P_i(z))(1 - P_i'(z))}{(z - P_i(z))^2} \cdot \frac{I_i(z) - 1}{1 - z} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \left\{ \frac{1 - P_i(z)}{z - P_i(z)} \cdot \frac{I_i'(z)(1 - z) + (I_i(z) - 1)}{(1 - z)^2} \right\} \\ \frac{\partial U_i(z)}{\partial z} &= \frac{(-1 + I_i[z])(1 - P_i[z])}{(1 - z)^2 \mathbb{E}[I_i](z - P_i[z])} + \frac{(1 - P_i[z]) I_i'[z]}{(1 - z) \mathbb{E}[I_i](z - P_i[z])} - \frac{(-1 + I_i[z])(1 - P_i[z])(1 - P_i'[z])}{(1 - z) \mathbb{E}[I_i](z - P_i[z])^2} \\ &\quad - \frac{(-1 + I_i[z]) P_i'[z]}{(1 - z) \mathbb{E}[I_i](z - P_i[z])} \end{aligned}$$

Sea

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned} \frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1 - F_i(z)) P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \\ &\quad - \frac{(1 - z) P_i(z) F_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \\ &\quad - \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) (P_i'(z) - 1)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)^2} \\ &\quad + \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \\ &\quad + \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z))^2 (P_i(z) - z)} \end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z \rightarrow 1^+$:

$$Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{dQ_i(z)}{dz} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - F_i(z)) P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \quad (4.10)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) P_i(z) F'_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \quad (4.11)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) (P'_i(z) - 1)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)^2} \quad (4.12)$$

$$+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P'_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \quad (4.13)$$

$$+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) P'_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z))^2 (P_i(z) - z)} \quad (4.14)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - F_i(z)) P_i(z)}{(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} [(1 - F_i(z)) P_i(z)]}{\frac{d}{dz} [(1 - P_i(z)) (-z + P_i(z))]} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-P_i(z) F'_i(z) + (1 - F_i(z)) P'_i(z)}{(1 - P_i(z)) (-1 + P'_i(z)) - (-z + P_i(z)) P'_i(z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) P_i(z) F'_i(z)}{(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} [(1 - z) P_i(z) F'_i(z)]}{\frac{d}{dz} [(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)]} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-P_i(z) F'_i(z) + (1 - z) F'_i(z) P'_i(z) + (1 - z) P_i(z) F''_i(z)}{(1 - P_i(z)) (-1 + P'_i(z)) - (-z + P_i(z)) P'_i(z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) (P'_i(z) - 1)}{(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)^2} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} [(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) (P'_i(z) - 1)]}{\frac{d}{dz} [(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)^2]} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{- (1 - F_i(z)) P_i(z) (-1 + P'_i(z)) - (1 - z) P_i(z) F'_i(z) (-1 + P'_i(z))}{2 (1 - P_i(z)) (-z + P_i(z)) (-1 + P'_i(z)) - (-z + P_i(z))^2 P'_i(z)} \\ &+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) (-1 + P'_i(z)) P'_i(z)}{2 (1 - P_i(z)) (-z + P_i(z)) (-1 + P'_i(z)) - (-z + P_i(z))^2 P'_i(z)} \\ &+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) P''_i(z)}{2 (1 - P_i(z)) (-z + P_i(z)) (-1 + P'_i(z)) - (-z + P_i(z))^2 P'_i(z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P'_i(z)}{(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} [(1 - z) (1 - F_i(z)) P'_i(z)]}{\frac{d}{dz} [(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)]} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{- (1 - F_i(z)) P'_i(z) - (1 - z) F'_i(z) P'_i(z) + (1 - z) (1 - F_i(z)) P''_i(z)}{(1 - P_i(z)) (-1 + P'_i(z)) - (-z + P_i(z)) P'_i(z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P'_i(z)}{(1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} \left[(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P'_i(z) \right]}{\frac{d}{dz} \left[(1-P_i(z))^2(P_i(z)-z) \right]} \\
& = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-(1-F_i(z))P_i(z)P'_i(z) - (1-z)P_i(z)F'_i(z)P'_i(z)}{(1-P_i(z))^2(-1+P'_i(z)) - 2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))P'_i(z)} \\
& + \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1-z)(1-F_i(z))P'_i(z)^2 + (1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P''_i(z)}{(1-P_i(z))^2(-1+P'_i(z)) - 2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))P'_i(z)}
\end{aligned}$$

4.1 Tiempo de Ciclo Promedio

Consideremos una cola de la red de sistemas de visitas cíclicas fija, Q_l .

Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (815), sean T_1, T_2, \dots los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_l es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 1222. *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 1223. *Para T_i se define, M_i , el número de ciclos de visita a la cola Q_l , durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 1224. *Para cada uno de los M_i 's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \dots, M_i$, que a su vez, también es un proceso de renovación.*

En nuestra notación $V(t) \equiv C_i$ y $X_i = C_i^{(m)}$ para nuestra segunda definición, mientras que para la primera la notación es: $X(t) \equiv C_i$ y $R_i \equiv C_i^{(m)}$.

4.2 Tiempos de Ciclo e Intervisita

Definición 1225. *Sea L_i^* el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\mathbb{E}[L_i^*] = f_i(i) \quad (4.15)$$

$$\text{Var}[L_i^*] = f_i(i, i) + \mathbb{E}[L_i^*] - \mathbb{E}[L_i^*]^2. \quad (4.16)$$

Definición 1226. *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\bar{\tau}_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 1227. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$S_i(z) = \mathbb{E} \left[z^{\bar{\tau}_i(m) - \tau_i(m)} \right] = F_i(\theta(z)),$$

$$F(z) = \mathbb{E} \left[z^{L_0} \right],$$

$$P(z) = \mathbb{E} \left[z^{X_n} \right],$$

$$F_i(z) = \mathbb{E} \left[z^{L_i(\tau_i(m))} \right], \theta_i(z) = zP_i$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{1 - \mu_i} = \frac{f_i(i)}{1 - \mu_i}, \\ \text{Var}[S_i] &= \frac{\text{Var}[L_i^*]}{(1 - \mu_i)^2} + \frac{\sigma^2 \mathbb{E}[L_i^*]}{(1 - \mu_i)^3}\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$\text{Var}[L_i^*] = f_i(i, i) + f_i(i) - f_i(i)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \bar{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\bar{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1) - \bar{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1) - \bar{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i(z) = I_i[P_i(z)]$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[L_i^*] &= \mu_i \mathbb{E}[I_i] \\ \text{Var}[L_i^*] &= \mu_i^2 \text{Var}[I_i] + \sigma^2 \mathbb{E}[I_i]\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},$$

además

$$\text{Var}[I_i] = \frac{\text{Var}[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).$$

Si $C_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\bar{\tau}(m+1) - \bar{\tau}_i(m)}\right]$ el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i(z) = I_i[\theta_i(z)],$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i] \mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{\mu_i} \frac{1}{1 - \mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1 - \mu_i)} \\ \text{Var}[C_i] &= \frac{\text{Var}[L_i^*]}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_i] &= \mu_i \mathbb{E}[C_i], \\ \mathbb{E}[I_i] &= (1 - \mu_i) \mathbb{E}[C_i]\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regeneración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \dots, L_N(t)]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j(\tau_i(m)) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \dots, M_i$ la duración del m -ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}[C_i]$ como

$$\mathbb{E}[C_i] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}[M_i]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un proceso estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}[C_i] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^N \mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i , el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i] \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\ \mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i] \mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right]}{\mathbb{E} [\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo. Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] = z \frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i , $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\tau_i(m)} \right] = \frac{1 - \mathbb{E} [\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\tau_i(m)}]}{1 - P_i(z)} \\ &= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)} \end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] = \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned} Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \\ &= \frac{\mu_i(1 - \mu_i)}{f_i(i)} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \end{aligned}$$

