Modelos de Flujo: Revisión

Carlos E. Martínez-Rodríguez

Julio 2024

Contents

1 Procesos Regenerativos

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s\left(x\right)=N\left(x\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]=\overline{N}>0. \tag{1}$$

(S2.)

$$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]\leq\overline{N}, \tag{2}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]\geq0$.
- Se define
$$\delta^{*}:=\sum_{j,j+1}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]. \tag{3}$$
- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$
- también se define $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde es necesario que $\rho<1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $\left(X\left(t\right)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t\geq0$ está dado por

$$X\left(t\right)=\left(Q\left(t\right),A\left(t\right),H\left(t\right),B\left(t\right),B^{0}\left(t\right),C\left(t\right)\right) \tag{4}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X}=\mathbb{Z}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}^{K}, \tag{5}$$

- $Q\left(t\right)=\left(Q_{k}\left(t\right),1\leq k\leq K\right)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.

- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([**?**])

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0$
2) $\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}$para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j'}^m = r_{j,j'}$
- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define
$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(i)\right]. \tag{6}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m, se denota por $B_m(t)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t; $B_m^0(t)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t, finalmente sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{7}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{8}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{9}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto $A2)$ para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [**?**] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

1.1 Procesos Regenerativos

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0. \tag{10}$$

(S2.)

$$\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}, \tag{11}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right] \geq 0$.
- Se define
$$\delta^{*} := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right]. \tag{12}$$
- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_{k}(n)\right\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}(n)\right\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}(1)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}(1)\right]$
- también se define $\rho_{k} = \lambda_{k}/\mu_{k}$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $\left(X(t)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^{0}(t), C(t)\right) \tag{13}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \left(\{1,2,\ldots,K\} \times \{1,2,\ldots,S\}\right)^{M} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}^{K}, \tag{14}$$

- $Q(t) = \left(Q_{k}(t), 1 \leq k \leq K\right)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = \left(A_{k}(t), 1 \leq k \leq K\right)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^{0}(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_{k}(t), B_{m}(t)$ y $B_{m}^{0}(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([**?**])

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_{k}(n)\right\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}(n)\right\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}(1)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}(1)\right]$
- también se define $\rho_{k} = \lambda_{k}/\mu_{k}$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0$

2) $\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N}$para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m} = r_{j,j^{'}}$
- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^{*} := \sum_{j,j^{'}} p_j r_{j,j^{'}} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(i)\right]. \tag{15}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m, se denota por $B_m(t)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t; $B_m^0(t)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t, finalmente sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{16}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \left(\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\}\right)^M \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{17}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\, dx, \ 0 \leq a < b. \tag{18}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto $A2)$ para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

1.1.1 Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [?]

.

2 Definiciones Básicas

Definición 1. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 2. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 3. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 4. *Una función $f : X \to \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 5. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 6. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 7. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 8. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 9. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{19}$$

Nota 1. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{20}$$

Teorema 1. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{21}$$

en $\{T < \infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 1. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 1 (Lema 3.1 [**?**]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 2 (Teorema 5.2 [**?**]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 3 (Teorema 5.1 [**?**]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 2 (Lema 5.2 [?]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{22}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 4 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 2 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{23}$$

Proposición 3 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{24}$$

Proposición 4 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{25}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 5 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{26}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p \tag{27}$$

Teorema 6 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^{t}\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t\rightarrow\infty$ y $x\in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q_t|^p\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q_0|^p\right]<\infty$$

Teorema 7 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^{t}(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_{f}=0},$$

para $x\in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_{x}[Q_t]-\mathbb{E}_{\pi}[Q_0]|=0}.$$

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s\left(x\right)=N\left(x\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]=\overline{N}>0. \tag{28}$$

(S2.)

$$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]\leq\overline{N}, \tag{29}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]\geq 0$.
- Se define
$$\delta^{*}:=\sum_{j,j+1}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]. \tag{30}$$
- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_k\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k=1/\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k=1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$
- también se define $\rho_k=\lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho<1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $\left(X\left(t\right)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t\geq 0$ está dado por

$$X\left(t\right)=\left(Q\left(t\right),A\left(t\right),H\left(t\right),B\left(t\right),B^{0}\left(t\right),C\left(t\right)\right) \tag{31}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X}=\mathbb{Z}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}^{K}, \tag{32}$$

- $Q\left(t\right)=\left(Q_k\left(t\right),1\leq k\leq K\right)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A\left(t\right)=\left(A_k\left(t\right),1\leq k\leq K\right)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.

- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([**?**])

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

2.1 Definiciones Básicas

Definición 10. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 11. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 12. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 13. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 14. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 15. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 16. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 17. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 18. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B|\mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B|X(s)\}. \tag{33}$$

Nota 2. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B|X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B|X(s)\} \tag{34}$$

Teorema 8. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots,\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty|\mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{35}$$

en $\{T < \infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 5. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 3 (Lema 3.1 [**?**]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 9 (Teorema 5.2 [**?**]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 10 (Teorema 5.1 [**?**]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 4 (Lema 5.2 [?]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t \to \infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{36}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t \geq \delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 11 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 6 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{37}$$

Proposición 7 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{38}$$

Proposición 8 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{39}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 12 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{40}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$Limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p \tag{41}$$

Teorema 13 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^{t}\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t\rightarrow\infty$ y $x\in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q_{t}|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q_{0}|^{p}\right]<\infty$$

Teorema 14 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^{t}(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_{f}=0},$$

para $x\in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_{x}[Q_{t}]-\mathbb{E}_{\pi}[Q_{0}]|=0}.$$

2.2 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N\left(\omega\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]=\overline{N}>0$;

2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(1\right)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}^{m}r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(i\right)\right]. \tag{42}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}<1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_k(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_m(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_m^0(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right), \tag{43}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

2.3 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega \to \infty} \mathbb{E}[N(\omega)] = \overline{N} > 0$;
2) $\mathbb{E}[N(\omega)] \leq \overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^m$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^m(n)$, con $\delta_{j,j^{'}}^m(n)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^m(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\left\{p_j^m\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^m\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^* := \sum_{j,j^{'}} p_j^m r_{j,j^{'}}^m \mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^m(i)\right]. \tag{44}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [?].

Si denotamos por

- $Q_k(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_m(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_m^0(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right), \tag{45}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

2.3.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{46}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{47}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3')$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

2.3.2 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_l\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k\left(\cdot\right)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k\left(1\right) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{48}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k\left(i\right) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k\left(x\right) dx,\ 0 \leq a < b. \tag{49}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición ??.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

2.4 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N\left(\omega\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right] = \overline{N} > 0$;

2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right] \leq \overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(1\right)\right] \geq 0$.
- Sea $\left\{p_j^m\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^* := \sum_{j,j^{'}} p_j^m r_{j,j^{'}}^m \mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(i\right)\right]. \tag{50}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_k\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_k\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^{K}\rho_k < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [?].

Si denotamos por

- $Q_k\left(t\right)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_k\left(t\right)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_m\left(t\right)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_m^0\left(t\right)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_m\left(t\right)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X\left(t\right)^T = \left(Q_k\left(t\right), A_k\left(t\right), B_m\left(t\right), B_m^0\left(t\right), C_m\left(t\right)\right), \tag{51}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \left(\left\{1, 2, \ldots, K\right\} \times \left\{1, 2, \ldots, S\right\}\right)^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

2.4.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\xi_l\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y}\\
\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k\left(\cdot\right)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k\left(1\right) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{52}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k}\xi_k\left(i\right) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k\left(x\right)dx, \ 0 \leq a < b. \tag{53}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición ??.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

2.5 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]=\overline{N}>0$;

2) $\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(1)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}^{m}r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(i)\right]. \tag{54}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}(n)\right\}_{n\geq1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}(n)\right\}_{n\geq1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}<1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_{k}(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^{T}=\left(Q_{k}(t),A_{k}(t),B_{m}(t),B_{m}^{0}(t),C_{m}(t)\right), \tag{55}$$

para $k=1,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X}=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

2.5.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1,\ldots,\xi_K,\eta_1,\ldots,\eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p\geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_l\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l=1,\ldots,K \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k=1,\ldots,K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k=1,2,\ldots,K$ existe una función positiva $q_k\left(\cdot\right)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k\left(1\right)\geq x\right) > 0, \text{ para todo } x>0, \tag{56}$$

$$P\left\{a\leq\sum_{i=1}^{j_k}\xi_k\left(i\right)\leq b\right\} \geq \int_a^b q_k\left(x\right)dx,\ 0\leq a<b. \tag{57}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

3 Preliminares

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s\left(x\right)=N\left(x\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]=\overline{N}>0$

2) $\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]\leq\overline{N}$para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}=r_{j,j^{'}}$
- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}\left(1\right)\right]\geq 0$.
- Sea $\left\{p_j\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_jr_{j,j^{'}}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}\left(i\right)\right]. \tag{58}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m, se denota por $B_m(t)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t; $B_m^0(t)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t, finalmente sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{59}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{60}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{61}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto $A2)$ para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [**?**] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

4 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [**?**], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (**??**), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([**?**], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [?]

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right)|\mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la σ-algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right)$$

Definición 19. *Una medida no cero π en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ es* **invariante** *para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right) = \int_{\mathbf{X}} P^t\left(x, D\right)\pi\left(dx\right)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 20. *El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*

$$P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 3. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama Proceso Harris recurrente positivo*.*

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi\left(\cdot\right) = \int_{\mathbf{X}} P_x\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right)$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente.

Definición 21. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t\left(x, A\right) \geq \delta\nu\left(A\right)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 5 (Lema 3.1, Dai[?])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x\left[\tau_B\left(\delta\right)\right] < \infty, \tag{62}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris Recurrente Positivo.

Lema 6 (Lema 3.1, Dai [**?**]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{|x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 15 (Teorema 3.1, Dai[**?**]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x\left(|x|\delta\right)| = 0, \tag{63}$$

*entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B = \{|x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.*

Nota 4. *En Meyn and Tweedie [**?**] muestran que si $P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1$ incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

4.1 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [**?**], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (**??**), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([**?**], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [**?**]

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [**?**]) en el espacio de estados medible $\left(X, \mathcal{B}_X\right)$. El Proceso $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x, x \in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right)|\mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right)$$

en $\left\{\tau < \infty\right\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la σ-algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right)$$

Definición 22. *Una medida no cero π en $\left(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}}\right)$ es* **invariante** *para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right) = \int_{\mathbf{X}} P^t\left(x, D\right)\pi\left(dx\right)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 23. *El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $\left(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}}\right)$, tal que si $\nu\left(D\right) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*

$$P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = inf\left\{t \geq 0 : X_t \in D\right\}$.

Nota 5. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [**?**]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama Proceso Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\,\pi(dx)$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente.

Definición 24. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 7 (Lema 3.1, Dai[?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{64}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris Recurrente Positivo.

Lema 8 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{|x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 16 (Teorema 3.1, Dai[?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{65}$$

entonces la ecuación (??) se cumple para $B = \{|x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.

Nota 6. *En Meyn and Tweedie [?] muestran que si $P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

4.2 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (??), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([?], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [?]

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t)|\mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la σ-algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x,D)$, $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t\geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x,D)=P_x(X(t)\in D)$$

Definición 25. *Una medida no cero π en $(\mathbf{X},\mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ es* **invariante** *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D)=\int_{\mathbf{X}}P^t(x,D)\pi(dx)$$

para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, con $t\geq 0$.

Definición 26. *El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbf{X},\mathcal{B}_{\mathbf{X}})$, tal que si $\nu(D)>0$ y $D\in\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*

$$P_x\{\tau_D<\infty\}\equiv 1$$

cuando $\tau_D=inf\{t\geq 0:X_t\in D\}$.

Nota 7. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama Proceso Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot)=\int_{\mathbf{X}}P_x(\cdot)\pi(dx)$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente.

Definición 27. *Un conjunto $D\in\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t>0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, y un $\delta>0$ tal que*

$$P^t(x,A)\geq\delta\nu(A)$$

para $x\in D, A\in\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 9 (Lema 3.1, Dai[?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B<\infty)\equiv 1$ y que para algún $\delta>0$ se cumple que*

$$\sup\mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)]<\infty, \tag{66}$$

donde $\tau_B(\delta)=inf\{t\geq\delta:X(t)\in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris Recurrente Positivo.

Lema 10 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B=\{|x|\leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k>0$.*

Teorema 17 (Teorema 3.1, Dai[?]). *Si existe un $\delta>0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x(|x|\delta)|=0, \tag{67}$$

*entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B=\{|x|\leq k\}$ con algún $k>0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.*

Nota 8. *En Meyn and Tweedie [?] muestran que si $P_x\{\tau_D<\infty\}\equiv 1$ incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

4.3 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X\left(t\right), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1,$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right)|\mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right).$$

Definición 28. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right) = \int_{\mathbb{X}} P^t\left(x, D\right) \pi\left(dx\right),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 29. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu\left(D\right) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\left\{t \geq 0 : X_t \in D\right\}$.

Nota 9. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi\left(\cdot\right) = \int_{\mathbf{X}} P_x\left(\cdot\right) \pi\left(dx\right),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 30. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t\left(x, A\right) \geq \delta \nu\left(A\right),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 11 (Lema 3.1, Dai [?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x [\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{68}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 12 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 18 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{69}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

4.4 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 31. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D)\, \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 32. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf \{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 10. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\, \pi(dx),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 33. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 13 (Lema 3.1, Dai [?])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x [\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{70}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf \{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 14 (Lema 3.1, Dai [?])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 19 (Teorema 3.1, Dai [?])**.** *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{71}$$

*donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

4.5 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está

adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x \{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [**?**, **?**].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 34. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D) \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 35. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 11. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [**?**]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot) \pi(dx),$$

*y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [**?**].*

Definición 36. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [**?**]:

Lema 15 (Lema 3.1, Dai [**?**]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x [\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{72}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 16 (Lema 3.1, Dai [**?**]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 20 (Teorema 3.1, Dai [**?**]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{73}$$

*donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1)$-$A3)$, lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

4.6 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x, x \in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1,$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right)|\mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right),$$

en $\left\{\tau < \infty\right\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right).$$

Definición 37. *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right) = \int_{\mathbb{X}} P^t\left(x, D\right)\pi\left(dx\right),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 38. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$, tal que si $\nu\left(D\right) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\left\{t \geq 0 : X_t \in D\right\}$.

Nota 12. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi\left(\cdot\right) = \int_{\mathbf{X}} P_x\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 39. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t\left(x, A\right) \geq \delta\nu\left(A\right),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 17 (Lema 3.1, Dai [?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x\left(\tau_B<\infty\right)\equiv 1$ y que para algún $\delta>0$ se cumple que*

$$\sup\mathbb{E}_x\left[\tau_B\left(\delta\right)\right]<\infty, \tag{74}$$

donde $\tau_B\left(\delta\right)=inf\left\{t\geq\delta:X\left(t\right)\in B\right\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 18 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B=\left\{x\in\mathbb{X}:|x|\leq k\right\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k>0$.*

Teorema 21 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x\left(|x|\delta\right)|=0, \tag{75}$$

*donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B=\left\{x\in\mathbb{X}:|x|\leq k\right\}$ con algún $k>0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

5 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x\in\mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x\left(t\right)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}_m\left(\cdot\right),\overline{T}_m^0\left(\cdot\right)\right)$ para $m=1,2,\ldots,M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_m^x\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T_m^{x,0}\left(|x|t\right)\right) \tag{76}$$

para $m=1,2,\ldots,M$, cuando $x\rightarrow\infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}_m\left(t\right),\overline{T}_m^0\left(t\right)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k\left(t\right)=\overline{Q}_k\left(0\right)+\lambda_k t-\sum_{m=1}^M\mu_k\overline{T}_{m,k}\left(t\right), \tag{77}$$

para $k=1,2,\ldots,K$.

$$\overline{Q}_k\left(t\right)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K. \tag{78}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente,} \tag{79}$$

para $k=1,2,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$.

$$\sum_{k=1}^K\overline{T}_{m,k}^0\left(t\right)+\overline{T}_{m,k}\left(t\right)=t \text{ para } m=1,2,\ldots,M. \tag{80}$$

Definición 40 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 41. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta>0$ *que depende de* μ,λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$, *se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv0$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 22 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right). \tag{81}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 42 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$, *con* $t\geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.

Lema 1 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0>0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$ *para cualquier* $t\geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 23 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, *y para cada condición inicial* $x\in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p, \tag{82}$$

donde p *es el entero dado en (A2).*

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right]=\mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right]\leq\kappa_r, \tag{83}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$. *Donde* π *es la probabilidad invariante para* X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)\right]|=0. \tag{84}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right)ds=\mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{85}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 24 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{86}$$

i) Si $\rho < 1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema* **??**.

ii) Si $\rho > 1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema* **??**

5.1 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathrm{X}$, sea $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t) \right) \tag{87}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{88}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{89}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{90}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$,

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{91}$$

De acuerdo a Dai [?], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (**??**)-(**??**), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 43 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en (**??**) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, *se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 25 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|}Q^{x}(|x|t) \tag{92}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 44 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 2 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por **??**-**??** es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 26 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p, \tag{93}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{94}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right] = 0. \tag{95}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{96}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 27 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{97}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema **??**.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema **??**

Teorema 28. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{98}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{99}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{100}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{101}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda\left(n, \phi_n\left(s, \mathbf{z}\right)\right) ds\right), & t < t^*\left(\mathbf{x}\right), \\ 0, & t \geq t^*\left(\mathbf{x}\right) \end{cases} \tag{102}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}\left[T_1 > t\right] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q\left(\cdot; \phi_n\left(T_1, \mathbf{z}\right)\right)$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[1]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} \left(n, \phi_n\left(t, \mathbf{z}\right)\right), & t < T_1, \\ \left(N, \mathbf{Z}\right), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 1 (Supuesto 3.1, Davis [**?**]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[N_t\right] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{103}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 45. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 46. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 47. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \textit{ es compacto en } E\right\}. \tag{104}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 29. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f\left(X_r\right) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 48. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*[2]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B). \tag{105}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[3] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_t\right) | \mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t} f\left(X_t\right) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{107}$$

[1] Revisar página 362, y 364 de Davis [**?**].

[2] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[3]
$$\mathbb{P}\left\{H | \mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H | X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{106}$$

Definición 49. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x)=P_t(P_sf)(x),\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 13. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t}=P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\}=P_sf(X_t)\ t,s\geq 0,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{108}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 50. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t\rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 51 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}^*$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *tal que* $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0=x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 52. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E,\mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t,s\geq 0$,

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s}\ y\ X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{109}$$

iii) Para cualquier $x\in E,\mathbf{P}^x\{X_0=x\}=1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.

Definición 53 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha>0$ *y cualquier* $f\in S^\alpha$*, el proceso* $t\rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 54. *Un sistema* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 19 (Lema 4.2, Dai[**?**])**.** *Sea* $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ *con* $|x_n|\rightarrow\infty$*, conforme* $n\rightarrow\infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0)=\overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n\rightarrow\infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^{k}\left(\left[|x_n|t\right]\right)\rightarrow P_{k}^{'}t,\ u.o.c., \tag{110}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow\alpha_{k}\left(t-\overline{U}_{k}\right)^{+},\ u.o.c., \tag{111}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow\mu_{k}\left(t-\overline{V}_{k}\right)^{+},\ u.o.c., \tag{112}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_{k}=1/m_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$.

Lema 20 (Lema 4.3, Dai[**?**])**.** *Sea $\left\{x_n\right\}\subset\mathbf{X}$ con $|x_n|\rightarrow\infty$, conforme $n\rightarrow\infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}_{k}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}_{k}.$$

a) Conforme $n\rightarrow\infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_{k}-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_{k}-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t\geq0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_{l}^{x}\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_{l}^{x}\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_{l}^{x}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_{k}^{x}\left(t\right)=_{k}^{x}\left(0\right)+E_{k}^{x}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_{k}^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)-S_{k}^{x}\left(T_{k}^{x}\left(t\right)\right) \tag{113}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_{i}^{x}\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_{i}}T_{k}^{x}\left(t\right).$$

Entonces $I_{i}^{x}\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_{0}^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_{k}^{x}\left(t\right)\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0, \tag{114}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^{x}\left(t\right)=\left(T_{1}^{x}\left(t\right),\ldots,T_{K}^{x}\left(t\right)\right)^{'},$$
$$I^{x}\left(t\right)=\left(I_{1}^{x}\left(t\right),\ldots,I_{K}^{x}\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^{x}\left(T^{x}\left(t\right)\right)=\left(S_{1}^{x}\left(T_{1}^{x}\left(t\right)\right),\ldots,S_{K}^{x}\left(T_{K}^{x}\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^{x}\left(t\right)=Q^{x}\left(0\right)+E^{x}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)-S^{x}\left(T^{x}\left(t\right)\right), \tag{115}$$

$$Q^{x}\left(t\right)\geq0, \tag{116}$$

$$T^{x}\left(0\right)=0,\text{ y }\overline{T}^{x}\left(t\right)\text{ es no decreciente,} \tag{117}$$

$$I^{x}\left(t\right)=et-CT^{x}\left(t\right)\text{ es no decreciente} \tag{118}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(CQ^{x}\left(t\right)\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0, \tag{119}$$

$$\text{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}^{x}\left(\cdot\right),\overline{T}^{x}\left(\cdot\right)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{120}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{cc} 1, & S\left(k\right)=i,\\ 0, & \text{en otro caso}. \end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 30 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\left\{x_{n}\right\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_{n}|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right),U^{x_{n_j}}\left(0\right),V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(0\right),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{121}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)\ \textit{u.o.c.} \tag{122}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{123}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq0, \tag{124}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\ \textit{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{125}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{126}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{127}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{128}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 9. *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x \rightarrow \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 21 (Lema 3.1 [**?**])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 31 (Teorema 5.1 [**?**])**.** *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$, *para toda* $t \geq t_0$.

Lema 22 (Lema 5.2 [**?**])**.** *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{129}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 32 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$*, cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$*..*

Proposición 10 (Proposición 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{130}$$

Proposición 11 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{131}$$

Proposición 12 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X*, sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$*, y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C*, entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{132}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 33 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{133}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{134}$$

Teorema 34 (Teorema 6.2 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 35 (Teorema 6.3 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$*, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_x\left[Q_t\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_0\right]\right| = 0.$$

Proposición 13 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{135}$$

Lema 3 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [?]). *Sea $\{\zeta\left(k\right) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E\left(t\right) = max\left(n \geq 1 : \zeta\left(1\right) + \cdots + \zeta\left(n-1\right) \leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^{r}. \tag{136}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 36 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{137}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 37 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t\left(x,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x \in X. \tag{138}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q\left(0\right)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 38 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t\left(x,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\right\|_f = 0. \tag{139}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right]| = 0.$$

Teorema 39 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X, \mathcal{B}_X\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{140}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 40 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \; T \geq 0, \tag{141}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{142}$$

Definición 55. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 56. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 57. *Sea X el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 58. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a $\mathcal{F}$. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 59. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 60. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 61. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 62. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 63. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{143}$$

Nota 14. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{144}$$

5.2 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathrm{X}$, sea $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{145}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{146}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{147}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{148}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$,

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{149}$$

De acuerdo a Dai [?], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (??)-(??), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 64 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, *se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??-??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 41 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t) \tag{150}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 65 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 4 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 42 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, *y para cada condición inicial* $x \in X$

$$limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p, \tag{151}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{152}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$. *Donde* π *es la probabilidad invariante para* $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right] = 0. \tag{153}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{154}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 43 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{155}$$

i) Si $\rho < 1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema* **??**.

ii) Si $\rho < 1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema* **??**

Teorema 44. *Sea* $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ *Proceso de Markov con espacio de estados* (S_0, χ_0) *generado por una distribuición inicial* P_o *y probabilidad de transición* p_{mn}, *para* $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, *que por notación se escribirá como* $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. *Sea S tiempo de paro relativo a la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_n$. *Sea T función medible,* $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. *Supóngase que* $T \geq S$, *entonces T es tiempo de paro. Si* $B \in \chi_0$, *entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty|\mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{156}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \left\{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\right\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{157}$$

y

$$\partial^* M_v = \left\{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\right\}. \tag{158}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{159}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\left\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \\ exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{160}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[4]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

[4]Revisar página 362, y 364 de Davis [**?**].

Supuestos 2 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea* $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ *el número de saltos en* $[0, t]$. *Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \quad (161)$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 66. *Un espacio topológico* E *es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 67. E *es un espacio de Radón si cada medida finita en* $(E, \mathcal{B}(E))$ *es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 68. *Una medida finita,* λ *en la* σ*-álgebra de Borel de un espacio metrizable* E *se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \quad (162)$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 45. *Sea* E *espacio separable metrizable. Entonces* E *es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en* $(E, \mathcal{B}(E))$ *es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 69. *Una familia* $(P_{s,t})$ *de kernels de Markov en* $(E, \mathcal{E})$ *indexada por pares* $s, t \in I$, *con* $s \leq t$ *es una función de transición en* $(E, \mathcal{E})$, *si para todo* $r \leq s < t$ *en* I *y todo* $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$[5]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B). \quad (163)$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[6] (??) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \; f \in b\mathcal{E}. \quad (165)$$

Definición 70. *Una familia* $(P_t)_{t \geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E, \mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t (P_s f)(x), \; t, s \geq 0, \; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 15. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (??) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \; f \in b\mathcal{E}. \quad (166)$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (??) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

[5] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[6]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \quad (164)$$

Definición 71. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t\rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 72 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E, *existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}^*$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$, *y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *tal que* $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 73. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E,\mathcal{E})$. *La colección* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$;

ii) $(\theta_t)_{t\geq0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X, *es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t,s\geq0$,

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s} \text{ y } X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{167}$$

iii) Para cualquier $x\in E$,$\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}=1$, *y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.

Definición 74 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha>0$ *y cualquier* $f\in S^\alpha$, *el proceso* $t\rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 75. *Un sistema* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 23 (Lema 4.2, Dai[**?**])**.** *Sea* $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ *con* $|x_n|\rightarrow\infty$, *conforme* $n\rightarrow\infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0)=\overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n\rightarrow\infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t])\rightarrow P_k^{'}t, \text{ u.o.c.}, \tag{168}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{169}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{170}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k=1/m_k=1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$.

Lema 24 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right)=_k^x\left(0\right)+E_k^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{171}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_i^x\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_{0}^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{172}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right)=\left(T_1^x\left(t\right),\ldots,T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$

$$I^x\left(t\right)=\left(I_1^x\left(t\right),\ldots,I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right),\ldots,S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^{x}(t) = Q^{x}(0) + E^{x}(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}(t)\right)\right) - S^{x}\left(T^{x}(t)\right), \tag{173}$$

$$Q^{x}(t) \geq 0, \tag{174}$$

$$T^{x}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^{x}(t) \text{ es no decreciente}, \tag{175}$$

$$I^{x}(t) = et - CT^{x}(t) \text{ es no decreciente} \tag{176}$$

$$\int_{0}^{\infty} \left(CQ^{x}(t)\right) dI_{i}^{x}(t) = 0, \tag{177}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^{x}(\cdot), \overline{T}^{x}(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{178}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 46 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{179}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{180}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I - P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{181}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{182}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{183}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente}, \tag{184}$$

$$\int_{0}^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{185}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{186}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 14. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}(0), \frac{1}{|x|}A_{k}^{x}(0), \frac{1}{|x|}B_{k}^{x}(0), \frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_{k}(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) *Los vectores de tiempo ocupado* $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) *Para todo* $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K} \left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) *Para todo* k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 25 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 47 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$, *para toda* $t \geq t_0$.

Lema 26 (Lema 5.2 [?]). *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{187}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) *Para cualquier* $t > 0$, $sup_{t\geq\delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) *Las variables aleatorias* $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 48 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 15 (Proposición 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{188}$$

Proposición 16 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p)\, dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{189}$$

Proposición 17 (Proposición 5.4 [**?**]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{190}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 49 (Teorema 5.5 [**?**]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{191}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \tag{192}$$

Teorema 50 (Teorema 6.2 [**?**]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\| P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \|_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 51 (Teorema 6.3 [**?**]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)} |\mathbb{E}_x [Q_t] - \mathbb{E}_\pi [Q_0]| = 0.$$

Proposición 18 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [**?**]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0 \tag{193}$$

Lema 5 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [**?**]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \tag{194}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 52 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{195}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 53 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{196}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 54 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x)=f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_f=0. \tag{197}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 55 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f: X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds=\pi(f):=\int f(x)\,\pi(dx) \tag{198}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f: X\leftarrow\mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 56 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0\geq 0$,*

$$|Q(T)|\geq\epsilon_0 T-c_0,\ T\geq 0, \tag{199}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq 1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\}\geq q. \tag{200}$$

Definición 76. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X,\mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A\in\mathcal{F}$.*

Definición 77. *Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X=\bigcup_{n\geq 1}X_n$ con $X_n\in\mathcal{F}$ y $\mu(X_n)<\infty$.*

Definición 78. *Sea X el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b)\in\mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 79. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a $\mathcal{F}$. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 80. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 81. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 82. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 83. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 84. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{201}$$

Nota 16. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{202}$$

6 Proceso de Estados Markoviano para el Sistema

Sean $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ el tiempo residual de arribos a la cola k, para cada servidor m, sea $H_m(t)$ par ordenado que consiste en la cola que está siendo atendida y la política de servicio que se está utilizando. $B_m(t)$ los tiempos de servicio residuales, $B_m^0(t)$ el tiempo residual de traslado, $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H_m(t)$.

El proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{203}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{204}$$
$$P(\xi_k(1) + \ldots \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\,dx0 \text{ y} \tag{205}$$
$$\int_0^\infty q_k(x)\,dx > 0 \tag{206}$$

7 Procesos de Estados de Markov

Teorema 57. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{207}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{\bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{208}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{209}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{210}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf \{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{211}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 3 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{212}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[7] se cumple para cualquier tiempo de paro.

7.1 Procesos de Estados de Markov

Teorema 58. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,\ m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{213}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{\bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

[7]Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0,1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{214}$$

y

$$\partial^* M_v = \left\{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\right\}. \tag{215}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{216}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf \left\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{217}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 4 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea* $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ *el número de saltos en* $[0, t]$. *Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{218}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[8] se cumple para cualquier tiempo de paro.

[8] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

8 Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 85. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{219}$$

Definición 86. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 59. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

8.1 Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 87. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{220}$$

Definición 88. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 60. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

9 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[9], $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 89. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{10}. \tag{221}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[11] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{223}$$

[9] qué se quiere decir con el término: más general?

[10] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[11]
$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{222}$$

Definición 90. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x),\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}^{12}.$$

Nota 17. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t)\ t,s\geq 0,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{224}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

9.1 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X,\mathcal{G},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I\subset\mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r): r\in I, r\leq t, f\in\mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 91. *Una familia* $(P_{s,t})$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *indexada por pares* $s,t\in I$, *con* $s\leq t$ *es una función de transición en* $(E,\mathcal{E})$, *si para todo* $r\leq s<t$ *en* I *y todo* $x\in E$, $B\in\mathcal{E}$

$$P_{r,t}(x,B) = \int_E P_{r,s}(x,dy)\,P_{s,t}(y,B)^{13}. \tag{225}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E,\mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov [14] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t)|\mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t)\ s\leq t\in I,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{227}$$

Definición 92. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x),\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 18. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t)\ t,s\geq 0,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{228}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

[12] Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

[13] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[14]

$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H|X_t\}\ H\in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{226}$$

9.2 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[15], $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 93. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{16}. \tag{229}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[17] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{231}$$

Definición 94. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}^{18}.$$

Nota 19. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{232}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

9.3 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 95. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{19}. \tag{233}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[20] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{235}$$

[15] qué se quiere decir con el término: más general?

[16] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[17]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{230}$$

[18] Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

[19] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[20]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{234}$$

Definición 96. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_sf)(x),\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 20. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$*.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_sf(X_t)\ t,s\geq 0,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{236}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

9.4 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X,\mathcal{G},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I\subset\mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r): r\in I, rleqt, f\in\mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 97. *Una familia* $(P_{s,t})$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *indexada por pares* $s,t\in I$*, con* $s\leq t$ *es una función de transición en* $(E,\mathcal{E})$*, si para todo* $r\leq s<t$ *en* I *y todo* $x\in E$*,* $B\in\mathcal{E}$

$$P_{r,t}(x,B) = \int_E P_{r,s}(x,dy)\,P_{s,t}(y,B)\,^{21}. \tag{237}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E,\mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[22] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t)|\mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t)\ s\leq t\in I,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{239}$$

Definición 98. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_sf)(x),\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 21. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$*.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_sf(X_t)\ t,s\geq 0,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{240}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

[21] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[22]

$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H|X_t\}\ H\in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{238}$$

9.5 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 99. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{23}. \tag{241}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[24] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{243}$$

Definición 100. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 22. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{244}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

10 Primer Condición de Regularidad

Definición 101. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \to X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 102 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 103. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

[23] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[24]
$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{242}$$

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$*,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{245}$$

iii) *Para cualquier* $x \in E$*,*$\mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$*.*

Definición 104 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \to f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 105. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t)*.*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a* $\mathcal{G}_t$*.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

10.1 Primer Condición de Regularidad

Definición 106. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \to X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E*.*

Definición 107 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* $/P_t)$ *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ*.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 108. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E, \mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$*,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{246}$$

iii) *Para cualquier* $x \in E$*,*$\mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$*.*

Definición 109 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \to f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 110. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t)*.*

ii) **X** *satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 27 (Lema 4.2, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$*, casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'}t, \text{ u.o.c.}, \tag{247}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k\left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{248}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k\left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{249}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 28 (Lema 4.3, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{250}$$

para $k = 1, \dots, K$. Para $i = 1, \dots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{251}$$

para $i = 1, \dots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \dots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \dots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = \left(S_1^x(T_1^x(t)), \dots, S_K^x(T_K^x(t))\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x(T_l^x(t))\right) - S^x(T^x(t)), \tag{252}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{253}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{254}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{255}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{256}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{257}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 61 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{258}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \quad u.o.c. \tag{259}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I - P)' M^{-1} \left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{260}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{261}$$

$$\overline{T}(t) \ \textit{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{262}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \ \textit{es no decreciente,} \tag{263}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{264}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{265}$$

Definición 111 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Teorema 62 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \tag{266}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 112 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 6 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 19. *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x \to \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k\left(t\right)+\overline{T}_k^0\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_k\left(t\right)=\overline{Q}_k\left(0\right)+\alpha_k t-\mu_k\overline{T}_k\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k\left(t\right)=\beta_k$$

para $\overline{Q}_k\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_k^0\overline{T}_k^0\left(t\right)=\mu_j^0\overline{T}_j^0\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_k\dot{\overline{T}}_k\left(t\right)=l_k\mu_k^0\dot{\overline{T}}_k^0\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_k\left(t\right)>0$.

Lema 29 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 63 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 64 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α,μ,T,U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$, *para toda* $t\geq t_0$.

Lema 30 (Lema 5.2 [?]). *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq 1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_1\right]}\right)^r \tag{267}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r:t\geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 65 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_1\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r\rightarrow\frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$..

Proposición 20 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0. \tag{268}$$

Proposición 21 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{269}$$

Proposición 22 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{270}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 66 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{271}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \tag{272}$$

Teorema 67 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \to 0$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x \left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi \left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 68 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot)\right|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]| = 0}.$$

Proposición 23 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{273}$$

Lema 7 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max\,(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{274}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 69 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds \leq \kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{275}$$

para $t > 0$ *y* $x \in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds \leq \kappa_{p}.$$

Teorema 70 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{276}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right] = \mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right] \leq \kappa_{r}$$

Teorema 71 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con* $f\left(x\right) = f_{1}\left(x\right)$ *se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f} = 0. \tag{277}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]| = 0.$$

Teorema 72 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea* ν *cualquier distribución de probabilidad en* $(X, \mathcal{B}_X)$, *y* π *la distribución estacionaria de* X.

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{278}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_{+}$ *con* $\pi\left(|f|\right) < \infty$, *la ecuación anterior se cumple.*

Teorema 73 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_{0}T - c_{0},\ T \geq 0, \tag{279}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, *con* $|Q\left(0\right)| = 1$. *Entonces para cualquier* $0 < q \leq 1$, *existe* $B < 0$ *tal que para cualquier* $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\} \geq q. \tag{280}$$

10.2 Primer Condición de Regularidad

Definición 113. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 114 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 115. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E, \mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$*,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{281}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 116 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 117. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

10.3 Primer Condición de Regularidad

Definición 118. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 119 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* $/P_t)$ *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 120. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E, \mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$*,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{282}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (??) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$*.*

Definición 121 (HD2). *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 122. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t)*.*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$*.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 31 (Lema 4.2, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$*, conforme* $n \rightarrow \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$*, casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'} t, \text{ u.o.c.,} \tag{283}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{284}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{285}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$*.*

Lema 32 (Lema 4.3, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$*, conforme* $n \rightarrow \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x(t)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{286}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j\in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{287}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{288}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{289}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{290}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{291}$$

$$\int_0^{\infty}\left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{292}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x\left(\cdot\right), \overline{T}^x\left(\cdot\right)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{293}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S\left(k\right) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 74 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right), U^{x_{n_j}}\left(0\right), V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right) \to \left(\overline{Q}\left(0\right), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{294}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right) \ \ u.o.c. \tag{295}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right) = Q\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - \left(I - P\right)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{296}$$

$$\overline{Q}\left(t\right) \geq 0, \tag{297}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{298}$$

$$\overline{I}\left(t\right) = et - C\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente,} \tag{299}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right) d\overline{I}\left(t\right) = 0, \tag{300}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{301}$$

Definición 123 (Definición 4.1, , Dai [**?**]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.*

Teorema 75 (Teorema 4.2, Dai[**?**]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x\left(t\right) = \frac{1}{|x|} Q^x\left(|x|t\right) \tag{302}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 124 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t)=0$, con $t\geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)|=1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 8 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por ??-?? es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0>0$ tal que $\overline{Q}(t)=0$ para cualquier $t\geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}(0)|+|\overline{A}(0)|+|\overline{B}(0)|\leq 1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 24. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^0\right)$ un flujo límite de ?? y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0),\frac{1}{|x|}A_k^x(0),\frac{1}{|x|}B_k^x(0),\frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_k(0),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0)=\overline{T}^0(0)=0$.

ii) Para todo $t\geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t)+\overline{T}_k^0(t)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_k(t)=\overline{Q}_k(0)+\alpha_k t-\mu_k\overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t)=\beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_k^0\overline{T}_k^0(t)=\mu_j^0\overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_k\dot{\overline{T}}_k(t)=l_k\mu_k^0\dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t)>0$.

Lema 33 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 76 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 77 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α,μ,T,U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t)=0$, para toda $t\geq t_0$.*

Lema 34 (Lema 5.2 [?]). *Sea $\{\xi(k):k\in\mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t)=max\left\{n\geq 1:\xi(1)+\cdots+\xi(n-1)\leq t\right\}.$$

Si $E[\xi(1)]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{303}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t\geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 78 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_1\right)\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r\rightarrow\frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$..

Proposición 25 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0. \tag{304}$$

Proposición 26 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1}<\infty$, $\delta>0$ *y un conjunto compacto* $C\subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1+|X\left(t\right)|^p\right)dt\right]\leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right) \tag{305}$$

Proposición 27 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta>0$, *y un conjunto cerrado* $C\subset X$

$$V\left(x\right):=\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x\in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k<\infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right]+\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right]\leq\frac{1}{t}V\left(x\right)+k, \tag{306}$$

para $x\in X$ *y* $t>0$.

Teorema 79 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p<\infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{307}$$

para $t\geq0$, $x\in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq k_p \tag{308}$$

Teorema 80 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow0$$

para $t\rightarrow\infty$ *y* $x\in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right]<\infty$$

Teorema 81 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x\in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 28 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{309}$$

Lema 9 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta\left(k\right):k\in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq 1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{310}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r:t\geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 82 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{311}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 83 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{312}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q\left(0\right)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 84 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_f=0. \tag{313}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 85 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{314}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 86 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{315}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{316}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$,
- también se define $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.

10.4 Primer Condición de Regularidad

Definición 125. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 126 (HD1). *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 127. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ es una colección de operadores shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{317}$$

*iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.*

Definición 128 (HD2). *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 129. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

*i) $\mathbf{X}$ es una realización continua por la derecha, **??**, de (P_t).*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Definición 130. *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{F}$ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* X*, la pareja* $(X, \mathcal{F})$ *es llamado espacio medible. Un subconjunto* A *de* X *es llamado medible, o medible con respecto a* $\mathcal{F}$*, si* $A \in \mathcal{F}$.

Definición 131. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *espacio de medida. Se dice que la medida* μ *es* σ*-finita si se puede escribir* $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ *con* $X_n \in \mathcal{F}$ *y* $\mu(X_n) < \infty$.

Definición 132. *Sea* X *el conjunto de los úmeros reales* $\mathbb{R}$*. El álgebra de Borel es la* σ*-álgebra* B *generada por los intervalos abiertos* $(a, b) \in \mathbb{R}$*. Cualquier conjunto en* B *es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 133. *Una función* $f : X \rightarrow \mathbb{R}$*, es medible si para cualquier número real* α *el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X*. Equivalentemente, se dice que* f *es medible si*

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 134. *Sean* $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$*,* $i = 1, 2, \ldots,$ *espacios medibles y* $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ *el conjunto de todas las sucesiones* $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ *tales que* $\omega_i \in \Omega_i$*,* $i = 1, 2, \ldots,$*. Si* $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$*, definimos* $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$*. Al conjunto* B_n *se le llama* cilindro *con base* B^n*, el cilindro es llamado medible si* $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.

Definición 135. *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de* σ*-álgebras* $\mathcal{F}_t$*, para* $t \geq 0$*, si para* $s < t$ *implica que* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$*, y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}_t$*-medible para cada* t*. Si no se especifica* $\mathcal{F}_t$ *entonces se toma* $\mathcal{F}_t$ *como* $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$*, la más pequeña* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω *que hace que cada* $X(s)$*, con* $s \leq t$ *sea Borel medible.*

Definición 136. *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ *familia creciente de sub* σ*-álgebras. es decir,* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *para* $s \leq t$*. Un tiempo de paro para* $\mathcal{F}(t)$ *es una función* $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ *tal que* $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ *para cada* $t \geq 0$*. Un tiempo de paro para el proceso estocástico* $X(t), t \geq 0$ *es un tiempo de paro para las* σ*-álgebras* $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.

Definición 137. *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, con* (S, χ) *espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a* $\{\mathcal{F}(t)\}$*, es decir, si para cualquier* $s, t \in I$*,* I *conjunto de índices,* $s < t$*, se tiene que* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}(t)$*-medible,*

Definición 138. *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a* $\mathcal{F}(t)$ *o que* $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ *es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto* $B \in \chi$*, y* $s, t \in I$*,* $s < t$ *se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{318}$$

Nota 23. *Si se dice que* $\{X(t)\}$ *es un Proceso de Markov sin mencionar* $\mathcal{F}(t)$*, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{319}$$

Teorema 87. *Sea* $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots,\}$ *Proceso de Markov con espacio de estados* (S_0, χ_0) *generado por una distribuición inicial* P_o *y probabilidad de transición* p_{mn}*, para* $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$*, que por notación se escribirá como* $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$*. Sea* S *tiempo de paro relativo a la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_n$*. Sea* T *función medible,* $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots,\}$*. Supóngase que* $T \geq S$*, entonces* T *es tiempo de paro. Si* $B \in \chi_0$*, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{320}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \to \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v\in K} M_v = \{(v,\zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v\in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \to \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \to [0,1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v\in K} \partial^* M_v. \tag{321}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t,\zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{322}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t,\zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{323}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v,\zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t,\zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v,\zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \to \lambda(v, \phi_v(s,\zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0,\epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \left\{ \begin{array}{ll} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s,\mathbf{z}))\,ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{array} \right. \tag{324}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[25]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \left\{ \begin{array}{ll} (n, \phi_n(t,\mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{array} \right.$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

[25] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

Supuestos 5 (Supuesto 3.1, Davis [**?**]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0,t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[N_t\right] < \infty \text{ para toda } t. \tag{325}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 139. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 140. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 141. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 142. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{326}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 88. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

10.5 Primer Condición de Regularidad

Definición 143. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 144 (HD1). *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 145. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{327}$$

*iii) Para cualquier $x \in E$,$\mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.*

Definición 146 (HD2). *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^{\alpha}$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 147. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 35 (Lema 4.2, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'}t,\ u.o.c., \tag{328}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k\left(t - \overline{U}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{329}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k\left(t - \overline{V}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{330}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 36 (Lema 4.3, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+,\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x \left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x \left(T_k^x(t)\right) \tag{331}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{332}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)^{'},$$

$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{333}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{334}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \tag{335}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{336}$$

$$\int_0^{\infty} \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{337}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{338}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 89 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{339}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right) \;\; u.o.c. \tag{340}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}\left(t\right) = Q\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - \left(I - P\right)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{341}$$

$$\overline{Q}\left(t\right) \geq 0, \tag{342}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \;\; \textit{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{343}$$

$$\overline{I}\left(t\right) = et - C\overline{T}\left(t\right) \;\; \textit{es no decreciente,} \tag{344}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right) = 0, \tag{345}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{346}$$

Definición 148 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (*??*)-(*??*) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.

Teorema 90 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{347}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 149 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 10 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 29. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x \rightarrow \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k = 1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right) = \overline{T}^{0}\left(0\right) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right) = \overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right) = \beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right) = \mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right) = l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right) > 0$.

Lema 37 (Lema 3.1 [**?**]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 91 (Teorema 5.2 [**?**]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 92 (Teorema 5.1 [**?**]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* (α,μ,T,U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right) = 0$, *para toda* $t \geq t_{0}$.

Lema 38 (Lema 5.2 [**?**]). *Sea* $\{\xi\left(k\right) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0,\infty)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right) = max\left\{n \geq 1 : \xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right) \leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right] = \left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r} \qquad (348)$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 93 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [**?**]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}\left(X_{1}\right] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r} \rightarrow \frac{1}{\mu^{r}}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 30 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0. \tag{349}$$

Proposición 31 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1}<\infty$, $\delta>0$ y un conjunto compacto $C\subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1+|X\left(t\right)|^p\right)dt\right]\leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right) \tag{350}$$

Proposición 32 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta>0$, y un conjunto cerrado $C\subset X$*

$$V\left(x\right):=\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x\in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k<\infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right]+\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right]\leq\frac{1}{t}V\left(x\right)+k, \tag{351}$$

para $x\in X$ y $t>0$.

Teorema 94 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p<\infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{352}$$

para $t\geq0$, $x\in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq k_p \tag{353}$$

Teorema 95 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow0$$

para $t\rightarrow\infty$ y $x\in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right]<\infty$$

Teorema 96 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x\in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 33 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{354}$$

Lema 11 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{355}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 97 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{356}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 98 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{357}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x[|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 99 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{358}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 100 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{359}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 101 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{360}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{361}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$,
- también se define $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.

11 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 39 (Lema 4.2, Dai[**?**]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'}t, \ u.o.c., \tag{362}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{363}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{364}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 40 (Lema 4.3, Dai[**?**]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x(t)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_k^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{365}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{366}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))',$$
$$I^x(t) = (I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t))'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \tag{367}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{368}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{369}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{370}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{371}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{372}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 102 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales* ω *y cualquier sucesión de estados iniciales* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, *con* $|x_n| \to \infty$, *existe una subsucesión* $\left\{x_{n_j}\right\}$ *con* $|x_{n_j}| \to \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{373}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \ \ u.o.c. \tag{374}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{375}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{376}$$

$$\overline{T}(t) \ \ \textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{377}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \ \ \textit{es no decreciente}, \tag{378}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{379}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{380}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 34. *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x \to \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^{0}(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^{0}(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^{0}(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Teorema 103 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 35 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{381}$$

Proposición 36 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V(x)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f(X(s))\, ds\right] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{382}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

11.1 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 41 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k\left([|x_n|t]\right) \rightarrow P_k^{'}t,\ u.o.c., \tag{383}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \alpha_k\left(t - \overline{U}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{384}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \mu_k\left(t - \overline{V}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{385}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$.