4.3 Longitudes de la Cola en cualquier tiempo

Sea

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned} \frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1 - F_i(z)) P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \\ &- \frac{(1 - z) P_i(z) F_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \\ &- \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) (P_i'(z) - 1)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)^2} \\ &+ \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \\ &+ \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z))^2 (P_i(z) - z)} \end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z \rightarrow 1^+$:

$$Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{dQ_i(z)}{dz} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - F_i(z)) P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \quad (4.17)$$

$$- \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) P_i(z) F_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \quad (4.18)$$

$$- \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) (P_i'(z) - 1)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)^2} \quad (4.19)$$

$$+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \quad (4.20)$$

$$+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z))^2 (P_i(z) - z)} \quad (4.21)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - F_i(z)) P_i(z)}{(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} [(1 - F_i(z)) P_i(z)]}{\frac{d}{dz} [(1 - P_i(z)) (-z + P_i(z))]} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-P_i(z) F_i'(z) + (1 - F_i(z)) P_i'(z)}{(1 - P_i(z)) (-1 + P_i'(z)) - (-z + P_i(z)) P_i'(z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) P_i(z) F_i'(z)}{(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} [(1 - z) P_i(z) F_i'(z)]}{\frac{d}{dz} [(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)]} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-P_i(z) F_i'(z) + (1 - z) F_i'(z) P_i'(z) + (1 - z) P_i(z) F_i''(z)}{(1 - P_i(z)) (-1 + P_i'(z)) - (-z + P_i(z)) P_i'(z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) (P_i'(z) - 1)}{(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)^2} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} [(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) (P_i'(z) - 1)]}{\frac{d}{dz} [(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)^2]} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{- (1 - F_i(z)) P_i(z) (-1 + P_i'(z)) - (1 - z) P_i(z) F_i'(z) (-1 + P_i'(z))}{2 (1 - P_i(z)) (-z + P_i(z)) (-1 + P_i'(z)) - (-z + P_i(z))^2 P_i'(z)} \\ &+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) (-1 + P_i'(z)) P_i'(z)}{2 (1 - P_i(z)) (-z + P_i(z)) (-1 + P_i'(z)) - (-z + P_i(z))^2 P_i'(z)} \\ &+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) P_i''(z)}{2 (1 - P_i(z)) (-z + P_i(z)) (-1 + P_i'(z)) - (-z + P_i(z))^2 P_i'(z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i'(z)}{(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} [(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i'(z)]}{\frac{d}{dz} [(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)]} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{- (1 - F_i(z)) P_i'(z) - (1 - z) F_i'(z) P_i'(z) + (1 - z) (1 - F_i(z)) P_i''(z)}{(1 - P_i(z)) (-1 + P_i'(z)) - (-z + P_i(z)) P_i'(z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i'(z)}{(1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} \left[(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i'(z) \right]}{\frac{d}{dz} \left[(1-P_i(z))^2(P_i(z)-z) \right]} \\
&= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-(1-F_i(z))P_i(z)P_i'(z) - (1-z)P_i(z)F_i'(z)P_i'(z)}{(1-P_i(z))^2(-1+P_i'(z)) - 2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))P_i'(z)} \\
&+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i'(z)^2 + (1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i''(z)}{(1-P_i(z))^2(-1+P_i'(z)) - 2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))P_i'(z)}
\end{aligned}$$

4.4 Por resolver

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_i(z)}{\partial z} &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z} \cdot \frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z} \right) \cdot \frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} + \frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z} \right) + \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \right) \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \cdot \frac{-F_i'(z)(P_i(z)-z) - (1-F_i(z))(P_i'(z)-1)}{(P_i(z)-z)^2} \\
&+ \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z} \cdot \frac{(1-z)P_i'(z) - P_i(z)}{(1-P_i(z))^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_i^{(1)}(z) &= \frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} - \frac{(1-z)P_i(z)F_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \\
&- \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)(P_i'(z)-1)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} + \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}
\end{aligned}$$

Sea $V_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \frac{I_i(z)-1}{z-P_i(z)}$

$$\frac{\partial V_i(z)}{\partial z} = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \left[\frac{I_i'(z)(z-P_i(z))}{z-P_i(z)} - \frac{(I_i(z)-1)(1-P_i'(z))}{(z-P_i(z))^2} \right]$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$U_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)} \cdot \frac{I_i(z)-1}{1-z}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} V_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \left\{ \frac{d}{dz} \left(\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)} \right) \frac{I_i(z)-1}{1-z} + \frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)} \frac{d}{dz} \left(\frac{I_i(z)-1}{1-z} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \left\{ \frac{-P_i(z)(z-P_i(z)) - (1-P_i(z))(1-P_i'(z))}{(z-P_i(z))^2} \cdot \frac{I_i(z)-1}{1-z} \right\} \\
&+ \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \left\{ \frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)} \cdot \frac{I_i'(z)(1-z) + (I_i(z)-1)}{(1-z)^2} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i(z)}{\partial z} &= \frac{(-1 + I_i[z])(1 - P_i[z])}{(1 - z)^2 \mathbb{E}[I_i](z - P_i[z])} + \frac{(1 - P_i[z])I_i'[z]}{(1 - z)\mathbb{E}[I_i](z - P_i[z])} - \frac{(-1 + I_i[z])(1 - P_i[z])(1 - P'[z])}{(1 - z)\mathbb{E}[I_i](z - P_i[z])^2} \\ &- \frac{(-1 + I_i[z])P_i'[z]}{(1 - z)\mathbb{E}[I_i](z - P_i[z])} \end{aligned}$$

4.5 Tiempos de Ciclo e Intervisita

Definición 1228. Sea L_i^* el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces

$$\mathbb{E}[L_i^*] = f_i(i) \quad (4.22)$$

$$Var[L_i^*] = f_i(i, i) + \mathbb{E}[L_i^*] - \mathbb{E}[L_i^*]^2. \quad (4.23)$$

Definición 1229. El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\bar{\tau}_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.

Definición 1230. El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \bar{\tau}_i(m)$.

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} S_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\bar{\tau}_i(m) - \tau_i(m)}\right] = F_i(\theta(z)), \\ F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right], \\ P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right], \\ F_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right], \theta_i(z) = zP_i \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_i] &= \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{1 - \mu_i} = \frac{f_i(i)}{1 - \mu_i}, \\ Var[S_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{(1 - \mu_i)^2} + \frac{\sigma^2 \mathbb{E}[L_i^*]}{(1 - \mu_i)^3} \end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var[L_i^*] = f_i(i, i) + f_i(i) - f_i(i)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \bar{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\bar{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1) - \bar{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1) - \bar{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i(z) = I_i[P_i(z)]$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[L_i^*] &= \mu_i \mathbb{E}[I_i] \\ \text{Var}[L_i^*] &= \mu_i^2 \text{Var}[I_i] + \sigma^2 \mathbb{E}[I_i]\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},$$

además

$$\text{Var}[I_i] = \frac{\text{Var}[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).$$

Si $C_i(z) = \mathbb{E}[z^{\bar{\tau}(m+1) - \bar{\tau}_i(m)}]$ el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i(z) = I_i[\theta_i(z)],$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i] \mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{\mu_i} \frac{1}{1 - \mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1 - \mu_i)} \\ \text{Var}[C_i] &= \frac{\text{Var}[L_i^*]}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_i] &= \mu_i \mathbb{E}[C_i], \\ \mathbb{E}[I_i] &= (1 - \mu_i) \mathbb{E}[C_i]\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regeneración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \dots, L_N(t)]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j(\tau_i(m)) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \dots, M_i$ la duración del m -ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}[C_i]$ como

$$\mathbb{E}[C_i] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}[M_i]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un proceso estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)} \right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}[C_i] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^N \mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i , el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}[z^{L_i(t)}] = \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right]}{\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m) \right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] &= \mathbb{E}[M_i] \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] \\ \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m) \right] &= \mathbb{E}[M_i] \mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)] \end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo. Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] = z \frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i , $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\tau_i(m)} \right] = \frac{1 - \mathbb{E}[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\tau_i(m)}]}{1 - P_i(z)} \\ &= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)} \end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] = \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned} Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \\ &= \frac{\mu_i(1 - \mu_i)}{f_i(i)} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned} \frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1 - F_i(z)) P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \\ &- \frac{(1 - z) P_i(z) F'_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \\ &- \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) (P'_i(z) - 1)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)^2} \\ &+ \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P'_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \\ &+ \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) P'_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z))^2 (P_i(z) - z)} \end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z \rightarrow 1^+$:

$$Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{dQ_i(z)}{dz} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - F_i(z)) P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \quad (4.24)$$

$$- \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) P_i(z) F'_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \quad (4.25)$$

$$- \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) (P'_i(z) - 1)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)^2} \quad (4.26)$$

$$+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P'_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} \quad (4.27)$$