Lema 42 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t\geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x\left(t\right)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_k^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right)=Q_k^x\left(0\right)+E_k^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{386}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_i^x\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{387}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right)=\left(T_1^x\left(t\right),\ldots,T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$

$$I^x\left(t\right)=\left(I_1^x\left(t\right),\ldots,I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right),\ldots,S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x\left(t\right)=Q^x\left(0\right)+E^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S^x\left(T^x\left(t\right)\right), \tag{388}$$

$$Q^x\left(t\right)\geq 0, \tag{389}$$

$$T^{x}\left(0\right)=0,\text{ y }\overline{T}^{x}\left(t\right)\text{ es no decreciente,} \tag{390}$$

$$I^{x}\left(t\right)=et-CT^{x}\left(t\right)\text{ es no decreciente} \tag{391}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(CQ^{x}\left(t\right)\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0, \tag{392}$$

$$\text{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}^{x}\left(\cdot\right),\overline{T}^{x}\left(\cdot\right)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{393}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{ll}1, & S\left(k\right)=i,\\ 0, & \text{en otro caso}.\end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 104 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right),U^{x_{n_j}}\left(0\right),V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(0\right),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{394}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)\ \textit{u.o.c.} \tag{395}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{396}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0, \tag{397}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\textit{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{398}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right)\textit{ es no decreciente,} \tag{399}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0, \tag{400}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)\textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{401}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 37. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ y $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Teorema 105 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 38 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{402}$$

Proposición 39 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{403}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

12 Estabilidad

Definición 150 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??**, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{404}$$

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 151 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$ y $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$*

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}\left(t\right) \tag{405}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{406}$$

$$\overline{T}_{k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente,} \tag{407}$$

$$\overline{I}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{k\in C_{i}}\overline{T}_{k}\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{408}$$

$$\overline{I}_{i}\left(\cdot\right) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0 \tag{409}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{410}$$

Lema 43 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 106 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_{0} que depende de $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z\left(t\right)=0$, para toda $t\geq t_{0}$.*

Proposición 40 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_{0}>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{411}$$

Lema 12 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\left\{\zeta\left(k\right):k\in F\right\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $\left(0,\infty\right)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq 1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{412}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 107 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_{p} tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{413}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 108 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{414}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 109 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} \left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{415}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 110 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_o^t f(X(s))\, ds = \pi(f) := \int f(x)\, \pi(dx) \tag{416}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 111 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{417}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{418}$$

Definición 152. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 153. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 154. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 155. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 156. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 157. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 158. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 159. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 160. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B|\mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B|X(s)\}. \tag{419}$$

Nota 24. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B|X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B|X(s)\} \tag{420}$$

Teorema 112. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots$, $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty|\mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{421}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{422}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{423}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{424}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v,\zeta)\in E$ existe un $\epsilon>0$ tal que la función $s\rightarrow\lambda\left(v,\phi_{v}\left(s,\zeta\right)\right)\in E$ es integrable para $s\in[0,\epsilon)$. La medida de transición $Q\left(A;\mathbf{x}\right)$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A\in\mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x}\in E\cup\Gamma^{*}$ y es una medida de probabilidad en $(E,\mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x}\in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_{t})$ comenzando en $\mathbf{x}=(n,\mathbf{z})\in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F\left(t\right)=\left\{\begin{array}{ll}exp\left(-\int_{0}^{t}\lambda\left(n,\phi_{n}\left(s,\mathbf{z}\right)\right)ds\right), & t<t^{*}\left(\mathbf{x}\right),\\ 0, & t\geq t^{*}\left(\mathbf{x}\right)\end{array}\right. \tag{425}$$

Sea T_{1} una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}\left[T_{1}>t\right]=F\left(t\right)$, ahora sea la variable aleatoria (N,Z) con distribuición $Q\left(\cdot;\phi_{n}\left(T_{1},\mathbf{z}\right)\right)$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_{t})$ para $t\leq T_{1}$ es[26]

$$\mathbf{x}_{t}=\left(v_{t},\zeta_{t}\right)=\left\{\begin{array}{ll}\left(n,\phi_{n}\left(t,\mathbf{z}\right)\right), & t<T_{1},\\ \left(N,\mathbf{Z}\right), & t=t_{1}.\end{array}\right.$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_{1}}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_{2}-T_{1}$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_{2}}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_{t}$ con tiempos de salto $T_{1},T_{2},\ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda,T_{1}>0$ y $T_{1}-T_{2}>0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 6 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea* $N_{t}:=\sum_{t}\mathbb{1}_{(t\geq t)}$ *el número de saltos en* $[0,t]$. *Entonces*

$$\mathbb{E}\left[N_{t}\right]<\infty \textit{ para toda } t. \tag{426}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 161. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 162. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 163. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 164. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda\left(E\right)=sup\left\{\lambda\left(K\right):K\textit{ es compacto en }E\right\}. \tag{427}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 113. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

12.1 Estabilidad

Definición 165 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $\left(\overline{A}\left(0\right),\overline{B}\left(0\right)\right)\in\mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en ??-??, junto con la condición:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=\overline{Q}\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{A}\left(0\right)\right)^{+}-\left(I-P^{'}\right)M\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{B}\left(0\right)\right)^{+} \tag{428}$$

[26] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 166 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}\left(t\right) \tag{429}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{430}$$

$$\overline{T}_{k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente}, \tag{431}$$

$$\overline{I}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{k\in C_{i}}\overline{T}_{k}\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{432}$$

$$\overline{I}_{i}\left(\cdot\right) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0 \tag{433}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{434}$$

Lema 44 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 114 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$*, para toda* $t\geq t_{0}$.

Proposición 41 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_{0}>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{435}$$

Lema 13 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea* $\left\{\zeta\left(k\right):k\in F\right\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $\left(0,\infty\right)$*, y sea* $E\left(t\right)=max\left(n\geq1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$*. Si* $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$*, entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{436}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 115 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_{p} *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{437}$$

para $t>0$ *y* $x\in X$*. En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 116 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}}, \; t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{438}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 117 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} \left\| P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot) \right\|_f = 0. \tag{439}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 118 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_o^t f(X(s))\, ds = \pi(f) := \int f(x)\, \pi(dx) \tag{440}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 119 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{441}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{442}$$

Definición 167. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 168. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 169. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 170. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 171. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 172. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 173. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 174. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 175. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B|\mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B|X(s)\}. \tag{443}$$

Nota 25. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B|X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B|X(s)\} \tag{444}$$

Teorema 120. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty|\mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{445}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{446}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{447}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{448}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v,\zeta)\in E$ existe un $\epsilon>0$ tal que la función $s\rightarrow\lambda\left(v,\phi_v\left(s,\zeta\right)\right)\in E$ es integrable para $s\in[0,\epsilon)$. La medida de transición $Q\left(A;\mathbf{x}\right)$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A\in\mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x}\in E\cup\Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E,\mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x}\in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x}=(n,\mathbf{z})\in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F\left(t\right)=\left\{\begin{array}{ll} exp\left(-\int_0^t\lambda\left(n,\phi_n\left(s,\mathbf{z}\right)\right)ds\right), & t<t^*\left(\mathbf{x}\right),\\ 0, & t\geq t^*\left(\mathbf{x}\right)\end{array}\right. \tag{449}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}\left[T_1>t\right]=F\left(t\right)$, ahora sea la variable aleatoria (N,Z) con distribuición $Q\left(\cdot;\phi_n\left(T_1,\mathbf{z}\right)\right)$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t\leq T_1$ es[27]

$$\mathbf{x}_t=\left(v_t,\zeta_t\right)=\left\{\begin{array}{ll}\left(n,\phi_n\left(t,\mathbf{z}\right)\right), & t<T_1,\\ \left(N,\mathbf{Z}\right), & t=t_1.\end{array}\right.$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto T_2-T_1 lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1,T_2,\ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda,T_1>0$ y $T_1-T_2>0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 7 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea* $N_t:=\sum_t\mathbb{1}_{(t\geq t)}$ *el número de saltos en* $[0,t]$. *Entonces*

$$\mathbb{E}\left[N_t\right]<\infty \textit{ para toda } t. \tag{450}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 176. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 177. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 178. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 179. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda\left(E\right)=sup\left\{\lambda\left(K\right):K \textit{ es compacto en } E\right\}. \tag{451}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 121. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

13 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X=\left\{X\left(t\right),t\geq0\right\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [?].

[27] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

13.1 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X = \{X(t), t \geq 0\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [?].

13.1.1 Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [?]

.

13.2 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho, Sharpe [?], en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$.

Se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable.

Definición 180. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 181. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 182. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 183. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{452}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 122. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

14 Procesos Harris Recurrentes Positivos

Sea el proceso de Markov $X = \{X(t), t \geq 0\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] y Meyn y Down [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

14.1 Procesos Harris Recurrentes Positivos

Sea el proceso de Markov $X = \{X(t), t \geq 0\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] y Meyn y Down [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

15 Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X(t) = (Q(t), U(t), V(t)), \tag{453}$$

donde $Q(t)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U(t)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V(t)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U(t)$ como $V(t)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = (Q(0), U(0), V(0)) = (q, a, b)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \ldots, K$ se define

$$\begin{aligned} E_l^x(t) &= max\left\{r : U_l(0) + \xi_l(1) + \cdots + \xi_l(r-1) \leq t\right\} \;\; t \geq 0, \\ S_k^x(t) &= max\left\{r : V_k(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(r-1) \leq t\right\} \;\; t \geq 0. \end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s-éima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \left\{\phi^k(n), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \ldots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 45 (Lema 4.2, Dai[**?**]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{454}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{455}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{456}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 46 (Lema 4.3, Dai[**?**]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t\geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right)=_k^x\left(0\right)+E_k^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{457}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_i^x\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{458}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right)=\left(T_1^x\left(t\right),\ldots,T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$
$$I^x\left(t\right)=\left(I_1^x\left(t\right),\ldots,I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right),\ldots,S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x\left(t\right)=Q^x\left(0\right)+E^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S^x\left(T^x\left(t\right)\right), \tag{459}$$

$$Q^x\left(t\right)\geq 0, \tag{460}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \tag{461}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{462}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{463}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{464}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 123 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{465}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{466}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I - P)' M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{467}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{468}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{469}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{470}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{471}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{472}$$

Definición 184 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en **??** es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 124 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|}Q^{x}(|x|t) \tag{473}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 185 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk}\mu_l \overline{T}_l(t) \tag{474}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{475}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{476}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{477}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^{x}(t)\, dI_i^{x}(t) = 0 \tag{478}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}(\cdot), T^{x}(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{479}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 186 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??**, *junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^{+} - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^{+} \tag{480}$$

Definición 187 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 14 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

15.1 Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X(t) = \left(Q(t), U(t), V(t)\right), \tag{481}$$

donde $Q(t)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U(t)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V(t)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U(t)$ como $V(t)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = (Q(0), U(0), V(0)) = (q, a, b)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \ldots, K$ se define

$$\begin{aligned} E_l^x(t) &= max\{r : U_l(0) + \xi_l(1) + \cdots + \xi_l(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0, \\ S_k^x(t) &= max\{r : V_k(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0. \end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s-éima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \left\{\phi^k(n), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \ldots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 47 (Lema 4.2, Dai[**?**]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \; u.o.c., \tag{482}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \; u.o.c., \tag{483}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \; u.o.c., \tag{484}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 48 (Lema 4.3, Dai[**?**]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \; u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right) =_k^x\left(0\right) + E_k^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{485}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x\left(t\right) = t - \sum_{j\in C_i} T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i} Q_k^x\left(t\right)\right) dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{486}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right) = \left(T_1^x\left(t\right), \ldots, T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$
$$I^x\left(t\right) = \left(I_1^x\left(t\right), \ldots, I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x\left(t\right) = Q^x\left(0\right) + E^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S^x\left(T^x\left(t\right)\right), \tag{487}$$

$$Q^x\left(t\right) \geq 0, \tag{488}$$

$$T^x\left(0\right) = 0, \text{ y } \overline{T}^x\left(t\right) \text{ es no decreciente}, \tag{489}$$

$$I^x\left(t\right) = et - CT^x\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{490}$$

$$\int_0^{\infty}\left(CQ^x\left(t\right)\right) dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{491}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^{x}\left(\cdot\right), \overline{T}^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{492}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 125 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{493}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \ u.o.c. \tag{494}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I - P)^{'} M^{-1} \left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{495}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{496}$$

$$\overline{T}(t) \ \text{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{497}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \ \text{es no decreciente,} \tag{498}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{499}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{500}$$

Definición 188 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en **??** es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 126 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{501}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 189 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}\left(t\right) \tag{502}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{503}$$

$$\overline{T}_{k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente}, \tag{504}$$

$$\overline{I}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{k\in C_{i}}\overline{T}_{k}\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{505}$$

$$\overline{I}_{i}\left(\cdot\right) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0 \tag{506}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{507}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 190 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}\left(0\right),\overline{B}\left(0\right)\right)\in\mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??**, *junto con la condición:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=\overline{Q}\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{A}\left(0\right)\right)^{+}-\left(I-P^{'}\right)M\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{B}\left(0\right)\right)^{+} \tag{508}$$

Definición 191 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$, *con* $t\geq t_{0}$, *para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 15 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_{0}>0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$ *para cualquier* $t\geq t_{0}$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq 1$.

15.2 Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad

16 Teorema 2.1

El resultado principal de Down [?] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 127 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_{p}, *y para cada condición inicial* $x\in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\sup\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}, \tag{509}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right]\leq\kappa_{r}, \tag{510}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]=0. \tag{511}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-}c.s. \tag{512}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$.

Proposición 42 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{513}$$

Lema 16 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta\left(k\right):k\in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $\left(0,\infty\right)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{514}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 128 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{515}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 129 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{516}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 130 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{517}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 131 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{518}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

16.1 Teorema 2.1

El resultado principal de Down [?] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 132 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\sup\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p, \tag{519}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{520}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right] = 0. \tag{521}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right)ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{522}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

Proposición 43 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{523}$$

Lema 17 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta\left(k\right) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E\left(t\right) = max\left(n \geq 1 : \zeta\left(1\right) + \cdots + \zeta\left(n-1\right) \leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{524}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 133 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p \left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{525}$$

para $t > 0$ *y* $x \in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 134 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p}, \ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{526}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 135 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con* $f(x) = f_1(x)$ *se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{527}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0.$$

Teorema 136 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea* ν *cualquier distribución de probabilidad en* $(X, \mathcal{B}_X)$, *y* π *la distribución estacionaria de* X.

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\, ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{528}$$

$\mathbb{P}$*-c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *con* $\pi(|f|) < \infty$, *la ecuación anterior se cumple.*

17 Teorema 2.2

Teorema 137 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \ T \geq 0, \tag{529}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, *con* $|Q(0)| = 1$. *Entonces para cualquier* $0 < q \leq 1$, *existe* $B < 0$ *tal que para cualquier* $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{530}$$

17.1 Teorema 2.2

Teorema 138 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \ T \geq 0, \tag{531}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, *con* $|Q(0)| = 1$. *Entonces para cualquier* $0 < q \leq 1$, *existe* $B < 0$ *tal que para cualquier* $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{532}$$

18 Teorema 2.3

Teorema 139 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{533}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema **??**.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema **??**

18.1 Teorema 2.3

Teorema 140 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{534}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema **??**.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema **??**

18.2 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{535}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{536}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{537}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{538}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{539}$$

Definición 192 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 193. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 141 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{540}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 194 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 18 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 142 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{541}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{542}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{543}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{544}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 143 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{545}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

Dado el proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ definido en (**??**) que describe la dinámica del sistema de visitas cíclicas, si $U(t)$ es el residual de los tiempos de llegada al tiempo t entre dos usuarios consecutivos y $V(t)$ es el residual de los tiempos de servicio al tiempo t para el usuario que estás siendo atendido por el servidor. Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados que puede tomar el proceso X.

Lema 49 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k,$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n\rightarrow\infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_{n}|}U_{k}^{x_{n}}\left(|x_{n}|t\right)=\left(\overline{U}_{k}-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_{n}|}V_{k}^{x_{n}}\left(|x_{n}|t\right)=\left(\overline{V}_{k}-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t\geq0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_{n}|}U_{k}^{x_{n}}\left(|x_{n}|t\right),|x_{n}|\geq1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_{n}|}V_{k}^{x_{n}}\left(|x_{n}|t\right),|x_{n}|\geq1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea e es un vector de unos, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{cc}1, & S\left(k\right)=i,\\ 0, & \text{en otro caso}.\end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema (**??**):

Teorema 144 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_{n}\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_{n}|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_{j}}\right\}$ con $|x_{n_{j}}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_{j}}|}\left(Q^{x_{n_{j}}}\left(0\right),U^{x_{n_{j}}}\left(0\right),V^{x_{n_{j}}}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(0\right),\overline{U},\overline{V}\right),\tag{546}$$

$$\frac{1}{|x_{n_{j}}|}\left(Q^{x_{n_{j}}}\left(|x_{n_{j}}|t\right),T^{x_{n_{j}}}\left(|x_{n_{j}}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)\ u.o.c.\tag{547}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+},\tag{548}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq0,\tag{549}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\ \text{es no decreciente y comienza en cero},\tag{550}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right)\ \text{es no decreciente},\tag{551}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0,\tag{552}$$

$$\text{Condiciones en }\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola},\tag{553}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 44 (Proposición 4.2, Dai [**?**]). *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. El flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) *Los vectores de tiempo ocupado* $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) *Para todo* $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t.$$

iii) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t).$$

iv) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \rho_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) *Para todo* k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t).$$

vi) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t),$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 50 (Lema 3.1, Chen [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Lema 51 (Lema 5.2, Gut [?]). *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$*, y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$*, entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r, \tag{554}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) *Para cualquier* $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$.

b) *Las variables aleatorias* $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 145 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo, Gut [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$*. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \to \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \to \frac{1}{\mu^r}$*, cuando* $t \to \infty$ *para todo* $r > 0$.

Proposición 45 (Proposición 5.1, Dai y Sean [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{555}$$

Proposición 46 (Proposición 5.3, Dai y Sean [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$*,* $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right). \tag{556}$$

Proposición 47 (Proposición 5.4, Dai y Sean [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right],$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{557}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 146 (Teorema 5.5, Dai y Sean [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\}, \tag{558}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p. \tag{559}$$

Teorema 147 (Teorema 6.2 Dai y Sean [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\| P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot) \|_{f_p} \to 0,$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x[|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q_0|^p] < \infty,$$

donde

$$\| P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \|_f = sup_{|g\leq f|} | \int \pi(dy)\, g(y) - \int P^t(x,dy)\, g(y) |,$$

para $x \in \mathbb{X}$.

Teorema 148 (Teorema 6.3, Dai y Sean [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)} \left| P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \right|_f = 0,$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)} |\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]| = 0.$$

Proposición 48 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0. \tag{560}$$

Teorema 149 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\}, \tag{561}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 150 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right), \tag{562}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 151 (Teorema 2.2, Down [?])**.** *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0}, c_{0}\geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)|\geq \epsilon_{0}T-c_{0},\; T\geq 0, \tag{563}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq 1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{564}$$

Demostración 1 (Teorema **??**)**.** *La demostración de este teorema se da a continuación:*

*i) Utilizando la proposición **??** se tiene que la proposición **??** es cierta para $f\left(x\right)=1+|x|^{p}$.*

*i) es consecuencia directa del Teorema **??**.*

*iii) ver la demostración dada en Dai y Sean [**?**] páginas 1901-1902.*

*iv) ver Dai y Sean [**?**] páginas 1902-1903 ó [**?**].*

18.2.1 Modelo de Flujo y Estabilidad

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^{k}\left(n\right):=\sum_{i=1}^{n}\phi^{k}\left(i\right). \tag{18.565}$$

suponiendo que el estado inicial de la red es $x=\left(q,a,b\right)\in X$, entonces para cada k

$$E_{k}^{x}\left(t\right):=\max\left\{n\geq 0: A_{k}^{x}\left(0\right)+\psi_{k}\left(1\right)+\cdots+\psi_{k}\left(n-1\right)\leq t\right\} \tag{18.566}$$

$$S_{k}^{x}\left(t\right):=\max\left\{n\geq 0: B_{k}^{x}\left(0\right)+\eta_{k}\left(1\right)+\cdots+\eta_{k}\left(n-1\right)\leq t\right\} \tag{18.567}$$

Sea $T_{k}^{x}\left(t\right)$ el tiempo acumulado que el servidor $s\left(k\right)$ ha utilizado en los usuarios de la clase k en el intervalo $[0,t]$. Entonces se tienen las siguientes ecuaciones:

$$Q_{k}^{x}\left(t\right)=Q_{k}^{x}\left(0\right)+E_{k}^{x}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{k}\Phi_{k}^{l}S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\right)-S_{k}^{x}\left(T_{k}^{x}\right) \tag{18.568}$$

$$Q^{x}\left(t\right)=\left(Q_{1}^{x}\left(t\right),\ldots,Q_{K}^{x}\left(t\right)\right)^{'}\geq 0, \tag{18.569}$$

$$T^{x}\left(t\right)=\left(T_{1}^{x}\left(t\right),\ldots,T_{K}^{x}\left(t\right)\right)^{'}\geq 0,\text{ es no decreciente} \tag{18.570}$$

$$I_{i}^{x}\left(t\right)=t-\sum_{k\in C_{i}}T_{k}^{x}\left(t\right)\text{ es no decreciente} \tag{18.571}$$

$$\int_{0}^{\infty}\sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0 \tag{18.572}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre }\left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right)\text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{18.573}$$

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x| t) \tag{18.574}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola. Si se hace $|q| \to \infty$ y se mantienen las componentes restantes fijas, de la condición inicial x, cualquier punto límite del proceso normalizado $\overline{Q}^{x}$ es una solución del siguiente modelo de flujo, ver [?].

Definición 195. *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $(Q^{x}(\cdot), T^{x}(\cdot))$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk} \mu_l \overline{T}_l(t) \tag{18.575}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{18.576}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{18.577}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{18.578}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempot cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^{x}(t) \, dI_i^{x}(t) = 0 \tag{18.579}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } (Q^{x}(\cdot), T^{x}(\cdot)) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{18.580}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 196. *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??**, *junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^{+} - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^{+} \tag{18.581}$$

Definición 197. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en [?].

Lema 19. *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|overlinex| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

18.2.2 Resultados principales

Supuestos necesarios sobre la red

Supuestos 8. *A1)* $\psi_1, \ldots, \psi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ *son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\psi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$

$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\psi_k(1) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{18.582}$$
$$P\left(\psi_k(1) + \ldots \psi_k(j_k) \in dx\right) \geq q_k(x)\, dx0 \text{ y} \tag{18.583}$$
$$\int_0^\infty q_k(x)\, dx > 0 \tag{18.584}$$

El argumento dado en [?] en el lema **??** se puede aplicar para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños.Entonces la condición $A3)$ se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 152. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] ds \leq \kappa_p \tag{18.585}$$

donde p es el entero dado por A2). Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r \tag{18.586}$$

para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

iii) EL primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0. \tag{18.587}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \tag{18.588}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

Demostración 2. *La demostración de este resultado se da aplicando los teoremas* **??**, **??**, **??** *y* **??**

18.2.3 Definiciones Generales

Definimos un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada. Bajo cualquier *preemptive buffer priority* disciplina de servicio, el estado $\mathbb{X}(t)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}(t) = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t) : k = 1, 2, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right) \tag{18.589}$$

donde $Q_k(t)$ es la longitud de la cola para los usuarios de la clase k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k(t)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio. Los tiempos de arribo residuales, que son iguales al tiempo que queda hasta que el próximo usuario de la clase k llega, se denotan por $A_k(t)$. Tanto $B_k(t)$ como $A_k(t)$ se suponen continuos por la derecha.

Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x = (q, a, b)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = (q, a, b) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x\| = |q| + |a| + |b|$. En [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$\left(\left(\Omega, \mathcal{F}\right), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}(t), \theta_t, P_x\right)$$

es un proceso de Borel Derecho en el espacio de estadio medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, est definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y est adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; $\{P_x, x \in X\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in X$

$$P_x \{\mathbb{X}(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x \{f (X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X (\tau) f (X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{\mathbb{X}(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la sigma algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x (\mathbb{X}(t) \in D)$$

Definición 198. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_X P^t(x, D) \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 199. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

- Si X es Harris recurrente, entonces una única medida invariante π existe ([?]).
- Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama *Harris recurrente positiva.*
- Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria y hacemos

  $$P_\pi(\cdot) [= \int_X P_x(\cdot) \pi(dx)$$

  y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, as, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π

Definición 200. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.[28]

18.2.4 Definiciones y Descripción del Modelo

El modelo está compuesto por c colas de capacidad infinita, etiquetadas de 1 a c las cuales son atendidas por s servidores. Los servidores atienden de acuerdo a una cadena de Markov independiente $\left(X_n^i\right)_n$ con $1 \leq i \leq s$ y $n \in \{1, 2, \ldots, c\}$ con la misma matriz de transición $r_{k,l}$ y única medida invariante (p_k). Cada servidor permanece atendiendo en la cola un periodo llamado de visita y determinada por la política de servicio asignada a la cola.

Los usuarios llegan a la cola k con una tasa λ_k y son atendidos a una razón μ_k. Las sucesiones de tiempos de interarribo $(\tau_k(n))_n$, la de tiempos de servicio $\left(\sigma_k^i(n)\right)_n$ y la de tiempos de cambio $\left(\sigma_{k,l}^{0,i}(n)\right)_n$ requeridas en la cola k para el servidor i son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas con distribución general independiente de i, con media $\sigma_k = \frac{1}{\mu_k}$, respectivamente $\sigma_{k,l}^0 = \frac{1}{\mu_{k,l}^0}$, e independiente de las cadenas de Markov $\left(X_n^i\right)_n$. Además se supone que los tiempos de interarribo se asume son acotados, para cada $\rho_k = \lambda_k \sigma_k < s$ para asegurar la estabilidad de la cola k cuando opera como una cola $M/GM/1$.

[28] En [?] muestran que si $P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ solamente para uno conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris recurrente

18.2.5 Políticas de Servicio

Una política de servicio determina el número de usuarios que serán atendidos sin interrupción en periodo de servicio por los servidores que atienden a la cola. Para un solo servidor esta se define a través de una función f donde $f(x,a)$ es el número de usuarios que son atendidos sin interrupción cuando el servidor llega a la cola y encuentra x usuarios esperando dado el tiempo transcurrido de interarribo a. Sea $v(x,a)$ la duración del periodo de servicio para una sola condición inicial (x,a).

Las políticas de servicio consideradas satisfacen las siguientes propiedades:

i) Hay conservación del trabajo, es decir

$$v(x,a)=\sum_{l=1}^{f(x,a)}\sigma(l)$$

con $f(0,a)=v(0,a)=0$, donde $(\sigma(l))_l$ es una sucesión independiente e idénticamente distribuida de los tiempos de servicio solicitados.

ii) La selección de usuarios para se atendidos es independiente de sus correspondientes tiempos de servicio y del pasado hasta el inicio del periodo de servicio. Así las distribución (f,v) no depende del orden en el cuál son atendidos los usuarios.

iii) La política de servicio es monótona en el sentido de que para cada $a\geq 0$ los números $f(x,a)$ son monótonos en distribución en x y su límite en distribución cuando $x\rightarrow\infty$ es una variable aleatoria F^{*0} que no depende de a.

iv) El número de usuarios atendidos por cada servidor es acotado por $f^{min}(x)$ de la longitud de la cola x que además converge monótonamente en distribución a F^{*} cuando $x\rightarrow\infty$

18.2.6 Proceso de Estados

El sistema de colas se describe por medio del proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ como se define a continuación. El estado del sistema al tiempo $t\geq 0$ está dado por

$$X(t)=(Q(t),P(t),A(t),R(t),C(t))$$

donde

- $Q(t)=(Q_k(t))_{k=1}^{c}$, número de usuarios en la cola k al tiempo t.
- $P(t)=\left(P^i(t)\right)_{i=1}^{s}$, es la posición del servidor i.
- $A(t)=(A_k(t))_{k=1}^{c}$, es el residual del tiempo de arribo en la cola k al tiempo t.
- $R(t)=\left(R_k^i(t),R_{k,l}^{0,i}(t)\right)_{k,l,i=1}^{c,c,s}$, el primero es el residual del tiempo de servicio del usuario atendido por servidor i en la cola k al tiempo t, la segunda componente es el residual del tiempo de cambio del servidor i de la cola k a la cola l al tiempo t.
- $C(t)=\left(C_k^i(t)\right)_{k,i=1}^{c,s}$, es la componente correspondiente a la cola k y al servidor i que está determinada por la política de servicio en la cola k y que hace al proceso $X(t)$ un proceso de Markov.

Todos los procesos definidos arriba se suponen continuos por la derecha.

El proceso X tiene la propiedad fuerte de Markov y su espacio de estados es el espacio producto

$$\mathcal{X}=\mathbb{N}^c\times E^s\times\mathbb{R}_{+}^{c}\times\mathbb{R}_{+}^{cs}\times\mathbb{R}_{+}^{c^2 s}\times\mathcal{C}$$

donde $E=\{1,2,\ldots,c\}^2\cup\{1,2,\ldots,c\}$ y $\mathcal{C}$ depende de las políticas de servicio.

18.2.7 Introducción

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1.
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0 \tag{18.590}$$

2.
$$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N} \tag{18.591}$$

para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m} = r_{j,j^{'}}$
- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.
- Finalmente, se define
$$\delta^{*} := \sum_{j,j^{'}} p_j r_{j,j^{'}} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right]. \tag{18.592}$$

18.2.8 Colas Cíclicas

El *token passing ring* es una estación de un solo servidor con K clases de usuarios. Cada clase tiene su propio regulador en la estación. Los usuarios llegan al regulador con razón α_k y son atendidos con taza μ_k.

La red se puede modelar como un Proceso de Markov con espacio de estados continuo, continuo en el tiempo:
$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t), B_k^0(t), C(t) : k = 1, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right) \tag{18.593}$$
donde $Q_k(t), B_k(t)$ y $A_k(t)$ se define como en **??**, $B_k^0(t)$ es el tiempo residual de cambio de la clase k a la clase $k+1\,(modK)$; $C(t)$ indica el número de servicios que han sido comenzados y/o completados durante la sesión activa del buffer.

Los parámetros cruciales son la carga nominal de la cola k: $\beta_k = \alpha_k/\mu_k$ y la carga total es $\rho_0 = \sum \beta_k$, la media total del tiempo de cambio en un ciclo del token está definido por

$$u^0 = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}\left[\eta_k^0(1)\right] = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\mu_k^0} \tag{18.594}$$

El proceso de la longitud de la cola $Q_k^x(t)$ y el proceso de acumulación del tiempo de servicio $T_k^x(t)$ para el buffer k y para el estado inicial x se definen como antes. Sea $T_k^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el token tarda en cambiar del buffer k al $k+1 \mod K$. Suponga que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ es un punto límite de
$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^{x,0}(|x|t)\right) \tag{18.595}$$
cuando $|x| \rightarrow \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t), \overline{T}^0(t)\right)$ es un flujo límite retrasado del token ring.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado

Proposición 49. *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x \rightarrow \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

18.2.9 Resultados Previos

Lema 20. *El proceso estocástico* Φ *es un proceso de markov fuerte, temporalmente homogéneo, con trayectorias muestrales continuas por la derecha, cuyo espacio de estados* Y *es igual a* $X \times \mathbb{R}$

Proposición 50. *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{18.596}$$

Lema 21. *Sea* $\{\zeta(k) : k \in F\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $(0, \infty)$, *y sea* $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. *Si* $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{18.597}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 153. *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p \left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{18.598}$$

para $t > 0$ *y* $x \in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 154. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$||P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)||_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{18.599}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 155. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x)=f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}||P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)||_f=0. \tag{18.600}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 156. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds=\pi(f):=\int f(x)\,\pi(dx) \tag{18.601}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

18.2.10 Teorema de Estabilidad: Descripción

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x)=N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1.
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right]=\overline{N}>0 \tag{18.602}$$

2.
$$\mathbb{E}\left[N(x)\right]\leq\overline{N} \tag{18.603}$$

   para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j'}^m=r_{j,j'}$
- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right]\geq0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^*:=\sum_{j,j'}p_jr_{j,j'}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right]. \tag{18.604}$$

18.3 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{18.605}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{18.606}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{18.607}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{18.608}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{18.609}$$

Definición 201 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 202. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 157 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{18.610}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 203 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 22 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 158 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p \right] ds \leq \kappa_p, \tag{18.611}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x \left[Q_k(t)^r \right] = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right] \leq \kappa_r, \tag{18.612}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x \left[Q_k(t) \right] - \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0) \right]| = 0. \tag{18.613}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right], \; \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{18.614}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 159 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{18.615}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema ??.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema ??

18.4 Modelo de Flujo

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Sea x el número de usuarios en la cola esperando por servicio y $N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política dada y fija mientras el servidor permanece dando servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]=\overline{N}>0. \tag{18.616}$$

(S2.)

$$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]\leq\overline{N}, \tag{18.617}$$

para cualquier valor de x.

El tiempo que tarda un servidor en volver a dar servicio después de abandonar la cola inmediata anterior y llegar a la próxima se llama tiempo de traslado o de cambio de cola, al momento de la n-ésima visita del servidor a la cola j se genera una sucesión de variables aleatorias $\delta_{j,j+1}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con la propiedad de que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]\geq0$.

Se define

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j+1}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]. \tag{18.618}$$

Los tiempos entre arribos a la cola k, son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos. Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho<1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Para el caso más sencillo podemos definir un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada, el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}\left(t\right)=\left(Q_{k}\left(t\right),A_{l}\left(t\right),B_{k}\left(t\right):k=1,2,\ldots,K,l\in\mathcal{A}\right), \tag{18.619}$$

donde $Q_{k}\left(t\right)$ es la longitud de la cola k para los usuarios esperando servicio, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_{k}\left(t\right)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio.

Los tiempos entre arribos residuales, que son el tiempo que queda hasta que el próximo usuario llega a la cola para recibir servicio, se denotan por $A_{k}\left(t\right)$. Tanto $B_{k}\left(t\right)$ como $A_{k}\left(t\right)$ se suponen continuos por la derecha [**?**].

Sea $\mathcal{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$, y sea $x=\left(q,a,b\right)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $\left|q\right|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x=\left(q,a,b\right)\in\mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\left\|x\right\|=\left|q\right|+\left|a\right|+\left|b\right|$. En [**?**] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$\left(\left(\Omega,\mathcal{F}\right),\mathcal{F}_{t},\mathbb{X}\left(t\right),\theta_{t},P_{x}\right)$$

es un proceso de *Borel Derecho* en el espacio de estados medible $\left(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}}\right)$.

Sea $P^{t}\left(x,D\right)$, $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t\geq0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^{t}\left(x,D\right)=P_{x}\left(\mathbb{X}\left(t\right)\in D\right).$$

Definición 204. *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right)=\int_{X}P^{t}\left(x,D\right)\pi\left(dx\right),$$

para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t\geq0$.

Definición 205. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

Definición 206. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

Nota 26. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π ([**?**]).*

*ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso a la medida se le llama **Harris recurrente positiva**.*

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria; se define

$$P_\pi(\cdot) = \int_X P_x(\cdot)\pi(dx).$$

Se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, así, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π.

*iv) En [**?**] se muestra que si $P_x\{\tau_D < \infty\} = 1$ incluso para solamente un conjunto pequeño, entonces el proceso de Harris es recurrente.*

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\right) \tag{18.620}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{18.621}$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([**?**]).

Dada una condición inicial $x \in \mathcal{X}$, $Q_k^x(t)$ es la longitud de la cola k al tiempo t y $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en atender a los usuarios de la cola k. De igual manera se define $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en cambiar de cola para volver a atender a los usuarios.

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right), \tag{18.622}$$

$$\overline{T}_{m}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}T_{m}^{x}\left(|x|t\right), \tag{18.623}$$

$$\overline{T}_{m}^{x,0}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}T_{m}^{x,0}\left(|x|t\right). \tag{18.624}$$

Cualquier límite $\overline{Q}\left(t\right)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola, al conjunto de todos los posibles flujos límite se le llamará **modelo de flujo**, ([**?**]).

Definición 207. *Un flujo límite para un sistema de visitas bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)$ *y* $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\lambda_{k}t-\sum_{m=1}^{M}\mu_{k}\overline{T}_{m,k}\left(t\right) \tag{18.625}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{18.626}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente}, \tag{18.627}$$

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^{0}\left(t\right)+\overline{T}_{m,k}\left(t\right)=t \text{ param}=1,2,\ldots,M \tag{18.628}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en (**??**)-(**??**) se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Definición 208. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$, *con* $t\geq t_{0}$, *para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.

19 Estabilidad de los Sistemas de Visitas Cíclicas

Es necesario realizar los siguientes supuestos, ver ([**?**]) y ([**?**]):

A1) $\xi_{1},\ldots,\xi_{K},\eta_{1},\ldots,\eta_{K}$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p\geq1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)^{p+1}\right]&<\infty \text{ para } l\in\mathcal{A} \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)^{p+1}\right]&<\infty \text{ para } k=1,\ldots,K.\end{aligned}$$

A3) El conjunto $\{x\in X:|x|=0\}$ es un singleton, y para cada $k\in\mathcal{A}$, existe una función positiva $q_{k}\left(x\right)$ definida en $\mathbb{R}_{+}$, y un entero j_{k}, tal que

$$P\left(\xi_{k}\left(1\right)\geq x\right) > 0, \text{ para todo } x>0 \tag{19.1}$$

$$P\left(\xi_{k}\left(1\right)+\ldots\xi_{k}\left(j_{k}\right)\in dx\right) \geq q_{k}\left(x\right)dx0 \text{ y} \tag{19.2}$$

$$\int_{0}^{\infty}q_{k}\left(x\right)dx>0 \tag{19.3}$$

En [**?**] ser da un argumento para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños. Entonces la condición A3) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 160. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right] ds \leq \kappa_p \tag{19.4}$$

donde p es el entero dado por A2).

Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \leq \kappa_r \tag{19.5}$$

para $r = 1,\ldots,p$ y $k = 1,\ldots,K$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right]| = 0. \tag{19.6}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right) ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \tag{19.7}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r = 1,\ldots,p$ y $k = 1,\ldots,K$.

Teorema 161. *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \text{ con } T \geq 0, \tag{19.8}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{19.9}$$

20 Resultados principales

En el caso particular de un modelo con un solo servidor, $M = 1$, se tiene que si se define

Definición 209.

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + \max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\overline{\overline{N}}}\right)\delta^*. \tag{20.1}$$

entonces

Teorema 162. *i) Si $\rho < 1$, entonces la red es estable, es decir el teorema (**??**) se cumple.*

*ii) De lo contrario, es decir, si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, el teorema (**??**).*

20.1 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x\left(t\right)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.

- $T^{x,0}_{m,k}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}^0_m(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^x_m(|x|t), \frac{1}{|x|}T^{x,0}_m(|x|t)\right) \tag{20.2}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}^0_m(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{20.3}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{20.4}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{20.5}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}^0_{m,k}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{20.6}$$

Definición 210 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 211. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 163 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{20.7}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 212 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

Lema 23 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 164 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, *y para cada condición inicial* $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{20.8}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{20.9}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$. *Donde* π *es la probabilidad invariante para* X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{20.10}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{20.11}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 165 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{20.12}$$

i) Si $\rho < 1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema* **??**.

ii) Si $\rho > 1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema* **??**

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

20.1.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y}\\
\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k=1,2,\ldots,K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k(1)\geq x\right) > 0, \text{ para todo } x>0, \tag{20.13}$$

$$P\left\{a\leq\sum_{i=1}^{j_k}\xi_k(i)\leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0\leq a<b. \tag{20.14}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición ??.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

20.2 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X(t),\theta_t,P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X=\{X(t),t\geq0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega,\mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t,t\geq0\}$; la colección $\{P_x,x\in\mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega,\mathcal{F})$ tales que para todo $x\in\mathbb{X}$

$$P_x\{X(0)=x\}=1,$$

y

$$E_x\{f(X\circ\theta_t)|\mathcal{F}_t\}=E_X(\tau)f(X),$$

en $\{\tau<\infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X\circ\theta_\tau)(w)=\{X(\tau(w)+t,w),t\geq0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t(x,D)$, $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t\geq0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x,D)=P_x(X(t)\in D).$$

Definición 213. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D)=\int_{\mathbb{X}}P^t(x,D)\,\pi(dx),$$

para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t\geq0$.

Definición 214. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D)>0$ y $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D<\infty\}\equiv1,$$

cuando $\tau_D=inf\{t\geq0:X_t\in D\}$.

Nota 27. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}\left(\cdot\right)=\int_{\mathbf{X}}P_{x}\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right),$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 215. *Un conjunto $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t>0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta>0$ tal que*

$$P^{t}\left(x,A\right)\geq\delta\nu\left(A\right),$$

para $x\in D, A\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 52 (Lema 3.1, Dai [?])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_{x}\left(\tau_{B}<\infty\right)\equiv1$ y que para algún $\delta>0$ se cumple que*

$$\sup\mathbb{E}_{x}\left[\tau_{B}\left(\delta\right)\right]<\infty, \tag{20.15}$$

donde $\tau_{B}\left(\delta\right)=inf\left\{t\geq\delta:X\left(t\right)\in B\right\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 53 (Lema 3.1, Dai [?])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B=\left\{x\in\mathbb{X}:\left|x\right|\leq k\right\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k>0$.*

Teorema 166 (Teorema 3.1, Dai [?])**.** *Si existe un $\delta>0$ tal que*

$$lim_{\left|x\right|\rightarrow\infty}\frac{1}{\left|x\right|}\mathbb{E}\left|X^{x}\left(\left|x\right|\delta\right)\right|=0, \tag{20.16}$$

*donde X^{x} se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B=\left\{x\in\mathbb{X}:\left|x\right|\leq k\right\}$ con algún $k>0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

20.3 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x\in\mathbb{X}$, sea

- $Q_{k}^{x}\left(t\right)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^{x}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}\left(\cdot\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ para $m=1,2,\ldots,M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{\left|x\right|}Q^{x}\left(\left|x\right|t\right),\frac{1}{\left|x\right|}T_{m}^{x}\left(\left|x\right|t\right),\frac{1}{\left|x\right|}T_{m}^{x,0}\left(\left|x\right|t\right)\right) \tag{20.17}$$

para $m=1,2,\ldots,M$, cuando $x\rightarrow\infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}_{m}\left(t\right),\overline{T}_{m}^{0}\left(t\right)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{20.18}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{20.19}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{20.20}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}^0_{m,k}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{20.21}$$

Definición 216 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 217. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 167 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t). \tag{20.22}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 218 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 24 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 168 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{20.23}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right]=\mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right]\leq\kappa_r,\tag{20.24}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$. *Donde* π *es la probabilidad invariante para* X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}*:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)\right]|=0.\tag{20.25}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right)ds=\mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-}c.s.\tag{20.26}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 169 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^K\rho_k+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^*\tag{20.27}$$

i) Si $\rho<1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema* **??**.

ii) Si $\rho>1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema* **??**

20.4 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N\left(\omega\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]=\overline{N}>0$;
2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^m$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^m\left(n\right)$, con $\delta_{j,j^{'}}^m\left(n\right)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^m\left(1\right)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_j^m\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^m\right)$, se supone que ésta existe.

- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*} := \sum_{j,j^{'}} p_{j}^{m} r_{j,j^{'}}^{m} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(i\right)\right]. \tag{20.28}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k} = \lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^{K}\rho_{k} < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_{k}\left(t\right)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}\left(t\right)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}\left(t\right)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X\left(t\right)^{T} = \left(Q_{k}\left(t\right), A_{k}\left(t\right), B_{m}\left(t\right), B_{m}^{0}\left(t\right), C_{m}\left(t\right)\right), \tag{20.29}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \left(\left\{1, 2, \ldots, K\right\} \times \left\{1, 2, \ldots, S\right\}\right)^{M} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

20.4.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_{1}, \ldots, \xi_{K}, \eta_{1}, \ldots, \eta_{K}$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_{l}\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_{k}\left(\cdot\right)$ definida en $\mathbb{R}_{+}$, y un entero j_{k}, tal que

$$P\left(\xi_{k}\left(1\right) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{20.30}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_{k}} \xi_{k}\left(i\right) \leq b\right\} \geq \int_{a}^{b} q_{k}\left(x\right)dx,\ 0 \leq a < b. \tag{20.31}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [**?**] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [**?**, **?**].

20.5 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 219. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D) \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 220. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 28. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot) \pi(dx),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 221. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 54 (Lema 3.1, Dai [?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x \left[\tau_B(\delta)\right] < \infty, \tag{20.32}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 55 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 170 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{20.33}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

20.6 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{20.34}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{20.35}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{20.36}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{20.37}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{20.38}$$

Definición 222 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 223. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, *se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 171 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x| t). \tag{20.39}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 224 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

Lema 25 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 172 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, *y para cada condición inicial* $x \in X$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{20.40}$$

donde p *es el entero dado en (A2).*

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{20.41}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$. *Donde* π *es la probabilidad invariante para* X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{20.42}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{20.43}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 173 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_k+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^{*} \tag{20.44}$$

i) Si $\rho<1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho>1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

20.7 Ya revisado

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $\left[L_1\left(t\right),L_2\left(t\right),\ldots,L_N\left(t\right)\right]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j\left(\tau_i\left(m\right)\right)=0$ para $i=1,2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m=1,2,\ldots,M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}\left[C_i\right]$ como

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i\left(z\right)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i\left(z\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right]=z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \left\{P_i(z)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i(z)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{1-I_i\left[P_i(z)\right]}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\\ &= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

Definición 225. *Sea L_i^* el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\mathbb{E}\left[L_i^*\right] = f_i(i) \tag{20.45}$$

$$Var\left[L_i^*\right] = f_i(i,i)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. \tag{20.46}$$

Definición 226. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}S_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right] = F_i(\theta(z)),\\ F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\ P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\ F_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right], \theta_i(z)-zP_i\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{1-\mu_i},\\ Var\left[S_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{(1-\mu_i)^3}\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var\left[L_i^*\right] = f_i(i,i)+f_i(i)-f_i(i)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i(z) = I_i[P_i(z)]$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L_i^*] &= \mu_i \mathbb{E}[I_i] \\
Var[L_i^*] &= \mu_i^2 Var[I_i] + \sigma^2 \mathbb{E}[I_i]
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},$$

además

$$Var[I_i] = \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).$$

Si $C_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i(z) = I_i[\theta_i(z)],$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i]\,\mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)} \\
Var[C_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_i] &= \mu_i \mathbb{E}[C_i], \\
\mathbb{E}[I_i] &= (1-\mu_i)\,\mathbb{E}[C_i]
\end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))\,P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)^2}\\
&+ \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)}\\
&+ \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))^2\,(P_i(z)-z)}
\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z\rightarrow 1^{+}$:

$$\begin{aligned}
Q_i^{(1)}(z)=\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \lim_{z\rightarrow 1}\frac{(1-F_i(z))\,P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} && (20.47)\\
&- \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} && (20.48)\\
&- \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)^2} && (20.49)\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} && (20.50)\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))^2\,(P_i(z)-z)} && (20.51)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-F_i(z))\,P_i(z)}{(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-F_i(z))\,P_i(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_i(z)\,F_i^{'}(z)+(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))\,P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-P_i(z)\,F_i^{'}(z)+(1-z)F_i^{'}(z)\,P_i^{'}(z)+(1-z)P_i(z)\,F_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))\,P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)^2} = \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)^2\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{-(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(1-z)P_i(z)\,F_i^{'}(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)}{2\,(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2\,P_i^{'}(z)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{+(1-z)\,(1-F_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)P_i^{'}(z)}{2\,(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2\,P_i^{'}(z)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{+(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{''}(z)}{2\,(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2\,P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} = \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
= & \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)} = \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
= & \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}'[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+ & \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}
$$

En nuestra notación $V\left(t\right)\equiv C_{i}$ y $X_{i}=C_{i}^{(m)}$ para nuestra segunda definición, mientras que para la primera la notación es: $X\left(t\right)\equiv C_{i}$ y $R_{i}\equiv C_{i}^{(m)}$.

Definición 227. *Sea L_{i}^{*}el número de usuarios en la cola Q_{i} cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right] &= f_{i}\left(i\right) && (20.52)\\
Var\left[L_{i}^{*}\right] &= f_{i}\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]-\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]^{2}. && (20.53)
\end{aligned}
$$

Definición 228. *El tiempo de Ciclo C_{i} es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_{i}\left(m+1\right)-\tau_{i}\left(m\right)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_{i}\left(m+1\right)-\overline{\tau}_{i}\left(m\right)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 229. *El tiempo de intervisita I_{i} es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_{i}\left(m+1\right)-\overline{\tau}_{i}\left(m\right)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
S_{i}\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_{i}(m)-\tau_{i}(m)}\right]=F_{i}\left(\theta\left(z\right)\right),\\
F\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_{0}}\right],\\
P\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{X_{n}}\right],\\
F_{i}\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_{i}\left(\tau_{i}(m)\right)}\right],\theta_{i}\left(z\right)-zP_{i}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_{i}\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]}{1-\mu_{i}}=\frac{f_{i}\left(i\right)}{1-\mu_{i}},\\
Var\left[S_{i}\right] &= \frac{Var\left[L_{i}^{*}\right]}{\left(1-\mu_{i}\right)^{2}}+\frac{\sigma^{2}\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]}{\left(1-\mu_{i}\right)^{3}}
\end{aligned}
$$

donde recordemos que

$$
Var\left[L_{i}^{*}\right] = f_{i}\left(i,i\right)+f_{i}\left(i\right)-f_{i}\left(i\right)^{2}.
$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si

$$I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i(z) = I_i[P_i(z)]$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[L_i^*] &= \mu_i \mathbb{E}[I_i] \\ Var[L_i^*] &= \mu_i^2 Var[I_i] + \sigma^2 \mathbb{E}[I_i]\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\mathbb{E}[I_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i},$$

además

$$Var[I_i] = \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).$$

Si $C_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i(z) = I_i[\theta_i(z)],$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_i] &= \mathbb{E}[I_i]\mathbb{E}[\theta_i(z)] = \frac{\mathbb{E}[L_i^*]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)} \\ Var[C_i] &= \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_i] &= \mu_i \mathbb{E}[C_i], \\ \mathbb{E}[I_i] &= (1-\mu_i)\mathbb{E}[C_i]\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \ldots, L_N(t)]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j(\tau_i(m)) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}\left[C_i\right]$ como

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Nota 29. *En Stidham[**?**] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Nota incompleta!!

20.8 Procesos de Renovación y Regenerativos

Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i\left(z\right) - 1}{z - P_i\left(z\right)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)} \\ &= \frac{1-I_i[P_i(z)]}{1-P_i(z)}\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que
Sea

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z} \cdot \frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Consideremos una cola de la red de sistemas de visitas cíclicas fija, Q_l.
Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (**??**), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_l es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 230. *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 231. *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 232. *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

En nuestra notación $V(t) \equiv C_i$ y $X_i = C_i^{(m)}$ para nuestra segunda definición, mientras que para la primera la notación es: $X(t) \equiv C_i$ y $R_i \equiv C_i^{(m)}$.

Definición 233. *Sea L_i^* el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\mathbb{E}[L_i^*] = f_i(i) \quad (20.54)$$

$$Var[L_i^*] = f_i(i,i) + \mathbb{E}[L_i^*] - \mathbb{E}[L_i^*]^2. \quad (20.55)$$

Definición 234. *El tiempo de Ciclo C_i es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}S_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right] = F_i(\theta(z)), \\ F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right], \\ P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right], \\ F_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right], \theta_i(z) - zP_i\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{1-\mu_i},\\ Var\left[S_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^3}\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var\left[L_i^*\right] = f_i\left(i,i\right) + f_i\left(i\right) - f_i\left(i\right)^2.$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[I_i\right] = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i},$$

además

$$Var\left[I_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i\left(i\right).$$

Si $C_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)}\right]$el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i\left(z\right) = I_i\left[\theta_i\left(z\right)\right],$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}\\ Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[C_i\right],\\ \mathbb{E}\left[I_i\right] &= \left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right]\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $\left[L_1\left(t\right), L_2\left(t\right), \ldots, L_N\left(t\right)\right]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j\left(\tau_i\left(m\right)\right) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}\left[C_i\right]$ como

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\left\{P_i(z)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i(z)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)}\\
&= \frac{1-I_i\left[P_i(z)\right]}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\\
&= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2}\\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}
\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z\rightarrow 1^+$:

$$Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{dQ_i(z)}{dz} = \lim_{z\rightarrow 1}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \quad (20.56)$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \quad (20.57)$$

$$- \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} \quad (20.58)$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \quad (20.59)$$

$$+ \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} \quad (20.60)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\frac{d}{dz}[(1-F_i(z))P_i(z)]}{\frac{d}{dz}[(1-P_i(z))(-z+P_i(z))]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{-P_i(z)F_i^{'}(z)+(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)]}\\
&= \lim_{z\rightarrow 1^+}\frac{-P_i(z)F_i^{'}(z)+(1-z)F_i^{'}(z)P_i^{'}(z)+(1-z)P_i(z)F_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}}=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}\right]}\\
=&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
=&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
=&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}'[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

Definición 235. *Sea L_{i}^{*}el número de usuarios en la cola Q_{i} cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]&=&f_{i}\left(i\right) \qquad (20.61)\\
Var\left[L_{i}^{*}\right]&=&f_{i}\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]-\mathbb{E}\left[L_{i}^{*}\right]^{2}. \qquad (20.62)
\end{aligned}$$

Definición 236. *El tiempo de Ciclo C_{i} es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_{i}\left(m+1\right)-\tau_{i}\left(m\right)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_{i}\left(m+1\right)-\overline{\tau}_{i}\left(m\right)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 237. *El tiempo de intervisita I_{i} es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_{i}\left(m+1\right)-\overline{\tau}_{i}\left(m\right)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
S_{i}\left(z\right)&=&\mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_{i}\left(m\right)-\tau_{i}\left(m\right)}\right]=F_{i}\left(\theta\left(z\right)\right),\\
F\left(z\right)&=&\mathbb{E}\left[z^{L_{0}}\right],\\
P\left(z\right)&=&\mathbb{E}\left[z^{X_{n}}\right],\\
F_{i}\left(z\right)&=&\mathbb{E}\left[z^{L_{i}\left(\tau_{i}\left(m\right)\right)}\right],\theta_{i}\left(z\right)-zP_{i}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{1-\mu_i},\\ Var\left[S_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^3}\end{aligned}$$

donde recordemos que

$$Var\left[L_i^*\right] = f_i\left(i,i\right) + f_i\left(i\right) - f_i\left(i\right)^2.$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i\left(m+1\right) - \overline{\tau}\left(m\right)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i\left(m+1\right)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $\left[\overline{\tau}\left(m\right), \tau_i\left(m+1\right)\right]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z_i\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si

$$I_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

se tienen que

$$F_i\left(z\right) = I_i\left[P_i\left(z\right)\right]$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[I_i\right]\\ Var\left[L_i^*\right] &= \mu_i^2 Var\left[I_i\right] + \sigma^2\mathbb{E}\left[I_i\right]\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\mathbb{E}\left[I_i\right] = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i},$$

además

$$Var\left[I_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i\left(i\right).$$

Si $C_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]$el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i\left(z\right) = I_i\left[\theta_i\left(z\right)\right],$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}\\ Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.\end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[C_i\right],\\ \mathbb{E}\left[I_i\right] &= \left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right]\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $\left[L_1\left(t\right),L_2\left(t\right),\ldots,L_N\left(t\right)\right]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j\left(\tau_i\left(m\right)\right)=0$ para $i=1,2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m=1,2,\ldots,M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}\left[C_i\right]$ como

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}C_i^{(m)}\right]<\infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$, además, como $M_i>0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}\left[C_i\right]<\infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N}\mu_k<1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i\left(z\right)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right]=\frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}z^{L_i(t)}\right]\\ \mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \left\{P_i(z)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i(z)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)}\\
&= \frac{1-I_i\left[P_i(z)\right]}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\\
&= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

Sea $V_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\frac{I_i(z)-1}{z-P_i(z)}$

$$\frac{\partial V_i(z)}{\partial z} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\left[\frac{I_i{'}(z)(z-P_i(z))}{z-P_i(z)} - \frac{(I_i(z)-1)(1-P_i{'}(z))}{(z-P_i(z))^2}\right]$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$U_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\cdot\frac{I_i(z)-1}{1-z}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}V_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\right)\frac{I_i(z)-1}{1-z} + \frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\frac{d}{dz}\left(\frac{I_i(z)-1}{1-z}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\left\{\frac{-P_i(z)(z-P_i(z))-(1-P_i(z))\left(1-P_i^{'}(z)\right)}{(z-P_i(z))^2}\cdot\frac{I_i(z)-1}{1-z}\right\}\\
&+ \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\left\{\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\cdot\frac{I_i^{'}(z)(1-z)+(I_i(z)-1)}{(1-z)^2}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_i(z)}{\partial z} &= \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])}{(1-z)^2\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])} + \frac{(1-P_i[z])I_i'[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])} - \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])(1-P'[z])}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])^2}\\
&- \frac{(-1+I_i[z])P_i{}'[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}
\end{aligned}
$$

Sea

$$
Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z} \cdot \frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}
$$

derivando con respecto a z

$$
\begin{aligned}
\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)P_i(z)F_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&- \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i'(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2}\\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)}\\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}
\end{aligned}
$$

Calculando el límite cuando $z \to 1^+$:

$$
\begin{aligned}
Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z\to 1^+}\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \lim_{z\to 1}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} && (20.63)\\
&- \lim_{z\to 1^+}\frac{(1-z)P_i(z)F_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} && (20.64)\\
&- \lim_{z\to 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i'(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} && (20.65)\\
&+ \lim_{z\to 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} && (20.66)\\
&+ \lim_{z\to 1^+}\frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i'(z)}{\mathbb{E}[C_i](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)} && (20.67)
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to 1^+}\frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\to 1^+}\frac{\frac{d}{dz}[(1-F_i(z))P_i(z)]}{\frac{d}{dz}[(1-P_i(z))(-z+P_i(z))]}\\
&= \lim_{z\to 1^+}\frac{-P_i(z)F_i'(z)+(1-F_i(z))P_i'(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i'(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i'(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to 1^+}\frac{(1-z)P_i(z)F_i'(z)}{(1-P_i(z))(P_i(z)-z)} &= \lim_{z\to 1^+}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)P_i(z)F_i'(z)\right]}{\frac{d}{dz}[(1-P_i(z))(P_i(z)-z)]}\\
&= \lim_{z\to 1^+}\frac{-P_i(z)F_i'(z)+(1-z)F_i'(z)P_i'(z)+(1-z)P_i(z)F_i''(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i'(z)\right)-(-z+P_i(z))P_i'(z)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}}=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}\right]}\\
=&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
=&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
=&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}'[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
+&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

20.9 Tiempo de Ciclo Promedio

Consideremos una cola de la red de sistemas de visitas cíclicas fija, Q_l.

Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (**??**), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_l es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1\left(T_i\right)=0, L_2\left(T_i\right)=0, \hat{L}_1\left(T_i\right)=0$ y $\hat{L}_2\left(T_i\right)=0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 238. *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 239. *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 240. *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m=1,2,\ldots,M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

En nuestra notación $V\left(t\right)\equiv C_i$ y $X_i=C_i^{(m)}$ para nuestra segunda definición, mientras que para la primera la notación es: $X\left(t\right)\equiv C_i$ y $R_i\equiv C_i^{(m)}$.

20.10 Tiempos de Ciclo e Intervisita

Definición 241. *Sea L_i^{*}el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= f_i\left(i\right) && (20.68)\\
Var\left[L_i^*\right] &= f_i\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. && (20.69)
\end{aligned}
$$

Definición 242. *El tiempo de Ciclo C_i es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 243. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
S_i\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right]=F_i\left(\theta\left(z\right)\right),\\
F\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\
P\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\
F_i\left(z\right) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right],\theta_i\left(z\right)-zP_i
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1-\mu_i}=\frac{f_i\left(i\right)}{1-\mu_i},\\
Var\left[S_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^3}
\end{aligned}
$$

donde recordemos que

$$
Var\left[L_i^*\right] = f_i\left(i,i\right)+f_i\left(i\right)-f_i\left(i\right)^2.
$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t=\tau_i\left(m+1\right)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $\left[\overline{\tau}\left(m\right),\tau_i\left(m+1\right)\right]$ se tiene que

$$
\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z_i\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]
$$

entonces, si

$$
I_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]
$$

se tienen que

$$
F_i\left(z\right)=I_i\left[P_i\left(z\right)\right]
$$

para $i=1,2$, por tanto

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[I_i\right]\\
Var\left[L_i^*\right] &= \mu_i^2Var\left[I_i\right]+\sigma^2\mathbb{E}\left[I_i\right]
\end{aligned}
$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$\mathbb{E}\left[I_i\right] = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i},$$

además

$$Var\left[I_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i\left(i\right).$$

Si $C_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}(m+1) - \overline{\tau}_i(m)}\right]$el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$C_i\left(z\right) = I_i\left[\theta_i\left(z\right)\right],$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)} \\ Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}. \end{aligned}$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[S_i\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[C_i\right], \\ \mathbb{E}\left[I_i\right] &= \left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right] \end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $\left[L_1\left(t\right), L_2\left(t\right), \ldots, L_N\left(t\right)\right]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j\left(\tau_i\left(m\right)\right) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}\left[C_i\right]$ como

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}\left[M_i\right]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N}\mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)}\\
&= \frac{1-I_i[P_i(z)]}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}\\
&= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

20.11 Longitudes de la Cola en cualquier tiempo

Sea

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1-z) P_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1 - F_i(z)) P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1 - P_i(z))(P_i(z) - z)} \\
&- \frac{(1-z) P_i(z) F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1 - P_i(z))(P_i(z) - z)} \\
&- \frac{(1-z)(1 - F_i(z)) P_i(z)\left(P_i^{'}(z) - 1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1 - P_i(z))(P_i(z) - z)^2} \\
&+ \frac{(1-z)(1 - F_i(z)) P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1 - P_i(z))(P_i(z) - z)} \\
&+ \frac{(1-z)(1 - F_i(z)) P_i(z) P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1 - P_i(z))^2 (P_i(z) - z)}
\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z \rightarrow 1^+$:

$$\begin{aligned}
Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{dQ_i(z)}{dz} &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - F_i(z)) P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i](1 - P_i(z))(P_i(z) - z)} && (20.70) \\
&- \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1-z) P_i(z) F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1 - P_i(z))(P_i(z) - z)} && (20.71) \\
&- \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1-z)(1 - F_i(z)) P_i(z)\left(P_i^{'}(z) - 1\right)}{\mathbb{E}[C_i](1 - P_i(z))(P_i(z) - z)^2} && (20.72) \\
&+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1-z)(1 - F_i(z)) P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1 - P_i(z))(P_i(z) - z)} && (20.73) \\
&+ \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1-z)(1 - F_i(z)) P_i(z) P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i](1 - P_i(z))^2 (P_i(z) - z)} && (20.74)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1 - F_i(z)) P_i(z)}{(1 - P_i(z))(P_i(z) - z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz}\left[(1 - F_i(z)) P_i(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1 - P_i(z))(-z + P_i(z))\right]} \\
&= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-P_i(z) F_i^{'}(z) + (1 - F_i(z)) P_i^{'}(z)}{(1 - P_i(z))\left(-1 + P_i^{'}(z)\right) - (-z + P_i(z)) P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{(1-z) P_i(z) F_i^{'}(z)}{(1 - P_i(z))(P_i(z) - z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z) P_i(z) F_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1 - P_i(z))(P_i(z) - z)\right]} \\
&= \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{-P_i(z) F_i^{'}(z) + (1-z) F_i^{'}(z) P_i^{'}(z) + (1-z) P_i(z) F_i^{''}(z)}{(1 - P_i(z))\left(-1 + P_i^{'}(z)\right) - (-z + P_i(z)) P_i^{'}(z)}
\end{aligned}$$

$$\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}}=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}\right]}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)^{2}P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}=\lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)\right]}\\
&= \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-(1-z)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)P_{i}'[z]}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}\\
&+ \lim_{z\rightarrow1^{+}}\frac{(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)^{2}+(1-z)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{''}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(-1+P_{i}^{'}\left(z\right)\right)-2\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(-z+P_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}
\end{aligned}$$

20.12 Por resolver

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial Q_{i}\left(z\right)}{\partial z}=\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\right)\cdot\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}+\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\right)+\frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}\right)\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)}{1-P_{i}\left(z\right)}\cdot\frac{-F_{i}^{'}\left(z\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)-\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)}{\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}}\\
&+ \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]}\cdot\frac{1-F_{i}\left(z\right)}{P_{i}\left(z\right)-z}\cdot\frac{\left(1-z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)-P_{i}\left(z\right)}{\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{i}^{(1)}\left(z\right) &= \frac{\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}-\frac{\left(1-z\right)P_{i}\left(z\right)F_{i}^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}\\
&- \frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)\left(P_{i}^{'}\left(z\right)-1\right)}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)^{2}}+\frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}\\
&+ \frac{\left(1-z\right)\left(1-F_{i}\left(z\right)\right)P_{i}\left(z\right)P_{i}^{'}\left(z\right)}{\mathbb{E}\left[C_{i}\right]\left(1-P_{i}\left(z\right)\right)^{2}\left(P_{i}\left(z\right)-z\right)}
\end{aligned}$$

Sea $V_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \frac{I_i(z)-1}{z-P_i(z)}$

$$\frac{\partial V_i(z)}{\partial z} = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left[\frac{I_i{}'(z)(z-P_i(z))}{z-P_i(z)} - \frac{(I_i(z)-1)(1-P_i{}'(z))}{(z-P_i(z))^2}\right]$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$U_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)} \cdot \frac{I_i(z)-1}{1-z}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}V_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\right)\frac{I_i(z)-1}{1-z} + \frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)}\frac{d}{dz}\left(\frac{I_i(z)-1}{1-z}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{-P_i(z)(z-P_i(z)) - (1-P_i(z))\left(1-P_i'(z)\right)}{(z-P_i(z))^2} \cdot \frac{I_i(z)-1}{1-z}\right\}\\
&+ \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\left\{\frac{1-P_i(z)}{z-P_i(z)} \cdot \frac{I_i'(z)(1-z) + (I_i(z)-1)}{(1-z)^2}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_i(z)}{\partial z} &= \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])}{(1-z)^2\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])} + \frac{(1-P_i[z])I_i'[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])} - \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])(1-P'[z])}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])^2}\\
&- \frac{(-1+I_i[z])P_i{}'[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}
\end{aligned}$$

20.13 Tiempos de Ciclo e Intervisita

Definición 244. *Sea L_i^*el número de usuarios en la cola Q_i cuando es visitada por el servidor para dar servicio, entonces*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L_i^*] &= f_i(i) && (20.75)\\
Var[L_i^*] &= f_i(i,i) + \mathbb{E}[L_i^*] - \mathbb{E}[L_i^*]^2. && (20.76)
\end{aligned}$$

Definición 245. *El tiempo de Ciclo C_i es e periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 246. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.*

Recordemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
S_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)}\right] = F_i(\theta(z)),\\
F(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right],\\
P(z) &= \mathbb{E}\left[z^{X_n}\right],\\
F_i(z) &= \mathbb{E}\left[z^{L_i(\tau_i(m))}\right], \theta_i(z) - zP_i
\end{aligned}$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_i\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{1-\mu_i},\\
Var\left[S_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^2} + \frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^3}
\end{aligned}
$$

donde recordemos que

$$
Var\left[L_i^*\right] = f_i\left(i,i\right) + f_i\left(i\right) - f_i\left(i\right)^2.
$$

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i\left(m+1\right) - \overline{\tau}\left(m\right)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i\left(m+1\right)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $\left[\overline{\tau}\left(m\right), \tau_i\left(m+1\right)\right]$ se tiene que

$$
\mathbb{E}\left[z_i^{L_i\left(\tau_i\left(m+1\right)\right)}\right] = \mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z_i\right)\right\}^{\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)}\right]
$$

entonces, si

$$
I_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)}\right]
$$

se tienen que

$$
F_i\left(z\right) = I_i\left[P_i\left(z\right)\right]
$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[L_i^*\right] &= \mu_i\mathbb{E}\left[I_i\right]\\
Var\left[L_i^*\right] &= \mu_i^2 Var\left[I_i\right] + \sigma^2\mathbb{E}\left[I_i\right]
\end{aligned}
$$

para $i = 1, 2$, por tanto

$$
\mathbb{E}\left[I_i\right] = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i},
$$

además

$$
Var\left[I_i\right] = \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2}f_i\left(i\right).
$$

Si $C_i\left(z\right) = \mathbb{E}\left[z^{\overline{\tau}\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)}\right]$el tiempo de duración del ciclo, entonces, por lo hasta ahora establecido, se tiene que

$$
C_i\left(z\right) = I_i\left[\theta_i\left(z\right)\right],
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[C_i\right] &= \mathbb{E}\left[I_i\right]\mathbb{E}\left[\theta_i\left(z\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\mu_i}\frac{1}{1-\mu_i} = \frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)}\\
Var\left[C_i\right] &= \frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Por tanto se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_i] &= \mu_i \mathbb{E}[C_i],\\ \mathbb{E}[I_i] &= (1-\mu_i)\mathbb{E}[C_i]\end{aligned}$$

Defínanse los puntos de regenaración en el proceso $[L_1(t), L_2(t), \ldots, L_N(t)]$. Los puntos cuando la cola i es visitada y todos los $L_j(\tau_i(m)) = 0$ para $i = 1, 2$ son puntos de regeneración. Se llama ciclo regenerativo al intervalo entre dos puntos regenerativos sucesivos.

Sea M_i el número de ciclos de visita en un ciclo regenerativo, y sea $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$ la duración del m-ésimo ciclo de visita en un ciclo regenerativo. Se define el ciclo del tiempo de visita promedio $\mathbb{E}[C_i]$ como

$$\mathbb{E}[C_i] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]}{\mathbb{E}[M_i]}$$

En Stid72 y Heym82 se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty.$$

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que

$$\mathbb{E}[C_i] < \infty,$$

por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1.$$

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\ \mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.
Se puede demostrar (ver Hideaki Takagi 1986) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}$$

Durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \left\{P_i(z)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i(z)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)} \\
&= \frac{1-I_i\left[P_i(z)\right]}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Haciendo uso de lo hasta ahora desarrollado se tiene que

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \\
&= \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{f_i(i)}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

derivando con respecto a z

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_i(z)}{dz} &= \frac{(1-F_i(z))P_i(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \\
&- \frac{(1-z)P_i(z)F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \\
&- \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)^2} \\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))(P_i(z)-z)} \\
&+ \frac{(1-z)(1-F_i(z))P_i(z)P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}\left[C_i\right](1-P_i(z))^2(P_i(z)-z)}
\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $z \rightarrow 1^{+}$:

$$
\begin{aligned}
Q_i^{(1)}(z) = \lim_{z \rightarrow 1^{+}} \frac{dQ_i(z)}{dz} &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-F_i(z))\,P_i(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} && (20.77)\\
&- \lim_{z \rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} && (20.78)\\
&- \lim_{z \rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)^2} && (20.79)\\
&+ \lim_{z \rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} && (20.80)\\
&+ \lim_{z \rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{'}(z)}{\mathbb{E}[C_i]\,(1-P_i(z))^2\,(P_i(z)-z)} && (20.81)
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 1^{+}} \frac{(1-F_i(z))\,P_i(z)}{(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^{+}} \frac{\frac{d}{dz}\left[(1-F_i(z))\,P_i(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\right]}\\
&= \lim_{z \rightarrow 1^{+}} \frac{-P_i(z)\,F_i^{'}(z)+(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))\,P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^{+}} \frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,P_i(z)\,F_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)\right]}\\
&= \lim_{z \rightarrow 1^{+}} \frac{-P_i(z)\,F_i^{'}(z)+(1-z)F_i^{'}(z)\,P_i^{'}(z)+(1-z)P_i(z)\,F_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))\,P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)}{(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)^2} &= \lim_{z \rightarrow 1^{+}} \frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(P_i^{'}(z)-1\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)^2\right]}\\
= \lim_{z \rightarrow 1^{+}} &\frac{-(1-F_i(z))\,P_i(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(1-z)P_i(z)\,F_i^{'}(z)\left(-1+P_i^{'}(z)\right)}{2\,(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2\,P_i^{'}(z)}\\
+ \lim_{z \rightarrow 1^{+}} &\frac{+(1-z)\,(1-F_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)P_i^{'}(z)}{2\,(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2\,P_i^{'}(z)}\\
+ \lim_{z \rightarrow 1^{+}} &\frac{+(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i(z)\,P_i^{''}(z)}{2\,(1-P_i(z))\,(-z+P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))^2\,P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 1^{+}} \frac{(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)}{(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)} &= \lim_{z \rightarrow 1^{+}} \frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i(z))\,(P_i(z)-z)\right]}\\
= \lim_{z \rightarrow 1^{+}} &\frac{-(1-F_i(z))\,P_i^{'}(z)-(1-z)F_i^{'}(z)\,P_i^{'}(z)+(1-z)\,(1-F_i(z))\,P_i^{''}(z)}{(1-P_i(z))\left(-1+P_i^{'}(z)\right)-(-z+P_i(z))\,P_i^{'}(z)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{(1-z)\,(1-F_i\,(z))\,P_i\,(z)\,P_i^{'}\,(z)}{(1-P_i\,(z))^2\,(P_i\,(z)-z)} &= \lim_{z\rightarrow 1^{+}}\frac{\frac{d}{dz}\left[(1-z)\,(1-F_i\,(z))\,P_i\,(z)\,P_i^{'}\,(z)\right]}{\frac{d}{dz}\left[(1-P_i\,(z))^2\,(P_i\,(z)-z)\right]}\\
= \lim_{z\rightarrow 1^{+}} &\frac{-(1-F_i\,(z))\,P_i\,(z)\,P_i^{'}\,(z)-(1-z)P_i\,(z)\,F_i^{'}\,(z)\,P_i'[z]}{(1-P_i\,(z))^2\left(-1+P_i'\,(z)\right)-2\,(1-P_i\,(z))\,(-z+P_i\,(z))\,P_i'\,(z)}\\
+ \lim_{z\rightarrow 1^{+}} &\frac{(1-z)\,(1-F_i\,(z))\,P_i^{'}\,(z)^2+(1-z)\,(1-F_i\,(z))\,P_i\,(z)\,P_i^{''}\,(z)}{(1-P_i\,(z))^2\left(-1+P_i'\,(z)\right)-2\,(1-P_i\,(z))\,(-z+P_i\,(z))\,P_i'\,(z)}
\end{aligned}$$

20.14 Longitudes de la Cola en cualquier tiempo

Sea $V_i\,(z)=\frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\frac{I_i(z)-1}{z-P_i(z)}$

$$\frac{\partial V_i\,(z)}{\partial z} = \frac{1}{\mathbb{E}\,[C_i]}\left[\frac{I_i{'}\,(z)\,(z-P_i\,(z))}{z-P_i\,(z)}-\frac{(I_i\,(z)-1)\,(1-P_i{'}\,(z))}{(z-P_i\,(z))^2}\right]$$

La FGP para el tiempo de espera para cualquier usuario en la cola está dada por:

$$U_i\,(z)=\frac{1}{\mathbb{E}\,[C_i]}\cdot\frac{1-P_i\,(z)}{z-P_i\,(z)}\cdot\frac{I_i\,(z)-1}{1-z}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}V_i\,(z) &= \frac{1}{\mathbb{E}\,[C_i]}\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{1-P_i\,(z)}{z-P_i\,(z)}\right)\frac{I_i\,(z)-1}{1-z}+\frac{1-P_i\,(z)}{z-P_i\,(z)}\frac{d}{dz}\left(\frac{I_i\,(z)-1}{1-z}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\,[C_i]}\left\{\frac{-P_i\,(z)\,(z-P_i\,(z))-(1-P_i\,(z))\left(1-P_i^{'}\,(z)\right)}{(z-P_i\,(z))^2}\cdot\frac{I_i\,(z)-1}{1-z}\right\}\\
&+ \frac{1}{\mathbb{E}\,[C_i]}\left\{\frac{1-P_i\,(z)}{z-P_i\,(z)}\cdot\frac{I_i^{'}\,(z)\,(1-z)+(I_i\,(z)-1)}{(1-z)^2}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_i\,(z)}{\partial z} &= \frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])}{(1-z)^2\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}+\frac{(1-P_i[z])I_i^{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}-\frac{(-1+I_i[z])(1-P_i[z])\,(1-P'[z])}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])^2}\\
&- \frac{(-1+I_i[z])P_i{'}[z]}{(1-z)\mathbb{E}[I_i](z-P_i[z])}
\end{aligned}$$

20.15 Material por agregar

Teorema 174. *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1\leftrightarrow Q_3$ y $Q_2\leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t, $A_j\,(t)=\{0$ arribos en Q_j al tiempo $t\}$ para algún tiempo $t\geq 0$ y Q_j la cola j-ésima en la RSVC, para $j=1,2,3,4$. Existe un intervalo $I\neq\emptyset$ tal que para $T^*\in I$, tal que $\mathbb{P}\left\{A_1\,(T^*)\,,A_2\,(Tt^*)\,,A_3\,(T^*)\,,A_4\,(T^*)\,|T^*\in I\right\}>0$.*

Proof. Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.

Sea $n\geq 1$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j\,(\overline{\tau}_1\,(n))=0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1\,(n)>0$, entonces tenemos que $\tau_2\,(n)=\overline{\tau}_1\,(n)+r_1\,(n)$.

Definamos el intervalo $I_1 \equiv [\overline{\tau}_1(n), \tau_2(n)]$ de longitud $\xi_1 = r_1(n)$.

Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$\mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)}. \tag{20.82}$$

Por otra parte, para la cola Q_2 el tiempo $\overline{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\overline{\tau}_2(n-1)) = 0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n.

Entonces tenemos un sgundo intervalo $I_2 \equiv [\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)}, \tag{20.83}$$

$$\xi_2(n) = \tau_2(n) - \overline{\tau}_2(n-1) \tag{20.84}$$

Ahora, dado que $I_1(n) \subset I_2(n)$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \xi_1(n) \leq \xi_2(n) & \Leftrightarrow & -\xi_1(n) \geq -\xi_2(n) \\ -\tilde{\mu}_2 \xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_2(n) & \Leftrightarrow & e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_1(n)} \geq e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)} \\ \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\} & \geq & \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\}. \end{array}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} & = & \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\} \\ & \geq & \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} \\ & = & e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]}. \end{array}$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]} > 0. \tag{20.85}$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC para algún $m \geq 1$ se tiene que $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$ por lo tanto se cumple cualquiera de los siguientes cuatro casos

a) $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \overline{\tau}_3(m)$

b) $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$

c) $\tau_4(m) < \tau_2(n) < \overline{\tau}_4(m)$

d) $\overline{\tau}_4(m) < \tau_2(n) < \tau_3(m+1)$

Sea el intervalo $I_3(m) \equiv [\tau_3(m), \overline{\tau}_3(m)]$ tal que $\tau_2(n) \in I_3(m)$, con longitud de intervalo $\xi_3 \equiv \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m)$, entonces se tiene que para Q_3

$$\mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(m)\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)}. \tag{20.86}$$

mientras que para Q_4 consideremos el intervalo $I_4(m) \equiv [\tau_4(m-1), \overline{\tau}_3(m)]$, entonces por construcción $I_3(m) \subset I_4(m)$, por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} \xi_3(m) \leq \xi_4(m) & \Leftrightarrow & -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\ -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m) & \Leftrightarrow & e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(n)} \\ \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} & \geq & \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\}. \end{array}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\} & = & \mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(m)\} \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} \\ & \geq & \mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(m)\} \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} \\ & = & e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)} e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} = e^{-(\tilde{\mu}_3 \xi_3(m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4(m))}. \end{array}$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right), A_4\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\}\geq e^{-\left(\tilde{\mu}_3\xi_3\left(m\right)+\tilde{\mu}_4\xi_4\left(m\right)\right)}>0. \tag{20.87}$$

Sea el intervalo $I_3\left(m\right)\equiv\left[\overline{\tau}_3\left(m\right),\tau_4\left(m\right)\right]$ con longitud $\xi_3\equiv\tau_4\left(m\right)-\overline{\tau}_3\left(m\right)$, entonces se tiene que para Q_3

$$\mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\}=e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3\left(m\right)}. \tag{20.88}$$

mientras que para Q_4 consideremos el intervalo $I_4\left(m\right)\equiv\left[\overline{\tau}_4\left(m-1\right),\tau_4\left(m\right)\right]$, entonces por construcción $I_3\left(m\right)\subset I_4\left(m\right)$, y al igual que en el caso anterior se tiene que

$$\begin{array}{rcl}\xi_3\left(m\right)\leq\xi_4\left(m\right) & \Leftrightarrow & -\xi_3\left(m\right)\geq-\xi_4\left(m\right)\\ -\tilde{\mu}_4\xi_3\left(m\right)\geq-\tilde{\mu}_4\xi_4\left(m\right) & \Leftrightarrow & e^{-\tilde{\mu}_4\xi_3\left(m\right)}\geq e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4\left(n\right)}\\ \mathbb{P}\left\{A_4\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\} & \geq & \mathbb{P}\left\{A_4\left(t\right)|t\in I_4\left(m\right)\right\}.\end{array}$$

Entonces se tiene que

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right),A_4\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\} & = & \mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\}\\ & \geq & \mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right)|t\in I_3\left(m\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4\left(t\right)|t\in I_4\left(m\right)\right\}\\ & = & e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3\left(m\right)}e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4\left(m\right)}=e^{-\left(\tilde{\mu}_3\xi_3\left(m\right)+\tilde{\mu}_4\xi_4\left(m\right)\right)}.\end{array}$$

Es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_3\left(t\right),A_4\left(t\right)|t\in I_4\left(m\right)\right\}\geq e^{-\left(\tilde{\mu}_3+\tilde{\mu}_4\right)\xi_3\left(m\right)}>0. \tag{20.89}$$

Para el intervalo $I_3\left(m\right)=\left[\tau_4\left(m\right),\overline{\tau}_4\left(m\right)\right]$, se tiene que este caso es análogo al caso (a).

Para el intevalo $I_3\left(m\right)\equiv\left[\overline{\tau}_4\left(m\right),\tau_4\left(m+1\right)\right]$, se tiene que es análogo al caso (b).

Por construcción se tiene que $I\left(n,m\right)\equiv I_1\left(n\right)\cap I_3\left(m\right)\neq\emptyset$,entonces en particular se tienen las contenciones $I\left(n,m\right)\subseteq I_1\left(n\right)$ y $I\left(n,m\right)\subseteq I_3\left(m\right)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m}\equiv\ell\left(I\left(n,m\right)\right)$ tenemos que

$$\begin{array}{l}\xi_{n,m}\leq\xi_1\left(n\right)\text{ y }\xi_{n,m}\leq\xi_3\left(m\right)\text{ entonces}\\ \quad-\xi_{n,m}\geq-\xi_1\left(n\right)\text{ y }-\xi_{n,m}\leq-\xi_3\left(m\right)\end{array}$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{array}{ll}-\tilde{\mu}_1\xi_{n,m}\geq-\tilde{\mu}_1\xi_1\left(n\right), & -\tilde{\mu}_2\xi_{n,m}\geq-\tilde{\mu}_2\xi_1\left(n\right)\geq-\tilde{\mu}_2\xi_2\left(n\right),\\ -\tilde{\mu}_3\xi_{n,m}\geq-\tilde{\mu}_3\xi_3\left(m\right), & -\tilde{\mu}_4\xi_{n,m}\geq-\tilde{\mu}_4\xi_3\left(m\right)\geq-\tilde{\mu}_4\xi_4\left(m\right).\end{array}$$

Sea $T^*\in I\left(n,m\right)$, entonces dado que en particular $T^*\in I_1\left(n\right)$, se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2, en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4, es decir, $\tilde{\mu}_1=\mu_1$, $\tilde{\mu}_2=\mu_2$, $\tilde{\mu}_3=\mu_3$, $\tilde{\mu}_4=\mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I\left(n,m\right)$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4, por lo tanto tenemos que

$$\begin{array}{l}\mathbb{P}\left\{A_1\left(T^*\right),A_2\left(T^*\right),A_3\left(T^*\right),A_4\left(T^*\right)|T^*\in I\left(n,m\right)\right\}\\ =\prod_{j=1}^4\mathbb{P}\left\{A_j\left(T^*\right)|T^*\in I\left(n,m\right)\right\}\\ \geq\mathbb{P}\left\{A_1\left(T^*\right)|T^*\in I_1\left(n\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_2\left(T^*\right)|T^*\in I_2\left(n\right)\right\}\\ \mathbb{P}\left\{A_3\left(T^*\right)|T^*\in I_3\left(m\right)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4\left(T^*\right)|T^*\in I_4\left(m\right)\right\}\\ =e^{-\mu_1\xi_1\left(n\right)}e^{-\mu_2\xi_2\left(n\right)}e^{-\mu_3\xi_3\left(m\right)}e^{-\mu_4\xi_4\left(m\right)}\\ =e^{-\left[\tilde{\mu}_1\xi_1\left(n\right)+\tilde{\mu}_2\xi_2\left(n\right)+\tilde{\mu}_3\xi_3\left(m\right)+\tilde{\mu}_4\xi_4\left(m\right)\right]}>0.\end{array} \tag{20.90}$$

Ahora solo resta demostrar que para $n\geq1$, existe $m\geq1$ tal que se cumplen cualquiera de los cuatro casos arriba mencionados:

a) $\tau_3\left(m\right)<\tau_2\left(n\right)<\overline{\tau}_3\left(m\right)$

b) $\overline{\tau}_3\left(m\right)<\tau_2\left(n\right)<\tau_4\left(m\right)$

c) $\tau_4\left(m\right)<\tau_2\left(n\right)<\overline{\tau}_4\left(m\right)$

d) $\overline{\tau}_4\left(m\right)<\tau_2\left(n\right)<\tau_3\left(m+1\right)$

Consideremos nuevamente el primer caso. Supongamos que no existe $m\geq1$, tal que $I_1\left(n\right)\cap I_3\left(m\right)\neq\emptyset$, es decir, para toda $m\geq1$, $I_1\left(n\right)\cap I_3\left(m\right)=\emptyset$, entonces se tiene que ocurren cualquiera de los dos casos

a) $\tau_2(n) \leq \tau_3(m)$: Recordemos que $\tau_2(m) = \overline{\tau}_1 + r_1(m)$ donde cada una de las variables aleatorias son tales que $\mathbb{E}[\overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n)] < \infty$, $\mathbb{E}[R_1] < \infty$ y $\mathbb{E}[\tau_3(m)] < \infty$, lo cual contradice el hecho de que no exista un ciclo $m \geq 1$ que satisfaga la condición deseada.

b) $\tau_2(n) \geq \overline{\tau}_3(m)$: por un argumento similar al anterior se tiene que no es posible que no exista un ciclo $m \geq 1$ tal que satisface la condición deseada.

Para el resto de los casos la demostración es análoga. Por lo tanto, se tiene que efectivamente existe $m \geq 1$ tal que $\tau_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$. $\square$

En Sigman, Thorison y Wolff [?] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 51. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k (X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 175. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*
  b) *$L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;*
  c) *$L = 1$ y $G = D$;*
  d) *$L = \infty$ y $G = M$.*

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;
  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;
  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 176. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$
  b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*
  c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$*

d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 177. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Definición 247 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 30. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [**?**].*

Nota 31. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 248. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 32. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 33. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 34. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 35. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 249. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 250. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 251. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 178. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Corolario 1. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \to \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \to \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 252. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{20.91}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 253. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 36. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 37. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 179 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \to \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 52. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 254. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T + t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 53. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 180 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t \to \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 54. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 38. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 181. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \;\; c.s. \tag{20.92}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \;\; c.s. \tag{20.93}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 2 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \;\; c.s. \;\; cuando \; t \to \infty. \tag{20.94}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 255. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 182. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \; c.s. & (20.95)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \; c.s. & (20.96)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 3. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \; c.s. \; cuando \; t \rightarrow \infty. \tag{20.97}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 55. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 39. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 183. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \; c.s. & (20.98)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \; c.s. & (20.99)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 4 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{20.100}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 256. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 184. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (20.101)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (20.102) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 5. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{20.103}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 56. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 40. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 185. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \ c.s. && (20.104)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \ c.s. && (20.105)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 6 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \tag{20.106}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 257. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 186. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \ c.s. && (20.107)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \ c.s. && (20.108)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 7. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \tag{20.109}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 57. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 41. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 187. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} &(20.110)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} &(20.111)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N\,/t)$ la cumple.

Corolario 8 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{20.112}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 258. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 188. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} &(20.113)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} &(20.114)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 9. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{20.115}$$

20.16 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 58. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 42. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 189. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{20.116}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{20.117}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 10 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{20.118}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 259. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 190. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} &(20.119)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} &(20.120)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 11. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{20.121}$$

Definición 260. *Sea $h\left(t\right)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h\left(t\right)$ y la distribución F es*

$$H\left(t\right) = h\left(t\right) + \int_{\left[0,t\right]} H\left(t-s\right)dF\left(s\right), \; t \geq 0, \tag{20.122}$$

donde $H\left(t\right)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H\left(t\right)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 59. *La función $U \star h\left(t\right)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 191 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 261. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N\left(t\right)$, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = \mathbb{1}\left(t \geq 0\right)$.

Proposición 60. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U\left(t\right)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 262. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t}dF\left(t\right), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 61. *La Transformada de Laplace $\hat{U}\left(\alpha\right)$ y $\hat{F}\left(\alpha\right)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}\left(\alpha\right) = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$.*

Nota 43. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 192. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 12 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t) + 1]\,,\ t \geq 0,$$

Definición 263. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)\,, \tag{20.123}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 264. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 44. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 265. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)\,, \tag{20.124}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 266. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 45. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 62. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 1 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 46. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 193. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{20.125}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{20.126}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 13 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{20.127}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 267. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 194. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{20.128}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{20.129}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 14. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{20.130}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 268. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 63. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 269. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 64. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 47. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 195. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 15 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t)+1]\,,\ t \geq 0,$$

Definición 270. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s)\,,\ t \geq 0, \tag{20.131}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 65. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 196 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu,\ cuando\ t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 271. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)\,,\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 66. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 272. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t)\,,\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 67. *La Transformada de Laplace* $\hat{U}(\alpha)$ *y* $\hat{F}(\alpha)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.

Nota 48. *Un proceso de renovación* $N(t)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, *para* $t \geq 0$.

Teorema 197. *Sea* $N(t)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ *es finita para cada* t. *Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N(t)$ *tal que* $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, *independiente de* n. *Entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 16 (Identidad de Wald para Renovaciones). *Para el proceso de renovación* $N(t)$,

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t)+1],\ t \geq 0,$$

Definición 273. *Sea* $h(t)$ *función de valores reales en* $\mathbb{R}$ *acotada en intervalos finitos e igual a cero para* $t < 0$ *La ecuación de renovación para* $h(t)$ *y la distribución* F *es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{20.132}$$

donde $H(t)$ *es una función de valores reales. Esto es* $H = h + F \star H$. *Decimos que* $H(t)$ *es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para* $t < 0$.

Proposición 68. *La función* $U \star h(t)$ *es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 198 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Nota 49. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 199 (Teorema Principal de Renovación). *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 69. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ \textit{donde}\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 274. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 70. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 200 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 50. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 201 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 71. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 275. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 72. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 202 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Definición 276. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 51. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 52. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 53. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 277. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 54. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 203 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 278 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t*.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t*, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t*.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$*, la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t*.*

Nota 55. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n*, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$*. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{20.133}$$

Ejemplo 2 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*, entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$*.*

Nota 56. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 279. *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 57. *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 73. *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 204. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación* N *es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante* $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 58. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 17. *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 59. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 60. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 280 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 281. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} \quad = \quad \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}\left[R_1\right]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 61. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 282. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 62. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 63. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 283 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 64. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 284. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 65. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 285. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 286. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 287. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 205. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 288. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 289. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 290. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 206. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$[29], se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i\left(z\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (**??**): $n \rightarrow t-\tau_i\left(m\right)$, $T \rightarrow \overline{\tau}_i\left(m\right)-\tau_i\left(m\right)$, $L_n \rightarrow L_i\left(t\right)$ y $F\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{L_0}\right] \rightarrow F_i\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{L_i\tau_i(m)}\right]$, se puede ver que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)} \tag{20.134}$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i\left(t\right)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i\left(z\right)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i\left(z\right)}\\
&= \frac{1-I_i\left[P_i\left(z\right)\right]}{1-P_i\left(z\right)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Q_i\left(z\right) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right]+\mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\left\{z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)}+\frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}\right\}
\end{aligned}$$

[29] En Stidham[**?**] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N}\mu_k < 1$.

es decir

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1-z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \tag{20.135}$$

Teorema 207. *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t, $A_j(t) = \{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\}$ para algún tiempo $t \geq 0$ y Q_j la cola j-ésima en la RSVC, para $j = 1, 2, 3, 4$. Existe un intervalo $I \neq \emptyset$ tal que para $T^* \in I$, tal que $\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(Tt^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I\} > 0$.*

Proof. Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.

Sea $n > 0$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1(n) > 0$, entonces tenemos que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1(n)$.

Definamos el intervalo $I_1 \equiv [\overline{\tau}_1(n), \tau_2(n)]$ de longitud $\xi_1 = r_1(n)$. Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$\mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)}. \tag{20.136}$$

Por otra parte, para la cola Q_2, el tiempo $\overline{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\overline{\tau}_2(n-1)) = 0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n. Entonces tenemos un sgundo intervalo $I_2 \equiv [\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)}, \tag{20.137}$$

donde $\xi_2(n) = \tau_2(n) - \overline{\tau}_2(n-1)$.

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} &= \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\} \\
&\geq \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} \\
&= e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]}.
\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]} > 0. \tag{20.138}$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC, se afirma que existe $m > 0$ tal que $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$.

Para Q_3 sea $I_3 = [\overline{\tau}_3(m), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_3(m) = r_3(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(n)}. \tag{20.139}$$

Análogamente que como se hizo para Q_2, tenemos que para Q_4 se tiene el intervalo $I_4 = [\overline{\tau}_4(m-1), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_4(m) = \tau_4(m) - \overline{\tau}_4(m-1)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} = e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(n)}. \tag{20.140}$$

Al igual que para el primer sistema, dado que $I_3(m) \subset I_4(m)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\xi_3(m) \leq \xi_4(m) &\Leftrightarrow -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\
-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m) &\Leftrightarrow e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} \\
\mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} &\geq \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\}
\end{aligned}$$

Entonces, dado que los eventos A_3 y A_4 son independientes, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t)|t \in I_3(m)\right\} &= \mathbb{P}\left\{A_3(t)|t \in I_3(m)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4(t)|t \in I_3(m)\right\} \\ &\geq \mathbb{P}\left\{A_3(t)|t \in I_3(n)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4(t)|t \in I_4(n)\right\} \\ &= e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(m)}e^{-\tilde{\mu}_4\xi_4(m)} = e^{-[\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m)]}.\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t)|t \in I_3(m)\right\} = e^{-[\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m)]} > 0. \tag{20.141}$$

Por construcción se tiene que $I(n,m) \equiv I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$,entonces en particular se tienen las contenciones $I(n,m) \subseteq I_1(n)$ y $I(n,m) \subseteq I_3(m)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m} \equiv \ell(I(n,m))$ tenemos que

$$\xi_{n,m} \leq \xi_1(n) \text{ y } \xi_{n,m} \leq \xi_3(m) \text{ entonces } -\xi_{n,m} \geq -\xi_1(n) \text{ y } -\xi_{n,m} \leq -\xi_3(m)$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{array}{ll} -\tilde{\mu}_1\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_1\xi_1(n), & -\tilde{\mu}_2\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_2\xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2\xi_2(n), \\ -\tilde{\mu}_3\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_3\xi_3(m), & -\tilde{\mu}_4\xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_4\xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4\xi_4(m). \end{array}$$

Sea $T^* \in I_{n,m}$, entonces dado que en particular $T^* \in I_1(n)$ se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2, en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4, es decir, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$, $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I_{n,m}$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4, por lo tanto tenemos que

$$\begin{array}{l}\mathbb{P}\left\{A_1(T^*), A_2(T^*), A_3(T^*), A_4(T^*)|T^* \in I_{n,m}\right\} = \prod_{j=1}^{4}\mathbb{P}\left\{A_j(T^*)|T^* \in I_{n,m}\right\} \\ \geq \mathbb{P}\left\{A_1(T^*)|T^* \in I_1(n)\right\}\mathbb{P}\left\{A_2(T^*)|T^* \in I_2(n)\right\}\mathbb{P}\left\{A_3(T^*)|T^* \in I_3(m)\right\}\mathbb{P}\left\{A_4(T^*)|T^* \in I_4(m)\right\} \\ = e^{-\mu_1\xi_1(n)}e^{-\mu_2\xi_2(n)}e^{-\mu_3\xi_3(m)}e^{-\mu_4\xi_4(m)} = e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)+\tilde{\mu}_3\xi_3(m)+\tilde{\mu}_4\xi_4(m)]} > 0.\end{array} \tag{20.142}$$

□

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [?] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 208. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\ var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2(1-\delta)^{-1}.\end{aligned}$$

  Teorema 209. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 210. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

En Sigman, Thorison y Wolff [?] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 74. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k (X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 211. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso **I** es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*
  b) *$L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;*
  c) *$L = 1$ y $G = D$;*
  d) *$L = \infty$ y $G = M$.*

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;
  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;
  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 212. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

a) $s = \infty$

b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*

c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para* $L < \infty$

d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 213. *En cualquier sistema de colas* $GI/G/1/L$ *con* $1 \leq L < \infty$ *y distribución de interarribos* A *y distribución de los tiempos de servicio* B*, tal que* $A(0) = 0$*,* $A(t)(1 - B(t)) > 0$ *para alguna* $t > 0$ *y* $B(t)$ *para toda* $t > 0$*, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [?] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 214. *En un sistema estacionario* $GI/M/1$ *los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right]\\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right]\\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2(1-\delta)^{-1}.
\end{aligned}$$

  Teorema 215. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario* $GI/M/1$ *es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 216. *Los intervalos de interpartida* $\{D_n\}$ *de un sistema* $M/G/1$ *estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo* $M/M/1$.

21 Preliminares: Modelos de Flujo

21.1 Procesos Regenerativos

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0. \tag{21.1}$$

(S2.)
$$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N}, \tag{21.2}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right] \geq 0$.

- Se define
$$\delta^{*} := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]. \tag{21.3}$$
- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$
- también se define $\rho_{k} = \lambda_{k}/\mu_{k}$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $\left(X\left(t\right)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X\left(t\right) = \left(Q\left(t\right), A\left(t\right), H\left(t\right), B\left(t\right), B^{0}\left(t\right), C\left(t\right)\right) \tag{21.4}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \left(\left\{1, 2, \dots, K\right\} \times \left\{1, 2, \dots, S\right\}\right)^{M} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}^{K}, \tag{21.5}$$

- $Q\left(t\right) = \left(Q_{k}\left(t\right), 1 \leq k \leq K\right)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A\left(t\right) = \left(A_{k}\left(t\right), 1 \leq k \leq K\right)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H\left(t\right)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B\left(t\right)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^{0}\left(t\right)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C\left(t\right)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H\left(t\right)$.

$A_{k}\left(t\right), B_{m}\left(t\right)$ y $B_{m}^{0}\left(t\right)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([**?**])

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$
- también se define $\rho_{k} = \lambda_{k}/\mu_{k}$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_{s}\left(x\right) = N\left(x\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]=\overline{N}>0$

2) $\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]\leq\overline{N}$para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}=r_{j,j^{'}}$
- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}\left(1\right)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}r_{j,j^{'}}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}\left(i\right)\right]. \tag{21.6}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho<1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_{k}\left(t\right)$ el número de usuarios en la cola k, $A_{k}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m, se denota por $B_{m}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t; $B_{m}^{0}\left(t\right)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t, finalmente sea $C_{m}\left(t\right)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X\left(t\right)^{T}=\left(Q_{k}\left(t\right),A_{k}\left(t\right),B_{m}\left(t\right),B_{m}^{0}\left(t\right),C_{m}\left(t\right)\right) \tag{21.7}$$

para $k=1,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_{1},\ldots,\xi_{K},\eta_{1},\ldots,\eta_{K}$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p\geq1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_{l}\left(1\right)^{p+1}\right]<\infty\text{ para }l\in\mathcal{A}\text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)^{p+1}\right]<\infty\text{ para }k=1,\ldots,K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k=1,2,\ldots,K$ existe una función positiva $q_{k}\left(x\right)$ definida en $\mathbb{R}_{+}$, y un entero j_{k}, tal que

$$P\left(\xi_{k}\left(1\right)\geq x\right)>0\text{, para todo }x>0 \tag{21.8}$$

$$P\left\{a\leq\sum_{i=1}^{j_{k}}\xi_{k}\left(i\right)\leq b\right\}\geq\int_{a}^{b}q_{k}\left(x\right)dx,\ 0\leq a<b. \tag{21.9}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto $A2)$ para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [**?**] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

21.2 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [**?**], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (**??**), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([**?**], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [**?**]

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [**?**]) en el espacio de estados medible $\left(X, \mathcal{B}_X\right)$. El Proceso $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x, x \in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right) | \mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right)$$

en $\left\{\tau < \infty\right\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la σ-algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right)$$

Definición 291. *Una medida no cero π en $\left(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}}\right)$ es* **invariante** *para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right) = \int_{\mathbf{X}} P^t\left(x, D\right) \pi\left(dx\right)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 292. *El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $\left(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}}\right)$, tal que si $\nu\left(D\right) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*

$$P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = inf\left\{t \geq 0 : X_t \in D\right\}$.

Nota 66. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [**?**]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama Proceso Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\,\pi(dx)$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente.

Definición 293. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 56 (Lema 3.1, Dai[?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{21.10}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris Recurrente Positivo.