$$+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) (1 - F_i(z)) P_i(z) P'_i(z)}{\mathbb{E}[C_i] (1 - P_i(z))^2 (P_i(z) - z)} \quad (4.28)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - F_i(z)) P_i(z)}{(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} [(1 - F_i(z)) P_i(z)]}{\frac{d}{dz} [(1 - P_i(z)) (-z + P_i(z))]} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-P_i(z) F'_i(z) + (1 - F_i(z)) P'_i(z)}{(1 - P_i(z)) (-1 + P'_i(z)) - (-z + P_i(z)) P'_i(z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - z) P_i(z) F'_i(z)}{(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} [(1 - z) P_i(z) F'_i(z)]}{\frac{d}{dz} [(1 - P_i(z)) (P_i(z) - z)]} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-P_i(z) F'_i(z) + (1 - z) F'_i(z) P'_i(z) + (1 - z) P_i(z) F''_i(z)}{(1 - P_i(z)) (-1 + P'_i(z)) - (-z + P_i(z)) P'_i(z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)(P_i'(z)-1)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} \left[(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)(P_i'(z)-1) \right]}{\frac{d}{dz} \left[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2 \right]} \\
& = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-(1-F_i(z))P_i(z)(-1+P_i'(z)) - (1-z)P_i(z)F_i'(z)(-1+P_i'(z))}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))(-1+P_i'(z)) - (-z+P_i(z))^2 P_i'(z)} \\
& + \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{+(1-z)(1-F_i(z))(-1+P_i'(z))P_i'(z)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))(-1+P_i'(z)) - (-z+P_i(z))^2 P_i'(z)} \\
& + \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{+(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i''(z)}{2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))(-1+P_i'(z)) - (-z+P_i(z))^2 P_i'(z)} \\
& \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i'(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} \left[(1-z)(1-F_i(z))P_i'(z) \right]}{\frac{d}{dz} \left[(1-P_i(z))(P_i(z)-z) \right]} \\
& = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-(1-F_i(z))P_i'(z) - (1-z)F_i'(z)P_i'(z) + (1-z)(1-F_i(z))P_i''(z)}{(1-P_i(z))(-1+P_i'(z)) - (-z+P_i(z))P_i'(z)} \\
& \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i'(z)}{(1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz} \left[(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i'(z) \right]}{\frac{d}{dz} \left[(1-P_i(z))^2(P_i(z)-z) \right]} \\
& = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-(1-F_i(z))P_i(z)P_i'(z) - (1-z)P_i(z)F_i'(z)P_i'(z)}{(1-P_i(z))^2(-1+P_i'(z)) - 2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))P_i'(z)} \\
& + \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i'(z)^2 + (1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i''(z)}{(1-P_i(z))^2(-1+P_i'(z)) - 2(1-P_i(z))(-z+P_i(z))P_i'(z)}
\end{aligned}$$

4.6 Longitudes de la Cola en cualquier tiempo

Sea $V_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \frac{I_i(z)-1}{z-P_i(z)}$

$$\frac{\partial V_i(z)}{\partial z} = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \left[\frac{I_i'(z)(z-P_i(z))}{z-P_i(z)} - \frac{(I_i(z)-1)(1-P_i'(z))}{(z-P_i(z))^2} \right]$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$U_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)} \cdot \frac{I_i(z)-1}{1-z}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} V_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \left\{ \frac{d}{dz} \left(\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)} \right) \frac{I_i(z)-1}{1-z} + \frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)} \frac{d}{dz} \left(\frac{I_i(z)-1}{1-z} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \left\{ \frac{-P_i(z)(z-P_i(z)) - (1-P_i(z))(1-P_i'(z))}{(z-P_i(z))^2} \cdot \frac{I_i(z)-1}{1-z} \right\} \\
&+ \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \left\{ \frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)} \cdot \frac{I_i'(z)(1-z) + (I_i(z)-1)}{(1-z)^2} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i(z)}{\partial z} &= \frac{(-1 + I_i[z])(1 - P_i[z])}{(1 - z)^2 \mathbb{E}[I_i](z - P_i[z])} + \frac{(1 - P_i[z])I_i'[z]}{(1 - z)\mathbb{E}[I_i](z - P_i[z])} - \frac{(-1 + I_i[z])(1 - P_i[z])(1 - P'[z])}{(1 - z)\mathbb{E}[I_i](z - P_i[z])^2} \\ &- \frac{(-1 + I_i[z])P_i'[z]}{(1 - z)\mathbb{E}[I_i](z - P_i[z])} \end{aligned}$$

4.7 Material por agregar

Teorema 835. *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo M/M/1. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t , $A_j(t) = \{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\}$ para algún tiempo $t \geq 0$ y Q_j la cola j -ésima en la RSVC, para $j = 1, 2, 3, 4$. Existe un intervalo $I \neq \emptyset$ tal que para $T^* \in I$, tal que $\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(Tt^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I\} > 0$.*

Proof. Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.

Sea $n \geq 1$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j(\bar{\tau}_1(n)) = 0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1(n) > 0$, entonces tenemos que $\tau_2(n) = \bar{\tau}_1(n) + r_1(n)$.

Definamos el intervalo $I_1 \equiv [\bar{\tau}_1(n), \tau_2(n)]$ de longitud $\xi_1 = r_1(n)$.

Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$\mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)}. \quad (4.29)$$

Por otra parte, para la cola Q_2 el tiempo $\bar{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\bar{\tau}_2(n-1)) = 0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n .

Entonces tenemos un segundo intervalo $I_2 \equiv [\bar{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)}, \quad (4.30)$$

$$\xi_2(n) = \tau_2(n) - \bar{\tau}_2(n-1) \quad (4.31)$$

Ahora, dado que $I_1(n) \subset I_2(n)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \xi_1(n) \leq \xi_2(n) &\Leftrightarrow -\xi_1(n) \geq -\xi_2(n) \\ -\tilde{\mu}_2 \xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_2(n) &\Leftrightarrow e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_1(n)} \geq e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)} \\ \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\} &\geq \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\}. \end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} &= \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\} \\ &\geq \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} \\ &= e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]} > 0. \quad (4.32)$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC para algún $m \geq 1$ se tiene que $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$ por lo tanto se cumple cualquiera de los siguientes cuatro casos

- a) $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \bar{\tau}_3(m)$
- b) $\bar{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$
- c) $\tau_4(m) < \tau_2(n) < \bar{\tau}_4(m)$
- d) $\bar{\tau}_4(m) < \tau_2(n) < \tau_3(m+1)$

Sea el intervalo $I_3(m) \equiv [\tau_3(m), \bar{\tau}_3(m)]$ tal que $\tau_2(n) \in I_3(m)$, con longitud de intervalo $\xi_3 \equiv \bar{\tau}_3(m) - \tau_3(m)$, entonces se tiene que para Q_3

$$\mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(m)\} = e^{-\bar{\mu}_3 \xi_3(m)}. \quad (4.33)$$

mientras que para Q_4 consideremos el intervalo $I_4(m) \equiv [\tau_4(m-1), \bar{\tau}_3(m)]$, entonces por construcción $I_3(m) \subset I_4(m)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \xi_3(m) \leq \xi_4(m) &\Leftrightarrow -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\ -\bar{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\bar{\mu}_4 \xi_4(m) &\Leftrightarrow e^{-\bar{\mu}_4 \xi_3(m)} \geq e^{-\bar{\mu}_4 \xi_4(m)} \\ \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} &\geq \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\}. \end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\} &= \mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(m)\} \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} \\ &\geq \mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(m)\} \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} \\ &= e^{-\bar{\mu}_3 \xi_3(m)} e^{-\bar{\mu}_4 \xi_4(m)} = e^{-(\bar{\mu}_3 \xi_3(m) + \bar{\mu}_4 \xi_4(m))}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\} \geq e^{-(\bar{\mu}_3 \xi_3(m) + \bar{\mu}_4 \xi_4(m))} > 0. \quad (4.34)$$

Sea el intervalo $I_3(m) \equiv [\bar{\tau}_3(m), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_3 \equiv \tau_4(m) - \bar{\tau}_3(m)$, entonces se tiene que para Q_3

$$\mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(m)\} = e^{-\bar{\mu}_3 \xi_3(m)}. \quad (4.35)$$

mientras que para Q_4 consideremos el intervalo $I_4(m) \equiv [\bar{\tau}_4(m-1), \tau_4(m)]$, entonces por construcción $I_3(m) \subset I_4(m)$, y al igual que en el caso anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \xi_3(m) \leq \xi_4(m) &\Leftrightarrow -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\ -\bar{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\bar{\mu}_4 \xi_4(m) &\Leftrightarrow e^{-\bar{\mu}_4 \xi_3(m)} \geq e^{-\bar{\mu}_4 \xi_4(m)} \\ \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} &\geq \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\}. \end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\} &= \mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(m)\} \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} \\ &\geq \mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(m)\} \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} \\ &= e^{-\bar{\mu}_3 \xi_3(m)} e^{-\bar{\mu}_4 \xi_4(m)} = e^{-(\bar{\mu}_3 \xi_3(m) + \bar{\mu}_4 \xi_4(m))}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_4(m)\} \geq e^{-(\bar{\mu}_3 + \bar{\mu}_4) \xi_3(m)} > 0. \quad (4.36)$$

Para el intervalo $I_3(m) = [\tau_4(m), \bar{\tau}_4(m)]$, se tiene que este caso es análogo al caso (a).