Lema 57 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{|x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 217 (Teorema 3.1, Dai[?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{21.11}$$

*entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B = \{|x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.*

Nota 67. *En Meyn and Tweedie [?] muestran que si $P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

21.3 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathrm{X}$, sea $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{21.12}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{21.13}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{21.14}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{21.15}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$,

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}^{0}_{m,k}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{21.16}$$

De acuerdo a Dai [?], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^{0}(\cdot)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (**??**)-(**??**), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 294 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en (**??**) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 218 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x| t) \tag{21.17}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 295 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 26 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por **??**-**??** es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 219 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p \right] ds \leq \kappa_p, \tag{21.18}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right]=\mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right]\leq\kappa_r, \tag{21.19}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$. *Donde* π *es la probabilidad invariante para* $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}*:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)\right]=0. \tag{21.20}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right)ds=\mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{21.21}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 220 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^K\rho_k+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{21.22}$$

i) Si $\rho<1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema* **??**.

ii) Si $\rho<1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema* **??**

Teorema 221. *Sea* $(X_n,\mathcal{F}_n,n=0,1,\ldots,\}$ *Proceso de Markov con espacio de estados* (S_0,χ_0) *generado por una distribuición inicial* P_o *y probabilidad de transición* p_{mn}, *para* $m,n=0,1,\ldots,$ $m<n$, *que por notación se escribirá como* $p\left(m,n,x,B\right)\rightarrow p_{mn}\left(x,B\right)$. *Sea* S *tiempo de paro relativo a la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_n$. *Sea* T *función medible,* $T:\Omega\rightarrow\{0,1,\ldots,\}$. *Supóngase que* $T\geq S$, *entonces* T *es tiempo de paro. Si* $B\in\chi_0$, *entonces*

$$P\left\{X\left(T\right)\in B,T<\infty|\mathcal{F}\left(S\right)\right\}=p\left(S,T,X\left(s\right),B\right) \tag{21.23}$$

en $\{T<\infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d:K\rightarrow\mathbb{N}$ función. Para $v\in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E=\cup_{v\in K}M_v=\left\{(v,\zeta):v\in K,\zeta\in M_v\right\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E}=\left\{\cup_{v\in K}A_v:A_v\in\mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E,\mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t=(v_t,\zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v,v\in K)$.

ii) Una función medible $\lambda:E\rightarrow\mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q:\mathcal{E}\times(E\cup\Gamma^*)\rightarrow[0,1]$ donde

$$\Gamma^*=\cup_{v\in K}\partial^*M_v. \tag{21.24}$$

y

$$\partial^*M_v=\left\{z\in\partial M_v:\phi_{\mathbf{v}}\left(\mathbf{t},\zeta\right)=\mathbf{z}\text{ para alguna }(t,\zeta)\in\mathbb{R}_+\times M_v\right\}. \tag{21.25}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{21.26}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf \{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \\ exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{21.27}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[30]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 9 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{21.28}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 296. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 297. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 298. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup \{\lambda(K) : K \textit{ es compacto en } E\}. \tag{21.29}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 222. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

[30] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 299. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*[31]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B). \tag{21.30}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[32] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t)|\mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t) \ \ s \leq t \in I, \ f \in b\mathcal{E}. \tag{21.32}$$

Definición 300. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x), \ t, s \geq 0, \ x \in E \ f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 68. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \ \ t, s \geq 0, \ f \in b\mathcal{E}. \tag{21.33}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 301. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \to X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 302 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 303. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) *$(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) *$(\theta_t)_{t \geq 0}$ es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{21.34}$$

[31] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[32]
$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H|X_t\} \ \ H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{21.31}$$

iii) *Para cualquier* $x \in E$,$\mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$, *y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 304 (HD2). *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$, *el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 305. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 58 (Lema 4.2, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k ([|x_n| t]) \rightarrow P_k^{'} t, \ u.o.c., \tag{21.35}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n} (|x_n| t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{21.36}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n} (|x_n| t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{21.37}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 59 (Lema 4.3, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) *Conforme* $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n} (|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n} (|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) *Para cada* $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n} (|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n} (|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{21.38}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{21.39}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))^{'},$$
$$I^x(t) = (I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t))^{'}$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t)))^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \tag{21.40}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{21.41}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \tag{21.42}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{21.43}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t)) \, dI_i^x(t) = 0, \tag{21.44}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{21.45}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 223 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \rightarrow \infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}| \rightarrow \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right), U^{x_{n_j}}\left(0\right), V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}\left(0\right), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{21.46}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right) \text{ u.o.c.} \tag{21.47}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right) = Q\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - \left(I - P\right)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{21.48}$$

$$\overline{Q}\left(t\right) \geq 0, \tag{21.49}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{21.50}$$

$$\overline{I}\left(t\right) = et - C\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente,} \tag{21.51}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right) d\overline{I}\left(t\right) = 0, \tag{21.52}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{21.53}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 75. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right), \frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right), \frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right), \frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_{k}\left(0\right), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ y $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}\left(0\right) = \overline{T}^{0}\left(0\right) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right) + \overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right) = \overline{Q}_{k}\left(0\right) + \alpha_{k} t - \mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right) = \beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right) = \mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right) = l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right) > 0$.

Lema 60 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 224 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 61 (Lema 5.2 [?]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{21.54}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 225 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 76 (Proposición 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{21.55}$$

Proposición 77 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{21.56}$$

Proposición 78 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{21.57}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 226 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{21.58}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p \tag{21.59}$$

Teorema 227 (Teorema 6.2 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^{t}\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_{p}}\rightarrow 0$$

para $t\rightarrow\infty$ y $x\in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[\left|Q_{t}\right|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[\left|Q_{0}\right|^{p}\right]<\infty$$

Teorema 228 (Teorema 6.3 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^{t}(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_{f}=0},$$

para $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{t}\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{0}\right]\right|=0.$$

Proposición 79 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_{0}>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{21.60}$$

Lema 27 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [?]). *Sea $\left\{\zeta\left(k\right):k\in F\right\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $\left(0,\infty\right)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{21.61}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 229 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_{p} tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{21.62}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 230 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{21.63}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 231 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{21.64}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 232 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [**?**]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right) ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{21.65}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 233 (Teorema 2.2, Down [**?**]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{21.66}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{21.67}$$

Definición 306. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 307. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu\left(X_n\right) < \infty$.*

Definición 308. *Sea X el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 309. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\left\{x \in X : f\left(x\right) > \alpha\right\}$$

pertenece a $\mathcal{F}$. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}\left((\alpha, \infty)\right) = \left\{x \in X : f\left(x\right) > \alpha\right\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 310. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$, definimos $B_n = \left\{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\right\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_i$.*

Definición 311. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X\left(t\right), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X\left(t\right)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}\left(X\left(s\right), s \leq t\right)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X\left(s\right)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 312. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\left\{\mathcal{F}\left(t\right), t \geq 0\right\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}\left(s\right) \subset \mathcal{F}\left(t\right)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}\left(t\right)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\left\{T \leq t\right\} \in \mathcal{F}\left(t\right)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X\left(t\right), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}\left(t\right) = \mathcal{F}\left(X\left(s\right)\right)$.*

Definición 313. *Sea $X\left(t\right), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\left\{\mathcal{F}\left(t\right)\right\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}\left(s\right) \subset \mathcal{F}\left(t\right)$ y $X\left(t\right)$ es $\mathcal{F}\left(t\right)$-medible,*

Definición 314. *Sea $X\left(t\right), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}\left(t\right)$ o que $\left\{X\left(t\right), \mathcal{F}\left(t\right)\right\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\left\{X\left(t\right) \in B|\mathcal{F}\left(s\right)\right\} = P\left\{X\left(t\right) \in B|X\left(s\right)\right\}. \tag{21.68}$$

Nota 69. *Si se dice que $\left\{X\left(t\right)\right\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}\left(t\right)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}\left(t\right) = \mathcal{F}_0\left(t\right) = \mathcal{F}\left(X\left(r\right), r \leq t\right),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\left\{X\left(t\right) \in B|X\left(r\right), r \leq s\right\} = P\left\{X\left(t\right) \in B|X\left(s\right)\right\} \tag{21.69}$$

21.4 Procesos de Estados de Markov

Teorema 234. *Sea* $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ *Proceso de Markov con espacio de estados* (S_0, χ_0) *generado por una distribuición inicial* P_o *y probabilidad de transición* p_{mn}*, para* $m, n = 0, 1, \ldots,\ m < n$*, que por notación se escribirá como* $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$*. Sea* S *tiempo de paro relativo a la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_n$*. Sea* T *función medible,* $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$*. Supóngase que* $T \geq S$*, entonces* T *es tiempo de paro. Si* $B \in \chi_0$*, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{21.70}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{\bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{21.71}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{21.72}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{21.73}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{21.74}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 10 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{21.75}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[33] se cumple para cualquier tiempo de paro.

21.5 Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 315. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{21.76}$$

Definición 316. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 235. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

21.6 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[34], $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 317. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{35}. \tag{21.77}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[36] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{21.79}$$

[33] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

[34] qué se quiere decir con el término: más general?

[35] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[36]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{21.78}$$

Definición 318. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x),\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}^{37}.$$

Nota 70. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t}=P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t)\ \ t,s\geq 0,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{21.80}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

21.7 Primer Condición de Regularidad

Definición 319. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t\rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 320 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}^*$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *tal que* $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0=x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 321. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E,\mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t,s\geq 0$,

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s}\ y\ X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{21.81}$$

iii) Para cualquier $x\in E$,$\mathbf{P}^x\{X_0=x\}=1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.

Definición 322 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha>0$ *y cualquier* $f\in S^\alpha$*, el proceso* $t\rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 323. *Un sistema* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

[37] Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

21.8 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 62 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^{k}\left(\left[|x_n|t\right]\right)\rightarrow P_{k}^{'}t,\ u.o.c., \tag{21.82}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)\rightarrow \alpha_{k}\left(t-\overline{U}_{k}\right)^{+},\ u.o.c., \tag{21.83}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)\rightarrow \mu_{k}\left(t-\overline{V}_{k}\right)^{+},\ u.o.c., \tag{21.84}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_{k}=1/m_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$.

Lema 63 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k\left(0\right)=\overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k\left(0\right)=\overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_k\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U^{x_n}_k\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V^{x_n}_k\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_{l}^{x}\left(t\right)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_{l}^{x}\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_{k}^{x}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_{k}^{x}\left(t\right)=Q_{k}^{x}\left(0\right)+E_{k}^{x}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_{k}^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)-S_{k}^{x}\left(T_{k}^{x}\left(t\right)\right) \tag{21.85}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_i^x(t)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x(t)\right)dI_i^x(t)=0, \tag{21.86}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x(t)=\left(T_1^x(t),\ldots,T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t)=\left(I_1^x(t),\ldots,I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x(T^x(t))=\left(S_1^x(T_1^x(t)),\ldots,S_K^x(T_K^x(t))\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t)=Q^x(0)+E^x(t)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x(T_l^x(t))\right)-S^x(T^x(t)), \tag{21.87}$$

$$Q^x(t)\geq 0, \tag{21.88}$$

$$T^x(0)=0,\text{ y }\overline{T}^x(t)\text{ es no decreciente,} \tag{21.89}$$

$$I^x(t)=et-CT^x(t)\text{ es no decreciente} \tag{21.90}$$

$$\int_0^\infty\left(CQ^x(t)\right)dI_i^x(t)=0, \tag{21.91}$$

$$\text{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}^x(\cdot),\overline{T}^x(\cdot)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{21.92}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\begin{cases}1, & S(k)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 236 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0),U^{x_{n_j}}(0),V^{x_{n_j}}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(0),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{21.93}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)\ \textit{u.o.c.} \tag{21.94}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{21.95}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0, \tag{21.96}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{21.97}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente}, \tag{21.98}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0, \tag{21.99}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{21.100}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 80. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{\left|x\right|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{\left|x\right|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{\left|x\right|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{\left|x\right|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Teorema 237 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [**?**])**.** *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r}\rightarrow\frac{1}{\mu^{r}}$, *cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$..

Proposición 81 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{21.101}$$

Proposición 82 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{21.102}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

21.9 Estabilidad

Definición 324 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en ??-??, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{21.103}$$

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 325 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ y $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$*

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk}\mu_l \overline{T}_l(t) \tag{21.104}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{21.105}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{21.106}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{21.107}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{21.108}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{21.109}$$

Lema 64 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 238 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Proposición 83 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0 \tag{21.110}$$

Lema 28 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{21.111}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 239 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{21.112}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 240 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{21.113}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x[|Q(t)|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q(0)|^p] \leq \kappa_r$$

Teorema 241 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{21.114}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 242 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{21.115}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 243 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{21.116}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{21.117}$$

Definición 326. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 327. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 328. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 329. *Una función $f : X \to \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 330. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 331. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 332. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 333. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 334. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{21.118}$$

Nota 71. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{21.119}$$

Teorema 244. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \to p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \to \{0, 1, \ldots,\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{21.120}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \to \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{\cup_{v\in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v\in K} \partial^* M_v. \tag{21.121}$$

y

$$\partial^* M_v = \left\{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\right\}. \tag{21.122}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{21.123}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf\left\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{21.124}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[38]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 11 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea* $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ *el número de saltos en* $[0, t]$. *Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{21.125}$$

[38] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 335. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 336. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 337. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 338. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{21.126}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 245. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

21.10 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 339. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)\,^{39}. \tag{21.127}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[40] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t)|\mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \; f \in b\mathcal{E}. \tag{21.129}$$

Definición 340. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x), \; t, s \geq 0, \; x \in E \; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 72. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \; f \in b\mathcal{E}. \tag{21.130}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

[39] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[40]

$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H|X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{21.128}$$

21.11 Primer Condición de Regularidad

Definición 341. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t\rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 342 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ tal que $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0=x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 343. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E,\mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t,s\geq 0$,*

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s}\text{ y } X_t\circ\theta_t=X_{t+s};\tag{21.131}$$

*iii) Para cualquier $x\in E$,$\mathbf{P}^x\{X_0=x\}=1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.*

Definición 344 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha>0$ y cualquier $f\in S^\alpha$, el proceso $t\rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 345. *Un sistema $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de (P_t).*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 65 (Lema 4.2, Dai[**?**])**.** *Sea $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ con $|x_n|\rightarrow\infty$, conforme $n\rightarrow\infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0)=\overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n\rightarrow\infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t])\rightarrow P_k^{'}t,\text{ u.o.c.,}\tag{21.132}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+,\text{ u.o.c.,}\tag{21.133}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+,\text{ u.o.c.,}\tag{21.134}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k=1/m_k=1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 66 (Lema 4.3, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{21.135}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j\in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty\left(\sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\right)dI_i^x(t) = 0, \tag{21.136}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$

$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = \left(S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t))\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x \left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x \left(T^x(t)\right), \tag{21.137}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{21.138}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \tag{21.139}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{21.140}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{21.141}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{21.142}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 246 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{21.143}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{21.144}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I - P)' M^{-1} \left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{21.145}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{21.146}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{21.147}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{21.148}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{21.149}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{21.150}$$

Definición 346 (Definición 4.1, , Dai [**?**]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 247 (Teorema 4.2, Dai[**?**]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t)=\frac{1}{|x|}Q^{x}(|x|t) \tag{21.151}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 347 (Definición 3.3, Dai y Meyn [**?**]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t)=0$, con $t\geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)|=1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [**?**].

Lema 29 (Lema 3.1, Dai y Meyn [**?**]). *Si el modelo de flujo definido por **??**-**??** es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0>0$ tal que $\overline{Q}(t)=0$ para cualquier $t\geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}(0)|+|\overline{A}(0)|+|\overline{B}(0)|\leq 1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 84. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}(0),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}(0),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}(0),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}(0),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^{0}(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0)=\overline{T}^{0}(0)=0$.

ii) Para todo $t\geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}(t)+\overline{T}_{k}^{0}(t)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}(t)=\overline{Q}_{k}(0)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}(t)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}(t)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}(t)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}(t)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}(t)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}(t)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}(t)$$

para $\overline{Q}_{k}(t)>0$.

Lema 67 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 248 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 249 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 68 (Lema 5.2 [?]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{21.152}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 250 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 85 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{21.153}$$

Proposición 86 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{21.154}$$

Proposición 87 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{21.155}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 251 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{21.156}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq k_p \tag{21.157}$$

Teorema 252 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t\rightarrow\infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right]<\infty$$

Teorema 253 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x)=f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 88 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right]=0 \tag{21.158}$$

Lema 30 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t)=max\left(n\geq 1 : \zeta(1)+\cdots+\zeta(n-1)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)]<\infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{21.159}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t\geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 254 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{21.160}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 255 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{21.161}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 256 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{21.162}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 257 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_{X}\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{21.163}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 258 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$|Q\left(T\right)|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ T\geq0, \tag{21.164}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{21.165}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$,
- también se define $\rho_{k}:=\lambda_{k}/\mu_{k}$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho<1$ para cuestiones de estabilidad.

21.12 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X=\left\{X\left(t\right),t\geq0\right\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [?].

21.12.1 Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [?]

.

21.13 Procesos Harris Recurrentes Positivos

Sea el proceso de Markov $X = \{X(t), t \geq 0\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] y Meyn y Down [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

21.14 Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X(t) = (Q(t), U(t), V(t)), \tag{21.166}$$

donde $Q(t)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U(t)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V(t)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U(t)$ como $V(t)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = (Q(0), U(0), V(0)) = (q, a, b)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \ldots, K$ se define

$$\begin{aligned} E_l^x(t) &= max\{r : U_l(0) + \xi_l(1) + \cdots + \xi_l(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0, \\ S_k^x(t) &= max\{r : V_k(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0. \end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s-éima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \left\{\phi^k(n), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \ldots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 69 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \; u.o.c., \tag{21.167}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow \alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^{+},\ u.o.c., \tag{21.168}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow \mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^{+},\ u.o.c., \tag{21.169}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$.

Lema 70 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\}\subset \mathbf{X}$ con $|x_n|\rightarrow\infty$, conforme $n\rightarrow\infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}_k.$$

a) Conforme $n\rightarrow\infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t\geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right)=_k^x\left(0\right)+E_k^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{21.170}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_i^x\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_{0}^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{21.171}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))',$$
$$I^x(t) = (I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t))'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{21.172}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{21.173}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{21.174}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{21.175}$$

$$\int_0^{\infty} \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{21.176}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{21.177}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 259 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{21.178}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \;\; u.o.c. \tag{21.179}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I - P)' M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{21.180}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{21.181}$$

$$\overline{T}(t) \textit{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{21.182}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \textit{ es no decreciente}, \tag{21.183}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{21.184}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{21.185}$$

Definición 348 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta>0$ *que depende de* μ,α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv0$.

Teorema 260 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{21.186}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 349 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}\left(t\right) \tag{21.187}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq0 \textit{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{21.188}$$

$$\overline{T}_{k}\left(0\right)=0, \textit{ y } \overline{T}_{k}\left(\cdot\right) \textit{ es no decreciente}, \tag{21.189}$$

$$\overline{I}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{k\in C_{i}}\overline{T}_{k}\left(t\right) \textit{ es no decreciente} \tag{21.190}$$

$$\overline{I}_{i}\left(\cdot\right) \textit{ se incrementa al tiempo } t \textit{ cuando } \sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0 \tag{21.191}$$

$$\textit{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right) \textit{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{21.192}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 350 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}\left(0\right),\overline{B}\left(0\right)\right)\in\mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??***, junto con la condición:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=\overline{Q}\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{A}\left(0\right)\right)^{+}-\left(I-P^{'}\right)M\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{B}\left(0\right)\right)^{+} \tag{21.193}$$

Definición 351 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$*, con* $t\geq t_{0}$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 31 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_{0}>0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$ *para cualquier* $t\geq t_{0}$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq1$.

21.15 Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad

21.16 Teorema 2.1

El resultado principal de Down [?] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 261 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p*, y para cada condición inicial* $x \in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \sup \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{21.194}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{21.195}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$*. Donde* π *es la probabilidad invariante para* $\mathbf{X}$*.*

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}*:*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right] = 0. \tag{21.196}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right) ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{21.197}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$*.*

Proposición 89 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{21.198}$$

Lema 32 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea* $\{\zeta\left(k\right) : k \in F\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $(0, \infty)$*, y sea* $E\left(t\right) = max\left(n \geq 1 : \zeta\left(1\right) + \cdots + \zeta\left(n-1\right) \leq t\right)$*. Si* $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right] < \infty$*, entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{21.199}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 262 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right] ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{21.200}$$

para $t > 0$ *y* $x \in X$*. En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 263 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\| P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot) \right\|_{f_p}, \; t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{21.201}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x \left[|Q(t)|^p \right] = \mathbb{E}_\pi \left[|Q(0)|^p \right] \leq \kappa_r$$

Teorema 264 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} \left\| P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot) \right\|_f = 0. \tag{21.202}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x \left[Q(t) \right] - \mathbb{E}_\pi \left[Q(0) \right] | = 0.$$

Teorema 265 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_o^t f(X(s))\, ds = \pi(f) := \int f(x)\, \pi(dx) \tag{21.203}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

21.17 Teorema 2.2

Teorema 266 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \; T \geq 0, \tag{21.204}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \left\{ \mathbb{X} \rightarrow \infty \right\} \geq q. \tag{21.205}$$

21.18 Teorema 2.3

Teorema 267 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{21.206}$$

*i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema **??**.*

*ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema **??***

21.19 Definiciones Básicas

Definición 352. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 353. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 354. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b)\in\mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 355. *Una función $f:X\rightarrow\mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x\in X:f(x)>\alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha,\infty))=\{x\in X:f(x)>\alpha\}\in\mathcal{F}.$$

Definición 356. *Sean $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$, $i=1,2,\ldots,$ espacios medibles y $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1,\omega_2,\ldots,)$ tales que $\omega_i\in\Omega_i$, $i=1,2,\ldots,$. Si $B^n\subset\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$, definimos $B_n=\{\omega\in\Omega:(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_i$.*

Definición 357. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t\geq0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t\geq0$, si para $s<t$ implica que $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s\leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s\leq t$ sea Borel medible.*

Definición 358. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t\geq0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s)\subset\mathcal{F}(t)$ para $s\leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T:\Omega\rightarrow[0,\infty]$ tal que $\{T\leq t\}\in\mathcal{F}(t)$ para cada $t\geq0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t\geq0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t)=\mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 359. *Sea $X(t), t\geq0$ proceso estocástico, con (S,χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s,t\in I$, I conjunto de índices, $s<t$, se tiene que $\mathcal{F}(s)\subset\mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 360. *Sea $X(t), t\geq0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t),\mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B\in\chi$, y $s,t\in I$, $s<t$ se cumple que*

$$P\{X(t)\in B|\mathcal{F}(s)\}=P\{X(t)\in B|X(s)\}. \tag{21.207}$$

Nota 73. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t)=\mathcal{F}_0(t)=\mathcal{F}(X(r), r\leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t)\in B|X(r), r\leq s\}=P\{X(t)\in B|X(s)\} \tag{21.208}$$

Teorema 268. *Sea $(X_n,\mathcal{F}_n, n=0,1,\ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0,χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m,n=0,1,\ldots,$ $m<n$, que por notación se escribirá como $p(m,n,x,B)\rightarrow p_{mn}(x,B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T:\Omega\rightarrow\{0,1,\ldots,\}$. Supóngase que $T\geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B\in\chi_0$, entonces*

$$P\{X(T)\in B, T<\infty|\mathcal{F}(S)\}=p(S,T,X(s),B) \tag{21.209}$$

en $\{T<\infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 90. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^0\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0),\frac{1}{|x|}A_k^x(0),\frac{1}{|x|}B_k^x(0),\frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_k(0),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K} \left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 71 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 269 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 270 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$*, para toda* $t \geq t_0$.

Lema 72 (Lema 5.2 [?]). *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$*, y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$*, entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{21.210}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t \geq \delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 271 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$*, cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 91 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{21.211}$$

Proposición 92 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{21.212}$$

Proposición 93 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{21.213}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 272 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{21.214}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$Limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \tag{21.215}$$

Teorema 273 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \to 0$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t \to \infty} \mathbb{E}_x \left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi \left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 274 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t \to \infty} t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot)\right|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t \to \infty} t^{(p-1)\left|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]\right| = 0}.$$

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$lim_{x \to \infty} \mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0. \tag{21.216}$$

(S2.)

$$\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}, \tag{21.217}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)] \geq 0$.
- Se define
$$\delta^* := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)]. \tag{21.218}$$
- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por
$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\right) \tag{21.219}$$
definido en el espacio producto:
$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1,2,\ldots,K\} \times \{1,2,\ldots,S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{21.220}$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([**?**])

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

21.20 Preliminares

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0$
2) $\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}$para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m} = r_{j,j^{'}}$
- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^{*} := \sum_{j,j^{'}} p_j r_{j,j^{'}}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(i)\right]. \tag{21.221}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m, se denota por $B_m(t)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t; $B_m^0(t)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t, finalmente sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{21.222}$$

para $k = 1,\ldots,K$ y $m = 1,2,\ldots,M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times (\{1,2,\ldots,K\} \times \{1,2,\ldots,S\})^M \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1,\ldots,\xi_K,\eta_1,\ldots,\eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1,\ldots,K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{21.223}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{21.224}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto $A2)$ para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [**?**] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

21.21 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [**?**], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (**??**), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([**?**], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [**?**]

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [**?**]) en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la σ-algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D)$$

Definición 361. *Una medida no cero π en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ es* **invariante** *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbf{X}} P^t(x, D)\,\pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 362. *El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 74. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama Proceso Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\,\pi(dx)$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente.

Definición 363. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 73 (Lema 3.1, Dai[?])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{21.225}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris Recurrente Positivo.

Lema 74 (Lema 3.1, Dai [?])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{|x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 275 (Teorema 3.1, Dai[?])**.** *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{21.226}$$

*entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B = \{|x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.*

Nota 75. *En Meyn and Tweedie [?] muestran que si $P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

21.22 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathrm{X}$, sea $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{21.227}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{21.228}$$

para $k=1,2,\ldots,K$.

$$\overline{Q}_k\left(t\right)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{21.229}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente}, \tag{21.230}$$

para $k=1,2,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$,

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}^{0}_{m,k}\left(t\right)+\overline{T}_{m,k}\left(t\right)=t \text{ para } m=1,2,\ldots,M. \tag{21.231}$$

De acuerdo a Dai [?], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (**??**)-(**??**), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 364 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en (**??**) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta>0$ que depende de μ,λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv 0$.*

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 276 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{21.232}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 365 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$, con $t\geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 33 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por **??**-**??** es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0>0$ tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$ para cualquier $t\geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 277 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x\in X$

$$limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_p, \tag{21.233}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right]\leq\kappa_{r}, \tag{21.234}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)\right]=0. \tag{21.235}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-}c.s. \tag{21.236}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 278 (Teorema 2.3, Down [?])**.** *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_{j}}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_{s}}\right)\delta^{*} \tag{21.237}$$

i) Si $\rho<1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema **??***.*

ii) Si $\rho<1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema **??**

Teorema 279. *Sea $(X_{n},\mathcal{F}_{n},n=0,1,\ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_{0},χ_{0}) generado por una distribuición inicial P_{o} y probabilidad de transición p_{mn}, para $m,n=0,1,\ldots,$ $m<n$, que por notación se escribirá como $p\left(m,n,x,B\right)\rightarrow p_{mn}\left(x,B\right)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_{n}$. Sea T función medible, $T:\Omega\rightarrow\{0,1,\ldots,\}$. Supóngase que $T\geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B\in\chi_{0}$, entonces*

$$P\left\{X\left(T\right)\in B,T<\infty|\mathcal{F}\left(S\right)\right\}=p\left(S,T,X\left(s\right),B\right) \tag{21.238}$$

en $\{T<\infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d:K\rightarrow\mathbb{N}$ función. Para $v\in K$, M_{v} es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E=\cup_{v\in K}M_{v}=\left\{(v,\zeta):v\in K,\zeta\in M_{v}\right\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E}=\left\{\cup_{v\in K}A_{v}:A_{v}\in\mathcal{M}_{v}\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_{v}. Entonces $(E,\mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_{t}=(v_{t},\zeta_{t})$. La distribución de $(\mathbf{x}_{t})$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_{v},v\in K)$.

ii) Una función medible $\lambda:E\rightarrow\mathbb{R}_{+}$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{21.239}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{21.240}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{21.241}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \\ exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{21.242}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[41]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 12 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{21.243}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 366. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 367. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

[41] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

Definición 368. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{21.244}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 280. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 369. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*[42]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B). \tag{21.245}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[43] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) |\mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{21.247}$$

Definición 370. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 76. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) |\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{21.248}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 371. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 372 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

[42] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[43]

$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H|X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{21.246}$$

Definición 373. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{21.249}$$

*iii) Para cualquier $x \in E$,$\mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.*

Definición 374 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 375. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de (P_t).*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 75 (Lema 4.2, Dai[**?**])**.** *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k ([|x_n| t]) \rightarrow P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{21.250}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n} (|x_n| t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{21.251}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n} (|x_n| t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{21.252}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 76 (Lema 4.3, Dai[**?**])**.** *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n} (|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n} (|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{21.253}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{21.254}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{21.255}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{21.256}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{21.257}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{21.258}$$

$$\int_0^{\infty}\left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{21.259}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^{x}\left(\cdot\right), \overline{T}^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{21.260}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S\left(k\right) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 281 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right), U^{x_{n_j}}\left(0\right), V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right) \to \left(\overline{Q}\left(0\right), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{21.261}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right) \text{ u.o.c.} \tag{21.262}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right) = Q\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - \left(I - P\right)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{21.263}$$

$$\overline{Q}\left(t\right) \geq 0, \tag{21.264}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{21.265}$$

$$\overline{I}\left(t\right) = et - C\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente,} \tag{21.266}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right) = 0, \tag{21.267}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{21.268}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 94. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x\left(0\right), \frac{1}{|x|}A_k^x\left(0\right), \frac{1}{|x|}B_k^x\left(0\right), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}\left(0\right)\right) \to \left(\overline{Q}_k\left(0\right), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ y $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}\left(0\right) = \overline{T}^{0}\left(0\right) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k\left(t\right) + \overline{T}_k^{0}\left(t\right)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k\left(t\right) = \overline{Q}_k\left(0\right) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k\left(t\right)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k\left(t\right) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k\left(t\right) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 77 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 282 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 78 (Lema 5.2 [?]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{21.269}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 283 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 95 (Proposición 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{21.270}$$

Proposición 96 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p)\, dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{21.271}$$

Proposición 97 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{21.272}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 284 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{21.273}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{21.274}$$

Teorema 285 (Teorema 6.2 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right]<\infty$$

Teorema 286 (Teorema 6.3 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_x\left[Q_t\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q_0\right]\right|=0.$$

Proposición 98 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{21.275}$$

Lema 34 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [?]). *Sea $\left\{\zeta\left(k\right):k\in F\right\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $\left(0,\infty\right)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq 1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{21.276}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t\geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 287 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{21.277}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 288 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{21.278}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 289 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{21.279}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 290 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_{X})$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{21.280}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 291 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$|Q\left(T\right)|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ T\geq0, \tag{21.281}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{21.282}$$

Definición 376. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X,\mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A\in\mathcal{F}$.*

Definición 377. *Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X=\bigcup_{n\geq1}X_{n}$ con $X_{n}\in\mathcal{F}$ y $\mu\left(X_{n}\right)<\infty$.*

Definición 378. *Sea X el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b)\in\mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 379. *Una función $f:X\rightarrow\mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\left\{x\in X:f\left(x\right)>\alpha\right\}$$

pertenece a $\mathcal{F}$. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}\left(\left(\alpha,\infty\right)\right)=\left\{x\in X:f\left(x\right)>\alpha\right\}\in\mathcal{F}.$$

Definición 380. *Sean $(\Omega_{i},\mathcal{F}_{i})$, $i=1,2,\ldots,$ espacios medibles y $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_{i}$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_{1},\omega_{2},\ldots,)$ tales que $\omega_{i}\in\Omega_{i}$, $i=1,2,\ldots,$. Si $B^{n}\subset\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_{i}$, definimos $B_{n}=\{\omega\in\Omega:(\omega_{1},\omega_{2},\ldots,\omega_{n})\in B^{n}\}$. Al conjunto B_{n} se le llama* cilindro *con base B^{n}, el cilindro es llamado medible si $B^{n}\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_{i}$.*

Definición 381. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 382. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 383. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 384. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{21.283}$$

Nota 77. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{21.284}$$

21.23 Procesos de Estados de Markov

Teorema 292. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{21.285}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{ \bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v \right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{21.286}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{21.287}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{21.288}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf\left\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \to \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \left\{ \begin{array}{ll} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{array} \right. \tag{21.289}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \left\{ \begin{array}{ll} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{array} \right.$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 13 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{21.290}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[44] se cumple para cualquier tiempo de paro.

21.24 Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 385. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{21.291}$$

Definición 386. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 293. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

[44]Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

21.25 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[45], $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 387. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{46}. \tag{21.292}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[47] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t)|\mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \; f \in b\mathcal{E}. \tag{21.294}$$

Definición 388. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}^{48}.$$

Nota 78. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{21.295}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

21.26 Primer Condición de Regularidad

Definición 389. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 390 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov (P_t) en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 391. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

[45] qué se quiere decir con el término: más general?

[46] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[47]

$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H|X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{21.293}$$

[48] Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$*,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{21.296}$$

iii) *Para cualquier* $x \in E, \mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$*.*

Definición 392 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \to f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 393. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t)*.*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a* $\mathcal{G}_t$*.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

21.27 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 79 (Lema 4.2, Dai[**?**])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$*, casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \text{ u.o.c.}, \tag{21.297}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{21.298}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{21.299}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$*.*

Lema 80 (Lema 4.3, Dai[**?**])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k(0) = \overline{V}_k.$$

a) *Conforme* $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x\left(t\right)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_k^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right) = Q_k^x\left(0\right) + E_k^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{21.300}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x\left(t\right) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x\left(t\right)\right) dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{21.301}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right) = \left(T_1^x\left(t\right), \ldots, T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$
$$I^x\left(t\right) = \left(I_1^x\left(t\right), \ldots, I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x\left(t\right) = Q^x\left(0\right) + E^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S^x\left(T^x\left(t\right)\right), \tag{21.302}$$

$$Q^x\left(t\right) \geq 0, \tag{21.303}$$

$$T^x\left(0\right) = 0, \text{ y } \overline{T}^x\left(t\right) \text{ es no decreciente}, \tag{21.304}$$

$$I^x\left(t\right) = et - CT^x\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{21.305}$$

$$\int_0^{\infty}\left(CQ^x\left(t\right)\right) dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{21.306}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^{x}(\cdot), \overline{T}^{x}(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{21.307}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 294 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{21.308}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \;\; u.o.c. \tag{21.309}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{21.310}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{21.311}$$

$$\overline{T}(t) \;\; \textit{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{21.312}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \;\; \textit{es no decreciente,} \tag{21.313}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{21.314}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{21.315}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 99. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^{0}(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^{0}(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^{0}(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0 (t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0 (t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k (t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0 (t)$$

para $\overline{Q}_k (t) > 0$.

Teorema 295 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.*

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$*, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..*

Proposición 100 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p) \, dt\right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{21.316}$$

Proposición 101 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) \, dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s)) \, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{21.317}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

21.28 Estabilidad

Definición 394 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en ??-??, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{21.318}$$

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 395 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ y $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$*

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk} \mu_l \overline{T}_l(t) \tag{21.319}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{21.320}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{21.321}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{21.322}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \, dI_i^x(t) = 0 \tag{21.323}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{21.324}$$

Lema 81 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 296 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Proposición 102 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{21.325}$$

Lema 35 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{21.326}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 297 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{21.327}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 298 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{21.328}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 299 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{21.329}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 300 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{21.330}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *con* $\pi\left(|f|\right) < \infty$*, la ecuación anterior se cumple.*

Teorema 301 (Teorema 2.2, Down [**?**])**.** *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_0, c_0 \geq 0$*,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{21.331}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$*, con* $|Q\left(0\right)| = 1$*. Entonces para cualquier* $0 < q \leq 1$*, existe* $B < 0$ *tal que para cualquier* $|x| \geq B$*,*

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \to \infty\right\} \geq q. \tag{21.332}$$

Definición 396. *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{F}$ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* X*, la pareja* $(X, \mathcal{F})$ *es llamado espacio medible. Un subconjunto* A *de* X *es llamado medible, o medible con respecto a* $\mathcal{F}$*, si* $A \in \mathcal{F}$*.*

Definición 397. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *espacio de medida. Se dice que la medida* μ *es* σ*-finita si se puede escribir* $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ *con* $X_n \in \mathcal{F}$ *y* $\mu\left(X_n\right) < \infty$*.*

Definición 398. *Sea* X *el conjunto de los úmeros reales* $\mathbb{R}$*. El álgebra de Borel es la* σ*-álgebra* B *generada por los intervalos abiertos* $(a, b) \in \mathbb{R}$*. Cualquier conjunto en* B *es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 399. *Una función* $f : X \to \mathbb{R}$*, es medible si para cualquier número real* α *el conjunto*

$$\left\{x \in X : f\left(x\right) > \alpha\right\}$$

pertenece a X*. Equivalentemente, se dice que* f *es medible si*

$$f^{-1}\left(\left(\alpha, \infty\right)\right) = \left\{x \in X : f\left(x\right) > \alpha\right\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 400. *Sean* $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$*,* $i = 1, 2, \ldots,$ *espacios medibles y* $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$ *el conjunto de todas las sucesiones* $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ *tales que* $\omega_i \in \Omega_i$*,* $i = 1, 2, \ldots,$*. Si* $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$*, definimos* $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$*. Al conjunto* B_n *se le llama* cilindro *con base* B^n*, el cilindro es llamado medible si* $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_i$*.*

Definición 401. *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $X\left(t\right), t \geq 0$ *proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de* σ*-álgebras* $\mathcal{F}_t$*, para* $t \geq 0$*, si para* $s < t$ *implica que* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$*, y* $X\left(t\right)$ *es* $\mathcal{F}_t$*-medible para cada* t*. Si no se especifica* $\mathcal{F}_t$ *entonces se toma* $\mathcal{F}_t$ *como* $\mathcal{F}\left(X\left(s\right), s \leq t\right)$*, la más pequeña* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω *que hace que cada* $X\left(s\right)$*, con* $s \leq t$ *sea Borel medible.*

Definición 402. *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $\left\{\mathcal{F}\left(t\right), t \geq 0\right\}$ *familia creciente de sub* σ*-álgebras. es decir,* $\mathcal{F}\left(s\right) \subset \mathcal{F}\left(t\right)$ *para* $s \leq t$*. Un tiempo de paro para* $\mathcal{F}\left(t\right)$ *es una función* $T : \Omega \to [0, \infty]$ *tal que* $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}\left(t\right)$ *para cada* $t \geq 0$*. Un tiempo de paro para el proceso estocástico* $X\left(t\right), t \geq 0$ *es un tiempo de paro para las* σ*-álgebras* $\mathcal{F}\left(t\right) = \mathcal{F}\left(X\left(s\right)\right)$*.*

Definición 403. *Sea* $X\left(t\right), t \geq 0$ *proceso estocástico, con* (S, χ) *espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a* $\left\{\mathcal{F}\left(t\right)\right\}$*, es decir, si para cualquier* $s, t \in I$*,* I *conjunto de índices,* $s < t$*, se tiene que* $\mathcal{F}\left(s\right) \subset \mathcal{F}\left(t\right)$ *y* $X\left(t\right)$ *es* $\mathcal{F}\left(t\right)$*-medible,*

Definición 404. *Sea* $X\left(t\right), t \geq 0$ *proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a* $\mathcal{F}\left(t\right)$ *o que* $\left\{X\left(t\right), \mathcal{F}\left(t\right)\right\}$ *es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto* $B \in \chi$*, y* $s, t \in I$*,* $s < t$ *se cumple que*

$$P\left\{X\left(t\right) \in B|\mathcal{F}\left(s\right)\right\} = P\left\{X\left(t\right) \in B|X\left(s\right)\right\}. \tag{21.333}$$

Nota 79. *Si se dice que* $\left\{X\left(t\right)\right\}$ *es un Proceso de Markov sin mencionar* $\mathcal{F}\left(t\right)$*, se asumirá que*

$$\mathcal{F}\left(t\right) = \mathcal{F}_0\left(t\right) = \mathcal{F}\left(X\left(r\right), r \leq t\right),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\left\{X\left(t\right) \in B|X\left(r\right), r \leq s\right\} = P\left\{X\left(t\right) \in B|X\left(s\right)\right\} \tag{21.334}$$

Teorema 302. *Sea* $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ *Proceso de Markov con espacio de estados* (S_0, χ_0) *generado por una distribuición inicial* P_o *y probabilidad de transición* p_{mn}*, para* $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$*, que por notación se escribirá como* $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$*. Sea* S *tiempo de paro relativo a la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_n$*. Sea* T *función medible,* $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$*. Supóngase que* $T \geq S$*, entonces* T *es tiempo de paro. Si* $B \in \chi_0$*, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{21.335}$$

en $\{T < \infty\}$*.*

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{21.336}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{21.337}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{21.338}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{21.339}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[49]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

[49]Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 14 (Supuesto 3.1, Davis [**?**]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{21.340}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 405. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 406. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 407. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 408. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \textit{ es compacto en } E\right\}. \tag{21.341}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 303. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

21.29 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 409. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)\,^{50}. \tag{21.342}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[51] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{21.344}$$

Definición 410. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

[50] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[51]
$$\mathbb{P}\left\{H | \mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H | X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{21.343}$$

Nota 80. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_{t+s}\right)|\mathcal{G}_t\right\} = P_s f\left(X_t\right)\ t,s \geq 0,\ f \in b\mathcal{E}. \tag{21.345}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

21.30 Primer Condición de Regularidad

Definición 411. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 412 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* $/P_t)$ *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 413. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E, \mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{21.346}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 414 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 415. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 82 (Lema 4.2, Dai[**?**])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$*, conforme* $n \rightarrow \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'}t, \text{ u.o.c.}, \tag{21.347}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{21.348}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{21.349}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 83 (Lema 4.3, Dai[**?**]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{21.350}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j\in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty\left(\sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\right)dI_i^x(t) = 0, \tag{21.351}$$

para $i=1,\dots,d$.

Hacer

$$T^x(t)=\left(T_1^x(t),\dots,T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t)=\left(I_1^x(t),\dots,I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right),\dots,S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t)=Q^x(0)+E^x(t)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right)-S^x\left(T^x(t)\right), \tag{21.352}$$

$$Q^x(t)\geq 0, \tag{21.353}$$

$$T^x(0)=0,\ \text{y}\ \overline{T}^x(t)\ \text{ es no decreciente}, \tag{21.354}$$

$$I^x(t)=et-CT^x(t)\ \text{ es no decreciente} \tag{21.355}$$

$$\int_0^\infty\left(CQ^x(t)\right)dI_i^x(t)=0, \tag{21.356}$$

$$\text{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}^x(\cdot),\overline{T}^x(\cdot)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{21.357}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\begin{cases}1, & S(k)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 304 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\to\infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}|\to\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0),U^{x_{n_j}}(0),V^{x_{n_j}}(0)\right)\to\left(\overline{Q}(0),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{21.358}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\to\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)\ \ u.o.c. \tag{21.359}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t)=Q(0)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-(I-P)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}(t)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{21.360}$$

$$\overline{Q}(t)\geq 0, \tag{21.361}$$

$$\overline{T}(t)\ \ \textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{21.362}$$

$$\overline{I}(t)=et-C\overline{T}(t)\ \ \textit{es no decreciente}, \tag{21.363}$$

$$\int_0^\infty\left(C\overline{Q}(t)\right)d\overline{I}(t)=0, \tag{21.364}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}(\cdot),\overline{T}(\cdot)\right)\textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{21.365}$$

Definición 416 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (*??*)-(*??*) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta>0$ *que depende de* μ,α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv0$.

Teorema 305 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{21.366}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??-??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 417 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$*, con* $t\geq t_{0}$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 36 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??-??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_{0}>0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$ *para cualquier* $t\geq t_{0}$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq1$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 103. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 84 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 306 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 307 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 85 (Lema 5.2 [?]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{21.367}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 308 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 104 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{21.368}$$

Proposición 105 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} (1 + |X(t)|^p)\, dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{21.369}$$

Proposición 106 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{21.370}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 309 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{21.371}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq k_p \tag{21.372}$$

Teorema 310 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 311 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 107 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{21.373}$$

Lema 37 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{21.374}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 312 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{21.375}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 313 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\| P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{21.376}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[\left|Q\left(t\right)\right|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[\left|Q\left(0\right)\right|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 314 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{21.377}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]\right|=0.$$

Teorema 315 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_{X}\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{21.378}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(\left|f\right|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 316 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$\left|Q\left(T\right)\right|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ T\geq0, \tag{21.379}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $\left|Q\left(0\right)\right|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $\left|x\right|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{21.380}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$,
- también se define $\rho_{k}:=\lambda_{k}/\mu_{k}$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho<1$ para cuestiones de estabilidad.

21.31 Procesos de Estados Markoviano para el Sistema

21.32 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X=\left\{X\left(t\right),t\geq0\right\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [?].

21.32.1 Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [?]

.

21.33 Procesos Harris Recurrentes Positivos

Sea el proceso de Markov $X = \{X(t), t \geq 0\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] y Meyn y Down [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

21.34 Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X(t) = (Q(t), U(t), V(t)), \tag{21.381}$$

donde $Q(t)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U(t)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V(t)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U(t)$ como $V(t)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = (Q(0), U(0), V(0)) = (q, a, b)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \ldots, K$ se define

$$\begin{aligned} E_l^x(t) &= max\{r : U_l(0) + \xi_l(1) + \cdots + \xi_l(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0, \\ S_k^x(t) &= max\{r : V_k(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0. \end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s-éima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \left\{\phi^k(n), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \ldots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 86 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \; u.o.c., \tag{21.382}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{21.383}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{21.384}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$.

Lema 87 (Lema 4.3, Dai[?])**.** *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+,\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right) =_k^x \left(0\right) + E_k^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{21.385}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x\left(t\right) = t - \sum_{j\in C_i} T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{21.386}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{21.387}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{21.388}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{21.389}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{21.390}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{21.391}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{21.392}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso}. \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 317 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{21.393}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{21.394}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I - P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{21.395}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{21.396}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{21.397}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente}, \tag{21.398}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{21.399}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{21.400}$$

Definición 418 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, *se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Teorema 318 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \tag{21.401}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 419 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)'$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)'$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk} \mu_l \overline{T}_l(t) \tag{21.402}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{21.403}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{21.404}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{21.405}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{21.406}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{21.407}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 420 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??**, *junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P'\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{21.408}$$

Definición 421 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 38 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

21.35 Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad

21.36 Teorema 2.1

El resultado principal de Down [?] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 319 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \sup \frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds \leq \kappa_{p}, \tag{21.409}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right]\leq\kappa_{r}, \tag{21.410}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]=0. \tag{21.411}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-}c.s. \tag{21.412}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$.

Proposición 108 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{21.413}$$

Lema 39 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta\left(k\right):k\in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $\left(0,\infty\right)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{21.414}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 320 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{21.415}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 321 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{21.416}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[\left|Q\left(t\right)\right|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[\left|Q\left(0\right)\right|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 322 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{21.417}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]\right|=0.$$

Teorema 323 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_{X}\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{21.418}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(\left|f\right|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

21.37 Teorema 2.2

Teorema 324 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$\left|Q\left(T\right)\right|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ T\geq0, \tag{21.419}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $\left|Q\left(0\right)\right|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $\left|x\right|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{21.420}$$

21.38 Teorema 2.3

Teorema 325 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_{j}}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_{s}}\right)\delta^{*} \tag{21.421}$$

i) Si $\rho<1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema **??**.

ii) Si $\rho<1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema **??**

21.39 Definiciones Básicas

Definición 422. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 423. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 424. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 425. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 426. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 427. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 428. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 429. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 430. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{21.422}$$

Nota 81. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{21.423}$$

Teorema 326. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{21.424}$$

en $\{T < \infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 109. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 88 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 327 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 328 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* (α,μ,T,U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$, *para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 89 (Lema 5.2 [?]). *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r} \tag{21.425}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 329 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 110 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{21.426}$$

Proposición 111 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1+|X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right) \tag{21.427}$$

Proposición 112 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{21.428}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 330 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{21.429}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{21.430}$$

Teorema 331 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 332 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

21.40 Proceso de Estados Markoviano para el Sistema

Sean $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ el tiempo residual de arribos a la cola k, para cada servidor m, sea $H_m(t)$ par ordenado que consiste en la cola que está siendo atendida y la política de servicio que se está utilizando. $B_m(t)$ los tiempos de servicio residuales, $B_m^0(t)$ el tiempo residual de traslado, $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H_m(t)$.

El proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{21.431}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{21.432}$$
$$P(\xi_k(1) + \ldots \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\, dx0 \text{ y} \tag{21.433}$$
$$\int_0^\infty q_k(x)\, dx > 0 \tag{21.434}$$

21.41 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho, Sharpe [?], en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$.

Se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable.

Definición 431. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 432. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 433. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 434. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{21.435}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 333. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

21.42 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f\left(X_r\right) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 435. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B)^{52}. \tag{21.436}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov [53] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_t\right)|\mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t}f\left(X_t\right) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{21.438}$$

Definición 436. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t\left(P_s f\right)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 82. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_{t+s}\right)|\mathcal{G}_t\right\} = P_s f\left(X_t\right) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{21.439}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

21.43 Primer Condición de Regularidad

Definición 437. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 438 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 439. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

[52] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[53]
$$\mathbb{P}\left\{H|\mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H|X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{21.437}$$

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{21.440}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 440 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \to f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 441. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Definición 442. *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{F}$ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* X*, la pareja* $(X, \mathcal{F})$ *es llamado espacio medible. Un subconjunto* A *de* X *es llamado medible, o medible con respecto a* $\mathcal{F}$*, si* $A \in \mathcal{F}$.

Definición 443. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *espacio de medida. Se dice que la medida* μ *es* σ*-finita si se puede escribir* $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ *con* $X_n \in \mathcal{F}$ *y* $\mu(X_n) < \infty$.

Definición 444. *Sea* X *el conjunto de los úmeros reales* $\mathbb{R}$*. El álgebra de Borel es la* σ*-álgebra* B *generada por los intervalos abiertos* $(a, b) \in \mathbb{R}$*. Cualquier conjunto en* B *es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 445. *Una función* $f : X \to \mathbb{R}$*, es medible si para cualquier número real* α *el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X*. Equivalentemente, se dice que* f *es medible si*

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 446. *Sean* $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ *espacios medibles y* $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ *el conjunto de todas las sucesiones* $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ *tales que* $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$*. Si* $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$*, definimos* $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$*. Al conjunto* B_n *se le llama* cilindro *con base* B^n*, el cilindro es llamado medible si* $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.