Para el intervalo $I_3(m) \equiv [\bar{\tau}_4(m), \tau_4(m+1)]$, se tiene que es análogo al caso (b).

Por construcción se tiene que $I(n, m) \equiv I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$, entonces en particular se tienen las contenciones $I(n, m) \subseteq I_1(n)$ y $I(n, m) \subseteq I_3(m)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m} \equiv \ell(I(n, m))$ tenemos que

$$\begin{aligned} \xi_{n,m} \leq \xi_1(n) \text{ y } \xi_{n,m} \leq \xi_3(m) \text{ entonces} \\ -\xi_{n,m} \geq -\xi_1(n) \text{ y } -\xi_{n,m} \leq -\xi_3(m) \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{aligned} -\tilde{\mu}_1 \xi_{n,m} &\geq -\tilde{\mu}_1 \xi_1(n), & -\tilde{\mu}_2 \xi_{n,m} &\geq -\tilde{\mu}_2 \xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_2(n), \\ -\tilde{\mu}_3 \xi_{n,m} &\geq -\tilde{\mu}_3 \xi_3(m), & -\tilde{\mu}_4 \xi_{n,m} &\geq -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m). \end{aligned}$$

Sea $T^* \in I(n, m)$, entonces dado que en particular $T^* \in I_1(n)$, se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2 , en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4 , es decir, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$, $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I(n, m)$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4 , por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(T^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I(n, m)\} \\ &= \prod_{j=1}^4 \mathbb{P}\{A_j(T^*) | T^* \in I(n, m)\} \\ &\geq \mathbb{P}\{A_1(T^*) | T^* \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(T^*) | T^* \in I_2(n)\} \\ &\mathbb{P}\{A_3(T^*) | T^* \in I_3(m)\} \mathbb{P}\{A_4(T^*) | T^* \in I_4(m)\} \\ &= e^{-\mu_1 \xi_1(n)} e^{-\mu_2 \xi_2(n)} e^{-\mu_3 \xi_3(m)} e^{-\mu_4 \xi_4(m)} \\ &= e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n) + \tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)]} > 0. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Ahora solo resta demostrar que para $n \geq 1$, existe $m \geq 1$ tal que se cumplen cualquiera de los cuatro casos arriba mencionados:

- a) $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \bar{\tau}_3(m)$
- b) $\bar{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$
- c) $\tau_4(m) < \tau_2(n) < \bar{\tau}_4(m)$
- d) $\bar{\tau}_4(m) < \tau_2(n) < \tau_3(m+1)$

Consideremos nuevamente el primer caso. Supongamos que no existe $m \geq 1$, tal que $I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$, es decir, para toda $m \geq 1$, $I_1(n) \cap I_3(m) = \emptyset$, entonces se tiene que ocurren cualquiera de los dos casos

- a) $\tau_2(n) \leq \tau_3(m)$: Recordemos que $\tau_2(m) = \bar{\tau}_1 + r_1(m)$ donde cada una de las variables aleatorias son tales que $\mathbb{E}[\bar{\tau}_1(n) - \tau_1(n)] < \infty$, $\mathbb{E}[R_1] < \infty$ y $\mathbb{E}[\tau_3(m)] < \infty$, lo cual contradice el hecho de que no exista un ciclo $m \geq 1$ que satisfaga la condición deseada.
- b) $\tau_2(n) \geq \bar{\tau}_3(m)$: por un argumento similar al anterior se tiene que no es posible que no exista un ciclo $m \geq 1$ tal que satisfaga la condición deseada.

Para el resto de los casos la demostración es análoga. Por lo tanto, se tiene que efectivamente existe $m \geq 1$ tal que $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$. \square

En Sigman, Thorison y Wolff [127] prueban que para la existencia de una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1 , donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados (S, \mathcal{R}) , con \mathcal{R} σ -álgebra.

Proposición 474. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R_1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de (X, R_1, \dots, R_k) , dado $\theta_{\tau_k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

Teorema 836. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso I es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

- a) *Los tiempos de servicio son idénticamente cero;*
- b) *$L = 0$, para cualquier proceso de servicio S ;*
- c) *$L = 1$ y $G = D$;*
- d) *$L = \infty$ y $G = M$.*

En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

- a) *$1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0$;*
- b) *$1 - e^{-\lambda t} * F(t), t \geq 0$;*
- c) *$1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t), t \geq 0$;*
- d) *$1 - e^{-\lambda t} * F(t), t \geq 0$.*

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostró que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivos D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso el proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

Teorema 837. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

- a) *$s = \infty$*
- b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*
- c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$*

d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

Teorema 838. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B , tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Definición 1231 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 693. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1 , implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos R_1, R_2, \dots , que satisfacen la propiedad deseada [127].*

Nota 694. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n , los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) $T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son i.i.d. e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 1232. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 695. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X .*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 696. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 697. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 698. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1]$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2]$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 1233. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 1234. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 1235. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 839. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 266. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 1236. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (4.38)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 1237. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 699. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degue las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Nota 700. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 840 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 475. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1238. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 476. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 841 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 477. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 701. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 842. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (4.39)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (4.40)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí N/t la cumple.

Corolario 267 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (4.41)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1239. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 843. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (4.42)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (4.43)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 268. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (4.44)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 478. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 702. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 844. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (4.45)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (4.46)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 269 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (4.47)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1240. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 845. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (4.48)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (4.49)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 270. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (4.50)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 479. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 703. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 846. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (4.51)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (4.52)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números si y sólo si $N(t)$ la cumple.

Corolario 271 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (4.53)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1241. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 847. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (4.54)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (4.55)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 272. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (4.56)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 480. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 704. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 848. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (4.57)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (4.58)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 273 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (4.59)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1242. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 849. Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (4.60)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (4.61)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 274. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (4.62)$$

4.8 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max \{n : T_n \leq t\} = \min \{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 481. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Nota 705. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama *Proceso de Renovación retardado*, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 850. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (4.63)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (4.64)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)/t$ la cumple.

Corolario 275 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (4.65)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1243. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 851. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (4.66)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (4.67)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 276. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (4.68)$$

Definición 1244. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (4.69)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 482. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 852 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 1245. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 483. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 1246. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 484. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 706. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 853. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 277 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 1247. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (4.70)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 1248. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 707. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Definición 1249. Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \quad (4.71)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de \mathbb{R}_+ , y $N(t)$ es el número de puntos en \mathbb{R} . El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ . Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 1250. Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidos con distribución F , donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$

Nota 708. Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F , con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degene las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, \dots definidas en este con distribución F . Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} &\leq t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n*}(t)$$

que es la n -ésima convolución de F . Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)*}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

Proposición 485. Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}[e^{\alpha N(t)}]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.

Ejemplo 29 (Proceso Poisson). Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ con tasa λ . Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ .

Nota 709. Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n , para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G , entonces el tiempo T_n de la n -ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)*}(t)$

Teorema 854. Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (4.72)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (4.73)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N(t)$ la cumple.

Corolario 278 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (4.74)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1251. Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 855. Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (4.75)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (4.76)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 279. Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (4.77)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 1252. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 486. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 1253. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 487. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}$.

Nota 710. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 856. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 280 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 1254. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (4.78)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 488. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 857 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ .

Definición 1255. La función de renovación asociada con la distribución F , del proceso $N(t)$, es

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $F^{0*}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 489. Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f . Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n*}(t)$. Además

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \quad t \geq 0.$$

Definición 1256. La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \quad \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}^{n*}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 490. La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.

Nota 711. Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo si $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.

Teorema 858. Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es finita para cada t . Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n) \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n . Entonces

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n \right] = \int_{(0,t]} f(s) d\eta(s), \quad t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 281 (Identidad de Wald para Renovaciones). Para el proceso de renovación $N(t)$,

$$\mathbb{E}[T_{N(t)+1}] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \quad t \geq 0,$$

Definición 1257. Sea $h(t)$ función de valores reales en \mathbb{R} acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$. La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s), \quad t \geq 0, \quad (4.79)$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 491. La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (751).

Teorema 859 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 712. Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 860 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 492. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \quad \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1258. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 493. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 861 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 713. Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:

- a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.
- b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 862 (Teorema Principal de Renovación). Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds.$$

Proposición 494. Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1259. Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 495. Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T , que tiene distribución F . Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 863 (Regeneración Cruda). Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T , y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s) ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 1260. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 714. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 715. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Nota 716. Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S , espacio métrico.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 1261. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 717. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Teorema 864 (Procesos Regenerativos). Suponga que el proceso

Definición 1262 (Renewal Process Trinity). Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t , que es el tiempo desde la última renovación para t .
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t , residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t .
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t .

Nota 718. El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n , y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MARKOV a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados \mathbb{R}_+ . Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \quad (4.80)$$

Ejemplo 30 (Tiempos de recurrencia Poisson). Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ , entonces de la expresión (4.80) se tiene que

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 719. Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 1263. Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k$ y $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \dots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \dots, X(s_k)).$$

Nota 720. Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en \mathbb{R}_+ , con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$.

Proposición 496. Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 865. Los siguientes enunciados son equivalentes

- i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.
- ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.
- iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,
- iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - F(s)] ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 721. Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.

Corolario 282. El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renovación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.

Nota 722. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 723. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 1264 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo si existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Definición 1265. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y definanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 724. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Definición 1266. Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n -ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 725. Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados \tilde{S} es regenerativo sobre T_n , entonces $X(t) = f(\tilde{X}(t))$ también es regenerativo sobre T_n , para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 726. Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.

Definición 1267 (Definición Clásica). Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que

- i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2 , independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1 . Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X .

Nota 727. Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.

Definición 1268. Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(u) du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_x(u) du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\bar{X} = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^{R_1} X(t) dt \right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 728. a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 1269. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 1270. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 1271. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 866. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E} \left[\int_0^X V(s) ds \right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A ,

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \dots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \dots + X_j \leq t\}$ = número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distribución de X

Definición 1272. Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A .

Definición 1273. Una distribución se dice que es aritmética si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.

Definición 1274. Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 867. Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t , además

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$, entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S , que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en \mathbb{R}_+ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ .

Sean T_1, T_2, \dots los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Sea la función generadora de momentos para L_i , el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$ ⁴⁸, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] &= \mathbb{E}[M_i] \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] \\ \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m) \right] &= \mathbb{E}[M_i] \mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)] \end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (??): $n \rightarrow t - \tau_i(m)$, $T \rightarrow \bar{\tau}_i(m) - \tau_i(m)$, $L_n \rightarrow L_i(t)$ y $F(z) = \mathbb{E}[z^{L_0}] \rightarrow F_i(z) = \mathbb{E}[z^{L_i \tau_i(m)}]$, se puede ver que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n} \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\bar{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} \right] = z \frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} \quad (4.81)$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i , $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\bar{\tau}_i(m)} \right] = \frac{1 - \mathbb{E}[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\bar{\tau}_i(m)}]}{1 - P_i(z)} \\ &= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)} \end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] = \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]} \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]} \left\{ \mathbb{E} \left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\bar{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{t=\bar{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]} \left\{ z \frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} + \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)} \right\} \end{aligned}$$

⁴⁸En Stidham[128] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un proceso estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)} \right] < \infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^N \mu_k < 1$.

es decir

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \quad (4.82)$$

Teorema 868. *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t , $A_j(t) = \{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\}$ para algún tiempo $t \geq 0$ y Q_j la cola j -ésima en la RSVC, para $j = 1, 2, 3, 4$. Existe un intervalo $I \neq \emptyset$ tal que para $T^* \in I$, tal que $\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(T^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I\} > 0$.*

Proof. Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.

Sea $n > 0$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j(\bar{\tau}_1(n)) = 0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1(n) > 0$, entonces tenemos que $\tau_2(n) = \bar{\tau}_1(n) + r_1(n)$.

Definamos el intervalo $I_1 \equiv [\bar{\tau}_1(n), \tau_2(n)]$ de longitud $\xi_1 = r_1(n)$. Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$\mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)}. \quad (4.83)$$

Por otra parte, para la cola Q_2 , el tiempo $\bar{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\bar{\tau}_2(n-1)) = 0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n . Entonces tenemos un segundo intervalo $I_2 \equiv [\bar{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)}, \quad (4.84)$$

donde $\xi_2(n) = \tau_2(n) - \bar{\tau}_2(n-1)$.

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} &= \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\} \\ &\geq \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} \\ &= e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]}. \end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]} > 0. \quad (4.85)$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC, se afirma que existe $m > 0$ tal que $\bar{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$.

Para Q_3 sea $I_3 = [\bar{\tau}_3(m), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_3(m) = r_3(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(n)}. \quad (4.86)$$

Análogamente que como se hizo para Q_2 , tenemos que para Q_4 se tiene el intervalo $I_4 = [\bar{\tau}_4(m-1), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_4(m) = \tau_4(m) - \bar{\tau}_4(m-1)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} = e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(n)}. \quad (4.87)$$

Al igual que para el primer sistema, dado que $I_3(m) \subset I_4(m)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \xi_3(m) \leq \xi_4(m) &\Leftrightarrow -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\ -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m) &\Leftrightarrow e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} \\ \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} &\geq \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} \end{aligned}$$

Entonces, dado que los eventos A_3 y A_4 son independientes, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\} &= \mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(m)\} \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} \\ &\geq \mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(n)\} \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(n)\} \\ &= e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)} e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} = e^{-[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)]}.\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\} = e^{-[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m)]} > 0. \quad (4.88)$$

Por construcción se tiene que $I(n, m) \equiv I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$, entonces en particular se tienen las contenciones $I(n, m) \subseteq I_1(n)$ y $I(n, m) \subseteq I_3(m)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m} \equiv \ell(I(n, m))$ tenemos que

$$\xi_{n,m} \leq \xi_1(n) \text{ y } \xi_{n,m} \leq \xi_3(m) \text{ entonces } -\xi_{n,m} \geq -\xi_1(n) \text{ y } -\xi_{n,m} \leq -\xi_3(m)$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{aligned}-\tilde{\mu}_1 \xi_{n,m} &\geq -\tilde{\mu}_1 \xi_1(n), & -\tilde{\mu}_2 \xi_{n,m} &\geq -\tilde{\mu}_2 \xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_2(n), \\ -\tilde{\mu}_3 \xi_{n,m} &\geq -\tilde{\mu}_3 \xi_3(m), & -\tilde{\mu}_4 \xi_{n,m} &\geq -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m).\end{aligned}$$

Sea $T^* \in I_{n,m}$, entonces dado que en particular $T^* \in I_1(n)$ se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2 , en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4 , es decir, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$, $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I_{n,m}$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4 , por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(T^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I_{n,m}\} &= \prod_{j=1}^4 \mathbb{P}\{A_j(T^*) | T^* \in I_{n,m}\} \\ &\geq \mathbb{P}\{A_1(T^*) | T^* \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(T^*) | T^* \in I_2(n)\} \mathbb{P}\{A_3(T^*) | T^* \in I_3(m)\} \mathbb{P}\{A_4(T^*) | T^* \in I_4(m)\} \\ &= e^{-\mu_1 \xi_1(n)} e^{-\mu_2 \xi_2(n)} e^{-\mu_3 \xi_3(m)} e^{-\mu_4 \xi_4(m)} = e^{-[\mu_1 \xi_1(n) + \mu_2 \xi_2(n) + \mu_3 \xi_3(m) + \mu_4 \xi_4(m)]} > 0.\end{aligned} \quad (4.89)$$

□

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [100] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

Teorema 869. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{-\theta D_n}) &= \mu(\mu + \theta)^{-1} [\delta\theta - \mu(1 - \delta)\alpha(\theta)] [\theta - \mu(1 - \delta)^{-1}] \\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}[e^{-\theta T_0}] \\ \text{var}(D_n) &= \text{var}(T_0) - (\tau^{-1} - \delta^{-1}) 2\delta(\mathbb{E}(S_0))^2 (1 - \delta)^{-1}.\end{aligned}$$

Teorema 870. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 871. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

En Sigman, Thorison y Wolff [127] prueban que para la existencia de una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1 , donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados (S, \mathcal{R}) , con \mathcal{R} σ -álgebra.