Definición 447. *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de* σ*-álgebras* $\mathcal{F}_t$*, para* $t \geq 0$*, si para* $s < t$ *implica que* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$*, y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}_t$*-medible para cada* t*. Si no se especifica* $\mathcal{F}_t$ *entonces se toma* $\mathcal{F}_t$ *como* $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$*, la más pequeña* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω *que hace que cada* $X(s)$*, con* $s \leq t$ *sea Borel medible.*

Definición 448. *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ *familia creciente de sub* σ*-álgebras. es decir,* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *para* $s \leq t$*. Un tiempo de paro para* $\mathcal{F}(t)$ *es una función* $T : \Omega \to [0, \infty]$ *tal que* $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ *para cada* $t \geq 0$*. Un tiempo de paro para el proceso estocástico* $X(t), t \geq 0$ *es un tiempo de paro para las* σ*-álgebras* $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.

Definición 449. *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, con* (S, χ) *espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a* $\{\mathcal{F}(t)\}$*, es decir, si para cualquier* $s, t \in I$*,* I *conjunto de índices,* $s < t$*, se tiene que* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}(t)$*-medible,*

Definición 450. *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a* $\mathcal{F}(t)$ *o que* $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ *es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto* $B \in \chi$*, y* $s, t \in I$*,* $s < t$ *se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{21.441}$$

Nota 83. *Si se dice que* $\{X(t)\}$ *es un Proceso de Markov sin mencionar* $\mathcal{F}(t)$, *se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{21.442}$$

Teorema 334. *Sea* $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ *Proceso de Markov con espacio de estados* (S_0, χ_0) *generado por una distribuición inicial* P_o *y probabilidad de transición* p_{mn}, *para* $m, n = 0, 1, \ldots$, $m < n$, *que por notación se escribirá como* $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. *Sea* S *tiempo de paro relativo a la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_n$. *Sea* T *función medible,* $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. *Supóngase que* $T \geq S$, *entonces* T *es tiempo de paro. Si* $B \in \chi_0$, *entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{21.443}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{21.444}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{21.445}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{21.446}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{21.447}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[54]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 15 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{21.448}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 451. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 452. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 453. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 454. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \textit{ es compacto en } E\}. \tag{21.449}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 335. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

21.44 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 455. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B)^{55}. \tag{21.450}$$

[54] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

[55] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E,\mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[56] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_t\right)|\mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t}f\left(X_t\right) \;\; s\leq t\in I,\;\; f\in b\mathcal{E}. \tag{21.452}$$

Definición 456. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f\left(x\right) = P_t\left(P_s f\right)\left(x\right),\;\; t,s\geq 0,\;\; x\in E\;\; f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 84. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_{t+s}\right)|\mathcal{G}_t\right\} = P_s f\left(X_t\right) \;\; t,s\geq 0,\;\; f\in b\mathcal{E}. \tag{21.453}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

21.45 Primer Condición de Regularidad

Definición 457. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t\rightarrow X_t\left(w\right)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 458 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}$ y $P_t\left(b\mathcal{E}^*\right)\subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ tal que $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 459. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E,\mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) *$(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) *$(\theta_t)_{t\geq 0}$ es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t,s\geq 0$,*

$$\theta_t\circ\theta_s = \theta_{t+s} \;\; y \;\; X_t\circ\theta_t = X_{t+s}; \tag{21.454}$$

iii) *Para cualquier $x\in E$,$\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}=1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.*

Definición 460 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha>0$ y cualquier $f\in S^\alpha$, el proceso $t\rightarrow f\left(X_t\right)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 461. *Un sistema $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

[56]
$$\mathbb{P}\left\{H|\mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H|X_t\right\} \;\; H\in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{21.451}$$

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 90 (Lema 4.2, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'}t,\ u.o.c., \tag{21.455}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k\left(t - \overline{U}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{21.456}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k\left(t - \overline{V}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{21.457}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 91 (Lema 4.3, Dai[**?**]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+,\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{21.458}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{21.459}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{21.460}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{21.461}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{21.462}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{21.463}$$

$$\int_0^{\infty} \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{21.464}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{21.465}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 336 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{21.466}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right) \ u.o.c. \tag{21.467}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}\left(t\right) = Q\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - \left(I - P\right)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{21.468}$$

$$\overline{Q}\left(t\right) \geq 0, \tag{21.469}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \ \textit{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{21.470}$$

$$\overline{I}\left(t\right) = et - C\overline{T}\left(t\right) \ \textit{es no decreciente,} \tag{21.471}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right) d\overline{I}\left(t\right) = 0, \tag{21.472}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{21.473}$$

Definición 462 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.

Teorema 337 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{21.474}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 463 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 40 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 113. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 92 (Lema 3.1 [**?**]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 338 (Teorema 5.2 [**?**]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 339 (Teorema 5.1 [**?**]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$, *para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 93 (Lema 5.2 [**?**]). *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r} \tag{21.475}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 340 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [**?**]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 114 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{21.476}$$

Proposición 115 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1+|X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right) \tag{21.477}$$

Proposición 116 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{21.478}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 341 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{21.479}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{21.480}$$

Teorema 342 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 343 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 117 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{21.481}$$

Lema 41 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{21.482}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 344 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{21.483}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 345 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{21.484}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 346 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{21.485}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 347 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{21.486}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 348 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{21.487}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{21.488}$$

21.46 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbb{E}[N(\omega)] = \overline{N} > 0$;
2) $\mathbb{E}[N(\omega)] \leq \overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*} := \sum_{j,j^{'}} p_{j}^{m} r_{j,j^{'}}^{m} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(i)\right]. \tag{21.489}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}(n)\right\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}(n)\right\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k} = 1/\mathbb{E}[\xi_{k}(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k} = 1/\mathbb{E}[\eta_{k}(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k} = \lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_{k} < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_{k}(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^{T} = \left(Q_{k}(t), A_{k}(t), B_{m}(t), B_{m}^{0}(t), C_{m}(t)\right), \tag{21.490}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^{M} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

21.46.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1,\ldots,\xi_K,\eta_1,\ldots,\eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p\geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_l\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l=1,\ldots,K \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k=1,\ldots,K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k=1,2,\ldots,K$ existe una función positiva $q_k\left(\cdot\right)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k\left(1\right)\geq x\right) > 0, \text{ para todo } x>0, \tag{21.491}$$

$$P\left\{a\leq\sum_{i=1}^{j_k}\xi_k\left(i\right)\leq b\right\} \geq \int_a^b q_k\left(x\right)dx,\ 0\leq a<b. \tag{21.492}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición ??.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

21.47 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X\left(t\right),\theta_t,P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X=\left\{X\left(t\right),t\geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t,t\geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x,x\in\mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x\in\mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right)=x\right\}=1,$$

y

$$E_x\left\{f\left(X\circ\theta_t\right)|\mathcal{F}_t\right\}=E_X\left(\tau\right)f\left(X\right),$$

en $\left\{\tau<\infty\right\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X\circ\theta_\tau\right)\left(w\right)=\left\{X\left(\tau\left(w\right)+t,w\right),t\geq 0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t\left(x,D\right)$, $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t\geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t\left(x,D\right)=P_x\left(X\left(t\right)\in D\right).$$

Definición 464. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right)=\int_{\mathbb{X}}P^{t}\left(x,D\right)\pi\left(dx\right),$$

para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t\geq0$.

Definición 465. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu\left(D\right)>0$ y $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_{x}\left\{\tau_{D}<\infty\right\}\equiv1,$$

cuando $\tau_{D}=inf\left\{t\geq0:X_{t}\in D\right\}$.

Nota 85. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}\left(\cdot\right)=\int_{\mathbf{X}}P_{x}\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right),$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 466. *Un conjunto $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t>0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta>0$ tal que*

$$P^{t}\left(x,A\right)\geq\delta\nu\left(A\right),$$

para $x\in D,A\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 94 (Lema 3.1, Dai [?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_{x}\left(\tau_{B}<\infty\right)\equiv1$ y que para algún $\delta>0$ se cumple que*

$$\sup\mathbb{E}_{x}\left[\tau_{B}\left(\delta\right)\right]<\infty, \tag{21.493}$$

donde $\tau_{B}\left(\delta\right)=inf\left\{t\geq\delta:X\left(t\right)\in B\right\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 95 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B=\left\{x\in\mathbb{X}:|x|\leq k\right\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k>0$.*

Teorema 349 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^{x}\left(|x|\delta\right)|=0, \tag{21.494}$$

donde X^{x} se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B=\left\{x\in\mathbb{X}:|x|\leq k\right\}$ con algún $k>0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

21.48 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x\in\mathbb{X}$, sea

- $Q_{k}^{x}\left(t\right)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^{x}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.

- $T^{x,0}_{m,k}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}^0_m(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^x_m(|x|t), \frac{1}{|x|}T^{x,0}_m(|x|t)\right) \tag{21.495}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}^0_m(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{21.496}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{21.497}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{21.498}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}^0_{m,k}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{21.499}$$

Definición 467 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 468. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, *se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 350 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{21.500}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 469 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

Lema 42 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 351 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{21.501}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{21.502}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{21.503}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{21.504}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 352 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{21.505}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

Dado el proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ definido en (**??**) que describe la dinámica del sistema de visitas cíclicas, si $U(t)$ es el residual de los tiempos de llegada al tiempo t entre dos usuarios consecutivos y $V(t)$ es el residual de los tiempos de servicio al tiempo t para el usuario que estás siendo atendido por el servidor. Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados que puede tomar el proceso X.

Lema 96 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k,$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea e es un vector de unos, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{ll}1, & S\left(k\right)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema (**??**):

Teorema 353 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right),U^{x_{n_j}}\left(0\right),V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(0\right),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{21.506}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)\ \ u.o.c. \tag{21.507}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{21.508}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0, \tag{21.509}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\ \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{21.510}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right)\ \text{ es no decreciente,} \tag{21.511}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0, \tag{21.512}$$

$$\text{Condiciones en }\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{21.513}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 118 (Proposición 4.2, Dai [**?**]). *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^0\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_k^x\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_k^x\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_k^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_k\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. El flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) *Los vectores de tiempo ocupado* $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^{0}(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0)=\overline{T}^{0}(0)=0$.

ii) *Para todo* $t\geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}(t)+\overline{T}_{k}^{0}(t)\right]=t.$$

iii) *Para todo* $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}(t)=\overline{Q}_{k}(0)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}(t).$$

iv) *Para todo* $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}(t)=\rho_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}(t)=0$.

v) *Para todo* k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}(t)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}(t).$$

vi) *Para todo* $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}(t)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}(t),$$

para $\overline{Q}_{k}(t)>0$.

Lema 97 (Lema 3.1, Chen [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Lema 98 (Lema 5.2, Gut [?]). *Sea* $\{\xi(k):k\in\mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0,\infty)$*, y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t)=max\{n\geq 1:\xi(1)+\cdots+\xi(n-1)\leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)]<\infty$*, entonces para cualquier entero* $r\geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E[\xi_{1}]}\right)^{r},\tag{21.514}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) *Para cualquier* $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$.

b) *Las variables aleatorias* $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 354 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo, Gut [?]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}(X_{1}]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r}\rightarrow\frac{1}{\mu^{r}}$*, cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$.

Proposición 119 (Proposición 5.1, Dai y Sean [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_{0}>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X(t_{0}|x|)|^{p+1}\right]=0.\tag{21.515}$$

Proposición 120 (Proposición 5.3, Dai y Sean [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1}<\infty$, $\delta>0$ *y un conjunto compacto* $C\subset X$.

$$\mathbb{E}_{x}\left[\int_{0}^{\tau_{C}(\delta)}\left(1+|X(t)|^{p}\right)dt\right]\leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right).\tag{21.516}$$

Proposición 121 (Proposición 5.4, Dai y Sean [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right],$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{21.517}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 355 (Teorema 5.5, Dai y Sean [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\}, \tag{21.518}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p. \tag{21.519}$$

Teorema 356 (Teorema 6.2 Dai y Sean [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \to 0,$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x[|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi[|Q_0|^p] < \infty,$$

donde

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_f = sup_{|g\leq f|} | \int \pi(dy)\, g(y) - \int P^t(x,dy)\, g(y)\, |,$$

para $x \in \mathbb{X}$.

Teorema 357 (Teorema 6.3, Dai y Sean [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)} \left| P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \right|_f = 0,$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)} |\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]| = 0.$$

Proposición 122 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0. \tag{21.520}$$

Teorema 358 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\}, \tag{21.521}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 359 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right)\pi\left(dx\right), \tag{21.522}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 360 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{21.523}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{21.524}$$

Demostración 3 (Teorema **??**). *La demostración de este teorema se da a continuación:*

*i) Utilizando la proposición **??** se tiene que la proposición **??** es cierta para $f\left(x\right) = 1 + |x|^p$.*

*i) es consecuencia directa del Teorema **??**.*

*iii) ver la demostración dada en Dai y Sean [**?**] páginas 1901-1902.*

*iv) ver Dai y Sean [**?**] páginas 1902-1903 ó [**?**].*

21.48.1 Modelo de Flujo y Estabilidad

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k\left(n\right) := \sum_{i=1}^{n}\phi^k\left(i\right). \tag{21.525}$$

suponiendo que el estado inicial de la red es $x = (q, a, b) \in X$, entonces para cada k

$$E_k^x\left(t\right) := \max\left\{n \geq 0 : A_k^x\left(0\right) + \psi_k\left(1\right) + \cdots + \psi_k\left(n-1\right) \leq t\right\} \tag{21.526}$$

$$S_k^x\left(t\right) := \max\left\{n \geq 0 : B_k^x\left(0\right) + \eta_k\left(1\right) + \cdots + \eta_k\left(n-1\right) \leq t\right\} \tag{21.527}$$

Sea $T_k^x\left(t\right)$ el tiempo acumulado que el servidor $s\left(k\right)$ ha utilizado en los usuarios de la clase k en el intervalo $[0, t]$. Entonces se tienen las siguientes ecuaciones:

$$Q_k^x\left(t\right) = Q_k^x\left(0\right) + E_k^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{k}\Phi_k^l S_l^x\left(T_l^x\right) - S_k^x\left(T_k^x\right) \tag{21.528}$$

$$Q^x\left(t\right) = \left(Q_1^x\left(t\right), \ldots, Q_K^x\left(t\right)\right)^{'} \geq 0, \tag{21.529}$$

$$T^x\left(t\right) = \left(T_1^x\left(t\right), \ldots, T_K^x\left(t\right)\right)^{'} \geq 0, \text{ es no decreciente} \tag{21.530}$$

$$I_i^x\left(t\right) = t - \sum_{k\in C_i} T_k^x\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{21.531}$$

$$\int_0^\infty \sum_{k\in C_i} Q_k^x\left(t\right) dI_i^x\left(t\right) = 0 \tag{21.532}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x\left(\cdot\right), T^x\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{21.533}$$

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{21.534}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola. Si se hace $|q| \to \infty$ y se mantienen las componentes restantes fijas, de la condición inicial x, cualquier punto límite del proceso normalizado $\overline{Q}^{x}$ es una solución del siguiente modelo de flujo, ver [?].

Definición 470. *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $(Q^{x}(\cdot), T^{x}(\cdot))$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ y $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$*

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk}\mu_l \overline{T}_l(t) \tag{21.535}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{21.536}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{21.537}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{21.538}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempot cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^{x}(t)\, dI_i^{x}(t) = 0 \tag{21.539}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } (Q^{x}(\cdot), T^{x}(\cdot)) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{21.540}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 471. *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??**, *junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^{+} - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^{+} \tag{21.541}$$

Definición 472. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en [?].

Lema 43. *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|overlinex| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

21.48.2 Resultados principales

Supuestos necesarios sobre la red

Supuestos 16. *A1) $\psi_1, \ldots, \psi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\psi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\psi_k(1) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{21.542}$$

$$P\left(\psi_k(1) + \ldots \psi_k(j_k) \in dx\right) \geq q_k(x)\, dx0 \text{ y} \tag{21.543}$$

$$\int_0^{\infty} q_k(x)\, dx > 0 \tag{21.544}$$

El argumento dado en [?] en el lema **??** se puede aplicar para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños.Entonces la condición $A3)$ se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 361. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] ds \leq \kappa_p \tag{21.545}$$

donde p es el entero dado por A2). Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r \tag{21.546}$$

para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

iii) EL primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0. \tag{21.547}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \tag{21.548}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

Demostración 4. *La demostración de este resultado se da aplicando los teoremas* **??**, **??**, **??** *y* **??**

21.48.3 Definiciones Generales

Definimos un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada. Bajo cualquier *preemptive buffer priority* disciplina de servicio, el estado $\mathbb{X}(t)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}(t) = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t) : k = 1, 2, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right) \tag{21.549}$$

donde $Q_k(t)$ es la longitud de la cola para los usuarios de la clase k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k(t)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio. Los tiempos de arribo residuales, que son iguales al tiempo que queda hasta que el próximo usuario de la clase k llega, se denotan por $A_k(t)$. Tanto $B_k(t)$ como $A_k(t)$ se suponen continuos por la derecha.

Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x = (q, a, b)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = (q, a, b) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x\| = |q| + |a| + |b|$. En [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$\left((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}(t), \theta_t, P_x\right)$$

es un proceso de Borel Derecho en el espacio de estadio medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, est definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y est adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; $\{P_x, x \in X\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in X$

$$P_x \{\mathbb{X}(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{\mathbb{X}(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la sigma algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(\mathbb{X}(t) \in D)$$

Definición 473. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_X P^t(x, D) \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 474. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

- Si X es Harris recurrente, entonces una única medida invariante π existe ([?]).
- Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama *Harris recurrente positiva.*
- Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria y hacemos

  $$P_\pi(\cdot) [= \int_X P_x(\cdot) \pi(dx)$$

  y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, as, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π

Definición 475. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.[57]

21.48.4 Definiciones y Descripción del Modelo

El modelo está compuesto por c colas de capacidad infinita, etiquetadas de 1 a c las cuales son atendidas por s servidores. Los servidores atienden de acuerdo a una cadena de Markov independiente $\left(X_n^i\right)_n$ con $1 \leq i \leq s$ y $n \in \{1, 2, \ldots, c\}$ con la misma matriz de transición $r_{k,l}$ y única medida invariante (p_k). Cada servidor permanece atendiendo en la cola un periodo llamado de visita y determinada por la política de servicio asignada a la cola.

Los usuarios llegan a la cola k con una tasa λ_k y son atendidos a una razón μ_k. Las sucesiones de tiempos de interarribo $(\tau_k(n))_n$, la de tiempos de servicio $\left(\sigma_k^i(n)\right)_n$ y la de tiempos de cambio $\left(\sigma_{k,l}^{0,i}(n)\right)_n$ requeridas en la cola k para el servidor i son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas con distribución general independiente de i, con media $\sigma_k = \frac{1}{\mu_k}$, respectivamente $\sigma_{k,l}^0 = \frac{1}{\mu_{k,l}^0}$, e independiente de las cadenas de Markov $\left(X_n^i\right)_n$. Además se supone que los tiempos de interarribo se asume son acotados, para cada $\rho_k = \lambda_k \sigma_k < s$ para asegurar la estabilidad de la cola k cuando opera como una cola $M/GM/1$.

[57] En [?] muestran que si $P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ solamente para uno conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris recurrente

21.48.5 Políticas de Servicio

Una política de servicio determina el número de usuarios que serán atendidos sin interrupción en periodo de servicio por los servidores que atienden a la cola. Para un solo servidor esta se define a través de una función f donde $f(x,a)$ es el número de usuarios que son atendidos sin interrupción cuando el servidor llega a la cola y encuentra x usuarios esperando dado el tiempo transcurrido de interarribo a. Sea $v(x,a)$ la duración del periodo de servicio para una sola condición inicial (x,a).

Las políticas de servicio consideradas satisfacen las siguientes propiedades:

i) Hay conservación del trabajo, es decir

$$v(x,a)=\sum_{l=1}^{f(x,a)}\sigma(l)$$

con $f(0,a)=v(0,a)=0$, donde $(\sigma(l))_l$ es una sucesión independiente e idénticamente distribuida de los tiempos de servicio solicitados.

ii) La selección de usuarios para se atendidos es independiente de sus correspondientes tiempos de servicio y del pasado hasta el inicio del periodo de servicio. Así las distribución (f,v) no depende del orden en el cuál son atendidos los usuarios.

iii) La política de servicio es monótona en el sentido de que para cada $a\geq 0$ los números $f(x,a)$ son monótonos en distribución en x y su límite en distribución cuando $x\rightarrow\infty$ es una variable aleatoria F^{*0} que no depende de a.

iv) El número de usuarios atendidos por cada servidor es acotado por $f^{min}(x)$ de la longitud de la cola x que además converge monótonamente en distribución a F^{*} cuando $x\rightarrow\infty$

21.48.6 Proceso de Estados

El sistema de colas se describe por medio del proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ como se define a continuación. El estado del sistema al tiempo $t\geq 0$ está dado por

$$X(t)=(Q(t),P(t),A(t),R(t),C(t))$$

donde

- $Q(t)=(Q_k(t))_{k=1}^{c}$, número de usuarios en la cola k al tiempo t.
- $P(t)=\left(P^i(t)\right)_{i=1}^{s}$, es la posición del servidor i.
- $A(t)=(A_k(t))_{k=1}^{c}$, es el residual del tiempo de arribo en la cola k al tiempo t.
- $R(t)=\left(R_k^i(t),R_{k,l}^{0,i}(t)\right)_{k,l,i=1}^{c,c,s}$, el primero es el residual del tiempo de servicio del usuario atendido por servidor i en la cola k al tiempo t, la segunda componente es el residual del tiempo de cambio del servidor i de la cola k a la cola l al tiempo t.
- $C(t)=\left(C_k^i(t)\right)_{k,i=1}^{c,s}$, es la componente correspondiente a la cola k y al servidor i que está determinada por la política de servicio en la cola k y que hace al proceso $X(t)$ un proceso de Markov.

Todos los procesos definidos arriba se suponen continuos por la derecha.

El proceso X tiene la propiedad fuerte de Markov y su espacio de estados es el espacio producto

$$\mathcal{X}=\mathbb{N}^c\times E^s\times\mathbb{R}_+^c\times\mathbb{R}_+^{cs}\times\mathbb{R}_+^{c^2s}\times\mathcal{C}$$

donde $E=\{1,2,\ldots,c\}^2\cup\{1,2,\ldots,c\}$ y $\mathcal{C}$ depende de las políticas de servicio.

21.48.7 Introducción

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1. $$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0 \tag{21.550}$$

2. $$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N} \tag{21.551}$$

   para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m} = r_{j,j^{'}}$
- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.
- Finalmente, se define
$$\delta^{*} := \sum_{j,j^{'}} p_j r_{j,j^{'}}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right]. \tag{21.552}$$

21.48.8 Colas Cíclicas

El *token passing ring* es una estación de un solo servidor con K clases de usuarios. Cada clase tiene su propio regulador en la estación. Los usuarios llegan al regulador con razón α_k y son atendidos con taza μ_k.

La red se puede modelar como un Proceso de Markov con espacio de estados continuo, continuo en el tiempo:
$$X(t)^{T} = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t), B_k^{0}(t), C(t) : k = 1, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right) \tag{21.553}$$
donde $Q_k(t), B_k(t)$ y $A_k(t)$ se define como en **??**, $B_k^{0}(t)$ es el tiempo residual de cambio de la clase k a la clase $k+1\,(modK)$; $C(t)$ indica el número de servicios que han sido comenzados y/o completados durante la sesión activa del buffer.

Los parámetros cruciales son la carga nominal de la cola k: $\beta_k = \alpha_k/\mu_k$ y la carga total es $\rho_0 = \sum \beta_k$, la media total del tiempo de cambio en un ciclo del token está definido por
$$u^{0} = \sum_{k=1}^{K}\mathbb{E}\left[\eta_k^{0}(1)\right] = \sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\mu_k^{0}} \tag{21.554}$$

El proceso de la longitud de la cola $Q_k^{x}(t)$ y el proceso de acumulación del tiempo de servicio $T_k^{x}(t)$ para el buffer k y para el estado inicial x se definen como antes. Sea $T_k^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el token tarda en cambiar del buffer k al $k+1 \mod K$. Suponga que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^{0}(\cdot)\right)$ es un punto límite de
$$\left(\frac{1}{|x|}Q^{x}(|x|t), \frac{1}{|x|}T^{x}(|x|t), \frac{1}{|x|}T^{x,0}(|x|t)\right) \tag{21.555}$$
cuando $|x| \rightarrow \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t), \overline{T}^{0}(t)\right)$ es un flujo límite retrasado del token ring.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado

Proposición 123. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

21.48.9 Resultados Previos

Lema 44. *El proceso estocástico* Φ *es un proceso de markov fuerte, temporalmente homogéneo, con trayectorias muestrales continuas por la derecha, cuyo espacio de estados* Y *es igual a* $X\times\mathbb{R}$

Proposición 124. *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_{0}>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{21.556}$$

Lema 45. *Sea* $\left\{\zeta\left(k\right):k\in F\right\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)=max\left(n\geq1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. *Si* $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{21.557}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 362. *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_{p} *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{21.558}$$

para $t>0$ *y* $x\in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 363. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$| \left| P^{t} \left(x, \cdot\right) - \pi \left(\cdot\right) \right| |_{f_p}, \, t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{21.559}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x \left[|Q\left(t\right)|^p \right] = \mathbb{E}_\pi \left[|Q\left(0\right)|^p \right] \leq \kappa_r$$

Teorema 364. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} | \left| P^{t}\left(x, \cdot\right) - \pi\left(\cdot\right) \right| |_f = 0. \tag{21.560}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x \left[Q\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_\pi \left[Q\left(0\right)\right] | = 0.$$

Teorema 365. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X, \mathcal{B}_X\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_o^t f\left(X\left(s\right)\right) ds = \pi\left(f\right) := \int f\left(x\right) \pi\left(dx\right) \tag{21.561}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

21.48.10 Teorema de Estabilidad: Descripción

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s\left(x\right) = N\left(x\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1.
$$lim_{x\rightarrow\infty} \mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right] = \overline{N} > 0 \tag{21.562}$$

2.
$$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right] \leq \overline{N} \tag{21.563}$$

para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j'}^{m} = r_{j,j'}$
- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}\left(1\right)\right] \geq 0$.
- Sea $\left\{p_j\right\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^{*} := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}\left(1\right)\right]. \tag{21.564}$$

21.49 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]=\overline{N}>0$;

2) $\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(1)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}^{m}r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(i)\right]. \tag{21.565}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}(n)\right\}_{n\geq1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}(n)\right\}_{n\geq1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}<1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_{k}(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^{T}=\left(Q_{k}(t),A_{k}(t),B_{m}(t),B_{m}^{0}(t),C_{m}(t)\right), \tag{21.566}$$

para $k=1,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X}=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\})^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

21.49.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_l (1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k (1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{21.567}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\, dx,\ 0 \leq a < b. \tag{21.568}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

21.50 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 476. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right)=\int_{\mathbb{X}}P^{t}\left(x,D\right)\pi\left(dx\right),$$

para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t\geq0$.

Definición 477. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu\left(D\right)>0$ y $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_{x}\left\{\tau_{D}<\infty\right\}\equiv1,$$

cuando $\tau_{D}=inf\left\{t\geq0:X_{t}\in D\right\}$.

Nota 86. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}\left(\cdot\right)=\int_{\mathbf{X}}P_{x}\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right),$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 478. *Un conjunto $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t>0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta>0$ tal que*

$$P^{t}\left(x,A\right)\geq\delta\nu\left(A\right),$$

para $x\in D,A\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 99 (Lema 3.1, Dai [?])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_{x}\left(\tau_{B}<\infty\right)\equiv1$ y que para algún $\delta>0$ se cumple que*

$$\sup\mathbb{E}_{x}\left[\tau_{B}\left(\delta\right)\right]<\infty,\tag{21.569}$$

donde $\tau_{B}\left(\delta\right)=inf\left\{t\geq\delta:X\left(t\right)\in B\right\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 100 (Lema 3.1, Dai [?])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B=\left\{x\in\mathbb{X}:|x|\leq k\right\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k>0$.*

Teorema 366 (Teorema 3.1, Dai [?])**.** *Si existe un $\delta>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^{x}\left(|x|\delta\right)|=0,\tag{21.570}$$

*donde X^{x} se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B=\left\{x\in\mathbb{X}:|x|\leq k\right\}$ con algún $k>0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

21.51 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x\in\mathbb{X}$, sea

- $Q_{k}^{x}\left(t\right)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^{x}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.

- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{21.571}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{21.572}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{21.573}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{21.574}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{21.575}$$

Definición 479 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 480. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, *se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 367 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{21.576}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 481 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

Lema 46 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 368 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{21.577}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{21.578}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{21.579}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{21.580}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 369 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{21.581}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

21.52 Modelo de Flujo

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Sea x el número de usuarios en la cola esperando por servicio y $N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política dada y fija mientras el servidor permanece dando servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0. \tag{21.582}$$

(S2.)
$$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right] \leq \overline{N}, \tag{21.583}$$

para cualquier valor de x.

El tiempo que tarda un servidor en volver a dar servicio después de abandonar la cola inmediata anterior y llegar a la próxima se llama tiempo de traslado o de cambio de cola, al momento de la n-ésima visita del servidor a la cola j se genera una sucesión de variables aleatorias $\delta_{j,j+1}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con la propiedad de que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right] \geq 0$.

Se define
$$\delta^{*} := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]. \tag{21.584}$$

Los tiempos entre arribos a la cola k, son de la forma $\left\{\xi_k\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos. Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Para el caso más sencillo podemos definir un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada, el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}\left(t\right) = \left(Q_k\left(t\right), A_l\left(t\right), B_k\left(t\right) : k = 1, 2, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right), \tag{21.585}$$

donde $Q_k\left(t\right)$ es la longitud de la cola k para los usuarios esperando servicio, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k\left(t\right)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio.

Los tiempos entre arribos residuales, que son el tiempo que queda hasta que el próximo usuario llega a la cola para recibir servicio, se denotan por $A_k\left(t\right)$. Tanto $B_k\left(t\right)$ como $A_k\left(t\right)$ se suponen continuos por la derecha [**?**].

Sea $\mathcal{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$, y sea $x = \left(q, a, b\right)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = \left(q, a, b\right) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x\| = |q| + |a| + |b|$. En [**?**] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que
$$\left(\left(\Omega, \mathcal{F}\right), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}\left(t\right), \theta_t, P_x\right)$$
es un proceso de *Borel Derecho* en el espacio de estados medible $\left(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}\right)$.

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como
$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(\mathbb{X}\left(t\right) \in D\right).$$

Definición 482. *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*
$$\pi\left(D\right) = \int_X P^t\left(x, D\right)\pi\left(dx\right),$$
para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 483. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$, tal que si $\nu\left(D\right) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*
$$P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1,$$
cuando $\tau_D = inf\left\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\right\}$.

Definición 484. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^{t}(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

Nota 87. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π ([**?**]).*

*ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso a la medida se le llama **Harris recurrente positiva**.*

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria; se define

$$P_{\pi}(\cdot) = \int_{X} P_{x}(\cdot)\,\pi(dx).$$

Se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, así, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_{π}.

*iv) En [**?**] se muestra que si $P_{x}\{\tau_{D} < \infty\} = 1$ incluso para solamente un conjunto pequeño, entonces el proceso de Harris es recurrente.*

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^{0}(t), C(t)\right) \tag{21.586}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \left(\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\}\right)^{M} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{R}_{+}^{K} \times \mathbb{Z}^{K}, \tag{21.587}$$

- $Q(t) = (Q_{k}(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = (A_{k}(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^{0}(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_{k}(t), B_{m}(t)$ y $B_{m}^{0}(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([**?**]).

Dada una condición inicial $x \in \mathcal{X}$, $Q_{k}^{x}(t)$ es la longitud de la cola k al tiempo t y $T_{m,k}^{x}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en atender a los usuarios de la cola k. De igual manera se define $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en cambiar de cola para volver a atender a los usuarios.

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t), \tag{21.588}$$

$$\overline{T}_{m}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} T_{m}^{x}(|x|t), \tag{21.589}$$

$$\overline{T}_{m}^{x,0}(t) = \frac{1}{|x|} T_{m}^{x,0}(|x|t). \tag{21.590}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola, al conjunto de todos los posibles flujos límite se le llamará **modelo de flujo**, ([**?**]).

Definición 485. *Un flujo límite para un sistema de visitas bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}_m\left(\cdot\right),\overline{T}_m^0\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_1\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_K\left(t\right)\right)$ *y* $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_1\left(t\right),\ldots,\overline{T}_K\left(t\right)\right)$

$$\overline{Q}_k\left(t\right)=\overline{Q}_k\left(0\right)+\lambda_k t-\sum_{m=1}^{M}\mu_k\overline{T}_{m,k}\left(t\right) \tag{21.591}$$

$$\overline{Q}_k\left(t\right)\geq 0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{21.592}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente,} \tag{21.593}$$

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^0\left(t\right)+\overline{T}_{m,k}\left(t\right)=t \text{ param}=1,2,\ldots,M \tag{21.594}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en (**??**)-(**??**) se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Definición 486. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$, *con* $t\geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.

21.53 Estabilidad de los Sistemas de Visitas Cíclicas

Es necesario realizar los siguientes supuestos, ver ([**?**]) y ([**?**]):

A1) $\xi_1,\ldots,\xi_K,\eta_1,\ldots,\eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p\geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l\in\mathcal{A} \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k=1,\ldots,K.\end{aligned}$$

A3) El conjunto $\{x\in X:|x|=0\}$ es un singleton, y para cada $k\in\mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k\left(x\right)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k\left(1\right)\geq x\right) > 0, \text{ para todo } x>0 \tag{21.595}$$

$$P\left(\xi_k\left(1\right)+\ldots\xi_k\left(j_k\right)\in dx\right) \geq q_k\left(x\right)dx0 \text{ y} \tag{21.596}$$

$$\int_0^{\infty}q_k\left(x\right)dx>0 \tag{21.597}$$

En [**?**] ser da un argumento para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños. Entonces la condición A3) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 370. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, *y para cada condición inicial* $x\in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p \tag{21.598}$$

donde p es el entero dado por A2).

Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right]=\mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right]\leq\kappa_r \tag{21.599}$$

para $r=1,\ldots,p$ y $k=1,\ldots,K$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right]|=0. \tag{21.600}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right)ds=\mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \tag{21.601}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r=1,\ldots,p$ y $k=1,\ldots,K$.

Teorema 371. *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0,c_0\geq0$,*

$$|Q\left(T\right)|\geq\epsilon_0T-c_0,\ con\ T\geq0, \tag{21.602}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{21.603}$$

21.54 Resultados principales

En el caso particular de un modelo con un solo servidor, $M=1$, se tiene que si se define

Definición 487.

$$\rho=\sum_{k=1}^K\rho_k+\max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\overline{N}}\right)\delta^*. \tag{21.604}$$

entonces

Teorema 372. *i) Si $\rho<1$, entonces la red es estable, es decir el teorema (**??**) se cumple.*

*ii) De lo contrario, es decir, si $\rho>1$ entonces la red es inestable, es decir, el teorema (**??**).*

21.55 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N\left(\omega\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]=\overline{N}>0$;

2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^m$

- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}^{m}(n)$, con $\delta_{j,j'}^{m}(n)$, $n\geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}^{m}(1)\right]\geq 0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j'}p_{j}^{m}r_{j,j'}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}^{m}(i)\right]. \tag{21.605}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}(n)\right\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}(n)\right\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}<1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_{k}(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^{T}=\left(Q_{k}(t),A_{k}(t),B_{m}(t),B_{m}^{0}(t),C_{m}(t)\right), \tag{21.606}$$

para $k=1,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X}=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times(\{1,2,\ldots,K\}\times\{1,2,\ldots,S\})^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

21.55.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_{1},\ldots,\xi_{K},\eta_{1},\ldots,\eta_{K}$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p\geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_{l}(1)^{p+1}\right]&<\infty\text{ para }l=1,\ldots,K\text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_{k}(1)^{p+1}\right]&<\infty\text{ para }k=1,\ldots,K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k=1,2,\ldots,K$ existe una función positiva $q_{k}(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_{+}$, y un entero j_{k}, tal que

$$P\left(\xi_{k}(1)\geq x\right)>0\text{, para todo }x>0, \tag{21.607}$$

$$P\left\{a\leq\sum_{i=1}^{j_{k}}\xi_{k}(i)\leq b\right\}\geq\int_{a}^{b}q_{k}(x)\,dx,\ 0\leq a<b. \tag{21.608}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

21.56 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x, x \in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1,$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right)|\mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right),$$

en $\left\{\tau < \infty\right\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right).$$

Definición 488. *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right) = \int_{\mathbb{X}} P^t\left(x, D\right)\pi\left(dx\right),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 489. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$, tal que si $\nu\left(D\right) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\left\{t \geq 0 : X_t \in D\right\}$.

Nota 88. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi\left(\cdot\right) = \int_{\mathbf{X}} P_x\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 490. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 101 (Lema 3.1, Dai [?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{21.609}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 102 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 373 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{21.610}$$

*donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

21.57 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{21.611}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{21.612}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{21.613}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{21.614}$$

para $k=1,2,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$.

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^{0}\left(t\right)+\overline{T}_{m,k}\left(t\right)=t \text{ para } m=1,2,\ldots,M. \tag{21.615}$$

Definición 491 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 492. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta>0$ que depende de μ,λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv0$.*

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 374 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right). \tag{21.616}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 493 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$, con $t\geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.*

Lema 47 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0>0$ tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$ para cualquier $t\geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 375 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x\in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_p, \tag{21.617}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_k\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_k\left(0\right)^{r}\right]\leq\kappa_r, \tag{21.618}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_k\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_k\left(0\right)\right]|=0. \tag{21.619}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-}c.s. \tag{21.620}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 376 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_{j}}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_{s}}\right)\delta^{*} \tag{21.621}$$

i) Si $\rho<1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema* **??**.

ii) Si $\rho>1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema* **??**

21.58 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N\left(\omega\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]=\overline{N}>0$;

2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(1\right)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}^{m}r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(i\right)\right]. \tag{21.622}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_k\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_k\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^{K}\rho_k < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_k\left(t\right)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_k\left(t\right)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_m\left(t\right)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_m^0\left(t\right)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_m\left(t\right)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X\left(t\right)^T = \left(Q_k\left(t\right), A_k\left(t\right), B_m\left(t\right), B_m^0\left(t\right), C_m\left(t\right)\right), \tag{21.623}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \left(\left\{1, 2, \ldots, K\right\} \times \left\{1, 2, \ldots, S\right\}\right)^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

21.58.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_l\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k\left(\cdot\right)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k\left(1\right) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{21.624}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k}\xi_k\left(i\right) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k\left(x\right)dx, \; 0 \leq a < b. \tag{21.625}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [**?**] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [**?**, **?**].

21.59 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x, x \in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1,$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right) | \mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right),$$

en $\left\{\tau < \infty\right\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right).$$

Definición 494. *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right) = \int_{\mathbb{X}} P^t\left(x, D\right) \pi\left(dx\right),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 495. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$, tal que si $\nu\left(D\right) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\left\{t \geq 0 : X_t \in D\right\}$.

Nota 89. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi\left(\cdot\right) = \int_{\mathbf{X}} P_x\left(\cdot\right) \pi\left(dx\right),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 496. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t\left(x, A\right) \geq \delta \nu\left(A\right),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 103 (Lema 3.1, Dai [?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x [\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{21.626}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 104 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 377 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{21.627}$$

*donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

21.60 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{21.628}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{21.629}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{21.630}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{21.631}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{21.632}$$

Definición 497 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 498. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 378 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right). \tag{21.633}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 499 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$.

Lema 48 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 379 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p*, y para cada condición inicial* $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p, \tag{21.634}$$

donde p *es el entero dado en (A2).*

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{21.635}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$*. Donde* π *es la probabilidad invariante para* X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}*:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)\right]| = 0. \tag{21.636}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right)ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{21.637}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 380 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{21.638}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

21.60.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_l (1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k (1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{21.639}$$

$$P\left\{ a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b \right\} \geq \int_a^b q_k(x)\, dx,\ 0 \leq a < b. \tag{21.640}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

21.61 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está

adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x \{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [**?**, **?**].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 500. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D) \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 501. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf \{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 90. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [**?**]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot) \pi(dx),$$

*y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [**?**].*

Definición 502. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [**?**]:

Lema 105 (Lema 3.1, Dai [**?**]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x [\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{21.641}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf \{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 106 (Lema 3.1, Dai [**?**]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 381 (Teorema 3.1, Dai [**?**]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{21.642}$$

*donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

21.62 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{21.643}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{21.644}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{21.645}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{21.646}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{21.647}$$

Definición 503 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 504. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 382 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{21.648}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 505 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 49 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 383 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p \right] ds \leq \kappa_p, \tag{21.649}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x \left[Q_k(t)^r \right] = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right] \leq \kappa_r, \tag{21.650}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x \left[Q_k(t) \right] - \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0) \right]| = 0. \tag{21.651}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right], \; \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{21.652}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 384 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{21.653}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

21.63 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]=\overline{N}>0$;

2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(1\right)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}^{m}r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(i\right)\right]. \tag{21.654}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}<1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_{k}\left(t\right)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}\left(t\right)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}\left(t\right)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X\left(t\right)^{T}=\left(Q_{k}\left(t\right),A_{k}\left(t\right),B_{m}\left(t\right),B_{m}^{0}\left(t\right),C_{m}\left(t\right)\right), \tag{21.655}$$

para $k=1,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X}=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

21.63.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_l\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k\left(\cdot\right)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k\left(1\right) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{21.656}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k\left(i\right) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k\left(x\right) dx,\ 0 \leq a < b. \tag{21.657}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

21.64 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x, x \in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1,$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right) | \mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right),$$

en $\left\{\tau < \infty\right\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right).$$

Definición 506. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D)\, \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 507. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 91. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\, \pi(dx),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 508. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 107 (Lema 3.1, Dai [?])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{21.658}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 108 (Lema 3.1, Dai [?])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 385 (Teorema 3.1, Dai [?])**.** *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{21.659}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

21.65 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.

- $T^{x,0}_{m,k}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}^0_m(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^x_m(|x|t), \frac{1}{|x|}T^{x,0}_m(|x|t)\right) \tag{21.660}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}^0_m(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{21.661}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{21.662}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{21.663}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}^0_{m,k}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{21.664}$$

Definición 509 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 510. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 386 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{21.665}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 511 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 50 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 387 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{21.666}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x \left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{21.667}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x \left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{21.668}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r\right], \; \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{21.669}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 388 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js} \overline{N}_s}\right) \delta^* \tag{21.670}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

22 Fuera de tema

Definición 512. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{22.1}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 513. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 92. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

22.1 Teorema Principal de Renovación

Nota 93. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 389 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \to \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 125. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 514. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T + t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 126. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 390 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t \to \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

22.2 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 127. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 94. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 391. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \;\; c.s. \tag{22.2}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \;\; c.s. \tag{22.3}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 18 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \;\; c.s. \;\; cuando \; t \to \infty. \tag{22.4}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 515. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 392. *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) = a, \text{ c.s.} \tag{22.5}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{22.6}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 19. *Si* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación, y* $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{22.7}$$

22.3 Procesos de Renovación

Definición 516. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $\left[0,t\right)$ *es*

$$N\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\left(T_n \leq t\right), \tag{22.8}$$

para $t \geq 0$*.*

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_{+}$, y $N\left(t\right)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\left\{N\left(t\right) : t \geq 0\right\}$, denotado por $N\left(t\right)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_{+}$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N\left(t\right)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 517. *Un proceso puntual* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, para* $n \geq 1$*, son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F*, donde* $F\left(0\right) = 0$ *y* $T_0 = 0$*. Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N\left(t\right)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $\left[0,t\right)$

Nota 95. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F*, con* $F\left(0\right) = 0$*, para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F*. Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k$ *y* $N\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\left(T_n \leq t\right)$*, donde* $T_n \rightarrow \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

22.4 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 518. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $\left[0,t\right)$ *es*

$$N\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\left(T_n \leq t\right), \tag{22.9}$$

para $t \geq 0$*.*

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_{+}$, y $N\left(t\right)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\left\{N\left(t\right) : t \geq 0\right\}$, denotado por $N\left(t\right)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_{+}$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N\left(t\right)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 519. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 96. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\
T_{N(t)} \leq &\quad t < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N(T_n) = n$, y

$$
N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}
$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$
P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)
$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\
P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)
\end{aligned}
$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$
\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)
$$

Proposición 128. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 3 (**Proceso Poisson**). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 97. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 393. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \ c.s. &\quad (22.10) \\
lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \ c.s. &\quad (22.11)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N\,/t)$ la cumple.

Corolario 20 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{22.12}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 520. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 394. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (22.13) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (22.14) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 21. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{22.15}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 521. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 129. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 522. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 130. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 98. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 395. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 22 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 523. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t - s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{22.16}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 131. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 396 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 524. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 132. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 525. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 133. *La Transformada de Laplace* $\hat{U}(\alpha)$ *y* $\hat{F}(\alpha)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.

Nota 99. *Un proceso de renovación* $N(t)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, *para* $t \geq 0$.

Teorema 397. *Sea* $N(t)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ *es finita para cada* t. *Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N(t)$ *tal que* $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, *independiente de* n. *Entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 23 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación* $N(t)$,

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1]\,,\ t \geq 0,$$

Definición 526. *Sea* $h(t)$ *función de valores reales en* $\mathbb{R}$ *acotada en intervalos finitos e igual a cero para* $t < 0$ *La ecuación de renovación para* $h(t)$ *y la distribución* F *es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s)\,,\ t \geq 0, \tag{22.17}$$

donde $H(t)$ *es una función de valores reales. Esto es* $H = h + F \star H$. *Decimos que* $H(t)$ *es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para* $t < 0$.

Proposición 134. *La función* $U \star h(t)$ *es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 398 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Nota 100. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 399 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 135. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ \textit{donde}\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 527. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 136. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t),\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 400 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\left\{|X(t)|:t\leq T\right\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Nota 101. *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 401 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds.$$

Proposición 137. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t),\ donde\ h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 528. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 138. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t),\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 402 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\left\{|X(t)|:t\leq T\right\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Definición 529. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 102. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \to S$*.*

Nota 103. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 104. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 530. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 105. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 403 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 531 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t*.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t*, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t*.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$*, la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t*.*

Nota 106. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n*, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$*. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t + y) - N((t - x)) = 0\} \tag{22.18}$$

Ejemplo 4 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*, entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$*.*

Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 532. *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 107. *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 139. *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 404. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación* N *es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante* $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 108. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 24. *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

22.5 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 533. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{22.19}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 534. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, *para* $n \geq 1$, *son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F, *donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$. *Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 109. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F, *con* $F(0) = 0$, *para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F. *Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, *donde* $T_n \to \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 140. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 5 (**Proceso Poisson**)**.** *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 110. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 405. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{22.20}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{22.21}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 25 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{22.22}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 535. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 406. *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) = a, \text{ c.s.} \tag{22.23}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{22.24}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 26. *Si* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación, y* $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{22.25}$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 536. *La función de renovación asociada con la distribución* F*, del proceso* $N\left(t\right)$*, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = \mathbb{1}\left(t \geq 0\right)$*.*

Proposición 141. *Supóngase que la distribución de inter-renovación* F *tiene densidad* f*. Entonces* $U\left(t\right)$ *también tiene densidad, para* $t > 0$*, y es* $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$*. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 537. *La Transformada de Laplace-Stieljes de* F *está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF\left(t\right), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 142. *La Transformada de Laplace* $\hat{U}\left(\alpha\right)$ *y* $\hat{F}\left(\alpha\right)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}\left(\alpha\right) = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$*.*

Nota 111. *Un proceso de renovación* $N\left(t\right)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}\left[U\left(t\right)\right] = \lambda t$*, para* $t \geq 0$*.*

Teorema 407. *Sea* $N\left(t\right)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta\left(t\right) = \mathbb{E}\left[N\left(\right)\right]$ *es finita para cada* t*. Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$*,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N\left(\right)} f\left(T_n\right)\right] = \int_{\left(0,t\right]} f\left(s\right) d\eta\left(s\right), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N\left(t\right)$ *tal que* $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f\left(s\right)$*, independiente de* n*. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N\left(t\right)} X_n\right] = \int_{\left(0,t\right]} f\left(s\right) d\eta\left(s\right), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 27 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right],\ t \geq 0,$$

Definición 538. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s),\ t \geq 0, \tag{22.26}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 143. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 408 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 539. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 144. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t>0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 540. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t}dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 145. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 112. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 409. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\,d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\,d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 28 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right], \; t \geq 0,$$

Definición 541. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{22.27}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 146. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 410 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 113. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 411 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 147. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 542. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 148. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 412 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 114. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 413 (Teorema Principal de Renovación). *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds.$$

Proposición 149. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t<0$ *puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 543. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 150. *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T, *que tiene distribución* F. *Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 414 (Regeneración Cruda). *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T, *y defínase* $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. *Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Definición 544. *Para el proceso* $\{(N(t),X(t)):t\geq 0\}$, *sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1},T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n=(\xi_n,\{X(T_{n-1}+t):0\leq t<\xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 115. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t)=f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f:\tilde{S}\rightarrow S$.

Nota 116. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 117. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t):t\geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S, *espacio métrico.*

Para $\{X(t):t\geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n=T_n-T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 545. *Para el proceso* $\{(N(t),X(t)):t\geq 0\}$, *sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1},T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n=(\xi_n,\{X(T_{n-1}+t):0\leq t<\xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 118. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 415 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 546 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 119. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{22.28}$$

Ejemplo 6 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 547. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 120. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 151. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 416. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación N es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 121. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 29. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

22.6 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 548. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 122. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 123. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 549 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 124. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 550. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 125. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

22.7 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 551. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 552. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 553. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 417. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

23 De nuevo

23.1 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 554. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.1}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 555. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 126. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 152. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 127. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 418. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{23.2}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{23.3}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 30 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \ \textit{c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.4}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 556. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 419. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a, \ c.s. & (23.5)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \ c.s. & (23.6) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 31. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \ \textit{c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.7}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 557. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 153. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 558. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 154. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 128. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 420. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 32 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 559. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.8}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 155. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 421 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 560. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 156. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 561. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 157. *La Transformada de Laplace* $\hat{U}(\alpha)$ *y* $\hat{F}(\alpha)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.

Nota 129. *Un proceso de renovación* $N(t)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, *para* $t \geq 0$.

Teorema 422. *Sea* $N(t)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ *es finita para cada* t. *Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N(t)$ *tal que* $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, *independiente de* n. *Entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 33 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación* $N(t)$,

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}\left[N(t) + 1\right],\ t \geq 0,$$

Definición 562. *Sea* $h(t)$ *función de valores reales en* $\mathbb{R}$ *acotada en intervalos finitos e igual a cero para* $t < 0$ *La ecuación de renovación para* $h(t)$ *y la distribución* F *es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s)\,,\ t \geq 0, \tag{23.9}$$

donde $H(t)$ *es una función de valores reales. Esto es* $H = h + F \star H$. *Decimos que* $H(t)$ *es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para* $t < 0$.

Proposición 158. *La función* $U \star h(t)$ *es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 423 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu,\ cuando\ t \rightarrow \infty.$$

Nota 130. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 424 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 159. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 563. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 160. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t),\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 425 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\left\{|X(t)| : t \leq T\right\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 131. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 426 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 161. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 564. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 162. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t),\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 427 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\left\{|X(t)| : t \leq T\right\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

23.2 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 565. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 566. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 567. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 428. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

23.3 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 568. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 569. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 570. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 429. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$*.*

23.4 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 571. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 572. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 573. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 430. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t}V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$*.*

23.5 Procesos de Renovación

Definición 574. *Sean* $0\leq T_{1}\leq T_{2}\leq\dots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_{n} *en el intervalo* $\left[0,t\right)$ *es*

$$N\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\left(T_{n}\leq t\right), \tag{23.10}$$

para $t\geq0$*.*

Si se consideran los puntos T_{n} como elementos de $\mathbb{R}_{+}$, y $N\left(t\right)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\left\{N\left(t\right):t\geq0\right\}$, denotado por $N\left(t\right)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_{+}$. Los T_{n} son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N\left(t\right)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0<T_{1}<T_{2}<\dots$ casi seguramente.

Definición 575. *Un proceso puntual* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_{n}=T_{n}-T_{n-1}$*, para* $n\geq1$*, son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F*, donde* $F\left(0\right)=0$ *y* $T_{0}=0$*. Los* T_{n} *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_{n} *son los tiempos de inter-renovación, y* $N\left(t\right)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $\left[0,t\right)$

Nota 132. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F*, con* $F\left(0\right)=0$*, para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_{1},\xi_{2},\dots$ *definidas en este con distribución* F*. Entonces las otras cantidades son* $T_{n}=\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}$ *y* $N\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\left(T_{n}\leq t\right)$*, donde* $T_{n}\rightarrow\infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

23.6 Teorema Principal de Renovación

Nota 133. *Una función* $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h\left(t\right)\geq0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $\left|h\left(t\right)\right|\leq b\left(t\right)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 431 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h\left(t\right)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 163. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 576. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 164. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 432 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

23.7 Función de Renovación

Definición 577. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.11}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 165. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 433 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

23.8 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 166. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 134. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 434. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.12}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.13}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 34 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.14}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 578. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 435. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.15}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.16}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 35. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.17}$$

23.9 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 579. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 167. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 580. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 168. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 135. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 436. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 36 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

23.10 Procesos de Renovación

Definición 581. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.18}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 582. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 136. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

23.11 Procesos Regenerativos

Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [?]

Definición 583 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 137. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [?].*

Nota 138. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 584. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 139. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 140. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 141. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 142. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 585. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t + x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 586. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 587. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 437. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 37. *Sea* $\{V(t), t \geq 0\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E} < \infty$, F *es no-aritmética, y para todo* $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $[0, \tau]$, *entonces* $V(t)$ *converge en distribución cuando* $t \to \infty$ *y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\,ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V(t)$ *cuando* $t \to \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

23.12 Procesos de Renovación

Definición 588. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.19}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 589. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, *para* $n \geq 1$, *son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F, *donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$. *Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 143. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F, *con* $F(0) = 0$, *para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \dots$ *definidas en este con distribución* F. *Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, *donde* $T_n \to \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

23.13 Teorema Principal de Renovación

Nota 144. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 438 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 169. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 590. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 170. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t), \text{ donde } h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 439 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

23.14 Función de Renovación

Definición 591. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t)=h(t)+\int_{[0,t]}H(t-s)\,dF(s), \ t\geq 0, \tag{23.20}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 171. *La función $U\star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 440 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t)\rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t\rightarrow\infty.$$

23.15 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 592. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t), \ t\geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t)=\mathbb{1}(t\geq 0)$.

Proposición 172. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t>0$, y es $U^{'}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t)>N(t-)\}=0, \ t\geq 0.$$

Definición 593. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha)=\int_{\mathbb{R}_+}e^{-\alpha t}dF(t), \ \alpha\geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 173. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 145. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 441. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 38 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1], \; t \geq 0,$$

23.16 Procesos de Renovación

Definición 594. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.21}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 595. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 146. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Definición 596. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.22}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 597. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 147. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 174. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 7 (**Proceso Poisson**)**.** *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 148. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 442. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (23.23)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (23.24)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 39 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.25)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 598. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 443. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (23.26)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (23.27)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 40. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.28)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 599. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 175. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 600. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 176. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 149. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 444. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 41 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1], \; t \geq 0,$$

Definición 601. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.29}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 177. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 445 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 602. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 178. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 603. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 179. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 150. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 446. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 42 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1], \; t \geq 0,$$

Definición 604. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.30}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 180. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 447 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \; \textit{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 151. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 448 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 181. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\textit{ donde } h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 605. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\textit{ para } t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 182. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\textit{ donde } h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 449 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Nota 152. *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t)\geq0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 450 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 183. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\textit{ donde } h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 606. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\textit{ para } t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 184. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\textit{ donde } h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 451 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Definición 607. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 153. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 154. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 155. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 608. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 156. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 452 (Procesos Regenerativos). *Suponga que el proceso*

Definición 609 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- *$A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- *$B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- *$L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 157. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{23.31}$$

Ejemplo 8 (Tiempos de recurrencia Poisson). *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (??) se tiene que*

$$P\left\{A(t) > x, B(t) > y\right\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x+y$.

Nota 158. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 610. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 159. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 185. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 453. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\,ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 160. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 43. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Procesos Regenerativos

Nota 161. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 162. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 611 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 612. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 163. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 613. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 164. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 165. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 614 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 166. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 615. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty}\leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 167. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

23.17 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t)\in A|X_1+X_2+\cdots+X_{R(t)}=s,\{V(\tau),\tau<s\}\right\}=\mathbb{P}\left\{V(t-s)\in A|X_1>t-s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 616. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t)\in A\}=\frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty}\mathbb{P}\{V(t+x)\in A|X>x\}(1-F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 617. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 618. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 454. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{X} V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}(0)\right]<\infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\, ds\right]<\infty$,*entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t} V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

23.18 Output Process and Regenerative Processes

En Sigman, Thorison y Wolff [?] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j=\tau_j-\tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X=\{X(t): t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 186. *Si existe una variable aleatoria no negativa* R_1 *tal que* $\theta_{R1} X=_D X$, *entonces* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias* $R=\{R_k: k \geq 1\}$, *tal que para* $k \geq 1$,

$$\theta_k(X, R)=_D(X, R) .$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ *es condicionalmente independiente de* $(X, R_1, \ldots, R_k)$, *dado* $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 455. *Para el sistema de espera* $M/G/1/L$ *con disciplina FIFO, el proceso* $\boldsymbol{I}$ *es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) Los tiempos de servicio son identicamente cero;
  b) $L=0$, *para cualquier proceso de servicio* S;
  c) $L=1$ *y* $G=D$;
  d) $L=\infty$ *y* $G=M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1}-T_n \leq t\}$ *son*

  a) $1-e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
  b) $1-e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;
  c) $1-e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;
  d) $1-e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G=D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.

- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 456. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*

  c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para* $L < \infty$

  d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 457. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

23.19 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [?]

Definición 619 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 168. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots$, que satisfacen la propiedad deseada [?].*

Nota 169. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 620. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 170. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 171. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 172. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 173.

a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 621. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 622. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 623. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 458. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Corolario 44. *Sea* $\{V(t), t \geq 0\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E} < \infty$*,* F *es no-aritmética, y para todo* $x \geq 0$*,* $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $[0, \tau]$*, entonces* $V(t)$ *converge en distribución cuando* $t \to \infty$ *y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V(t)$ *cuando* $t \to \infty$*.*

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 624. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.32}$$

para $t \geq 0$*.*

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 625. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, para* $n \geq 1$*, son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F*, donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$*. Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 174. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F*, con* $F(0) = 0$*, para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F*. Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$*, donde* $T_n \to \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 175. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 459 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \to \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 187. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 626. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}[X(T + t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 188. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t),\ donde\ h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 460 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 189. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 176. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 461. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu,\ c.s. \tag{23.33}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu,\ c.s. \tag{23.34}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 45 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t \rightarrow \infty. \tag{23.35}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 627. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 462. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \quad (23.36) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (23.37) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 46. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.38)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 190. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 177. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 463. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (23.39)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (23.40)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 47 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.41}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 628. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 464. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (23.42)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (23.43)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 48. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.44}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 191. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 178. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 465. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \quad (23.45) \\ lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (23.46) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 49 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \quad (23.47)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 629. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 466. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \quad (23.48) \\ lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (23.49) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 50. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}\left[Z(T_1) - Z(T_0)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \quad (23.50)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 192. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 179. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 467. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.51}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.52}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N\,/t)$ la cumple.

Corolario 51 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.53}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 630. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 468. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.54}$$
$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.55}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 52. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.56}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 193. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 180. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 469. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \; c.s. \tag{23.57}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \; c.s. \tag{23.58}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 53 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \; c.s. \; cuando \; t \to \infty. \tag{23.59}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 631. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 470. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (23.60)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (23.61) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 54. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.62)$$

Definición 632. *Sea $h\left(t\right)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h\left(t\right)$ y la distribución F es*

$$H\left(t\right) = h\left(t\right) + \int_{\left[0,t\right]} H\left(t-s\right) dF\left(s\right), \; t \geq 0, \quad (23.63)$$

donde $H\left(t\right)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H\left(t\right)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 194. *La función $U \star h\left(t\right)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 471 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 633. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N\left(t\right)$, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = \mathbb{1}\left(t \geq 0\right)$.

Proposición 195. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U\left(t\right)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 634. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF\left(t\right), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 196. *La Transformada de Laplace $\hat{U}\left(\alpha\right)$ y $\hat{F}\left(\alpha\right)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}\left(\alpha\right) = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$.*

Nota 181. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 472. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 55 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 635. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.64}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 636. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 182. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 637. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.65}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 638. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 183. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 197. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 9 (**Proceso Poisson**). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 184. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 473. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (23.66) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (23.67) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 56 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.68}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 639. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 474. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (23.69)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (23.70) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 57. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.71}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 640. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 198. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 641. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 199. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 185. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 475. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 58 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 642. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{23.72}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 200. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 476 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu,\ cuando\ t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 643. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 201. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 644. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 202. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 186. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 477. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 59 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1]\,,\; t \geq 0,$$

Definición 645. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s)\,,\; t \geq 0, \tag{23.73}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 203. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 478 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 187. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 479 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 204. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\; \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 646. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 205. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 480 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Nota 188. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 481 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 206. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 647. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 207. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 482 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Definición 648. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 189. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 190. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 191. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 649. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 192. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 483 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 650 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t*.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t*, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t*.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$*, la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t*.*

Nota 193. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n*, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$*. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{23.74}$$

Ejemplo 10 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*, entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$*.*

Nota 194. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 651. *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 195. *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 208. *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 484. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N *es estacionario.*

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 196. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 60. *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 197. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 198. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 652 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 653. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\, du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\, du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 199. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 654. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 200. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 201. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 655 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 202. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 656. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} \quad = \quad \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 203. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 657. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 658. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 659. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 485. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] \quad = \quad \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 660. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 661. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 662. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 486. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$[58], se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i\left(z\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (**??**): $n\rightarrow t-\tau_i\left(m\right)$, $T\rightarrow\overline{\tau}_i\left(m\right)-\tau_i\left(m\right)$, $L_n\rightarrow L_i\left(t\right)$ y $F\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{L_0}\right]\rightarrow F_i\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{L_i\tau_i(m)}\right]$, se puede ver que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right]=z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)} \tag{23.75}$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i\left(t\right)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i\left(z\right)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right]=\frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i\left(z\right)}\\
&= \frac{1-I_i\left[P_i\left(z\right)\right]}{1-P_i\left(z\right)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Q_i\left(z\right) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right]+\mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}\left\{z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)}+\frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}\right\}
\end{aligned}$$

[58] En Stidham[**?**] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]<\infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right]<\infty$, además, como $M_i>0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}\left[C_i\right]<\infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N}\mu_k<1$.

es decir

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1 - z) P_i(z)}{1 - P_i(z)} \tag{23.76}$$

Teorema 487. *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t, $A_j(t) = \{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\}$ para algún tiempo $t \geq 0$ y Q_j la cola j-ésima en la RSVC, para $j = 1, 2, 3, 4$. Existe un intervalo $I \neq \emptyset$ tal que para $T^* \in I$, tal que $\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(Tt^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I\} > 0$.*

Proof. Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.

Sea $n > 0$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1(n) > 0$, entonces tenemos que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1(n)$.

Definamos el intervalo $I_1 \equiv [\overline{\tau}_1(n), \tau_2(n)]$ de longitud $\xi_1 = r_1(n)$. Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$\mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)}. \tag{23.77}$$

Por otra parte, para la cola Q_2, el tiempo $\overline{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\overline{\tau}_2(n-1)) = 0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n. Entonces tenemos un sgundo intervalo $I_2 \equiv [\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)}, \tag{23.78}$$

donde $\xi_2(n) = \tau_2(n) - \overline{\tau}_2(n-1)$.

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} &= \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\} \\
&\geq \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} \mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} \\
&= e^{-\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]}.
\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2(n)]} > 0. \tag{23.79}$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC, se afirma que existe $m > 0$ tal que $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$.

Para Q_3 sea $I_3 = [\overline{\tau}_3(m), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_3(m) = r_3(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(n)}. \tag{23.80}$$

Análogamente que como se hizo para Q_2, tenemos que para Q_4 se tiene el intervalo $I_4 = [\overline{\tau}_4(m-1), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_4(m) = \tau_4(m) - \overline{\tau}_4(m-1)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\} = e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(n)}. \tag{23.81}$$

Al igual que para el primer sistema, dado que $I_3(m) \subset I_4(m)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\xi_3(m) \leq \xi_4(m) &\Leftrightarrow -\xi_3(m) \geq -\xi_4(m) \\
-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m) &\Leftrightarrow e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_3(m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} \\
\mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_3(m)\} &\geq \mathbb{P}\{A_4(t) | t \in I_4(m)\}
\end{aligned}$$

Entonces, dado que los eventos A_3 y A_4 son independientes, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\right\} &= \mathbb{P}\left\{A_3(t) | t \in I_3(m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(t) | t \in I_3(m)\right\} \\ &\geq \mathbb{P}\left\{A_3(t) | t \in I_3(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(t) | t \in I_4(n)\right\} \\ &= e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)} e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)} = e^{-\left[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)+\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)\right]}.\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\left\{A_3(t), A_4(t) | t \in I_3(m)\right\} = e^{-\left[\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)+\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)\right]} > 0. \tag{23.82}$$

Por construcción se tiene que $I(n,m) \equiv I_1(n) \cap I_3(m) \neq \emptyset$,entonces en particular se tienen las contenciones $I(n,m) \subseteq I_1(n)$ y $I(n,m) \subseteq I_3(m)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m} \equiv \ell(I(n,m))$ tenemos que

$$\xi_{n,m} \leq \xi_1(n) \text{ y } \xi_{n,m} \leq \xi_3(m) \text{ entonces } -\xi_{n,m} \geq -\xi_1(n) \text{ y } -\xi_{n,m} \leq -\xi_3(m)$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{array}{ll} -\tilde{\mu}_1 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_1 \xi_1(n), & -\tilde{\mu}_2 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_1(n) \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_2(n), \\ -\tilde{\mu}_3 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_3 \xi_3(m), & -\tilde{\mu}_4 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_3(m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4(m). \end{array}$$

Sea $T^* \in I_{n,m}$, entonces dado que en particular $T^* \in I_1(n)$ se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2, en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4, es decir, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$, $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I_{n,m}$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4, por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left\{A_1(T^*), A_2(T^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I_{n,m}\right\} = \prod_{j=1}^4 \mathbb{P}\left\{A_j(T^*) | T^* \in I_{n,m}\right\} \\ &\geq \mathbb{P}\left\{A_1(T^*) | T^* \in I_1(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_2(T^*) | T^* \in I_2(n)\right\} \mathbb{P}\left\{A_3(T^*) | T^* \in I_3(m)\right\} \mathbb{P}\left\{A_4(T^*) | T^* \in I_4(m)\right\} \\ &= e^{-\mu_1 \xi_1(n)} e^{-\mu_2 \xi_2(n)} e^{-\mu_3 \xi_3(m)} e^{-\mu_4 \xi_4(m)} = e^{-\left[\tilde{\mu}_1 \xi_1(n)+\tilde{\mu}_2 \xi_2(n)+\tilde{\mu}_3 \xi_3(m)+\tilde{\mu}_4 \xi_4(m)\right]} > 0.\end{aligned} \tag{23.83}$$

□

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [?] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 488. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\ var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right) 2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2 (1-\delta)^{-1}.\end{aligned}$$

  Teorema 489. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

Teorema 490. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

En Sigman, Thorison y Wolff [?] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 209. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k (X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 491. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*
  b) *$L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;*
  c) *$L = 1$ y $G = D$;*
  d) *$L = \infty$ y $G = M$.*

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;
  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;
  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 492. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

a) $s = \infty$

b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*

c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para* $L < \infty$

d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 493. *En cualquier sistema de colas* $GI/G/1/L$ *con* $1 \leq L < \infty$ *y distribución de interarribos* A *y distribución de los tiempos de servicio* B*, tal que* $A(0) = 0$*,* $A(t)(1 - B(t)) > 0$ *para alguna* $t > 0$ *y* $B(t)$ *para toda* $t > 0$*, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [?] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 494. *En un sistema estacionario* $GI/M/1$ *los intervalos de interpartida tienen*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu + \theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right) 2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2 (1-\delta)^{-1}.
\end{aligned}
$$

  Teorema 495. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario* $GI/M/1$ *es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 496. *Los intervalos de interpartida* $\{D_n\}$ *de un sistema* $M/G/1$ *estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo* $M/M/1$.

Sean Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 en una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC). Supongamos que cada una de las colas es del tipo $M/M/1$ con tasa de arribo μ_i y que la transferencia de usuarios entre los dos sistemas ocurre entre $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$ con respectiva tasa de arribo igual a la tasa de salida $\hat{\mu}_i = \mu_i$, esto se sabe por lo desarrollado en la sección anterior.

Consideremos, sin pérdida de generalidad como base del análisis, la cola Q_1 además supongamos al servidor lo comenzamos a observar una vez que termina de atender a la misma para desplazarse y llegar a Q_2, es decir al tiempo τ_2.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, ciclo del servidor en que regresa a Q_1 para dar servicio y atender conforme a la política exhaustiva, entonces se tiene que $\overline{\tau}_1(n)$ es el tiempo del servidor en el sistema 1 en que termina de dar servicio a todos los usuarios presentes en la cola, por lo tanto se cumple que $L_1(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, entonces el servidor para llegar a Q_2 incurre en un tiempo de traslado r_1 y por tanto se cumple que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1$. Dado que los tiempos entre arribos son exponenciales se cumple que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n) + r_1\right]\right\} &= e^{-\tilde{\mu}_1 r_1}, \\
\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n) + r_1\right]\right\} &= e^{-\tilde{\mu}_2 r_1}.
\end{aligned}
$$

El evento que nos interesa consiste en que no haya arribos desde que el servidor abandonó Q_2 y regresa nuevamente para dar servicio, es decir en el intervalo de tiempo $\left[\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)\right]$. Entonces, si hacemos

$$\begin{aligned}\varphi_1(n) &\equiv \overline{\tau}_1(n)+r_1=\overline{\tau}_2(n-1)+r_1+r_2+\overline{\tau}_1(n)-\tau_1(n)\\ &= \overline{\tau}_2(n-1)+\overline{\tau}_1(n)-\tau_1(n)+r,,\end{aligned}$$

y longitud del intervalo

$$\begin{aligned}\xi &\equiv \overline{\tau}_1(n)+r_1-\overline{\tau}_2(n-1)=\overline{\tau}_2(n-1)+\overline{\tau}_1(n)-\tau_1(n)+r-\overline{\tau}_2(n-1)\\ &= \overline{\tau}_1(n)-\tau_1(n)+r.\end{aligned}$$

Entonces, determinemos la probabilidad del evento no arribos a Q_2 en $\left[\overline{\tau}_2(n-1),\varphi_1(n)\right]$:

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2(n-1),\varphi_1(n)\right]\right\}=e^{-\tilde{\mu}_2\xi}. \tag{23.84}$$

De manera análoga, tenemos que la probabilidad de no arribos a Q_1 en $\left[\overline{\tau}_2(n-1),\varphi_1(n)\right]$ esta dada por

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2(n-1),\varphi_1(n)\right]\right\}=e^{-\tilde{\mu}_1\xi}, \tag{23.85}$$

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2(n-1),\varphi_1(n)\right]\right\}=e^{-\tilde{\mu}_2\xi}. \tag{23.86}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ y } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2(n-1),\varphi_1(n)\right]\right\}\\ &=\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2(n-1),\varphi_1(n)\right]\right\}\\ &\times\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2(n-1),\varphi_1(n)\right]\right\}=e^{-\tilde{\mu}_1\xi}e^{-\tilde{\mu}_2\xi}=e^{-\tilde{\mu}\xi}.\end{aligned} \tag{23.87}$$

Para el segundo sistema, consideremos nuevamente $\overline{\tau}_1(n)+r_1$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $m>0$ tal que $\overline{\tau}_3(m)<\overline{\tau}_1+r_1<\tau_4(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_3(m),\overline{\tau}_1(n)+r_1\right]\right\}=e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3}, \tag{23.88}$$

donde

$$\xi_3=\overline{\tau}_1(n)+r_1-\overline{\tau}_3(m)=\overline{\tau}_1(n)-\overline{\tau}_3(m)+r_1, \tag{23.89}$$

mientras que para Q_4 al igual que con Q_2 escribiremos $\tau_4(m)$ en términos de $\overline{\tau}_4(m-1)$:
$\varphi_2\equiv\tau_4(m)=\overline{\tau}_4(m-1)+r_4+\overline{\tau}_3(m)-\tau_3(m)+r_3=\overline{\tau}_4(m-1)+\overline{\tau}_3(m)-\tau_3(m)+\hat{r}$, además,
$\xi_2\equiv\varphi_2(m)-\overline{\tau}_1-r_1=\overline{\tau}_4(m-1)+\overline{\tau}_3(m)-\tau_3(m)-\overline{\tau}_1(n)+\hat{r}-r_1$.
Entonces

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_4 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n)+r_1,\varphi_2(m)\right]\right\}=e^{-\tilde{\mu}_4\xi_2}, \tag{23.90}$$

mientras que para Q_3 se tiene que

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n)+r_1,\varphi_2(m)\right]\right\}=e^{-\tilde{\mu}_3\xi_2} \tag{23.91}$$

Por tanto

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3\wedge Q_4 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n)+r_1,\varphi_2(m)\right]\right\}=e^{-\hat{\mu}\xi_2} \tag{23.92}$$

donde $\hat{\mu} = \tilde{\mu}_3 + \tilde{\mu}_4$.

Ahora, definamos los intervalos $\mathcal{I}_1 = [\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_1(n)]$ y $\mathcal{I}_2 = [\overline{\tau}_1(n) + r_1, \varphi_2(m)]$, entonces, sea $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ el intervalo donde cada una de las colas se encuentran vacías, es decir, si tomamos $T^* \in \mathcal{I}$, entonces $L_1(T^*) = L_2(T^*) = L_3(T^*) = L_4(T^*) = 0$.

Ahora, dado que por construcción $\mathcal{I} \neq \emptyset$ y que para $T^* \in \mathcal{I}$ en ninguna de las colas han llegado usuarios, se tiene que no hay transferencia entre las colas, por lo tanto, el sistema 1 y el sistema 2 son condicionalmente independientes en $\mathcal{I}$, es decir

$$\mathbb{P}\left\{L_1(T^*), L_2(T^*), L_3(T^*), L_4(T^*) | T^* \in \mathcal{I}\right\} = \prod_{j=1}^{4} \mathbb{P}\left\{L_j(T^*)\right\}, \tag{23.93}$$

para $T^* \in \mathcal{I}$.

Definición 663 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 204. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots$, que satisfacen la propiedad deseada [**?**].*

Nota 205. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 664. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 206. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 207. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 208. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 209. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 665. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 666. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 667. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 497. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 61. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 668. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.94}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 669. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 210. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 211. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 498 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \to \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 210. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 670. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T + t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 211. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 499 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &=& 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 212. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 212. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 500. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.95}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.96}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 62 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.97}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 671. *Para el proceso* $\{Z(t) : t \geq 0\}$ *se define la fluctuación máxima de* $Z(t)$ *en el intervalo* $(T_{n-1}, T_n]$*:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 501. *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (23.98) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (23.99) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 63. *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.100)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \;\; t \;\; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 213. *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$*, para* $m \geq 1$.

Nota 213. *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}(t)$

Teorema 502. *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (23.101) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (23.102) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 64 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.103}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 672. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 503. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.104}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.105}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 65. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.106}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 214. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 214. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 504. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} & (23.107)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} & (23.108)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 66 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.109}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 673. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 505. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (23.110)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (23.111)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 67. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.112}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\
T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 215. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 215. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 506. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned}lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu,\ c.s. & (23.113)\\ lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu,\ c.s. & (23.114)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 68 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t \to \infty. \quad (23.115)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 674. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 507. *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned}lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a,\ c.s. & (23.116)\\ lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu,\ c.s. & (23.117)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 69. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]},\ c.s.\ cuando\ t \to \infty. \quad (23.118)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 216. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 216. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 508. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.119}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.120}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 70 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.121}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 675. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 509. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (23.122)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (23.123)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 71. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (23.124)$$

Definición 676. *Sea $h\left(t\right)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h\left(t\right)$ y la distribución F es*

$$H\left(t\right) = h\left(t\right) + \int_{\left[0,t\right]} H\left(t-s\right) dF\left(s\right), \ t \geq 0, \qquad (23.125)$$

donde $H\left(t\right)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H\left(t\right)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 217. *La función $U \star h\left(t\right)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 510 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 677. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N\left(t\right)$, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = \mathbb{1}\left(t \geq 0\right)$.

Proposición 218. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U\left(t\right)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 678. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF\left(t\right), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 219. *La Transformada de Laplace $\hat{U}\left(\alpha\right)$ y $\hat{F}\left(\alpha\right)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}\left(\alpha\right) = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$.*

Nota 217. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 511. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 72 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t) + 1],\; t \geq 0,$$

Definición 679. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.126}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 680. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 218. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 681. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.127}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 682. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 219. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 220. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 11 (**Proceso Poisson**)**.** *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 220. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 512. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.128}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.129}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 73 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.130}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 683. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 513. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.131}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.132}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 74. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.133}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 684. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 221. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 685. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t}dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 222. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 221. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 514. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 75 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 686. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{23.134}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 223. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 515 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 687. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 224. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 688. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 225. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 222. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 516. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 76 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t)+1],\ t \geq 0,$$

Definición 689. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{23.135}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 226. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 517 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 223. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 518 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 227. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 690. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \; para \; t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 228. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \; donde \; h(t) = \mathbb{E}\left[X(t) \mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 519 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t) \mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 224. *Una función $h : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 520 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\, ds.$$

Proposición 229. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \; donde \; h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 691. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \; para \; t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 230. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}\left[X(t)\right]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \; donde \; h(t) = \mathbb{E}\left[X(t) \mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 521 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t) \mathbb{1}(T > t)\right]$.

Definición 692. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 225. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 226. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 227. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 693. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 228. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 522 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 694 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t*.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t*, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t*.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$*, la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t*.*

Nota 229. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n*, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$*. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{23.136}$$

Ejemplo 12 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ*, entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$*.*

Nota 230. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 695. *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 231. *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 231. *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 523. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación* N *es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante* $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 232. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 77. *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 233. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \to S$.

Nota 234. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 696 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 697. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\, du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 235. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 698. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 236. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Nota 237. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 699 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 238. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 700. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 239. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 701. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 702. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 703. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 524. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

23.20 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [?]

Definición 704 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 240. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [?].*

Nota 241. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (**i.i.d.**)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son **i.i.d.** e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 705. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 242. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 243. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 244. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 245.

a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

23.21 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 706. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 707. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 708. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 525. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Corolario 78. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \to \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) \, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \to \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 709. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.137}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 710. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 246. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 247. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 526 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \to \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 232. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 711. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T + t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 233. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 527 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t \to \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

23.22 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 234. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 248. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 528. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.138}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.139}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 79 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.140}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 712. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 529. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (23.141)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (23.142)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 80. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.143)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 235. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 249. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 530. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (23.144)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (23.145)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 81 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.146}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 713. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 531. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.147}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.148}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 82. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.149}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \ t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 236. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 250. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 532. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \quad (23.150)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (23.151)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 83 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.152)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 714. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 533. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \quad (23.153)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (23.154)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 84. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.155)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq &\ t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 237. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 251. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 534. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{23.156}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{23.157}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 85 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \to \infty. \tag{23.158}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 715. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 535. *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \ c.s. \tag{23.159}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \ c.s. \tag{23.160}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 86. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \ c.s. \ cuando \ t \to \infty. \tag{23.161}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \ t < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 238. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 252. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 536. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.162}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.163}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 87 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.164}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 716. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 537. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.165}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.166}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 88. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.167}$$

23.23 Función de Renovación

Definición 717. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.168}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 239. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 538 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 718. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 240. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 719. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 241. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 253. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 539. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 89 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right], \, t \geq 0,$$

Definición 720. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\left(T_n \leq t\right), \tag{23.169}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 721. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 254. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\left(T_n \leq t\right)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

23.24 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 722. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\left(T_n \leq t\right), \tag{23.170}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 723. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 255. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\left(T_n \leq t\right)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 242. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 13 (**Proceso Poisson**). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 256. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 540. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \; c.s. \tag{23.171}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \; c.s. \tag{23.172}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 90 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \; c.s. \; cuando \; t \to \infty. \tag{23.173}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 724. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 541. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z\left(T_n\right) = a, \text{ c.s.} \tag{23.174}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.175}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 91. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.176}$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 725. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N\left(t\right)$, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = \mathbb{1}\left(t \geq 0\right)$.

Proposición 243. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U\left(t\right)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 726. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF\left(t\right), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 244. *La Transformada de Laplace $\hat{U}\left(\alpha\right)$ y $\hat{F}\left(\alpha\right)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}\left(\alpha\right) = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$.*

Nota 257. *Un proceso de renovación $N\left(t\right)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U\left(t\right)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 542. *Sea $N\left(t\right)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta\left(t\right) = \mathbb{E}\left[N\left(\right)\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f\left(T_n\right)\right] = \int_{(0,t]} f\left(s\right) d\eta\left(s\right), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N\left(t\right)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f\left(s\right)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f\left(s\right) d\eta\left(s\right), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 92 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right], \, t \geq 0,$$

Definición 727. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \, t \geq 0, \tag{23.177}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 245. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 543 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 728. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 246. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 729. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 247. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 258. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 544. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 93 (Identidad de Wald para Renovaciones). *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t) + 1\right], \; t \geq 0,$$

Definición 730. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t - s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.178}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 248. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (??).*

Teorema 545 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \textit{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 259. *Una función $h : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 546 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\, ds.$$

Proposición 249. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \textit{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 731. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T + t) | T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \textit{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 250. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \textit{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 547 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 260. *Una función $h : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde b es DRI.*

Teorema 548 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\, ds.$$

Proposición 251. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\, ,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 732. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 252. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\, ,\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 549 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right]$.

Definición 733. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = \left(\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\}\right)$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 261. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 262. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 263. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_{+}$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 734. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = \left(\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\}\right)$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 264. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 550 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 735 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 265. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{23.179}$$

Ejemplo 14 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 736. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 266. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 253. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 551. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación N es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 267. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 94. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

23.25 Procesos Regenerativos

Nota 268. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 269. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 737 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 738. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$
\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du,
\end{aligned}
$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$
\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},
$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 270. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 739. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$
\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})
$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 271. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 272. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 740 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 273. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 741. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 274. *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t - s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 742. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t + x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 743. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 744. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$, *es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$, S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 552. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$. *Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t, *además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,*entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 745. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$, *para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 746. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 747. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$, *es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$, S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 553. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$. *Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t, *además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^*(0)\right] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

23.26 Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\left\{T_1^i, T_2^i, \ldots, T_k^i, \ldots\right\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_i$. Además se sabe que para

$$T^* = \min\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

T^* se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{4} \mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad \text{y} \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min\left\{\tilde{r}, \hat{r}\right\},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \overline{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \overline{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\overline{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

23.27 Resultados para Procesos de Salida

23.28 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 748. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 1. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 2. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 749 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 275. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 750. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 276. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

23.29 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 751. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.180}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 752. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 277. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &=& 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 254. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 278. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 554. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (23.181)$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (23.182)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 95 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.183)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 753. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 555. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (23.184)$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (23.185)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 96. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.186)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 754. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 255. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 755. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F^{n\star}}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F}(\alpha)^{n}=\frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 256. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha)=\frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 279. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)]=\lambda t$, para $t\geq 0$.*

Teorema 556. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t)=\mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()}f(T_n)\right]=\int_{(0,t]}f(s)\,d\eta(s),\ t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1,X_2,\dots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n|T_n=s]=f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)}X_n\right]=\int_{(0,t]}f(s)\,d\eta(s),\ t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 97 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right]=\mu\mathbb{E}[N(t)+1],\ t\geq 0,$$

Definición 756. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t)=h(t)+\int_{[0,t]}H(t-s)\,dF(s),\ t\geq 0, \tag{23.187}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 257. *La función $U\star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 557 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t)\rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t\rightarrow\infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 757. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t),\ t\geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t)=\mathbb{1}(t\geq 0)$.

Proposición 258. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t>0$, y es $U^{'}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t)>N(t-)\}=0,\ t\geq 0.$$

Definición 758. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 259. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 280. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 558. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 98 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 759. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.188}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 260. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 559 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 281. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 560 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 261. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\textrm{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 760. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\textrm{ para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 262. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\textrm{ donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 561 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Nota 282. *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t)\geq0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 562 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 263. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\textrm{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 761. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\textrm{ para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 264. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\textrm{ donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 563 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

23.30 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 762. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 3. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Observación 4. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 763 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 283. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 764. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 284. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

23.31 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 765. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 5. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 6. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 766 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 285. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 767. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 286. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

23.32 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 768. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 769. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 770. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 564. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

23.33 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 771. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 772. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 773. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 565. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

23.34 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 265. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 287. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 566. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \quad (23.189)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (23.190)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 99 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.191)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 774. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 567. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} \quad (23.192)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (23.193)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 100. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.194)$$

23.35 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 266. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 288. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 568. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \qquad (23.195)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \qquad (23.196)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 101 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (23.197)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\left\{Z\left(t\right) : t \geq 0\right\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N\left(t\right)$

Definición 775. *Para el proceso $\left\{Z\left(t\right) : t \geq 0\right\}$ se define la fluctuación máxima de $Z\left(t\right)$ en el intervalo $\left(T_{n-1}, T_n\right]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} \left|Z\left(t\right) - Z\left(T_{n-1}\right)\right|$$

Teorema 569. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} \qquad (23.198)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} \qquad (23.199)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 102. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (23.200)$$

23.36 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq \quad t &< T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 267. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 289. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 570. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.201}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.202}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 103 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.203}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 776. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 571. *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$, *donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (23.204)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (23.205)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 104. *Si* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación, y* $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, *para* $n \geq 1$, *son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (23.206)$$

23.37 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 268. *Para cada* $t \geq 0$, *la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, *para* $m \geq 1$.

Nota 290. *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n, *para* $n \geq 2$, *a* $N\left(t\right)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G, *entonces el tiempo* T_n *de la* n*-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$

Teorema 572. *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (23.207)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (23.208)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 105 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.209}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 777. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 573. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.210}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.211}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 106. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.212}$$

23.38 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 778. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 779. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 780. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 574. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^*\left(0\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^*\left(0\right)\right]<\infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V\left(s\right)ds\right]<\infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V\left(s\right)ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$.

23.39 Procesos de Renovación

Definición 781. *Sean $0\leq T_1\leq T_2\leq\dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\left(T_n\leq t\right), \tag{23.213}$$

para $t\geq0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N\left(t\right)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\left\{N\left(t\right):t\geq0\right\}$, denotado por $N\left(t\right)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N\left(t\right)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0<T_1<T_2<\dots$ casi seguramente.

Definición 782. *Un proceso puntual $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n=T_n-T_{n-1}$, para $n\geq1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F\left(0\right)=0$ y $T_0=0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N\left(t\right)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 291. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F\left(0\right)=0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1,\xi_2,\dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ y $N\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\left(T_n\leq t\right)$, donde $T_n\rightarrow\infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

23.40 Teorema Principal de Renovación

Nota 292. *Una función $h:\mathbb{R}_+\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h\left(t\right)\geq0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h\left(t\right)|\leq b\left(t\right)$, donde b es DRI.*

Teorema 575 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h\left(t\right)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 269. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 783. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 270. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 576 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$.

23.41 Función de Renovación

Definición 784. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.214}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 271. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 577 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

23.42 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 272. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 293. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 578. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.215}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.216}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 107 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.217}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 785. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 579. *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.218}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.219}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 108. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.220}$$

23.43 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 786. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 273. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 787. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 274. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 294. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 580. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 109 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \, t \geq 0,$$

23.44 Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\left\{T_1^i, T_2^i, \ldots, T_k^i, \ldots\right\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_i$. Además se sabe que para

$$T^* = \min\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

T^* se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{4} \mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad \text{y} \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min\left\{\tilde{r}, \hat{r}\right\},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \overline{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \overline{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\overline{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

23.45 Resultados para Procesos de Salida

En [?] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 275. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 581. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) Los tiempos de servicio son identicamente cero;
  b) $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;
  c) $L = 1$ y $G = D$;
  d) $L = \infty$ y $G = M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;
  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;
  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 582. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$
  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.
  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$
  d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 583. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [?] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.

- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}\left(D_n\right) = \mathbb{E}\left(T_n\right)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 584. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu\left(\mu+\theta\right)^{-1}\left[\delta\theta-\mu\left(1-\delta\right)\alpha\left(\theta\right)\right]\left[\theta-\mu\left(1-\delta\right)^{-1}\right]\\
\alpha\left(\theta\right) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right]\\
var\left(D_n\right) &= var\left(T_0\right)-\left(\tau^{-1}-\delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}\left(S_0\right)\right)^2\left(1-\delta\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

  Teorema 585. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 586. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

23.46 Procesos Regenerativos

Para $\{X\left(t\right): t\geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N\left(t\right)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X\left(t\right)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 788. *Para el proceso $\{\left(N\left(t\right),X\left(t\right)\right): t\geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $\left[T_{n-1}, T_n\right)$ están descritas por*

$$\zeta_n = \left(\xi_n, \{X\left(T_{n-1}+t\right): 0\leq t<\xi_n\}\right)$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 7. *Si $\tilde{X}\left(t\right)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X\left(t\right)=f\left(\tilde{X}\left(t\right)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f:\tilde{S}\rightarrow S$.*

Observación 8. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 789 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X=\{X\left(t\right): t\geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1>0$ tal que*

i) $\{X\left(t+R_1\right): t\geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X\left(t\right): t<R_1\},\}$

ii) $\{X\left(t+R_1\right): t\geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X\left(t\right): t>0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X\left(t+R_1\right)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k\equiv R_1+R_2+\cdots+R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 295. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 790. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 296. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

23.47 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 791. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.221}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 792. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 297. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 276. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 298. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 587. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.222}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.223}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 110 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.224}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 793. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 588. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.225}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.226}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 111. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.227}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 794. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 277. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 795. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 278. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 299. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 589. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 112 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \, t \geq 0,$$

Definición 796. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t)=h(t)+\int_{[0,t]}H(t-s)\,dF(s)\,,\; t\geq 0, \tag{23.228}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 279. *La función $U\star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 590 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t)\rightarrow 1/\mu,\ \text{cuando } t\rightarrow\infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 797. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)\,,\; t\geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t)=\mathbb{1}(t\geq 0)$.

Proposición 280. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t>0$, y es $U^{'}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t)>N(t-)\right\}=0,\; t\geq 0.$$

Definición 798. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha)=\int_{\mathbb{R}_{+}}e^{-\alpha t}dF(t)\,,\; \alpha\geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F^{n\star}}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F}(\alpha)^{n}=\frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 281. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha)=\frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 300. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right]=\lambda t$, para $t\geq 0$.*

Teorema 591. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t)=\mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()}f(T_n)\right]=\int_{(0,t]}f(s)\,d\eta(s)\,,\; t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1,X_2,\ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n|T_n=s\right]=f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)}X_n\right]=\int_{(0,t]}f(s)\,d\eta(s)\,,\; t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 113 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right],\ t \geq 0,$$

Definición 799. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{23.229}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 282. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 592 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 301. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 593 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 283. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 800. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ \text{para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 284. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t),\ \text{donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 594 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 302. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 595 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 285. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 801. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 286. *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 596 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$.

23.48 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 802. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Observación 9. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Observación 10. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 803 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 303. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 804. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 304. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

23.49 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 805. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 11. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 12. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 806 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 305. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 807. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 306. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

23.50 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 808. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 809. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 810. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 597. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

23.51 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 811. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 812. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 813. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 598. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

23.52 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ T_{N(t)}\leq & \; t \; < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n)=n$, y

$$N(t)=\max\{n:T_n\leq t\}=\min\{n:T_{n+1}>t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n\leq t\}=F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ P\{N(t)\leq n\} &= 1-F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)$$

Proposición 287. *Para cada $t\geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right]<\infty$, para $m\geq 1$.*

Nota 307. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n\geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G\star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 599. *Para una constante $\mu\leq\infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n = \mu,\; c.s. \tag{23.230}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N(t) = 1/\mu,\; c.s. \tag{23.231}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 114 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu\leq\infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t)\rightarrow 1/\mu,\; c.s.\; cuando\; t\rightarrow\infty. \tag{23.232}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t):t\geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 814. *Para el proceso $\{Z(t):t\geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1},T_n]$:*

$$M_n=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_n}|Z(t)-Z(T_{n-1})|$$

Teorema 600. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z\left(T_n\right) = a, \text{ c.s.} \tag{23.233}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.234}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 115. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.235}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\} \\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 288. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 308. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 601. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.236}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N\left(t\right) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.237}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 116 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.238}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 815. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 602. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (23.239)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (23.240)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 117. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.241}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 289. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 309. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 603. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (23.242)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (23.243)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 118 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.244)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 816. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 604. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (23.245)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (23.246)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 119. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.247)$$

23.53 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq &\quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ P\{N(t)\leq n\} &= 1-F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)$$

Proposición 290. *Para cada $t\geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m]<\infty$, para $m\geq 1$.*

Nota 310. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n\geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G\star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 605. *Para una constante $\mu\leq\infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n = \mu,\ c.s. \tag{23.248}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N(t) = 1/\mu,\ c.s. \tag{23.249}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 120 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu\leq\infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t)\rightarrow 1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \tag{23.250}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t):t\geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 817. *Para el proceso $\{Z(t):t\geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1},T_n]$:*

$$M_n=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_n}|Z(t)-Z(T_{n-1})|$$

Teorema 606. *Supóngase que $n^{-1}T_n\rightarrow\mu$ c.s. cuando $n\rightarrow\infty$, donde $\mu\leq\infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) = a,\ c.s. \tag{23.251}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) = a/\mu,\ c.s. \tag{23.252}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n=0$ c.s.

Corolario 121. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n)-Z(T_{n-1}),M_n)$, para $n\geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t)\rightarrow\frac{\mathbb{E}[Z(T_1)-Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]},\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \tag{23.253}$$

23.54 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 818. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 819. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 820. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 607. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

23.55 Procesos de Renovación

Definición 821. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.254}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 822. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 311. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

23.56 Teorema Principal de Renovación

Nota 312. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 608 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 291. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 823. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t) | T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 292. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 609 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right]$.

23.57 Función de Renovación

Definición 824. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.255}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 293. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (??).*

Teorema 610 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

23.58 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 294. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 313. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 611. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \; c.s. \tag{23.256}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \; c.s. \tag{23.257}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 122 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.258}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 825. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 612. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.259}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.260}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 123. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.261}$$

23.59 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 826. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 295. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 827. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 296. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 314. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 613. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 124 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1]\,,\ t \geq 0,$$

23.60 Procesos de Renovación

Definición 828. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)\,, \tag{23.262}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 829. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 315. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

23.61 Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\left\{T_1^i, T_2^i, \ldots, T_k^i, \ldots\right\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_i$. Además se sabe que para

$$T^* = \min\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

T^* se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{4}\mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad \text{y} \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min\left\{\tilde{r}, \hat{r}\right\},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \overline{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \overline{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\overline{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

23.62 Resultados para Procesos de Salida

En [?] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 297. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1}X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k}X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.

- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 614. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*
  b) $L = 0$*, para cualquier proceso de servicio* S*;*
  c) $L = 1$ *y* $G = D$*;*
  d) $L = \infty$ *y* $G = M$*.*

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\left\{T_{n+1} - T_n \leq t\right\}$ *son*

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$*;*
  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$*;*
  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$*;*
  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 615. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$
  b) *La disciplina de servicio es de procesador compartido.*
  c) *La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para* $L < \infty$
  d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 616. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [?] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.

- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 617. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right]\\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right]\\ var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2(1-\delta)^{-1}.\end{aligned}$$

  Teorema 618. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 619. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

23.63 Procesos Regenerativos

Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [?]

Definición 830 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 316. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [**?**].*

Nota 317. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 831. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 318. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 319. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 320. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 321. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 832. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 833. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 834. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 620. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 125. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \to \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\,ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \to \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 835. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.263}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 836. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 322. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 323. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 621 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \to \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 298. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 837. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 299. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 622 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 300. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 324. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 623. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.264}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.265}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 126 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.266}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 838. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 624. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.267}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.268}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 127. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.269}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \;\; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 301. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 325. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 625. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \;\; c.s. & (23.270)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \;\; c.s. & (23.271)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 128 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \;\; c.s. \;\; cuando \;\; t \rightarrow \infty. \tag{23.272}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 839. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 626. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \;\; c.s. & (23.273)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \;\; c.s. & (23.274)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 129. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \;\; c.s. \;\; cuando \;\; t \rightarrow \infty. \tag{23.275}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \;\; t \;\; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 302. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 326. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 627. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.276}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.277}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 130 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.278}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 840. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 628. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.279}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.280}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 131. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.281}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \;\; t \;\; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 303. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 327. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 629. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.282}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.283}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 132 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.284}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 841. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 630. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.285}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.286}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 133. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.287}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 304. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 328. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 631. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \; c.s. \tag{23.288}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \; c.s. \tag{23.289}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 134 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \; c.s. \; cuando \; t \to \infty. \tag{23.290}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 842. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 632. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) = a, \text{ c.s.} \tag{23.291}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.292}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 135. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.293}$$

Definición 843. *Sea $h\left(t\right)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h\left(t\right)$ y la distribución F es*

$$H\left(t\right) = h\left(t\right) + \int_{[0,t]} H\left(t-s\right)dF\left(s\right), \, t \geq 0, \tag{23.294}$$

donde $H\left(t\right)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H\left(t\right)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 305. *La función $U \star h\left(t\right)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 633 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 844. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N\left(t\right)$, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = \mathbb{1}\left(t \geq 0\right)$.

Proposición 306. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U\left(t\right)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 845. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t}dF\left(t\right), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 307. *La Transformada de Laplace $\hat{U}\left(\alpha\right)$ y $\hat{F}\left(\alpha\right)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}\left(\alpha\right) = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$.*

Nota 329. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 634. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 136 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1]\,,\ t \geq 0,$$

Definición 846. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)\,, \tag{23.295}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 847. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 330. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 848. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)\,, \tag{23.296}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 849. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 331. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 308. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 15 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 332. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 635. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned}lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} \qquad (23.297) \\ lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \qquad (23.298)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 137 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.299}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 850. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 636. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (23.300)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (23.301)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 138. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.302}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 851. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 309. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 852. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 310. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 333. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 637. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 139 (Identidad de Wald para Renovaciones). *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 853. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.303}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 311. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 638 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 854. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \;\; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 312. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 855. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 313. *La Transformada de Laplace* $\hat{U}(\alpha)$ *y* $\hat{F}(\alpha)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.

Nota 334. *Un proceso de renovación* $N(t)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, *para* $t \geq 0$.

Teorema 639. *Sea* $N(t)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ *es finita para cada* t. *Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N(t)$ *tal que* $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, *independiente de* n. *Entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 140 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación* $N(t)$,

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 856. *Sea* $h(t)$ *función de valores reales en* $\mathbb{R}$ *acotada en intervalos finitos e igual a cero para* $t < 0$ *La ecuación de renovación para* $h(t)$ *y la distribución* F *es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.304}$$

donde $H(t)$ *es una función de valores reales. Esto es* $H = h + F \star H$. *Decimos que* $H(t)$ *es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para* $t < 0$.

Proposición 314. *La función* $U \star h(t)$ *es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 640 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 335. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 641 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 315. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 857. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 316. *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 642 (Regeneración Cruda). *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Nota 336. *Una función* $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)|\leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 643 (Teorema Principal de Renovación). *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 317. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t<0$ *puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 858. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 318. *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 644 (Regeneración Cruda). *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Definición 859. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, *sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 337. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 338. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 339. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S, *espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 860. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, *sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 340. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 645 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 861 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación* $N(t)$, *los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t, *que es el tiempo desde la última renovación para* t.
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t, *residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t.
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t.