Proposición 497. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R_1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de (X, R_1, \dots, R_k) , dado $\theta_{\tau_k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

Teorema 872. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso \mathbf{I} es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

- Los tiempos de servicio son idénticamente cero;*
- $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S ;*
- $L = 1$ y $G = D$;*
- $L = \infty$ y $G = M$.*

En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

- $1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0$;*
- $1 - e^{-\lambda t} * F(t), t \geq 0$;*
- $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t), t \geq 0$;*
- $1 - e^{-\lambda t} * F(t), t \geq 0$.*

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostró que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivos D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso el proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

Teorema 873. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

- a) $s = \infty$
- b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.
- c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$
- d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

Teorema 874. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B , tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [100] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

Teorema 875. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{-\theta D_n}) &= \mu(\mu + \theta)^{-1} [\delta\theta - \mu(1 - \delta)\alpha(\theta)] [\theta - \mu(1 - \delta)^{-1}] \\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}[e^{-\theta T_0}] \\ \text{var}(D_n) &= \text{var}(T_0) - (\tau^{-1} - \delta^{-1}) 2\delta(\mathbb{E}(S_0))^2(1 - \delta)^{-1}.\end{aligned}$$

Teorema 876. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 877. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

5 Procesos Regenerativos

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s , única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

$$(S1.) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(x)] = \bar{N} > 0. \quad (5.1)$$

$$(S2.) \quad \mathbb{E}[N(x)] \leq \bar{N}, \quad (5.2)$$

para cualquier valor de x .

- La n -ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)] \geq 0$.
- Se define

$$\delta^* := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)]. \quad (5.3)$$

- Los tiempos de inter-arribo a la cola k , son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k -ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k -ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = (Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)) \quad (5.4)$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \quad (5.5)$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k , incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k -ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k .
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t)$, $B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([94])

- Los tiempos de interarribo a la cola k , son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k -ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k -ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s , única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(x)] = \bar{N} > 0$
- 2) $\mathbb{E}[N(x)] \leq \bar{N}$ para cualquier valor de x .

La manera en que atiende el servidor m -ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j , el servidor se cambia a la cola j' con probabilidad $r_{j,j'}^m = r_{j,j'}$
- La n -ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}[\delta_{j,j'}(1)] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $(r_{j,j'})$.
- Finalmente, se define

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}[\delta_{j,j'}(i)]. \quad (5.6)$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k -ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k , $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k ; para cada servidor m , se denota por $B_m(t)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t ; $B_m^0(t)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t , finalmente sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t .

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = (Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)) \quad (5.7)$$

para $k = 1, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \dots, \xi_K, \eta_1, \dots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi_l(1)^{p+1}] &< \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y} \\ \mathbb{E}[\eta_k(1)^{p+1}] &< \infty \text{ para } k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

donde \mathcal{A} es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \dots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en \mathbb{R}_+ , y un entero j_k , tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \quad (5.8)$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x) dx, \quad 0 \leq a < b. \quad (5.9)$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto A2) para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X , cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición 1208.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de A3') es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

5.1 Preliminares

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s , única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(x)] = \bar{N} > 0$
- 2) $\mathbb{E}[N(x)] \leq \bar{N}$ para cualquier valor de x .

La manera en que atiende el servidor m -ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j , el servidor se cambia a la cola j' con probabilidad $r_{j,j'}^m = r_{j,j'}$
- La n -ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}[\delta_{j,j'}(1)] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $(r_{j,j'})$.
- Finalmente, se define

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}[\delta_{j,j'}(i)]. \quad (5.10)$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n \geq 1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n \geq 1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k -ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k , $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k ; para cada servidor m , se denota por $B_m(t)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t ; $B_m^0(t)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t , finalmente sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t .

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = (Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)) \quad (5.11)$$

para $k = 1, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \dots, \xi_K, \eta_1, \dots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E} \left[\xi_l (1)^{p+1} \right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$

$$\mathbb{E} \left[\eta_k (1)^{p+1} \right] < \infty \text{ para } k = 1, \dots, K.$$

donde \mathcal{A} es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \dots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en \mathbb{R}_+ , y un entero j_k , tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \quad (5.12)$$

$$P \left\{ a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b \right\} \geq \int_a^b q_k(x) dx, \quad 0 \leq a < b. \quad (5.13)$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto A2) para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [95] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X , cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición 1208.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de A3') es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

References

- [1] Asmussen, S. (1987). *Applied Probability and Queues*. John Wiley and Sons.
- [2] Bhat, N. (2008). *An Introduction to Queueing Theory: Modelling and Analysis in Applications*. Birkhauser.
- [3] Boxma, J. O. (1987). Pseudoconservation Laws in Cyclic Service Systems. *Journal of Applied Probability*, 24, 949-964.
- [4] Borovkov, A. A., and Schassberger, R. (1995). Ergodicity of a Polling Network. *Stochastic Processes and their Applications*, 50(2), 253-262.
- [5] van den Bos, L., and Boon, M. (2013). *Networks of Polling Systems* (report). Eindhoven University of Technology.
- [6] Boon, M. A. A., van der Mei, R. D., and Winands, E. M. M. (2011). Applications of Polling Systems. February 24, 2011.
- [7] Ng, C. H., and Soong, B. H. (2008). *Queueing Modelling Fundamentals with Applications in Communications Networks*. John Wiley and Sons.
- [8] Chen, H. (1995). Fluid Approximations and Stability of Multiclass Queueing Networks I: Work-conserving Disciplines. *Annals of Applied Probability*.

-
- [9] Cooper, R. B. (1970). Queues Served in Cyclic Order: Waiting Times. *The Bell System Technical Journal*, 49, 399-413.
 - [10] Dai, J. G. (1995). On Positive Harris Recurrence of Multiclass Queueing Networks: A Unified Approach Via Fluid Limit Models. *The Annals of Applied Probability*, 5(1), 49-77.
 - [11] Dai, J. G., and Meyn, S. P. (1995). Stability and Convergence of Moments for Multiclass Queueing Networks Via Fluid Limit Models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(11), 1889-1904.
 - [12] Dai, J. G., and Weiss, G. (1996). Stability and Instability of Fluid Models for Reentrant Lines. *Mathematics of Operations Research*, 21(1), 115-134.
 - [13] Daley, D. J. (1968). The Correlation Structure of the Output Process of Some Single Server Queueing Systems. *The Annals of Mathematical Statistics*, 39(3), 1007-1019.
 - [14] Davis, M. H. A. (1984). Piecewise Deterministic Markov Processes: A General Class of Nondiffusion Stochastic Models. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 46(3), 353-388.
 - [15] Down, D. (1998). On the Stability of Polling Models with Multiple Servers. *Journal of Applied Probability*, 35(3), 925-935.
 - [16] Disney, R. L., Farrell, R. L., and Morais, P. R. (1973). A Characterization of $M/G/1$ Queues with Renewal Departure Processes. *Management Science*, 19(11), Theory Series, 1222-1228.
 - [17] Eisenberg, M. (1972). Queues with Periodic Service and Changeover Time. *Operations Research*, 20(2), 440-451.
 - [18] Fricker, C., and Jaïbi, M. R. (1994). Monotonicity and Stability of Periodic Polling Models. *Queueing Systems*, 15(1-4), 211-238.
 - [19] Gettoor, R. K. (1979). Transience and Recurrence of Markov Processes. In J. Azema and M. Yor (Eds.), *Seminaire de Probabilités XIV* (pp. 397-409). New York: Springer-Verlag.
 - [20] Gut, A. (1995). *Stopped Random Walks: Limit Theorems and Applications*. Applied Probability.
 - [21] Kaspi, H., and Mandelbaum, A. (1992). Regenerative Closed Queueing Networks. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 39(4), 239-258.
 - [22] Kleinrock, L. (1975). *Queueing Systems: Theory, Volume 1*. Wiley-Interscience.
 - [23] Konheim, A. G., Levy, H., and Srinivasan, M. M. (1994). Descendant Set: An Efficient Approach for the Analysis of Polling Systems. *IEEE Transactions on Communications*, 42(2-4), 1245-1253.
 - [24] Lang, S. (1973). *Calculus of Several Variables*. Addison-Wesley Publishing Company.
 - [25] Levy, H., and Sidi, M. (1990). Polling Systems: Applications, Modeling, and Optimization. *IEEE Transactions on Communications*, 30(10), 1750-1760.
 - [26] Fricker, C., and Jaïbi, M. R. (1998). Stability of Multi-server Polling Models. Institute National de Recherche en Informatique et en Automatique.
 - [27] Meyn, S. P., and Tweedie, R. L. (1993). *Markov Chains and Stochastic Stability*. Springer-Verlag.
 - [28] Meyn, S. P., and Down, D. (1994). Stability of Generalized Jackson Networks. *The Annals of Applied Probability*.
 - [29] van der Mei, R. D., and Borst, S. C. (1997). Analysis of Multiple-server Polling Systems by Means of the Power-Series Algorithm. *Stochastic Models*, 13(2), 339-369.
 - [30] Meyn, S. P. (1995). Transience of Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models. *The Annals of Applied Probability*, 5(4), 946-957.
 - [31] Adan, I. J. B. F., van Leeuwen, J. S. H., and Winands, E. M. M. (2006). On the Application of Rouché's Theorem in Queueing Theory. *Operations Research Letters*, 34(3), 355-360.