Nota 341. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n, *y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$. *Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t + y) - N((t - x)) = 0\} \tag{23.305}$$

Ejemplo 16 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ, *entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 342. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 862. *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 343. *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 319. *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 646. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación* N *es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante* $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 344. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 141. *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 345. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 346. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 863 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 864. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 347. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 865. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 348. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \to S$.*

Nota 349. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 866 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 350. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 867. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 351. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 868. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 869. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 870. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 647. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 871. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 872. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 873. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 648. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \to \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \to \infty$.

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces

Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t. Entonces, determinando el primer momento es posible ver que

Definición 874. *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 875. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.*

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\left\{P_i(z_i)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si $I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$ se tiene que $F_i(z) = I_i[P_i(z)]$ para $i = 1, 2$.

Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (**??**), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 876. *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 877. *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 878. *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

59

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 879. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.*

Nota 352. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 880. *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma\left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 881. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 649. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

[59] In Stidham and Heyman [**?**] shows that is sufficient for the regenerative process to be stationary that the mean regenerative cycle time is finite: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$,

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1$.

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i,P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}},E_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 882. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 883. *Dos espacios medibles $(E,\mathcal{E})$ y $(G,\mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f: E\rightarrow G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 884. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G,\mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0,1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 353. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 885. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ es una familia $Z=(\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E,\mathcal{E})$.*

Definición 886. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}=[0,\infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}}(E,\mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w)=(Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w\in\Omega$.

Nota 354. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 355. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E,\mathcal{E})=(\mathbb{R},\mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_1}\leq x_1,\dots,Z_{t_n}\leq x_n\right), x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}, t_1,\dots,t_n\in\mathbb{I}, n\geq 1. \tag{23.306}$$

Nota 356. *Para espacios polacos $(E,\mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 887. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w\in\Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 357. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H,\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z\in H$ a $z_t\in E$ para $t\in\mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}}\cap H := \left\{A\cap H : A\in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{23.307}$$

Nota 358. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ a $(H,\mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H,\mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 359. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H,\mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 888. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0,\infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w).w\in\Omega.$$

Definición 889. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible (**CM**) si el mapeo que toma* $(w,t) \in \Omega \times [0,\infty)$ *a* $Z_t(w) \in E$ *es* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty) / \mathcal{E}$ *medible.*

Nota 360. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que* Z_T *es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma* w *en* $(w, T(w))$ *es* $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ *medible, mientras que el segundo toma* $(w, T(w))$ *en* $Z_{T(w)}(w)$ *es* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty) / \mathcal{E}$ *medible.*

Definición 890. *Un PEOSCT con espacio de estados* $(H, \mathcal{H})$ *es canónicamente conjuntamente medible (**CCM**) si el mapeo* $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ *en* $Z_t \in E$ *es* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty) / \mathcal{E}$ *medible.*

Nota 361. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de* $\Omega \times [0,\infty)$ *a* E*, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma* (w,t) *en* $(Z(w), t)$ *es* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ *medible, y el segundo que toma* $(Z(w), t)$ *en* $Z_t(w)$ *es* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty) / \mathcal{E}$ *medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 891. *Un conjunto de trayectorias* H *de un PEOSCT* Z*, es internamente shift-invariante (**ISI**) si*

$$\left\{ (z_{t+s})_{s \in [0,\infty)} : z \in H \right\} = H, \, t \in [0,\infty).$$

Definición 892. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift* θ_t*,* $t \in [0,\infty)$*, de* H *a* H *por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s \in [0,\infty)}, \, z \in H.$$

Definición 893. *Se dice que un proceso* Z *es shift-medible (**SM**) si* Z *tiene un conjunto de trayectorias* H *que es ISI y además el mapeo que toma* $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ *en* $\theta_t z \in H$ *es* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty) / \mathcal{H}$ *medible.*

Nota 362. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias* H *ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 363.
- *Dado el espacio polaco* $(E, \mathcal{E})$ *se tiene el conjunto de trayectorias* $D_E[0,\infty)$ *que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si* G *es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en* G*, y como* G *es segundo numerable como subespacio de* E*, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 364. *Los procesos estocásticos* Z *a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 650. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 894. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *espacio de probabilidad que soporta al proceso* $Z = (Z_s)_{s \in [0,\infty)}$ *y* $S = (S_k)_0^\infty$ *donde* Z *es un PEOSCTM con espacio de estados* $(E, \mathcal{E})$ *y espacio de trayectorias* $(H, \mathcal{H})$ *y además* S *es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición* $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$*. Considerando* S *como un mapeo medible de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *al espacio sucesión* $(L, \mathcal{L})$*, donde*

$$L = \left\{ (s_k)_0^\infty \in [0,\infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty \right\},$$

donde $\mathcal{L}$ *son los subconjuntos de Borel de* L*, es decir,* $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$*.*

Así el par (Z, S) *es un mapeo medible de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *en* $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$*. El par* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ *denotará la clase de todas las funciones medibles de* $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ *en* $([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty))$*.*

Definición 895. *Sea* θ_t *el mapeo-shift conjunto de* $H \times L$ *en* $H \times L$ *dado por*

$$\theta_t \left(z, (s_k)_0^\infty\right) = \theta_t \left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^\infty\right)$$

donde $n_{t-} = inf\{n \geq 1 : s_n \geq t\}$*.*

Nota 365. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que* Z *es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias* H *es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma* $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ *en* $z_t \in E$ *es* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty) / \mathcal{E}$ *medible.*

Definición 896. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S)=\left(Z^0,S^0\right),n\geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $((Z_s)\,s\in[0,S_n),S_0,\ldots,S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 366. *Si el par (Z,S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1,X_2,\ldots$, son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 651. *Supóngase que el par (Z,S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**},S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z,S) con periodo d.*

Definición 897. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n\geq 1$ y una función $f\in\mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}}f(x)\,dx>0$ con $X_2,X_3,\ldots,X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_n\in B)\geq\int_B f(x)\,dx$$

para $B\in\mathcal{B}$.

Definición 898. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S)=\left(Z^0,S^0\right)$ para $n\geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0,S_1,\ldots,S_n)$ para $n\geq 0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 367.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 368. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 652. *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 653. *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0,S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega,\mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^*=\frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]}d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*,S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0,S^0\right)\in\cdot\right)$. Entonces $(Z*,S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*,S^*)]=\mathbb{E}\left[\int_0^{X_1}f\left(\theta_s\left(Z^0,S^0\right)\right)ds\right]/\mathbb{E}[X_1]$$

$f\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x):=\frac{\mathbb{E}[X_1]\wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x\geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1>x]/\mathbb{E}[X_1]$, con $x\geq 0$.

Teorema 654. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{23.308}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{23.309}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{23.310}$$

Also the intervisit time I_i is defined as the period beginning at the time of its service completion in a cycle and ending at the time when it is polled in the next cycle; its duration is given by $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.

So we the following are still true

$$\begin{array}{ll}
\mathbb{E}[L_i] = \mu_i \mathbb{E}[I_i], & \mathbb{E}[C_i] = \frac{f_i(i)}{\mu_i(1-\mu_i)}, \\
\mathbb{E}[S_i] = \mu_i \mathbb{E}[C_i], & \mathbb{E}[I_i] = (1-\mu_i)\mathbb{E}[C_i], \\
Var[L_i] = \mu_i^2 Var[I_i] + \sigma^2 \mathbb{E}[I_i], & Var[C_i] = \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2}, \\
Var[S_i] = \frac{Var[L_i^*]}{(1-\mu_i)^2} + \frac{\sigma^2 \mathbb{E}[L_i^*]}{(1-\mu_i)^3}, & Var[I_i] = \frac{Var[L_i^*]}{\mu_i^2} - \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} f_i(i).
\end{array} \tag{23.311}$$

Definición 899. *El tiempo de Ciclo C_i es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola i es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$, o equivalentemente $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 900. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.*

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si $I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$ se tiene que $F_i(z) = I_i[P_i(z)]$ para $i = 1, 2$.

Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (**??**), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 901. *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 902. *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 903. *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) \quad = \quad \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$[60], se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\ \mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right] &= \mathbb{E}\left[M_i\right]\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i\left(z\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (**??**): $n \rightarrow t-\tau_i\left(m\right)$, $T \rightarrow \overline{\tau}_i\left(m\right)-\tau_i\left(m\right)$, $L_n \rightarrow L_i\left(t\right)$ y $F\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{L_0}\right] \rightarrow F_i\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{L_i\tau_i(m)}\right]$, se puede ver que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i\left(z\right)-1}{z-P_i\left(z\right)} \tag{23.312}$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i\left(t\right)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i\left(z\right)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z\right)\right\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i\left(z\right)}\\ &= \frac{1-I_i\left[P_i\left(z\right)\right]}{1-P_i\left(z\right)}\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i\left(z\right)}{1-P_i\left(z\right)}$$

Por lo tanto

[60] En Stidham[**?**] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}\left[M_i\right] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}\left[C_i\right] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N}\mu_k < 1$.

$$
\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} + \sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)} + \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}\right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}
\end{aligned}
$$

es decir

$$
Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \tag{23.313}
$$

Si hacemos:

$$
S(z) = 1-F(z) \tag{23.314}
$$

$$
T(z) = z-P(z) \tag{23.315}
$$

$$
U(z) = 1-P(z) \tag{23.316}
$$

entonces

$$
\mathbb{E}[C_i]\,Q(z) = \frac{(z-1)\,S(z)\,P(z)}{T(z)\,U(z)} \tag{23.317}
$$

A saber, si $a_k = P\{L(t)=k\}$

$$
S(z) = 1-F(z) = 1-\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k
$$

entonces

$S^{'}(z) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}$, por tanto $S^{(1)}(1) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k = -\mathbb{E}[L(t)]$, luego $S^{''}(z) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k z^{k-2}$ y $S^{(2)}(1) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k = \mathbb{E}[L(L-1)]$; de la misma manera $S^{'''}(z) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)a_k z^{k-3}$ y $S^{(3)}(1) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)a_k = -\mathbb{E}[L(L-1)(L-2)] = -\mathbb{E}\left[L^3\right]+3-\mathbb{E}\left[L^2\right]-2-\mathbb{E}[L]$.

Es decir

$$
\begin{aligned}
S^{(1)}(1) &= -\mathbb{E}[L(t)], \\
S^{(2)}(1) &= -\mathbb{E}[L(L-1)] = -\mathbb{E}\left[L^2\right]+\mathbb{E}[L], \\
S^{(3)}(1) &= -\mathbb{E}[L(L-1)(L-2)] = -\mathbb{E}\left[L^3\right]+3\mathbb{E}\left[L^2\right]-2\mathbb{E}[L].
\end{aligned}
$$

Expandiendo alrededor de $z=1$

$$
\begin{aligned}
S(z) &= S(1) + \frac{S^{'}(1)}{1!}(z-1) + \frac{S^{''}(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{S^{'''}(1)}{3!}(z-1)^3 + \ldots + \\
&= (z-1)\left\{S^{'}(1) + \frac{S^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{S^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \ldots + \right\} \\
&= (z-1)\,R_1(z)
\end{aligned}
$$

con $R_1(z) \neq 0$, pues

$$R_1(z) = -\mathbb{E}[L] \tag{23.318}$$

entonces

$$R_1(z) = S^{'}(1) + \frac{S^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{S^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \frac{S^{iv}(1)}{4!}(z-1)^3 + \ldots + \tag{23.319}$$

Calculando las derivadas y evaluando en $z=1$

$$\begin{aligned} R_1(1) &= S^{(1)}(1) = -\mathbb{E}[L] && (23.320)\\ R_1^{(1)}(1) &= \frac{1}{2}S^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[L^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[L] && (23.321)\\ R_1^{(2)}(1) &= \frac{2}{3!}S^{(3)}(1) = -\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[L^3\right] + \mathbb{E}\left[L^2\right] - \frac{2}{3}\mathbb{E}[L] && (23.322)\end{aligned}$$

De manera análoga se puede ver que para $T(z) = z - P(z)$ se puede encontrar una expanción alrededor de $z=1$

Expandiendo alrededor de $z=1$

$$\begin{aligned} T(z) &= T(1) + \frac{T^{'}(1)}{1!}(z-1) + \frac{T^{''}(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{T^{'''}(1)}{3!}(z-1)^3 + \ldots + \\ &= (z-1)\left\{T^{'}(1) + \frac{T^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{T^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \ldots + \right\} \\ &= (z-1)R_2(z)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} T^{(1)}(1) &= -\mathbb{E}[X(t)] = -\mu, \\ T^{(2)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)] = -\mathbb{E}\left[X^2\right] + \mathbb{E}[X] = -\mathbb{E}\left[X^2\right] + \mu, \\ T^{(3)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)] = -\mathbb{E}\left[X^3\right] + 3\mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}[X] \\ &= -\mathbb{E}\left[X^3\right] + 3\mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mu.\end{aligned}$$

Por lo tanto $R_2(1) \neq 0$, pues

$$R_2(1) = 1 - \mathbb{E}[X] = 1 - \mu \tag{23.323}$$

entonces

$$R_2(z) = T^{'}(1) + \frac{T^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{T^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \frac{T^{(iv)}(1)}{4!}(z-1)^3 + \ldots + \tag{23.324}$$

Calculando las derivadas y evaluando en $z=1$

$$\begin{aligned} R_2(1) &= T^{(1)}(1) = 1 - \mu && (23.325)\\ R_2^{(1)}(1) &= \frac{1}{2}T^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right] + \frac{1}{2}\mu && (23.326)\\ R_2^{(2)}(1) &= \frac{2}{3!}T^{(3)}(1) = -\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[X^3\right] + \mathbb{E}\left[X^2\right] - \frac{2}{3}\mu && (23.327)\end{aligned}$$

Finalmente para de manera análoga se puede ver que para $U(z) = 1 - P(z)$ se puede encontrar una expanción alrededor de $z = 1$

$$\begin{aligned} U(z) &= U(1) + \frac{U^{'}(1)}{1!}(z-1) + \frac{U^{''}(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{U^{'''}(1)}{3!}(z-1)^3 + \ldots + \\ &= (z-1)\left\{U^{'}(1) + \frac{U^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{U^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \ldots + \right\} \\ &= (z-1) R_3(z) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} U^{(1)}(1) &= -\mathbb{E}[X(t)] = -\mu, \\ U^{(2)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)] = -\mathbb{E}\left[X^2\right] + \mathbb{E}[X] = -\mathbb{E}\left[X^2\right] + \mu, \\ U^{(3)}(1) &= -\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)] = -\mathbb{E}\left[X^3\right] + 3\mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}[X] \\ &= -\mathbb{E}\left[X^3\right] + 3\mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mu. \end{aligned}$$

Por lo tanto $R_3(1) \neq 0$, pues

$$R_3(1) = -\mathbb{E}[X] = -\mu \tag{23.328}$$

entonces

$$R_3(z) = U^{'}(1) + \frac{U^{''}(1)}{2!}(z-1) + \frac{U^{'''}(1)}{3!}(z-1)^2 + \frac{U^{(iv)}(1)}{4!}(z-1)^3 + \ldots + \tag{23.329}$$

Calculando las derivadas y evaluando en $z = 1$

$$R_3(1) = U^{(1)}(1) = -\mu \tag{23.330}$$

$$R_3^{(1)}(1) = \frac{1}{2}U^{(2)}(1) = -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right] + \frac{1}{2}\mu \tag{23.331}$$

$$R_3^{(2)}(1) = \frac{2}{3!}U^{(3)}(1) = -\frac{1}{3}\mathbb{E}\left[X^3\right] + \mathbb{E}\left[X^2\right] - \frac{2}{3}\mu \tag{23.332}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}[C_i]\,Q(z) = \frac{(z-1)(z-1)R_1(z)P(z)}{(z-1)R_2(z)(z-1)R_3(z)} = \frac{R_1(z)P(z)}{R_2(z)R_3(z)} \equiv \frac{R_1 P}{R_2 R_3} \tag{23.333}$$

Entonces

$$\left[\frac{R_1(z)P(z)}{R_2(z)R_3(z)}\right]^{'} = \frac{PR_2R_3R_1^{'} + R_1R_2R_3P^{'} - R_3R_1PR_2 - R_2R_1PR_3^{'}}{(R_2R_3)^2} \tag{23.334}$$

Evaluando en $z=1$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R_2(1)R_3(1)R_1^{(1)}(1)+R_1(1)R_2(1)R_3(1)P^{'}(1)-R_3(1)R_1(1)R_2(1)^{(1)}-R_2(1)R_1(1)R_3^{'}(1)}{\left(R_2(1)R_3(1)\right)^2}\\
&= \frac{1}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}L\right)\left(1-\mu\right)\left(-\mu\right)+\left(-\mathbb{E}L\right)\left(1-\mu\right)\left(-\mu\right)\mu\right.\\
&\quad \left.-\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\right)\left(-\mu\right)\left(-\mathbb{E}L\right)-\left(1-\mu\right)\left(-\mathbb{E}L\right)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}L\right)\left(\mu^2-\mu\right)+\left(\mu^2-\mu^3\right)\mathbb{E}L\right.\\
&\quad \left.-\mu\mathbb{E}L\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\right)+\left(\mathbb{E}L-\mu\mathbb{E}L\right)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\right)\right\}\\
&= \frac{1}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\left\{-\frac{1}{2}\mu^2\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mu\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mu^2\mathbb{E}L-\mu^3\mathbb{E}L+\mu\mathbb{E}L\mathbb{E}X^2-\frac{1}{2}\mathbb{E}L\mathbb{E}X^2\right\}\\
&= \frac{1}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\left\{\frac{1}{2}\mu\mathbb{E}L^2\left(1-\mu\right)+\mathbb{E}L\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\left(\mu^2-\mathbb{E}X^2\right)\right\}\\
&= \frac{1}{2\mu\left(1-\mu\right)}\mathbb{E}L^2-\frac{\frac{1}{2}-\mu}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\sigma^2\mathbb{E}L
\end{aligned}$$

por lo tanto (para Takagi)

$$Q^{(1)}=\frac{1}{\mathbb{E}C}\left\{\frac{1}{2\mu\left(1-\mu\right)}\mathbb{E}L^2-\frac{\frac{1}{2}-\mu}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}\sigma^2\mathbb{E}L\right\}$$

donde

$$\mathbb{E}C=\frac{\mathbb{E}L}{\mu\left(1-\mu\right)}$$

entonces

$$\begin{aligned}
Q^{(1)} &= \frac{1}{2}\frac{\mathbb{E}L^2}{\mathbb{E}L}-\frac{\frac{1}{2}-\mu}{\left(1-\mu\right)\mu}\sigma^2=\frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}L}-\frac{\sigma^2}{2}\left\{\frac{2\mu-1}{\left(1-\mu\right)\mu}\right\}\\
&= \frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}L}+\frac{\sigma^2}{2}\left\{\frac{1}{1-\mu}+\frac{1}{\mu}\right\}
\end{aligned}$$

Mientras que para nosotros

$$Q^{(1)}=\frac{1}{\mu\left(1-\mu\right)}\frac{\mathbb{E}L^2}{2\mathbb{E}C}-\sigma^2\frac{\mathbb{E}L}{2\mathbb{E}C}\cdot\frac{1-2\mu}{\left(1-\mu\right)^2\mu^2}$$

Retomando la ecuación (**??**)

$$\left[\frac{R_1\left(z\right)P\left(z\right)}{R_2\left(z\right)R_3\left(z\right)}\right]^{'} = \frac{PR_2R_3R_1^{'}+R_1R_2R_3P^{'}-R_3R_1PR_2-R_2R_1PR_3^{'}}{\left(R_2R_3\right)^2}=\frac{F\left(z\right)}{G\left(z\right)}$$

donde

$$\begin{aligned}
F\left(z\right) &= PR_2R_3R_1^{'}+R_1R_2R_3P^{'}-R_3R_1PR_2^{'}-R_2R_1PR_3^{'}\\
G\left(z\right) &= R_2^2R_3^2\\
G^2\left(z\right) &= R_2^4R_3^4=\left(1-\mu\right)^4\mu^4
\end{aligned}$$

y por tanto

$$
\begin{aligned}
G^{'}(z) &= 2R_2R_3\left[R_2^{'}R_3+R_2R_3^{'}\right]\\
G^{'}(1) &= -2(1-\mu)\mu\left[\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right]+\frac{1}{2}\mu\right)(-\mu)+(1-\mu)\left(-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right]+\frac{1}{2}\mu\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
F^{'}(z) = \left[(R_2R_3)R_1^{''}-(R_1R_3)R_2^{''}-(R_1R_2)R_3^{''}-2\left(R_2^{'}R_3^{'}\right)R_1\right]P+2(R_2R_3)R_1^{'}P^{'}+(R_1R_2R_3)P^{''}
$$

Por lo tanto, encontremos $F^{'}(z)G(z)+F(z)G^{'}(z)$:

$$
\begin{aligned}
&F^{'}(z)G(z)+F(z)G^{'}(z)=\left\{\left[(R_2R_3)R_1^{''}-(R_1R_3)R_2^{''}-(R_1R_2)R_3^{''}-2\left(R_2^{'}R_3^{'}\right)R_1\right]P\right.\\
&\left.+2(R_2R_3)R_1^{'}P^{'}+(R_1R_2R_3)P^{''}\right\}R_2^2R_3^2-\left\{\left[PR_2R_3R_1^{'}+R_1R_2R_3P^{'}-R_3R_1PR_2^{'}\right.\right.\\
&\left.\left.-R_2R_1PR_3^{'}\right]\left[2R_2R_3\left(R_2^{'}R_3+R_2R_3^{'}\right)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Evaluando en $z=1$

$$
\begin{aligned}
&= (1+R_3)^3R_3^3R_1^{''}-(1+R_3)^2R_1R_3^3R_3^{''}-(1+R_3)^3R_3^2R_1R_3^{''}-2(1+R_3)^2R_3^2\left(R_3^{'}\right)^2\\
&+ 2(1+R_3)^3R_3^3R_1^{'}P^{'}+(1+R_3)^3R_3^3R_1P^{''}-2(1+R_3)^2R_3^2(1+2R_3)R_3^{'}R_1^{'}\\
&- 2(1+R_3)^2R_3^2R_1R_3^{'}(1+2R_3)P^{'}+2(1+R_3)(1+2R_3)R_3^3R_1\left(R_3^{'}\right)^2\\
&+ 2(1+R_3)^2(1+2R_3)R_1R_3R_3^{'}\\
&= -(1-\mu)^3\mu^3R_1^{''}-(1-\mu)^2\mu^2R_1(1-2\mu)R_3^{''}-(1-\mu)^3\mu^3R_1P^{''}\\
&+ 2(1-\mu)\mu^2\left[(1-2\mu)R_1-(1-\mu)\right]\left(R_3^{'}\right)^2-2(1-\mu)^2\mu R_1(1-2\mu)R_3^{'}\\
&- 2(1-\mu)^3\mu^4R_1^{'}-2\mu(1-\mu)(1-2\mu)R_3^{'}R_1^{'}-2\mu^3(1-\mu)^2(1-2\mu)R_1R_1^{'}
\end{aligned}
$$

por tanto

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{F(z)}{G(z)}\right]^{'} &= \frac{1}{\mu^3(1-\mu)^3}\left\{-(1-\mu)^2\mu^2R_1^{''}-\mu(1-\mu)(1-2\mu)R_1R_3^{''}-\mu^2(1-\mu)^2R_1P^{''}\right.\\
&+2\mu\left[(1-2\mu)R_1-(1-\mu)\right]\left(R_3^{'}\right)^2-2(1-\mu)(1-2\mu)R_1R_3^{'}-2\mu^3(1-\mu)^2R_1^{'}\\
&\left.-2(1-2\mu)R_3^{'}R_1^{'}-2\mu^2(1-\mu)(1-2\mu)R_1R_1^{'}\right\}
\end{aligned}
$$

recordemos que

$$
\begin{aligned}
R_1 &= -\mathbb{E}L\\
R_3 &= -\mu\\
R_1^{'} &= -\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}L\\
R_3^{'} &= -\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mu\\
R_1^{''} &= -\frac{1}{3}\mathbb{E}L^3+\mathbb{E}L^2-\frac{2}{3}\mathbb{E}L\\
R_3^{''} &= -\frac{1}{3}\mathbb{E}X^3+\mathbb{E}X^2-\frac{2}{3}\mu\\
R_1R_3^{'} &= \frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L-\frac{1}{2}\mathbb{E}X\mathbb{E}L\\
R_1R_1^{'} &= \frac{1}{2}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}L+\frac{1}{2}\mathbb{E}^2L\\
R_3^{'}R_1^{'} &= \frac{1}{4}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L^2-\frac{1}{4}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L-\frac{1}{4}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}X+\frac{1}{4}\mathbb{E}X\mathbb{E}L\\
R_1R_3^{''} &= \frac{1}{6}\mathbb{E}X^3\mathbb{E}L^2-\frac{1}{6}\mathbb{E}X^3\mathbb{E}L-\frac{1}{2}\mathbb{E}L^2\mathbb{E}X^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L+\frac{1}{3}\mathbb{E}X\mathbb{E}L^2-\frac{1}{3}\mathbb{E}X\mathbb{E}L\\
R_1P^{''} &= -\mathbb{E}X^2\mathbb{E}L\\
\left(R_3^{'}\right)^2 &= \frac{1}{4}\mathbb{E}^2X^2-\frac{1}{2}\mathbb{E}X^2\mathbb{E}X+\frac{1}{4}\mathbb{E}^2X
\end{aligned}
$$

Definición 904. *Let L_i^* be the number of users at queue Q_i when it is polled, then*

$$\mathbb{E}\left[L_i^*\right]=f_i\left(i\right),\quad Var\left[L_i^*\right]=f_i\left(i,i\right)+\mathbb{E}\left[L_i^*\right]-\mathbb{E}\left[L_i^*\right]^2. \tag{23.335}$$

Definición 905. *The cycle time C_i for the queue Q_i is the period beginning at the time when it is polled in a cycle and ending at the time when it is polled in the next cycle; it's duration is given by $\tau_i\left(m+1\right)-\tau_i\left(m\right)$, equivalently $\overline{\tau}_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$ under steady state assumption.*

Definición 906. *The intervisit time I_i is defined as the period beginning at the time of its service completion in a cycle and ending at the time when it is polled in the next cycle; its duration is given by $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}_i\left(m\right)$.*

The intervisit time duration $\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)$ given the number of users found at queue Q_i at time $t=\tau_i\left(m+1\right)$ is equal to the number of arrivals during the preceding intervisit time $\left[\overline{\tau}\left(m\right),\tau_i\left(m+1\right)\right]$.

So we have

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i\left(\tau_i\left(m+1\right)\right)}\right]=\mathbb{E}\left[\left\{P_i\left(z_i\right)\right\}^{\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)}\right]$$

if $I_i\left(z\right)=\mathbb{E}\left[z^{\tau_i\left(m+1\right)-\overline{\tau}\left(m\right)}\right]$ we have $F_i\left(z\right)=I_i\left[P_i\left(z\right)\right]$ for $i=1,2$. Futhermore can be proved that

$$
\begin{array}{ll}
\mathbb{E}\left[L_i\right]=\mu_i\mathbb{E}\left[I_i\right], & \mathbb{E}\left[C_i\right]=\frac{f_i\left(i\right)}{\mu_i\left(1-\mu_i\right)},\\
\mathbb{E}\left[S_i\right]=\mu_i\mathbb{E}\left[C_i\right], & \mathbb{E}\left[I_i\right]=\left(1-\mu_i\right)\mathbb{E}\left[C_i\right],\\
Var\left[L_i\right]=\mu_i^2Var\left[I_i\right]+\sigma^2\mathbb{E}\left[I_i\right], & Var\left[C_i\right]=\frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2\left(1-\mu_i\right)^2},\\
Var\left[S_i\right]=\frac{Var\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^2}+\frac{\sigma^2\mathbb{E}\left[L_i^*\right]}{\left(1-\mu_i\right)^3}, & Var\left[I_i\right]=\frac{Var\left[L_i^*\right]}{\mu_i^2}-\frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2}f_i\left(i\right).
\end{array} \tag{23.336}
$$

Let consider the points when the process $\left[L_1\left(1\right),L_2\left(1\right),L_3\left(1\right),L_4\left(1\right)\right]$ becomes zero at the same time, this points, $T_1,T_2,\ldots$ will be denoted as regeneration points, then we have that

Definición 907. *the interval between two such succesive regeneration points will be called regenerative cycle.*

Definición 908. *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 909. *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]} \cdot \frac{1 - F_i(z)}{P_i(z) - z} \cdot \frac{(1-z) P_i(z)}{1 - P_i(z)}. \tag{23.337}$$

Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t. Entonces, determinando el primer momento es posible ver que

M_i is an stopping time for the regenerative process with $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, from Wald's lemma follows that:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\, \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} \tau_i(m+1) - \tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\, \mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]
\end{aligned}$$

therefore

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}[\tau_i(m+1) - \tau_i(m)]}$$

Doing the following substitutions en (**??**): $n \rightarrow t - \tau_i(m)$, $T \rightarrow \overline{\tau}_i(m) - \tau_i(m)$, $L_n \rightarrow L_i(t)$ and $F(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_0}\right] \rightarrow F_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i \tau_i(m)}\right]$, we obtain

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] = z \frac{F_i(z) - 1}{z - P_i(z)} \tag{23.338}$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} \{P_i(z)\}^{t - \overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1 - \mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)}\right]}{1 - P_i(z)} \\
&= \frac{1 - I_i[P_i(z)]}{1 - P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1 - F_i(z)}{1 - P_i(z)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)} + \sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)} + \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}\right\} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[C_i\right]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{array}{ll}
S^{'}(z) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}, & S^{(1)}(1) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k = -\mathbb{E}\left[L(t)\right], \\
S^{''}(z) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k z^{k-2}, & S^{(2)}(1) = -\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k = \mathbb{E}\left[L(L-1)\right], \\
S^{'''}(z) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2) a_k z^{k-3}, & S^{(3)}(1) = -\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2) a_k \\
 & = -\mathbb{E}\left[L(L-1)(L-2)\right] \\
 & = -\mathbb{E}\left[L^3\right] + 3 - \mathbb{E}\left[L^2\right] - 2 - \mathbb{E}\left[L\right];
\end{array} \tag{23.339}$$

23.64 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [?]

Definición 910 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 369. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [?].*

Nota 370. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 911. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 371. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 372. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 373. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 374.

a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

23.65 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 912. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 913. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 914. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 655. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^*(0)\right] < \infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,*entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 142. *Sea* $\{V(t), t \geq 0\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E} < \infty$, F *es no-aritmética, y para todo* $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $[0, \tau]$, *entonces* $V(t)$ *converge en distribución cuando* $t \rightarrow \infty$ *y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\,ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V(t)$ *cuando* $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

23.66 Procesos de Renovación

Definición 915. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.340}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 916. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, *para* $n \geq 1$, *son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F, *donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$. *Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 375. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F, *con* $F(0) = 0$, *para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F. *Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, *donde* $T_n \rightarrow \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Nota 376. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 656 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 320. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 917. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 321. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 657 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t) \mathbb{1}(T > t)]$.

23.67 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &=& 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 322. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 377. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 658. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \; c.s. && (23.341)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \; c.s. && (23.342)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 143 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \; c.s. \; cuando \; t \rightarrow \infty. \tag{23.343}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 918. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 659. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \; c.s. && (23.344)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \; c.s. && (23.345)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 144. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \; c.s. \; cuando \; t \rightarrow \infty. \tag{23.346}$$

23.68 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$
\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\
T_{N(t)} \leq & \;\; t \;\; < T_{N(t)+1},
\end{aligned}
$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ P\{N(t)\leq n\} &= 1-F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)$$

Proposición 323. *Para cada $t\geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m]<\infty$, para $m\geq 1$.*

Nota 378. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n\geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G\star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 660. *Para una constante $\mu\leq\infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n &= \mu,\ c.s. &(23.347)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N(t) &= 1/\mu,\ c.s. &(23.348)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 145 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu\leq\infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t)\rightarrow 1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \qquad (23.349)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t):t\geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 919. *Para el proceso $\{Z(t):t\geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1},T_n]$:*

$$M_n=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_n}|Z(t)-Z(T_{n-1})|$$

Teorema 661. *Supóngase que $n^{-1}T_n\rightarrow\mu$ c.s. cuando $n\rightarrow\infty$, donde $\mu\leq\infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a,\ c.s. &(23.350)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu,\ c.s. &(23.351)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n=0$ c.s.

Corolario 146. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n)-Z(T_{n-1}),M_n)$, para $n\geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t)\rightarrow\frac{\mathbb{E}[Z(T_1)-Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]},\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \qquad (23.352)$$

23.69 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} &=& \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &=& 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 324. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 379. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 662. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \; c.s. \tag{23.353}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \; c.s. \tag{23.354}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 147 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \; c.s. \; cuando \; t \rightarrow \infty. \tag{23.355}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 920. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 663. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.356}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.357}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 148. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.358}$$

23.70 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\ t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 325. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 380. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 664. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.359}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.360}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 149 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.361}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 921. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 665. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (23.362)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (23.363) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 150. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.364}$$

23.71 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 326. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 381. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 666. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.365}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.366}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 151 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.367}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 922. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 667. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.368}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.369}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 152. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z(T_1) - Z(T_0)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.370}$$

23.72 Función de Renovación

Definición 923. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.371}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 327. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 668 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

23.73 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 924. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 328. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 925. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 329. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 382. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 669. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 153 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

23.74 Procesos de Renovación

Definición 926. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.372}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 927. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 383. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Definición 928. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.373}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 929. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 384. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 330. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 17 (**Proceso Poisson**)**.** *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 385. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 670. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \ c.s. && (23.374) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \ c.s. && (23.375) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 154 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \qquad (23.376)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 930. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 671. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \ c.s. && (23.377) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \ c.s. && (23.378) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 155. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \qquad (23.379)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 931. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 331. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 932. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 332. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 386. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 672. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 156 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}\left[N(t) + 1\right], \; t \geq 0,$$

Definición 933. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.380}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 333. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (??).*

Teorema 673 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 934. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 334. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 935. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 335. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 387. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 674. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 157 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 936. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.381}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 336. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (??).*

Teorema 675 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 388. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 676 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 337. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 937. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 338. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 677 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 389. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 678 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 339. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 938. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 340. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t),\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 679 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 939. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 390. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 391. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 392. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 940. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 393. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 680 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 941 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- *$A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- *$B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*

- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t.

Nota 394. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n, *y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$. *Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{23.382}$$

Ejemplo 18 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ, *entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 395. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 942. *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 396. *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 341. *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 681. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación* N *es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante* $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 397. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 158. *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

23.75 Procesos Regenerativos

Nota 398. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \to S$.

Nota 399. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 943 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 944. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 400. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

23.76 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 945. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 401. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 402. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 946 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 403. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 947. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 404. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

23.77 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 948. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 949. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 950. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 682. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

23.78 Existencia de Tiempos de Regeneración

23.79 Procesos Regenerativos: Thorisson

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 951. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.*

Nota 405. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 952. *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma\left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 953. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 683. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 954. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 955. *Dos espacios medibles* $(E, \mathcal{E})$ *y* $(G, \mathcal{G})$ *son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección* $f : E \rightarrow G$ *tal que* f *es* $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ *medible y su inversa* f^{-1} *es* $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ *medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 956. *Un espacio medible* $(E, \mathcal{E})$ *es un espacio estándar si es Borel equivalente a* $(G, \mathcal{G})$*, donde* G *es un subconjunto de Borel de* $[0, 1]$ *y* $\mathcal{G}$ *son los subconjuntos de Borel de* G*.*

Nota 406. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 957. *Un proceso estocástico con conjunto de índices* $\mathbb{I}$ *y espacio de estados* $(E, \mathcal{E})$ *es una familia* $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ *donde* $\mathbb{Z}_s$ *son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y todos toman valores en* $(E, \mathcal{E})$*.*

Definición 958. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices* $\mathbb{I} = [0, \infty)$*.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}} (E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 407. *La distribución de un proceso estocástico* Z *es la distribución de* Z *como un elemento aleatorio en* $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$*. La distribución de* Z *esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 408. *En particular cuando* Z *toma valores reales, es decir,* $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_1} \leq x_1, \dots, Z_{t_n} \leq x_n\right), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{23.383}$$

Nota 409. *Para espacios polacos* $(E, \mathcal{E})$ *el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 959. *Las trayectorias de* Z *son las realizaciones* $Z(w)$ *para* $w \in \Omega$ *del mapeo aleatorio* Z*.*

Nota 410. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto* H *de* $E^{\mathbb{I}}$*. En este caso es natural considerar a* Z *como un elemento aleatorio que no está en* $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ *sino en* $(H, \mathcal{H})$*, donde* $\mathcal{H}$ *es la* σ*-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a* $z \in H$ *a* $z_t \in E$ *para* $t \in \mathbb{I}$*. A* $\mathcal{H}$ *se le conoce como la traza de* H *en* $E^{\mathbb{I}}$*, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{23.384}$$

Nota 411. Z *tiene trayectorias con valores en* H *y cada* Z_t *es un mapeo medible de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *a* $(H, \mathcal{H})$*. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular* H*, al espacio* $(H, \mathcal{H})$ *se le llama el espacio de trayectorias de* Z*.*

Nota 412. *La distribución del proceso estocástico* Z *con espacio de trayectorias* $(H, \mathcal{H})$ *es la distribución de* Z *como un elemento aleatorio en* $(H, \mathcal{H})$*. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 960. *Sea* Z *un PEOSCT con espacio de estados* $(E, \mathcal{E})$ *y sea* T *un tiempo aleatorio en* $[0, \infty)$*. Por* Z_T *se entiende el mapeo con valores en* E *definido en* Ω *en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) . w \in \Omega.$$

Definición 961. *Un PEOSCT* Z *es conjuntamente medible (**CM**) si el mapeo que toma* $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ *a* $Z_t(w) \in E$ *es* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ *medible.*

Nota 413. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que* Z_T *es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma* w *en* $(w, T(w))$ *es* $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ *medible, mientras que el segundo toma* $(w, T(w))$ *en* $Z_{T(w)}(w)$ *es* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ *medible.*

Definición 962. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H, \mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible **(CCM)** si el mapeo $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Nota 414. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0,\infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w,t) en $(Z(w),t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w),t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 963. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s\in[0,\infty)} : z \in H\right\} = H,\ t \in [0,\infty).$$

Definición 964. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0,\infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s\in[0,\infty)},\ z \in H.$$

Definición 965. *Se dice que un proceso Z es shift-medible **(SM)** si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ medible.*

Nota 415. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 416.
- *Dado el espacio polaco $(E, \mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0,\infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 417. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 684. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 966. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L, \mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^\infty \in [0,\infty)^{\{0,1,\ldots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\ldots\}}$.

Así el par (Z,S) es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 967. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z,(s_k)_0^\infty\right) = \theta_t\left(z,\left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^\infty\right)$$

donde $n_{t-} = inf\{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 418. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 968. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0, S_n), S_0, \ldots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 419. *Si el par (Z, S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 685. *Supóngase que el par (Z, S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z, S) con periodo d.*

Definición 969. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx > 0$ con $X_2, X_3, \ldots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\, dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 970. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z, S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 420.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z, S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 421. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 686. *Supongase que el par (Z, S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S).*

Teorema 687. *Supongase que (Z, S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0, 1)$ e independiente de $\left(Z^0, S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*, S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 688. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{23.385}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{23.386}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{23.387}$$

Definición 971. *Un elemento aleatorio en un espacio medible* $(E, \mathcal{E})$ *en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *a* $(E, \mathcal{E})$*, es decir, para* $A \in \mathcal{E}$*, se tiene que* $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$*, donde* $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.

Nota 422. *También se dice que* Y *está soportado por el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y que* Y *es un mapeo medible de* Ω *en* E*, es decir, es* $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ *medible.*

Definición 972. *Para cada* $i \in \mathbb{I}$ *sea* P_i *una medida de probabilidad en un espacio medible* $(E_i, \mathcal{E}_i)$*. Se define el espacio producto* $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}} \mathcal{E}_i\right)$*, donde* $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ *es el producto cartesiano de los* E_i*'s, y* $\otimes_{i\in\mathbb{I}} \mathcal{E}_i$ *es la* σ*-álgebra producto, es decir, es la* σ*-álgebra más pequeña en* $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ *que hace al i-ésimo mapeo proyección en* E_i *medible para toda* $i \in \mathbb{I}$ *es la* σ*-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}} \mathcal{E}_i := \sigma \left\{ \{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i \right\}.$$

Definición 973. *Un espacio de probabilidad* $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ *es una extensión de otro espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *si* $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ *soporta un elemento aleatorio* $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ *que tienen a* $\mathbb{P}$ *como distribución.*

Teorema 689. *Sea* $\mathbb{I}$ *un conjunto de índices arbitrario. Para cada* $i \in \mathbb{I}$ *sea* P_i *una medida de probabilidad en un espacio medible* $(E_i, \mathcal{E}_i)$*. Entonces existe una única medida de probabilidad* $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ *en* $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ *tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i \left(y \in \prod_{i\in\mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n} \right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$*, toda* $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ *y todo* $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}} \mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}} P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 974. *Un espacio medible* $(E, \mathcal{E})$ *es Polaco si existe una métrica en* E *tal que* E *es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en* E*, y separable,* E *tienen un subconjunto denso numerable, y tal que* $\mathcal{E}$ *es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 975. *Dos espacios medibles* $(E, \mathcal{E})$ *y* $(G, \mathcal{G})$ *son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección* $f : E \to G$ *tal que* f *es* $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ *medible y su inversa* f^{-1} *es* $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ *medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 976. *Un espacio medible* $(E, \mathcal{E})$ *es un espacio estándar si es Borel equivalente a* $(G, \mathcal{G})$*, donde* G *es un subconjunto de Borel de* $[0, 1]$ *y* $\mathcal{G}$ *son los subconjuntos de Borel de* G.

Nota 423. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 977. *Un proceso estocástico con conjunto de índices* $\mathbb{I}$ *y espacio de estados* $(E, \mathcal{E})$ *es una familia* $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ *donde* $\mathbb{Z}_s$ *son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y todos toman valores en* $(E, \mathcal{E})$.

Definición 978. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices* $\mathbb{I} = [0, \infty)$.

Sea $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}} (E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 424. *La distribución de un proceso estocástico* Z *es la distribución de* Z *como un elemento aleatorio en* $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$*. La distribución de* Z *esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 425. *En particular cuando* Z *toma valores reales, es decir,* $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}(Z_{t_1} \leq x_1, \ldots, Z_{t_n} \leq x_n), x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{23.388}$$

Nota 426. *Para espacios polacos $(E, \mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 979. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 427. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H, \mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{23.389}$$

Nota 428. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ a $(H, \mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H, \mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 429. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H, \mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 980. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0, \infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) . w \in \Omega.$$

Definición 981. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible **(CM)** si el mapeo que toma $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 430. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 982. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H, \mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible **(CCM)** si el mapeo $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 431. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0, \infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w, t) en $(Z(w), t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w), t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 983. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s \in [0, \infty)} : z \in H\right\} = H,\ t \in [0, \infty).$$

Definición 984. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0, \infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)},\ z \in H.$$

Definición 985. *Se dice que un proceso Z es shift-medible **(SM)** si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H}$ medible.*

Nota 432. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 433.

- *Dado el espacio polaco $(E, \mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0, \infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 434. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 690. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 986. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S = (S_k)_0^{\infty}$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L, \mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^{\infty} \in [0,\infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.

Así el par (Z, S) es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^{+}$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 987. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t \left(z, (s_k)_0^{\infty}\right) = \theta_t \left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^{\infty}\right)$$

donde $n_{t-} = inf\{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 435. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0,\infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 988. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0, S_n), S_0, \dots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z, S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 436. *Si el par (Z, S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \dots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 691. *Supóngase que el par (Z, S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^{*}, S^{*}) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z, S) con periodo d.*

Definición 989. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^{+}$ tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx > 0$ con $X_2, X_3, \dots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\, dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 990. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \dots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z, S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 437.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z, S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 438. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $\left(\theta_s Z\right)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 692. *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}\left[X_1\right]<\infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 693. *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}\left[X_1\right]<\infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0,S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega,\mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^*=\frac{X_1}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*,S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0,S^0\right)\in\cdot\right)$. Entonces $(Z*,S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}\left[f\left(Z^*,S^*\right)\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^{X_1}f\left(\theta_s\left(Z^0,S^0\right)\right)ds\right]/\mathbb{E}\left[X_1\right]$$

$f\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x):=\frac{\mathbb{E}\left[X_1\right]\wedge x}{\mathbb{E}\left[X_1\right]}$$

para $x\geq 0$ y densidad $\mathbb{P}\left[X_1>x\right]/\mathbb{E}\left[X_1\right]$, con $x\geq 0$.

Teorema 694. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0\leq S_0<S_1$ y*

$$\theta_{S_1}Z=\theta_{S_0}Z \text{ en distribución.} \tag{23.390}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z,S)=\left(Z^0,S^0\right),n\geq 0,\text{ en distribución,} \tag{23.391}$$

$$(Z,S_0,S_1)\text{ depende de }(X_2,X_3,\ldots)\text{ solamente a traves de }\theta_{S_1}Z. \tag{23.392}$$

Definición 991. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ a $(E,\mathcal{E})$, es decir, para $A\in\mathcal{E}$, se tiene que $\{Y\in A\}\in\mathcal{F}$, donde $\{Y\in A\}:=\{w\in\Omega:Y(w)\in A\}=:Y^{-1}A$.*

Nota 439. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 992. *Para cada $i\in\mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i,\mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i):=\left(\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i\in\mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i:=\sigma\left\{\{y:y_i\in A\}:i\in\mathbb{I}\text{ y }A\in\mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 993. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi\in(\Omega,\mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 695. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i\in\mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i,\mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y\in\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i:y_i\in A_{i_1},\ldots,y_n\in A_{i_n}\right)=P_{i_1}\left(A_{i_n}\right)\cdots P_{i_n}\left(A_{i_n}\right)$$

para todos los enteros $n>0$, toda $i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{I}$ y todo $A_{i_1}\in\mathcal{E}_{i_1},\ldots,A_{i_n}\in\mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i,\mathcal{E}_i,P_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 994. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 995. *Dos espacios medibles $(E,\mathcal{E})$ y $(G,\mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f: E\rightarrow G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 996. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G,\mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0,1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 440. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 997. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ es una familia $Z=(\mathbb{Z}_s)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E,\mathcal{E})$.*

Definición 998. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}=[0,\infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}}(E,\mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w)=(Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w\in\Omega$.

Nota 441. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 442. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E,\mathcal{E})=(\mathbb{R},\mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_1}\leq x_1,\dots,Z_{t_n}\leq x_n\right), x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}, t_1,\dots,t_n\in\mathbb{I}, n\geq 1. \tag{23.393}$$

Nota 443. *Para espacios polacos $(E,\mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 999. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w\in\Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 444. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H,\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z\in H$ a $z_t\in E$ para $t\in\mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}}\cap H := \left\{A\cap H : A\in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{23.394}$$

Nota 445. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ a $(H,\mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H,\mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 446. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H,\mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 1000. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0,\infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w).w\in\Omega.$$

Definición 1001. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible **(CM)** si el mapeo que toma* $(w,t) \in \Omega \times [0,\infty)$ *a* $Z_t(w) \in E$ *es* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ *medible.*

Nota 447. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que* Z_T *es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en* $(w,T(w))$ *es* $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ *medible, mientras que el segundo toma* $(w,T(w))$ *en* $Z_{T(w)}(w)$ *es* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ *medible.*

Definición 1002. *Un PEOSCT con espacio de estados* $(H,\mathcal{H})$ *es canónicamente conjuntamente medible **(CCM)** si el mapeo* $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ *en* $Z_t \in E$ *es* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ *medible.*

Nota 448. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de* $\Omega \times [0,\infty)$ *a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma* (w,t) *en* $(Z(w),t)$ *es* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ *medible, y el segundo que toma* $(Z(w),t)$ *en* $Z_t(w)$ *es* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ *medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 1003. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s\in[0,\infty)} : z \in H\right\} = H,\ t \in [0,\infty).$$

Definición 1004. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift* θ_t, $t \in [0,\infty)$, *de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s\in[0,\infty)},\ z \in H.$$

Definición 1005. *Se dice que un proceso Z es shift-medible **(SM)** si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma* $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ *en* $\theta_t z \in H$ *es* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ *medible.*

Nota 449. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 450.
- *Dado el espacio polaco* $(E,\mathcal{E})$ *se tiene el conjunto de trayectorias* $D_E[0,\infty)$ *que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 451. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 696. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 1006. *Sea* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *espacio de probabilidad que soporta al proceso* $Z = (Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ *y* $S = (S_k)_0^\infty$ *donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados* $(E,\mathcal{E})$ *y espacio de trayectorias* $(H,\mathcal{H})$ *y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición* $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. *Considerando S como un mapeo medible de* $(\Omega,\mathcal{F})$ *al espacio sucesión* $(L,\mathcal{L})$, *donde*

$$L = \left\{(s_k)_0^\infty \in [0,\infty)^{\{0,1,\dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ *son los subconjuntos de Borel de L, es decir,* $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0,1,\dots\}}$.

Así el par (Z,S) *es un mapeo medible de* $(\Omega,\mathcal{F})$ *en* $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. *El par* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ *denotará la clase de todas las funciones medibles de* $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ *en* $([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 1007. *Sea* θ_t *el mapeo-shift conjunto de* $H \times L$ *en* $H \times L$ *dado por*

$$\theta_t\left(z,(s_k)_0^\infty\right) = \theta_t\left(z,\left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^\infty\right)$$

donde $n_{t-} = inf\{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 452. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma* $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ *en* $z_t \in E$ *es* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ *medible.*

Definición 1008. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S)=\left(Z^0,S^0\right),n\geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $((Z_s)\,s\in[0,S_n),S_0,\ldots,S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 453. *Si el par (Z,S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1,X_2,\ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 697. *Supóngase que el par (Z,S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**},S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z,S) con periodo d.*

Definición 1009. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n\geq 1$ y una función $f\in\mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}}f(x)\,dx>0$ con $X_2,X_3,\ldots,X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_n\in B)\geq\int_B f(x)\,dx$$

para $B\in\mathcal{B}$.