- [32] Roubos, A. (2007). *Polling Systems and their Applications*. Vrije Universiteit Amsterdam.
- [33] Saavedra, B. P. (2011). Informe Técnico del Microsimulador. Departamento de Matemáticas.
- [34] Vishnevskii, V. M., and Semenova, O. V. (2006). Mathematical Methods to Study the Polling Systems. *Automation and Remote Control*, 67(2), 173-220.
- [35] Serfozo, R. (2009). *Basics of Applied Stochastic Processes*. Springer-Verlag.
- [36] Sharpe, M. (1998). *General Theory of Markov Processes*. Academic.
- [37] Sigman, K. (1990). The Stability of Open Queueing Networks. *Stochastic Processes and their Applications*, 35(1), 11-15.
- [38] Sidi, M., and Levy, H. (1990). Customer Routing in Polling Systems. In P. King, I. Mitrani, and R. Pooley (Eds.), *Proceedings Performance '90*. North-Holland, Amsterdam.
- [39] Sidi, M., and Levy, H. (1991). Polling Systems with Simultaneous Arrivals. *IEEE Transactions on Communications*, 39(6), 823-827.
- [40] Sigman, K., Thorisson, H., and Wolff, R. W. (1994). A Note on the Existence of Regeneration Times. *Journal of Applied Probability*, 31, 1116-1122.
- [41] Stidham, S. Jr. (1972). Regenerative Processes in the Theory of Queues, with Applications to the Alternating Priority Queue. *Advances in Applied Probability*, 4(3), 542-577.
- [42] Takagi, H. (1986). *Analysis of Polling Systems*. Cambridge: MIT Press.
- [43] Takagi, H., and Kleinrock. (1986). *Analysis of Polling Systems*. Cambridge: MIT Press.
- [44] Takagi, H. (1988). Queueing Analysis of Polling Models. *ACM Computing Surveys*, 20(1), 5-28.
- [45] Thorisson, H. (2000). *Coupling, Stationarity, and Regeneration*. Probability and its Applications. Springer-Verlag.
- [46] Winands, E. M. M., Adan, I. J. B. F., and van Houtum, G. J. (2006). Mean Value Analysis for Polling Systems. *Queueing Systems*, 54, 35-44.
- [47] James, G., Witten, D., Hastie, T., and Tibshirani, R. (2013). *An Introduction to Statistical Learning: with Applications in R*. Springer.
- [48] Hosmer, D. W., Lemeshow, S., and Sturdivant, R. X. (2013). *Applied Logistic Regression* (3rd ed.). Wiley.
- [49] Bishop, C. M. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer.
- [50] Harrell, F. E. (2015). *Regression Modeling Strategies: With Applications to Linear Models, Logistic and Ordinal Regression, and Survival Analysis*. Springer.
- [51] R Documentation and Tutorials: <https://cran.r-project.org/manuals.html>
- [52] Tutorials on R-bloggers: <https://www.r-bloggers.com/>
- [53] Coursera: *Machine Learning* by Andrew Ng.
- [54] edX: *Data Science and Machine Learning Essentials* by Microsoft.
- [55] Ross, S. M. (2014). *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*. Academic Press.
- [56] DeGroot, M. H., and Schervish, M. J. (2012). *Probability and Statistics* (4th ed.). Pearson.
- [57] Hogg, R. V., McKean, J., and Craig, A. T. (2019). *Introduction to Mathematical Statistics* (8th ed.). Pearson.

- [58] Kleinbaum, D. G., and Klein, M. (2010). *Logistic Regression: A Self-Learning Text* (3rd ed.). Springer.
- [59] Wasserman, L. (2004). *All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference*. Springer.
- [60] Probability and Statistics Tutorials on Khan Academy: <https://www.khanacademy.org/math/statistics-probability>
- [61] Online Statistics Education: <http://onlinestatbook.com/>
- [62] Peng, C. Y. J., Lee, K. L., and Ingersoll, G. M. (2002). *An Introduction to Logistic Regression Analysis and Reporting*. The Journal of Educational Research.
- [63] Agresti, A. (2007). *An Introduction to Categorical Data Analysis* (2nd ed.). Wiley.
- [64] Han, J., Pei, J., and Kamber, M. (2011). *Data Mining: Concepts and Techniques*. Morgan Kaufmann.
- [65] Data Cleaning and Preprocessing on Towards Data Science: <https://towardsdatascience.com/data-cleaning-and-preprocessing>
- [66] Molinaro, A. M., Simon, R., and Pfeiffer, R. M. (2005). *Prediction Error Estimation: A Comparison of Resampling Methods*. Bioinformatics.
- [67] Evaluating Machine Learning Models on Towards Data Science: <https://towardsdatascience.com/evaluating-machine-learning-models>
- [68] Practical Guide to Logistic Regression in R on Towards Data Science: <https://towardsdatascience.com/practical-guide-to-logistic-regression-in-r>
- [69] Coursera: *Statistics with R* by Duke University.
- [70] edX: *Data Science: Probability* by Harvard University.
- [71] Coursera: *Logistic Regression* by Stanford University.
- [72] edX: *Data Science: Inference and Modeling* by Harvard University.
- [73] Coursera: *Data Science: Wrangling and Cleaning* by Johns Hopkins University.
- [74] edX: *Data Science: R Basics* by Harvard University.
- [75] Coursera: *Regression Models* by Johns Hopkins University.
- [76] edX: *Data Science: Statistical Inference* by Harvard University.
- [77] An Introduction to Survival Analysis on Towards Data Science: <https://towardsdatascience.com/an-introduction-to-survival-analysis>
- [78] Multinomial Logistic Regression on DataCamp: <https://www.datacamp.com/community/tutorials/multinomial-logistic-regression-R>
- [79] Coursera: *Survival Analysis* by Johns Hopkins University.
- [80] edX: *Data Science: Statistical Inference and Modeling for High-throughput Experiments* by Harvard University.
- [81] Sigman, K., and Wolff, R. W. (1993). A Review of Regenerative Processes. *SIAM Review*, 38(2), 269-288.
- [82] I.J.B.F. Adan, J.S.H. van Leeuwen, and E.M.M. Winands. On the application of Rouches theorem in queueing theory. *Operations Research Letters*, 34(3):355-360, 2006.
- [83] Asmussen Soren, *Applied Probability and Queues*, John Wiley and Sons, 1987.
- [84] Bhat Narayan, *An Introduction to Queueing Theory Modelling and Analysis in Applications*, Birkhauser, 2008.

- [85] Boxma J. O., Analysis and Optimization of Polling Systems, Queueing, Performance and Control in ATM, pp. 173-183, 1991.
- [86] Boxma J. O., Pseudoconservation Laws in Cyclic Service Systems, Journal of Applied Probability, vol. 24, 1987, pp. 949-964.
- [87] Boon M.A.A., Van der Mei R.D. and Winands E.M.M., Applications of Polling Systems, 2011.
- [88] Borovkov. A. A. and Schassberger R., Ergodicity of a Polling Network, Stochastic Processes and their Applications, vol. 50, no. 2, 1995, pp. 253-262.
- [89] Laurent van den Bos and Marko Boon, Networks of Polling Systems (report), Eindhoven University of Technology, 2013.
- [90] Chee-Hook Ng. y Boon-Hee Soong, Queueing Modelling Fundamentals with Applications in Communications Networks, John-Wiley and Sons, Ltd, 2008.
- [91] Chen H., Fluid Approximations and Stability of Multiclass Queueing Networks I: Work-Conserving Disciplines, Annals Applied Probability, vol. 5, no. 3, 1995, pp. 637-665.
- [92] R.B. Cooper, G. Murray, Queues served in cyclic order (The Bell System Technical Journal, 48 (1969) 675-689).
- [93] R.B. Cooper, Queues served in cyclic order: waiting times (The Bell System Technical Journal, 49 (1970) 399-413).
- [94] Dai Jean G., On positive Harris Recurrence of Multiclass Queueing Networks: A Unified Approach Via Fluid Limit Models, The Annals of Applied Probability, vol. 5, No. 1, 1995, pp. 49-77.
- [95] Dai Jim G. and Meyn Sean P., Stability and Convergence of Moments for Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models, IEEE transactions on Automatic Control, vol. 40, No. 11, 1995, pp. 1889-1904.
- [96] Dai Jim G. and Weiss G., Stability and Inestability of Fluid Models for Reentrant Lines, Mathematics of Operation Research, vol. 21, no. 1, 1996, pp. 115-134.
- [97] D.J. Daley, The correlation structure of the output process of some single server queueing systems, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 39. No. 3, pp. 1007-1019, 1968.
- [98] Davis, M. H. A., Piecewise Deterministic Markov Processes: A General Class of Nondiffusion Stochastic Models. Journal of Royal Statistics Society Serie B, vol. 46, no. 3, 1984, pp. 353-388.
- [99] Down D., On the Stability of Polling Models with Multiple Servers, Journal of Applied Probability, vol. 35, no. 3, 1998, pp. 925-935.
- [100] D.J. Daley, The correlation structure of the output process of some single server queueing systems, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 39. No. 3, pp. 1007-1019, 1968.
- [101] Ralpjh L. Disney, Robert L. Farrell and Paulo Renato Morais, A Characterization of $M/G/1$ Queues with Renewal Departure Processes, Manage of Science, Vol. 19, No. 11, Theory Series, pp. 1222-1228, 1973.
- [102] M. Eisenberg, Queues with periodic service and changeover time (Operations Research, 20 (2)(1972) 440-451).
- [103] Fricker Christine and Jaïbi M.R., Monotonicity and Stability of Periodic Polling Models, Queueing Systems, vol. 15, no. 1-4, 1994, pp. 211-238.
- [104] Fricker Christine and Jaïbi M.R., Stability of Multi-Server Polling Models, Institute National de Recherche en Informatique et en Automatique, Issue 3347, 1998.

- [105] Gettoor R. K., Transience and recurrence of Markov processes, Siminaire de Probabilitis XIV, J. Azema and M Yor, Eds. New York Springer-Verlag, 1979.
- [106] Gut A., Stopped Random Walks: Limit Theorems and Applications, Applied Probability, 1995.
- [107] Chee-Hook Ng. y Boon-Hee Soong, Queueing Modelling Fundemantals with Applications in Communications Networks, John-Wiley and Sons, Ltd, 2008.
- [108] Kaspi H. and Mandelbaum A., Regenerative Closed Queueing Networks, Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, vol. 39, no. 4, 1992, pp. 239-258.
- [109] A.G. Konheim, H. Levy, M.M. Srinivasan, Descendant set: an efficient approach for the analysis of polling systems (IEEE Transactions on Communications, 42 (2/3/4)(1994) 1245-1253).
- [110] Leonard Kleinrock, Theory, Volume 1, Queueing Systems Wiley-Interscience, 1975,
- [111] A. G. Konheim, h. Levy and M. M. Srinivasan. Descendant set: an efficient approach for the analysis of polling systems. IEEE Trabsanctions on Communications, 42(2-4): pp. 1245-1253, 1994.
- [112] Serge Lang, Calculus of Several Variables, Addison-Wesley Publishing Company, 1973.
- [113] Levy Hanoch y Sidi Moshe , Polling Systems: Applications, Modeling, and Optimization, IEEE Transactions on Communications, vol. 30, no. 10, 1990, pp. 1750-1760.
- [114] van der Mei, R.D. and Borst, S. C., Analysis of Multiple-Server Polling Systems by Means of the Power-Series Algorithm, Stochastic Models, vol. 13, no. 2, 1997, pp. 339-369.
- [115] Meyn Sean P., Transience of Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models, The Annals of Applied Probability, vol. 5, no. 4, 1995, pp.946-957.
- [116] Meyn S. P. and Tweedie R. L., Stability of Markovian Processes II:Continuous Time Processes and Sample Chains, Advanced Applied Pobability, vol. 25, 1993, pp. 487-517.
- [117] Meyn S. P. and Tweedie R. L., Markov Chains and Stochastic Stability, 1993.
- [118] Meyn, S.P. and Down, D., Stability of Generalized Jackson Networks, The Annals of Applied Probability, 1994.
- [119] Roubos Alex, Polling Systems and their Applications, Vrije Universiteit Amsterdam, 2007.
- [120] Saavedra B. P., Informe Técnico del Microsimulador, Departamento de Matemátias, 2011.
- [121] Vishnevskii V.M. and Semenova O.V., Mathematical Methods to Study the Polling Systems, Automation and Remote Control, vol. 67, no. 2, 2006, pp. 173-220.
- [122] Richard Serfozo, Basics of Applied Stochastic Processes, Springer-Verlag, 2009.
- [123] Sharpe Michael , General Theory of Markov Processes. Boston, M.A. Academic, 1998.
- [124] Sigman Karl, The Stability of Open Queueing Networks, Stochastic Processes and their Applications, vol. 35, no. 1, 1990, pp. 11-15.
- [125] Sidi M. and Levy H., Customer Routing in Polling Systems, In: P. King, I. Mitrani, and R. Pooley (Eds.), Proceedings Performance '90, North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [126] Sidi M. and Levy H., Polling Systems with Simultaneous Arrivals. IEEE Transactions on Communications, vol. 39, no. 6, 1991, pp. 823-827.
- [127] Karl Sigman, Hermann Thorisson and Ronald W. Wolff, A Note on the Existence of Regeneration Times, Journal of Applied Probability, vol. 31, pp. 1116-1122, 1994.
- [128] Shaler Stidham, Jr., Regenerative Processes in the theory ow queues, with applications to the alternating priority queue, Advances in Applied Probability, Vol. 4, no. 3, 1972,pp. 542-577.
- [129] Takagi H., Analysis of Polling Systems, Cambdridge: MIT Press, 1986

- [130] Takagi H. and Kleinrock, Analysis of Polling Systems, Cambridge: MIT Press, 1986
- [131] Takagi Hideaki, Queueing Analysis of Polling Models, ACM computing Surveys, vol. 20, no. 1, 1988, pp. 5-28.
- [132] Hermann Thorisson, Coupling, Stationarity, and Regeneration, Probability and its Applications, Springer-Verlag, 2000.
- [133] E.M.M. Winands, I.J.B.F. Adan and G.J. van Houtum, Mean value analysis for polling systems, Queueing Systems (2006), 54:35-44,
- [134] Konheim, A.G. and Meister, B., Waiting Lines and Times in a System with Polling, J. ACM, 1974, vol. 21, no. 3, pp. 470-490.
- [135] Levy, H. and Kleinrock, L., Polling Systems with Zero Switch-over Periods: A General Method for Analysis the Expected Delay, Performance Evaluation, 1991, vol. 13, no. 2, pp. 97-107.
- [136] Yechiali, U., Analysis and Control of Polling systems, in Performance Evaluation of Computer and Communications Systems, Donatiello, L. and Nelson R., Eds. Berlin: Springer Verlag, 1993, pp. 630-650.