Definición 1010. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S)=\left(Z^0,S^0\right)$ para $n\geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0,S_1,\ldots,S_n)$ para $n\geq 0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 454.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 455. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 698. *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 699. *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0,S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega,\mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^*=\frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]}d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*,S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0,S^0\right)\in\cdot\right)$. Entonces $(Z*,S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*,S^*)]=\mathbb{E}\left[\int_0^{X_1}f\left(\theta_s\left(Z^0,S^0\right)\right)ds\right]/\mathbb{E}[X_1]$$

$f\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x):=\frac{\mathbb{E}[X_1]\wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x\geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1>x]/\mathbb{E}[X_1]$, con $x\geq 0$.

Teorema 700. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{23.395}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n} (Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{23.396}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{23.397}$$

Definición 1011. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1} A$.*

Nota 456. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 1012. *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i \in \mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i := \sigma \left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 1013. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 701. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i$ en $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

$$\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i \left(y \in \prod_{i \in \mathbb{I}} E_i : y_i \in A_{i_1}, \ldots, y_n \in A_{i_n}\right) = P_{i_1}(A_{i_n}) \cdots P_{i_n}(A_{i_n})$$

para todos los enteros $n > 0$, toda $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{I}$ y todo $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i \in \mathbb{I}} (E_i, \mathcal{E}_i, P_i) := \left(\prod_{i \in \mathbb{I}}, E_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} \mathcal{E}_i, \otimes_{i \in \mathbb{I}} P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 1014. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 1015. *Dos espacios medibles $(E, \mathcal{E})$ y $(G, \mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f : E \to G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 1016. *Un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G, \mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 457. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 1017. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ es una familia $Z = (\mathbb{Z}_s)_{s \in \mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E, \mathcal{E})$.*

Definición 1018. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time (**PEOSCT**) es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I} = [0, \infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right) := \otimes_{s\in\mathbb{I}} (E, \mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w) = (Z_s(w))_{s\in\mathbb{I}}$ y $w \in \Omega$.

Nota 458. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 459. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}(Z_{t_1} \leq x_1, \ldots, Z_{t_n} \leq x_n), x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{I}, n \geq 1. \tag{23.398}$$

Nota 460. *Para espacios polacos $(E, \mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 1019. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w \in \Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 461. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}}, \mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H, \mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z \in H$ a $z_t \in E$ para $t \in \mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H} := E^{\mathbb{I}} \cap H := \left\{A \cap H : A \in E^{\mathbb{I}}\right\}. \tag{23.399}$$

Nota 462. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ a $(H, \mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H, \mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 463. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H, \mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 1020. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0, \infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) . w \in \Omega.$$

Definición 1021. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible **(CM)** si el mapeo que toma $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 464. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 1022. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H, \mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible **(CCM)** si el mapeo $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 465. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0, \infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w, t) en $(Z(w), t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w), t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 1023. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{(z_{t+s})_{s\in[0,\infty)} : z \in H\right\} = H,\ t \in [0, \infty).$$

Definición 1024. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0, \infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s\in[0,\infty)},\ z \in H.$$

Definición 1025. *Se dice que un proceso Z es shift-medible (**SM**) si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z,t) \in H \times [0,\infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{H}$ medible.*

Nota 466. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 467.
- *Dado el espacio polaco $(E,\mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0,\infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 468. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 702. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 1026. *Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z=(Z_s)_{s\in[0,\infty)}$ y $S=(S_k)_0^\infty$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H,\mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0\leq S_0<S_1<\cdots\rightarrow\infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L,\mathcal{L})$, donde*

$$L=\left\{(s_k)_0^\infty\in[0,\infty)^{\{0,1,\ldots\}}:s_0<s_1<\cdots\rightarrow\infty\right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L}=L\cap\mathcal{B}^{\{0,1,\ldots\}}$.

Así el par (Z,S) es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ en $(H\times L,\mathcal{H}\otimes\mathcal{L})$. El par $\mathcal{H}\otimes\mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H\times L,\mathcal{H}\otimes\mathcal{L})$ en $([0,\infty),\mathcal{B}[0,\infty))$.

Definición 1027. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H\times L$ en $H\times L$ dado por*

$$\theta_t\left(z,(s_k)_0^\infty\right)=\theta_t\left(z,\left(s_{n_{t-}+k}-t\right)_0^\infty\right)$$

donde $n_{t-}=inf\{n\geq 1:s_n\geq t\}$.

Nota 469. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z,t)\in H\times[0,\infty)$ en $z_t\in E$ es $\mathcal{H}\otimes\mathcal{B}[0,\infty)/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 1028. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z,S)=\left(Z^0,S^0\right),n\geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $((Z_s)\,s\in[0,S_n),S_0,\ldots,S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z,S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 470. *Si el par (Z,S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1,X_2,\ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 703. *Supóngase que el par (Z,S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Entonces (Z^*,S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**},S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z,S) con periodo d.*

Definición 1029. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n\geq 1$ y una función $f\in\mathcal{B}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}}f(x)\,dx>0$ con $X_2,X_3,\ldots,X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_n\in B)\geq\int_B f(x)\,dx$$

para $B\in\mathcal{B}$.

Definición 1030. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z,S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z,S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 471.
- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z,S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 472. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s\in[0,\infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 704. *Supongase que el par (Z,S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z,S).*

Teorema 705. *Supongase que (Z,S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0,1)$ e independiente de $\left(Z^0, S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*, S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 706. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{23.400}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n}(Z,S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{23.401}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{23.402}$$

23.80 Procesos Regenerativos

23.81 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [?]

Definición 1031 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 473. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [?].*

Nota 474. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 1032. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 475. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 476. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 477. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 478.

a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

23.82 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1033. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^{*}(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_{0}^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 1034. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1035. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 707. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^{*}(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^{*}(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s) ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t} V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Corolario 159. *Sea* $\{V(t), t \geq 0\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E} < \infty$*,* F *es no-aritmética, y para todo* $x \geq 0$*,* $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $[0, \tau]$*, entonces* $V(t)$ *converge en distribución cuando* $t \rightarrow \infty$ *y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_{0}^{X} V(s) ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V(t)$ *cuando* $t \rightarrow \infty$*.*

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

23.83 Procesos de Renovación

Definición 1036. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.403}$$

para $t \geq 0$*.*

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_{+}$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_{+}$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1037. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, para* $n \geq 1$*, son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F*, donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$*. Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 479. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

23.84 Teorema Principal de Renovación

Nota 480. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 708 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 342. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1038. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 343. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 709 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$.

23.85 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 344. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 481. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 710. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.404}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.405}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 160 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.406}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1039. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 711. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.407}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.408}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 161. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.409}$$

23.86 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 345. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 482. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 712. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.410}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.411}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 162 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.412}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1040. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 713. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (23.413)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (23.414)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 163. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.415}$$

23.87 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 346. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 483. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 714. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (23.416)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (23.417)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 164 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.418}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1041. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 715. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (23.419)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (23.420) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 165. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.421}$$

23.88 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 347. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^{m}\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 484. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 716. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.422}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.423}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 166 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.424}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1042. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 717. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.425}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.426}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 167. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z(T_1) - Z(T_0)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.427}$$

23.89 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 348. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 485. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 718. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{array}{rcll} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n & = & \mu, \text{ c.s.} & (23.428) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) & = & 1/\mu, \text{ c.s.} & (23.429) \end{array}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 168 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (23.430)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1043. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 719. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{array}{rcll} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) & = & a, \text{ c.s.} & (23.431) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) & = & a/\mu, \text{ c.s.} & (23.432) \end{array}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 169. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \qquad (23.433)$$

23.90 Función de Renovación

Definición 1044. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{23.434}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 349. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 720 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

23.91 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1045. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 350. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 1046. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 351. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 486. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 721. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 170 (Identidad de Wald para Renovaciones). *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right], \; t \geq 0,$$

23.92 Procesos de Renovación

Definición 1047. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.435}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1048. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 487. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

23.93 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 1049. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.436}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1050. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 488. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 352. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 19 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 489. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 722. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.437}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.438}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 171 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.439}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1051. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 723. *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea* a *una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} && (23.440)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (23.441)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 172. *Si* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación, y* $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.442}$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1052. *La función de renovación asociada con la distribución* F*, del proceso* $N\left(t\right)$*, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = \mathbb{1}\left(t \geq 0\right)$*.*

Proposición 353. *Supóngase que la distribución de inter-renovación* F *tiene densidad* f*. Entonces* $U\left(t\right)$ *también tiene densidad, para* $t > 0$*, y es* $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$*. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1053. *La Transformada de Laplace-Stieljes de* F *está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF\left(t\right), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 354. *La Transformada de Laplace* $\hat{U}\left(\alpha\right)$ *y* $\hat{F}\left(\alpha\right)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}\left(\alpha\right) = \frac{1}{1 - \hat{F}\left(\alpha\right)}$*.*

Nota 490. *Un proceso de renovación* $N\left(t\right)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}\left[U\left(t\right)\right] = \lambda t$*, para* $t \geq 0$*.*

Teorema 724. *Sea* $N\left(t\right)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta\left(t\right) = \mathbb{E}\left[N\left(\right)\right]$ *es finita para cada* t*. Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$*,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f\left(T_n\right)\right] = \int_{(0,t]} f\left(s\right) d\eta\left(s\right), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N\left(t\right)$ *tal que* $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f\left(s\right)$*, independiente de* n*. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f\left(s\right) d\eta\left(s\right), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 173 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right]=\mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right],\ t\geq 0,$$

Definición 1054. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t)=h(t)+\int_{[0,t]}H(t-s)\,dF(s)\,,\ t\geq 0, \tag{23.443}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 355. *La función $U\star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 725 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t)\rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t\rightarrow\infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1055. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)\,,\ \ t\geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t)=\mathbb{1}(t\geq 0)$.

Proposición 356. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t>0$, y es $U^{'}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t)>N(t-)\right\}=0,\ t\geq 0.$$

Definición 1056. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha)=\int_{\mathbb{R}_{+}}e^{-\alpha t}dF(t)\,,\ \alpha\geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F^{n\star}}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F}(\alpha)^{n}=\frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 357. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha)=\frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 491. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right]=\lambda t$, para $t\geq 0$.*

Teorema 726. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t)=\mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()}f(T_n)\right]=\int_{(0,t]}f(s)\,d\eta(s)\,,\ t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1,X_2,\ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n|T_n=s\right]=f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)}X_n\right]=\int_{(0,t]}f(s)\,d\eta(s)\,,\ t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 174 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right],\ t \geq 0,$$

Definición 1057. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s),\ t \geq 0, \tag{23.444}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 358. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 727 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Nota 492. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 728 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 359. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ \text{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1058. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ \text{para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 360. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t),\ \text{donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 729 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 493. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 730 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\, ds.$$

Proposición 361. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\, , \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1059. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 362. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\, , \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 731 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)\right]$.

Definición 1060. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = \left(\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\}\right)$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 494. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 495. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 496. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_{+}$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1061. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = \left(\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\}\right)$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 497. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 732 (Procesos Regenerativos). *Suponga que el proceso*

Definición 1062 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 498. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{23.445}$$

Ejemplo 20 (Tiempos de recurrencia Poisson). *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.

Definición 1063. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 499. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 363. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 733. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación N es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 500. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 175. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

23.94 Procesos Regenerativos

Nota 501. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 502. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1064 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 1065. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 503. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1066. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 504. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 505. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1067 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 506. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1068. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 507. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1069. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t + x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1070. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1071. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 734. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1072. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t + x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 1073. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1074. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 735. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]<\infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]<\infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t}V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$*.*

Para $\{X\left(t\right):t\geq0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N\left(t\right)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_{+}$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X\left(t\right)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_{n}=T_{n}-T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

23.95 Puntos de Renovación

Para cada cola Q_{i} se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\left\{T_{1}^{i},T_{2}^{i},\ldots,T_{k}^{i},\ldots\right\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\left\{T_{1}^{1},T_{1}^{2},T_{1}^{3},T_{1}^{4}\right\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_{i}$. Además se sabe que para

$$T^{*}=\min\left\{T_{1}^{1},T_{1}^{2},T_{1}^{3},T_{1}^{4}\right\},$$

T^{*} se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^{*}=\sum_{i=1}^{4}\mu_{i}.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r}=r_{1}+r_{2}\quad\text{y}\quad\hat{r}=r_{3}+r_{4}.$$

Supongamos que

$$\tilde{r},\hat{r}<\mu^{*},$$

entonces si tomamos

$$r^{*}=\min\left\{\tilde{r},\hat{r}\right\},$$

se tiene que para

$$t^{*}\in\left(0,r^{*}\right)$$

se cumple que

$$\tau_{1}\left(1\right)=0\quad\text{y por tanto}\quad\overline{\tau}_{1}=0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_{2}=\overline{\tau}_{1}+r_{1}=r_{1}<\mu^{*},$$

y por tanto se tiene que

$$\overline{\tau}_{2}=\tau_{2}.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_{1}\left(2\right)=\tau_{2}\left(1\right)+r_{2}=\tilde{r}<\mu^{*}.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^{*} tal que en el intervalo $\left(0,t^{*}\right)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_{i}\left(t^{*}\right)=0$$

para $i=1,2,3,4$.

23.96 Resultados para Procesos de Salida

23.97 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1075. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 13. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 14. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1076 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 508. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1077. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 509. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

23.98 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 1078. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.446}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1079. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 510. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 364. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 511. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 736. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (23.447)$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (23.448)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 176 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.449)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1080. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 737. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \quad (23.450)$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (23.451)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 177. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.452)$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1081. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 365. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 1082. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 366. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 512. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 738. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 178 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t)+1], \; t \geq 0,$$

Definición 1083. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.453}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 367. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 739 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1084. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 368. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1085. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 369. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 513. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 740. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 179 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 1086. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.454}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 370. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 741 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 514. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 742 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 371. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\textrm{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 1087. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\textrm{ para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 372. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\textrm{ donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 743 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Nota 515. *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 744 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 373. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\textrm{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 1088. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\textrm{ para }t\geq0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 374. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\textrm{ donde }h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 745 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

23.99 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1089. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 15. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 16. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1090 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 516. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1091. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 517. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

23.100 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1092. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 17. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 18. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1093 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 518. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1094. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 519. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

23.101 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1095. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1096. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1097. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 746. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

23.102 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1098. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 1099. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1100. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 747. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

23.103 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\ t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 375. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 520. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 748. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \; c.s. \tag{23.455}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \; c.s. \tag{23.456}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 180 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \; c.s. \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.457}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1101. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 749. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \; c.s. \tag{23.458}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \; c.s. \tag{23.459}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 181. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \; c.s. \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.460}$$

23.104 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \;\; t \;\; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 376. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 521. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 750. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n &= \mu, \ c.s. & (23.461)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \ c.s. & (23.462)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 182 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \tag{23.463}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1102. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 751. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned}lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \ c.s. & (23.464)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \ c.s. & (23.465)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 183. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \tag{23.466}$$

23.105 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 377. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 522. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 752. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.467}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.468}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 184 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.469}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1103. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 753. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) = a, \text{ c.s.} \quad (23.470)$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) = a/\mu, \text{ c.s.} \quad (23.471)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 185. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.472)$$

23.106 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{array}{rcl} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &=& \left\{T_n \leq t\right\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &=& \left\{T_n \leq t\right\} \\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &=& 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 378. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 523. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 754. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (23.473)$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (23.474)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 186 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.475}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1104. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 755. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (23.476)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (23.477)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 187. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.478}$$

23.107 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1105. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1106. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1107. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 756. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^{*}(0)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}(0)\right] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t} V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

23.108 Procesos de Renovación

Definición 1108. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.479}$$

para $t \geq 0$*.*

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1109. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, para* $n \geq 1$*, son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F*, donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$*. Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 524. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F*, con* $F(0) = 0$*, para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F*. Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$*, donde* $T_n \rightarrow \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

23.109 Teorema Principal de Renovación

Nota 525. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 757 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 379. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1110. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 380. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 758 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]$.

23.110 Función de Renovación

Definición 1111. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.480}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 381. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 759 (Teorema Renovación Elemental).

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

23.111 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 382. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 526. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 760. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.481}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.482}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 188 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.483}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1112. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 761. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.484}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.485}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 189. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.486}$$

23.112 Función de Renovación

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1113. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 383. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 1114. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 384. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 527. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 762. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 190 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

23.113 Procesos de Renovación

Definición 1115. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.487}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1116. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 528. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

23.114 Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\left\{T_1^i, T_2^i, \ldots, T_k^i, \ldots\right\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_i$. Además se sabe que para

$$T^* = \min\left\{T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4\right\},$$

T^* se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{4} \mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r} = r_1 + r_2 \quad \text{y} \quad \hat{r} = r_3 + r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r}, \hat{r} < \mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^* = \min\{\tilde{r}, \hat{r}\},$$

se tiene que para

$$t^* \in (0, r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \overline{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \overline{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\overline{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

23.115 Resultados para Procesos de Salida

En [?] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 385. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 763. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*
  b) *$L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;*
  c) *$L = 1$ y $G = D$;*
  d) *$L = \infty$ y $G = M$.*

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;
  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;
  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.

- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 764. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$
  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.
  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$
  d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 765. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [?] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 766. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right]\\ \alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right]\\ var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2(1-\delta)^{-1}.\end{aligned}$$

  Teorema 767. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 768. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

23.116 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1117. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Observación 19. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Observación 20. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1118 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 529. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1119. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 530. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

23.117 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 1120. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.488}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1121. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 531. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 386. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 532. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 769. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned}lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (23.489) \\ lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (23.490)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 191 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \qquad (23.491)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1122. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 770. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.492}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.493}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 192. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.494}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1123. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 387. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 1124. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 388. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 533. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 771. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \dots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n|T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 193 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}[N(t)+1]\,,\ t \geq 0,$$

Definición 1125. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s)\,,\ t \geq 0, \tag{23.495}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 389. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 772 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1126. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)\,,\ \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 390. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 1127. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t)\,,\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 391. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 534. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 773. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 194 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 1128. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.496}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 392. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 774 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \; \textit{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 535. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 775 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \rightarrow \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 393. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \; \textit{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1129. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \; \textit{para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 394. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 776 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 536. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 777 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 395. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1130. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 396. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 778 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]$.

23.118 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1131. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Observación 21. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Observación 22. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1132 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 537. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1133. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u) \, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u) \, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t) \, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 538. *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_∞

23.119 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1134. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Observación 23. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Observación 24. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1135 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 539. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1136. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} X(u)\, du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} I_x(u)\, du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\, dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 540. *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_{∞}

23.120 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}
\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\
T_{N(t)} \leq\ & t < T_{N(t)+1},
\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 397. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 541. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 779. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.497}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.498}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 195 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.499}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1137. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 780. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.500}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.501}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 196. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.502}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 398. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 542. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 781. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.503}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.504}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 197 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.505}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1138. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 782. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) = a, \text{ c.s.} \tag{23.506}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.507}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 198. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.508}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned}\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 399. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 543. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 783. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.509}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.510}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N\left/t\right)$ la cumple.

Corolario 199 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.511}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1139. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 784. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.512}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.513}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 200. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.514}$$

23.121 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 400. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 544. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 785. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (23.515)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (23.516)
\end{aligned}
$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 201 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.517}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1140. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 786. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$
\begin{aligned}
lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (23.518)\\
lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (23.519)
\end{aligned}
$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 202. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z(T_1) - Z(T_0)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.520}$$

23.122 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1141. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1142. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1143. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 787. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

23.123 Procesos de Renovación

Definición 1144. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.521}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1145. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 545. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

23.124 Teorema Principal de Renovación

Nota 546. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 788 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 401. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1146. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 402. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 789 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

23.125 Función de Renovación

Definición 1147. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s)\,,\ t \geq 0, \tag{23.522}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 403. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 790 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu,\ cuando\ t \rightarrow \infty.$$

23.126 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 404. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 547. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 791. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (23.523)$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (23.524)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 203 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.525)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1148. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 792. *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a,\ c.s. &(23.526)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu,\ c.s. &(23.527)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 204. *Si* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación, y* $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]},\ c.s.\ cuando\ t \rightarrow \infty. \tag{23.528}$$

23.127 Función de Renovación

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1149. *La función de renovación asociada con la distribución* F*, del proceso* $N\left(t\right)$*, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right),\ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = 1\!\!1\left(t \geq 0\right)$*.*

Proposición 405. *Supóngase que la distribución de inter-renovación* F *tiene densidad* f*. Entonces* $U\left(t\right)$ *también tiene densidad, para* $t > 0$*, y es* $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$*. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 1150. *La Transformada de Laplace-Stieljes de* F *está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t}dF\left(t\right),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 406. *La Transformada de Laplace* $\hat{U}\left(\alpha\right)$ *y* $\hat{F}\left(\alpha\right)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}\left(\alpha\right) = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$*.*

Nota 548. *Un proceso de renovación* $N\left(t\right)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}\left[U\left(t\right)\right] = \lambda t$*, para* $t \geq 0$*.*

Teorema 793. *Sea* $N\left(t\right)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta\left(t\right) = \mathbb{E}\left[N\left(\right)\right]$ *es finita para cada* t*. Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$*,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N\left(\right)} f\left(T_n\right)\right] = \int_{\left(0,t\right]} f\left(s\right)d\eta\left(s\right),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N\left(t\right)$ *tal que* $\mathbb{E}\left[X_n|T_n = s\right] = f\left(s\right)$*, independiente de* n*. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N\left(t\right)} X_n\right] = \int_{\left(0,t\right]} f\left(s\right)d\eta\left(s\right),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 205 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right]=\mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right],\ t\geq 0,$$

23.128 Procesos de Renovación

Definición 1151. *Sean $0\leq T_1\leq T_2\leq\ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0,t)$ es*

$$N(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\left(T_n\leq t\right), \tag{23.529}$$

para $t\geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t):t\geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0<T_1<T_2<\ldots$ casi seguramente.

Definición 1152. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n=T_n-T_{n-1}$, para $n\geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0)=0$ y $T_0=0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0,t)$*

Nota 549. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0)=0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1,\xi_2,\ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ y $N(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\left(T_n\leq t\right)$, donde $T_n\rightarrow\infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

23.129 Puntos de Renovación

Para cada cola Q_i se tienen los procesos de arribo a la cola, para estas, los tiempos de arribo están dados por

$$\left\{T_1^i,T_2^i,\ldots,T_k^i,\ldots\right\},$$

entonces, consideremos solamente los primeros tiempos de arribo a cada una de las colas, es decir,

$$\left\{T_1^1,T_1^2,T_1^3,T_1^4\right\},$$

se sabe que cada uno de estos tiempos se distribuye de manera exponencial con parámetro $1/mu_i$. Además se sabe que para

$$T^*=\min\left\{T_1^1,T_1^2,T_1^3,T_1^4\right\},$$

T^* se distribuye de manera exponencial con parámetro

$$\mu^*=\sum_{i=1}^{4}\mu_i.$$

Ahora, dado que

$$\tilde{r}=r_1+r_2\quad\text{y}\quad\hat{r}=r_3+r_4.$$

Supongamos que

$$\tilde{r},\hat{r}<\mu^*,$$

entonces si tomamos

$$r^*=\min\left\{\tilde{r},\hat{r}\right\},$$

se tiene que para

$$t^*\in(0,r^*)$$

se cumple que

$$\tau_1(1) = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \overline{\tau}_1 = 0,$$

entonces para la segunda cola en este primer ciclo se cumple que

$$\tau_2 = \overline{\tau}_1 + r_1 = r_1 < \mu^*,$$

y por tanto se tiene que

$$\overline{\tau}_2 = \tau_2.$$

Por lo tanto, nuevamente para la primer cola en el segundo ciclo

$$\tau_1(2) = \tau_2(1) + r_2 = \tilde{r} < \mu^*.$$

Análogamente para el segundo sistema se tiene que ambas colas están vacías, es decir, existe un valor t^* tal que en el intervalo $(0, t^*)$ no ha llegado ningún usuario, es decir,

$$L_i(t^*) = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

23.130 Resultados para Procesos de Salida

En [?] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 407. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k(X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 794. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*
  b) *$L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;*
  c) *$L = 1$ y $G = D$;*
  d) *$L = \infty$ y $G = M$.*

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;
  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;
  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 795. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.

  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$

  d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 796. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [?] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 797. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right]\\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right]\\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2(1-\delta)^{-1}.
\end{aligned}
$$

  Teorema 798. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 799. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

23.131 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [?]

Definición 1153 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 550. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [?].*

Nota 551. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 1154. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 552. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 553. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 554. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 555. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1155. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1156. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1157. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 800. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 206. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\, ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 1158. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.530}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1159. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 556. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 557. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 801 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 408. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\, , \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1160. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)]\, , \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 409. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t)\, , \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]\, .$$

Teorema 802 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 410. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 558. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 803. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.531}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.532}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 207 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.533}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1161. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 804. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.534}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.535}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 208. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.536)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\; t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 411. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 559. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 805. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \quad (23.537)$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (23.538)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 209 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.539)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1162. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 806. *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$, *donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) = a,\ c.s. \quad (23.540)$$

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) = a/\mu,\ c.s. \quad (23.541)$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 210. *Si* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación, y* $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, *para* $n \geq 1$, *son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]},\ c.s.\ cuando\ t \rightarrow \infty. \quad (23.542)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned}\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 412. *Para cada* $t \geq 0$, *la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, *para* $m \geq 1$.

Nota 560. *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n, *para* $n \geq 2$, *a* $N\left(t\right)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G, *entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$

Teorema 807. *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n = \mu,\ c.s. \quad (23.543)$$

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) = 1/\mu,\ c.s. \quad (23.544)$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N\ /t)$ la cumple.

Corolario 211 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación). *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.545}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1163. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 808. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (23.546)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (23.547)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 212. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.548}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 413. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 561. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 809. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} && (23.549)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (23.550)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 213 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.551}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1164. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 810. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (23.552)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (23.553)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 214. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.554}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq &\;\; t \;\; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 414. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 562. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 811. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.555}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.556}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 215 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.557}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1165. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 812. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.558}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.559}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 216. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.560}$$

Definición 1166. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{23.561}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 415. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (??).*

Teorema 813 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1167. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 416. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 1168. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 417. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 563. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 814. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 217 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 1169. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \qquad (23.562)$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1170. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 564. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 1171. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.563}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1172. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 565. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 418. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 21 (**Proceso Poisson**)**.** *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 566. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 815. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.564}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.565}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 218 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.566}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1173. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 816. *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.567}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.568}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 219. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.569}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1174. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 419. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 1175. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 420. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 567. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 817. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 220 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \, t \geq 0,$$

Definición 1176. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.570}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 421. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (??).*

Teorema 818 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1177. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 422. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 1178. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \, \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 423. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 568. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 819. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \, t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 221 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \, t \geq 0,$$

Definición 1179. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \, t \geq 0, \tag{23.571}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 424. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (??).*

Teorema 820 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 569. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 821 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 425. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1180. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 426. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 822 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 570. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 823 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 427. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1181. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \textit{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 428. *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \textit{ donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 824 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$*.*

Definición 1182. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = \left(\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\}\right)$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 571. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 572. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 573. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1183. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = \left(\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\}\right)$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 574. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 825 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 1184 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación* $N(t)$*, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$*, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo* t*, que es el tiempo desde la última renovación para* t*.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$*, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo* t*, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de* t*.*

- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a* t.

Nota 575. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n, *y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$. *Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{23.572}$$

Ejemplo 22 (Tiempos de recurrencia Poisson)**.** *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ, *entonces de la expresión (??) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 576. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 1185. *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 577. *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 429. *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 826. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación* N *es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante* $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 578. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 222. *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 579. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 580. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1186 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 1187. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 581. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1188. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 582. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 583. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1189 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 584. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1190. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 585. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1191. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1192. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1193. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 827. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{X} V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^*(0)\right] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1194. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 1195. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1196. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 828. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^*(0)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^*(0)\right] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente:

$$Q_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{L_i(t)}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

M_i es un tiempo de paro en el proceso regenerativo con $\mathbb{E}[M_i]<\infty$[61], se sigue del lema de Wald que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\\
\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i}\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right] &= \mathbb{E}[M_i]\,\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]
\end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$Q_i(z) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}$$

observar que el denominador es simplemente la duración promedio del tiempo del ciclo.

Haciendo las siguientes sustituciones en la ecuación (**??**): $n\rightarrow t-\tau_i(m)$, $T\rightarrow\overline{\tau}_i(m)-\tau_i(m)$, $L_n\rightarrow L_i(t)$ y $F(z)=\mathbb{E}\left[z^{L_0}\right]\rightarrow F_i(z)=\mathbb{E}\left[z^{L_i\tau_i(m)}\right]$, se puede ver que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T-1} z^{L_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right] = z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)} \tag{23.573}$$

Por otra parte durante el tiempo de intervisita para la cola i, $L_i(t)$ solamente se incrementa de manera que el incremento por intervalo de tiempo está dado por la función generadora de probabilidades de $P_i(z)$, por tanto la suma sobre el tiempo de intervisita puede evaluarse como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1}\{P_i(z)\}^{t-\overline{\tau}_i(m)}\right] = \frac{1-\mathbb{E}\left[\{P_i(z)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}_i(m)}\right]}{1-P_i(z)}\\
&= \frac{1-I_i\left[P_i(z)\right]}{1-P_i(z)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right] = \frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}$$

Por lo tanto

[61] En Stidham[**?**] y Heyman se muestra que una condición suficiente para que el proceso regenerativo estacionario sea un procesoo estacionario es que el valor esperado del tiempo del ciclo regenerativo sea finito, es decir: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right]<\infty$, como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i]<\infty$, además, como $M_i>0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i]<\infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N}\mu_k<1$.

$$\begin{aligned}
Q_i(z) &= \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{t=\tau_i(m)}^{\overline{\tau}_i(m)-1} z^{L_i(t)}\right]+\mathbb{E}\left[\sum_{t=\overline{\tau}_i(m)}^{\tau_i(m+1)-1} z^{L_i(t)}\right]\right\}\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\tau_i(m+1)-\tau_i(m)\right]}\left\{z\frac{F_i(z)-1}{z-P_i(z)}+\frac{1-F_i(z)}{1-P_i(z)}\right\}
\end{aligned}$$

es decir

$$Q_i(z) = \frac{1}{\mathbb{E}[C_i]}\cdot\frac{1-F_i(z)}{P_i(z)-z}\cdot\frac{(1-z)P_i(z)}{1-P_i(z)} \tag{23.574}$$

Teorema 829. *Dada una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC), conformada por dos Sistemas de Visitas Cíclicas (SVC), donde cada uno de ellos consta de dos colas tipo $M/M/1$. Los dos sistemas están comunicados entre sí por medio de la transferencia de usuarios entre las colas $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$. Se definen los eventos para los procesos de arribos al tiempo t, $A_j(t) = \{0 \text{ arribos en } Q_j \text{ al tiempo } t\}$ para algún tiempo $t \geq 0$ y Q_j la cola j-ésima en la RSVC, para $j = 1,2,3,4$. Existe un intervalo $I \neq \emptyset$ tal que para $T^* \in I$, tal que $\mathbb{P}\{A_1(T^*), A_2(Tt^*), A_3(T^*), A_4(T^*) | T^* \in I\} > 0$.*

Proof. Sin pérdida de generalidad podemos considerar como base del análisis a la cola Q_1 del primer sistema que conforma la RSVC.

Sea $n > 0$, ciclo en el primer sistema en el que se sabe que $L_j(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, pues la política de servicio con que atienden los servidores es la exhaustiva. Como es sabido, para trasladarse a la siguiente cola, el servidor incurre en un tiempo de traslado $r_1(n) > 0$, entonces tenemos que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1(n)$.

Definamos el intervalo $I_1 \equiv [\overline{\tau}_1(n), \tau_2(n)]$ de longitud $\xi_1 = r_1(n)$. Dado que los tiempos entre arribo son exponenciales con tasa $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \hat{\mu}_1$ (μ_1 son los arribos a Q_1 por primera vez al sistema, mientras que $\hat{\mu}_1$ son los arribos de traslado procedentes de Q_3) se tiene que la probabilidad del evento $A_1(t)$ está dada por

$$\mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_1\xi_1(n)}. \tag{23.575}$$

Por otra parte, para la cola Q_2, el tiempo $\overline{\tau}_2(n-1)$ es tal que $L_2(\overline{\tau}_2(n-1)) = 0$, es decir, es el tiempo en que la cola queda totalmente vacía en el ciclo anterior a n. Entonces tenemos un sgundo intervalo $I_2 \equiv [\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)]$. Por lo tanto la probabilidad del evento $A_2(t)$ tiene probabilidad dada por

$$\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_2\xi_2(n)}, \tag{23.576}$$

donde $\xi_2(n) = \tau_2(n) - \overline{\tau}_2(n-1)$.

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} &= \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\}\,\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_1(n)\}\\
&\geq \mathbb{P}\{A_1(t) | t \in I_1(n)\}\,\mathbb{P}\{A_2(t) | t \in I_2(n)\}\\
&= e^{-\tilde{\mu}_1\xi_1(n)}e^{-\tilde{\mu}_2\xi_2(n)} = e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)]}.
\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{A_1(t), A_2(t) | t \in I_1(n)\} = e^{-[\tilde{\mu}_1\xi_1(n)+\tilde{\mu}_2\xi_2(n)]} > 0. \tag{23.577}$$

En lo que respecta a la relación entre los dos SVC que conforman la RSVC, se afirma que existe $m > 0$ tal que $\overline{\tau}_3(m) < \tau_2(n) < \tau_4(m)$.

Para Q_3 sea $I_3 = [\overline{\tau}_3(m), \tau_4(m)]$ con longitud $\xi_3(m) = r_3(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_3(t) | t \in I_3(n)\} = e^{-\tilde{\mu}_3\xi_3(n)}. \tag{23.578}$$

Análogamente que como se hizo para Q_2, tenemos que para Q_4 se tiene el intervalo $I_4 = [\overline{\tau}_4 (m-1), \tau_4 (m)]$ con longitud $\xi_4 (m) = \tau_4 (m) - \overline{\tau}_4 (m-1)$, entonces

$$\mathbb{P}\{A_4 (t) | t \in I_4 (m)\} = e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4 (n)}. \tag{23.579}$$

Al igual que para el primer sistema, dado que $I_3 (m) \subset I_4 (m)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \xi_3 (m) \leq \xi_4 (m) &\Leftrightarrow -\xi_3 (m) \geq -\xi_4 (m) \\ -\tilde{\mu}_4 \xi_3 (m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4 (m) &\Leftrightarrow e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_3 (m)} \geq e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4 (m)} \\ \mathbb{P}\{A_4 (t) | t \in I_3 (m)\} &\geq \mathbb{P}\{A_4 (t) | t \in I_4 (m)\} \end{aligned}$$

Entonces, dado que los eventos A_3 y A_4 son independientes, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{A_3 (t), A_4 (t) | t \in I_3 (m)\} &= \mathbb{P}\{A_3 (t) | t \in I_3 (m)\} \mathbb{P}\{A_4 (t) | t \in I_3 (m)\} \\ &\geq \mathbb{P}\{A_3 (t) | t \in I_3 (n)\} \mathbb{P}\{A_4 (t) | t \in I_4 (n)\} \\ &= e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3 (m)} e^{-\tilde{\mu}_4 \xi_4 (m)} = e^{-[\tilde{\mu}_3 \xi_3 (m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4 (m)]}. \end{aligned}$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{A_3 (t), A_4 (t) | t \in I_3 (m)\} = e^{-[\tilde{\mu}_3 \xi_3 (m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4 (m)]} > 0. \tag{23.580}$$

Por construcción se tiene que $I (n,m) \equiv I_1 (n) \cap I_3 (m) \neq \emptyset$,entonces en particular se tienen las contenciones $I (n,m) \subseteq I_1 (n)$ y $I (n,m) \subseteq I_3 (m)$, por lo tanto si definimos $\xi_{n,m} \equiv \ell (I (n,m))$ tenemos que

$$\xi_{n,m} \leq \xi_1 (n) \text{ y } \xi_{n,m} \leq \xi_3 (m) \text{ entonces } -\xi_{n,m} \geq -\xi_1 (n) \text{ y } -\xi_{n,m} \leq -\xi_3 (m)$$

por lo tanto tenemos las desigualdades

$$\begin{array}{ll} -\tilde{\mu}_1 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_1 \xi_1 (n), & -\tilde{\mu}_2 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_1 (n) \geq -\tilde{\mu}_2 \xi_2 (n), \\ -\tilde{\mu}_3 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_3 \xi_3 (m), & -\tilde{\mu}_4 \xi_{n,m} \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_3 (m) \geq -\tilde{\mu}_4 \xi_4 (m). \end{array}$$

Sea $T^* \in I_{n,m}$, entonces dado que en particular $T^* \in I_1 (n)$ se cumple con probabilidad positiva que no hay arribos a las colas Q_1 y Q_2, en consecuencia, tampoco hay usuarios de transferencia para Q_3 y Q_4, es decir, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2$, $\tilde{\mu}_3 = \mu_3$, $\tilde{\mu}_4 = \mu_4$, es decir, los eventos Q_1 y Q_3 son condicionalmente independientes en el intervalo $I_{n,m}$; lo mismo ocurre para las colas Q_2 y Q_4, por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{A_1 (T^*), A_2 (T^*), A_3 (T^*), A_4 (T^*) | T^* \in I_{n,m}\} = \prod_{j=1}^{4} \mathbb{P}\{A_j (T^*) | T^* \in I_{n,m}\} \\ &\geq \mathbb{P}\{A_1 (T^*) | T^* \in I_1 (n)\} \mathbb{P}\{A_2 (T^*) | T^* \in I_2 (n)\} \mathbb{P}\{A_3 (T^*) | T^* \in I_3 (m)\} \mathbb{P}\{A_4 (T^*) | T^* \in I_4 (m)\} \\ &= e^{-\mu_1 \xi_1 (n)} e^{-\mu_2 \xi_2 (n)} e^{-\mu_3 \xi_3 (m)} e^{-\mu_4 \xi_4 (m)} = e^{-[\tilde{\mu}_1 \xi_1 (n) + \tilde{\mu}_2 \xi_2 (n) + \tilde{\mu}_3 \xi_3 (m) + \tilde{\mu}_4 \xi_4 (m)]} > 0. \end{aligned} \tag{23.581}$$

$\square$

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [?] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.

- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 830. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu\left(\mu+\theta\right)^{-1}\left[\delta\theta-\mu\left(1-\delta\right)\alpha\left(\theta\right)\right]\left[\theta-\mu\left(1-\delta\right)^{-1}\right]\\
\alpha\left(\theta\right) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right]\\
var\left(D_n\right) &= var\left(T_0\right)-\left(\tau^{-1}-\delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}\left(S_0\right)\right)^2\left(1-\delta\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

  Teorema 831. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 832. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

En Sigman, Thorison y Wolff [?] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 430. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1}X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k\left(X, R\right) =_D \left(X, R\right).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k}X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.

- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.

- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 833. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso **I** es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) Los tiempos de servicio son identicamente cero;

  b) $L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;

  c) $L = 1$ y $G = D$;

  d) $L = \infty$ y $G = M$.

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;

  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;

  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;

  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.

- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.
- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 834. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$
  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.
  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$
  d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 835. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Estos resultados aparecen en Daley (1968) [?] para $\{T_n\}$ intervalos de inter-arribo, $\{D_n\}$ intervalos de inter-salida y $\{S_n\}$ tiempos de servicio.

- Si el proceso $\{T_n\}$ es Poisson, el proceso $\{D_n\}$ es no correlacionado si y sólo si es un proceso Poisso, lo cual ocurre si y sólo si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas.
- Si $\{S_n\}$ son exponenciales negativas, $\{D_n\}$ es un proceso de renovación si y sólo si es un proceso Poisson, lo cual ocurre si y sólo si $\{T_n\}$ es un proceso Poisson.
- $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_n)$.
- Para un sistema de visitas $GI/M/1$ se tiene el siguiente teorema:

  Teorema 836. *En un sistema estacionario $GI/M/1$ los intervalos de interpartida tienen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-\theta D_n}\right) &= \mu(\mu+\theta)^{-1}\left[\delta\theta - \mu(1-\delta)\alpha(\theta)\right]\left[\theta - \mu(1-\delta)^{-1}\right] \\
\alpha(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{-\theta T_0}\right] \\
var(D_n) &= var(T_0) - \left(\tau^{-1} - \delta^{-1}\right)2\delta\left(\mathbb{E}(S_0)\right)^2(1-\delta)^{-1}.
\end{aligned}$$

  Teorema 837. *El proceso de salida de un sistema de colas estacionario $GI/M/1$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso de entrada es un proceso Poisson, en cuyo caso el proceso de salida es un proceso Poisson.*

  Teorema 838. *Los intervalos de interpartida $\{D_n\}$ de un sistema $M/G/1$ estacionario son no correlacionados si y sólo si la distribución de los tiempos de servicio es exponencial negativa, es decir, el sistema es de tipo $M/M/1$.*

Sean Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 en una Red de Sistemas de Visitas Cíclicas (RSVC). Supongamos que cada una de las colas es del tipo $M/M/1$ con tasa de arribo μ_i y que la transferencia de usuarios entre los dos sistemas ocurre entre $Q_1 \leftrightarrow Q_3$ y $Q_2 \leftrightarrow Q_4$ con respectiva tasa de arribo igual a la tasa de salida $\hat{\mu}_i = \mu_i$, esto se sabe por lo desarrollado en la sección anterior.

Consideremos, sin pérdida de generalidad como base del análisis, la cola Q_1 además supongamos al servidor lo comenzamos a observar una vez que termina de atender a la misma para desplazarse y llegar a Q_2, es decir al tiempo τ_2.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, ciclo del servidor en que regresa a Q_1 para dar servicio y atender conforme a la política exhaustiva, entonces se tiene que $\overline{\tau}_1(n)$ es el tiempo del servidor en el sistema 1 en que termina de dar servicio a todos los usuarios presentes en la cola, por lo tanto se cumple que $L_1(\overline{\tau}_1(n)) = 0$, entonces el servidor para llegar a Q_2 incurre en un tiempo de traslado r_1 y por tanto se cumple que $\tau_2(n) = \overline{\tau}_1(n) + r_1$. Dado que los tiempos entre arribos son exponenciales se cumple que

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n) + r_1\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_1 r_1},$$
$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n), \overline{\tau}_1(n) + r_1\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_2 r_1}.$$

El evento que nos interesa consiste en que no haya arribos desde que el servidor abandonó Q_2 y regresa nuevamente para dar servicio, es decir en el intervalo de tiempo $\left[\overline{\tau}_2(n-1), \tau_2(n)\right]$. Entonces, si hacemos

$$\begin{aligned}\varphi_1(n) &\equiv \overline{\tau}_1(n) + r_1 = \overline{\tau}_2(n-1) + r_1 + r_2 + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n)\\ &= \overline{\tau}_2(n-1) + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r,,\end{aligned}$$

y longitud del intervalo

$$\begin{aligned}\xi &\equiv \overline{\tau}_1(n) + r_1 - \overline{\tau}_2(n-1) = \overline{\tau}_2(n-1) + \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r - \overline{\tau}_2(n-1)\\ &= \overline{\tau}_1(n) - \tau_1(n) + r.\end{aligned}$$

Entonces, determinemos la probabilidad del evento no arribos a Q_2 en $\left[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)\right]$:

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi}. \tag{23.582}$$

De manera análoga, tenemos que la probabilidad de no arribos a Q_1 en $\left[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)\right]$ esta dada por

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi}, \tag{23.583}$$

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_2 \xi}. \tag{23.584}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ y } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)\right]\right\}\\ &= \mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_1 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)\right]\right\}\\ &\times \mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_2 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_2(n-1), \varphi_1(n)\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_1 \xi} e^{-\tilde{\mu}_2 \xi} = e^{-\tilde{\mu} \xi}.\end{aligned} \tag{23.585}$$

Para el segundo sistema, consideremos nuevamente $\overline{\tau}_1(n) + r_1$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $m > 0$ tal que $\overline{\tau}_3(m) < \overline{\tau}_1 + r_1 < \tau_4(m)$, entonces

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_3(m), \overline{\tau}_1(n) + r_1\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_3 \xi_3}, \tag{23.586}$$

donde

$$\xi_3 = \overline{\tau}_1(n) + r_1 - \overline{\tau}_3(m) = \overline{\tau}_1(n) - \overline{\tau}_3(m) + r_1, \tag{23.587}$$

mientras que para Q_4 al igual que con Q_2 escribiremos $\tau_4(m)$ en términos de $\overline{\tau}_4(m-1)$:
$\varphi_2 \equiv \tau_4(m) = \overline{\tau}_4(m-1) + r_4 + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) + r_3 = \overline{\tau}_4(m-1) + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) + \hat{r}$, además,
$\xi_2 \equiv \varphi_2(m) - \overline{\tau}_1 - r_1 = \overline{\tau}_4(m-1) + \overline{\tau}_3(m) - \tau_3(m) - \overline{\tau}_1(n) + \hat{r} - r_1$.
Entonces

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_4 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n)+r_1,\varphi_2(m)\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_4\xi_2}, \tag{23.588}$$

mientras que para Q_3 se tiene que

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n)+r_1,\varphi_2(m)\right]\right\} = e^{-\tilde{\mu}_3\xi_2} \tag{23.589}$$

Por tanto

$$\mathbb{P}\left\{0 \text{ arribos en } Q_3 \wedge Q_4 \text{ en el intervalo } \left[\overline{\tau}_1(n)+r_1,\varphi_2(m)\right]\right\} = e^{-\hat{\mu}\xi_2} \tag{23.590}$$

donde $\hat{\mu} = \tilde{\mu}_3 + \tilde{\mu}_4$.

Ahora, definamos los intervalos $\mathcal{I}_1 = \left[\overline{\tau}_1(n)+r_1,\varphi_1(n)\right]$ y $\mathcal{I}_2 = \left[\overline{\tau}_1(n)+r_1,\varphi_2(m)\right]$, entonces, sea $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ el intervalo donde cada una de las colas se encuentran vacías, es decir, si tomamos $T^* \in \mathcal{I}$, entonces $L_1(T^*) = L_2(T^*) = L_3(T^*) = L_4(T^*) = 0$.

Ahora, dado que por construcción $\mathcal{I} \neq \emptyset$ y que para $T^* \in \mathcal{I}$ en ninguna de las colas han llegado usuarios, se tiene que no hay transferencia entre las colas, por lo tanto, el sistema 1 y el sistema 2 son condicionalmente independientes en $\mathcal{I}$, es decir

$$\mathbb{P}\left\{L_1(T^*), L_2(T^*), L_3(T^*), L_4(T^*) | T^* \in \mathcal{I}\right\} = \prod_{j=1}^{4} \mathbb{P}\left\{L_j(T^*)\right\}, \tag{23.591}$$

para $T^* \in \mathcal{I}$.

Definición 1197 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 586. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [**?**].*

Nota 587. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 1198. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 588. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 589. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 590. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 591. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1199. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1200. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1201. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 839. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]<\infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]<\infty$,*entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t}V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$.

Corolario 223. *Sea* $\left\{V\left(t\right),t\geq0\right\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E}<\infty$, F *es no-aritmética, y para todo* $x\geq0$, $P\left\{V\left(t\right)\leq x,C>x\right\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $\left[0,\tau\right]$, *entonces* $V\left(t\right)$ *converge en distribución cuando* $t\rightarrow\infty$ *y*

$$\mathbb{E}V=\frac{\mathbb{E}\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V\left(t\right)$ *cuando* $t\rightarrow\infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 1202. *Sean* $0\leq T_{1}\leq T_{2}\leq\ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_{n} *en el intervalo* $\left[0,t\right)$ *es*

$$N\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\left(T_{n}\leq t\right),\tag{23.592}$$

para $t\geq0$.

Si se consideran los puntos T_{n} como elementos de $\mathbb{R}_{+}$, y $N\left(t\right)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\left\{N\left(t\right):t\geq0\right\}$, denotado por $N\left(t\right)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_{+}$. Los T_{n} son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N\left(t\right)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0<T_{1}<T_{2}<\ldots$ casi seguramente.

Definición 1203. *Un proceso puntual* $N\left(t\right)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_{n}=T_{n}-T_{n-1}$, *para* $n\geq1$, *son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F, *donde* $F\left(0\right)=0$ *y* $T_{0}=0$. *Los* T_{n} *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_{n} *son los tiempos de inter-renovación, y* $N\left(t\right)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $\left[0,t\right)$

Nota 592. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F, *con* $F\left(0\right)=0$, *para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_{1},\xi_{2},\ldots$ *definidas en este con distribución* F. *Entonces las otras cantidades son* $T_{n}=\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}$ *y* $N\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\left(T_{n}\leq t\right)$, *donde* $T_{n}\rightarrow\infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 593. *Una función* $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h\left(t\right)\geq0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h\left(t\right)|\leq b\left(t\right)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 840 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h\left(t\right)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds.$$

Proposición 431. *Cualquier función* $H\left(t\right)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t<0$ *puede expresarse como*

$$H\left(t\right)=U\star h\left(t\right),\textrm{ donde }h\left(t\right)=H\left(t\right)-F\star H\left(t\right)$$

Definición 1204. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X\left(T+t\right)|T\right]=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 432. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=U\star h\left(t\right),\ donde\ h\left(t\right)=\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\mathbb{1}\left(T>t\right)\right].$$

Teorema 841 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h\left(s\right)ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T>t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ T_{N(t)}\leq &\; t < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n)=n$, y

$$N\left(t\right)=\max\left\{n:T_{n}\leq t\right\}=\min\left\{n:T_{n+1}>t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_{n}\leq t\right\}=F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ P\{N(t)\leq n\} &= 1-F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 433. *Para cada $t\geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right]<\infty$, para $m\geq 1$.*

Nota 594. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n\geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G\star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 842. *Para una constante $\mu\leq\infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n = \mu,\ c.s. \tag{23.593}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N(t) = 1/\mu,\ c.s. \tag{23.594}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 224 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.595}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1205. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1}<t\leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 843. *Supóngase que $n^{-1}T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} && (23.596)\\ lim_{t\to\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (23.597) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 225. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1}Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.598}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 434. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 595. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 844. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.599}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.600}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 226 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.601}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1206. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 845. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.602}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.603}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 227. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z(T_1) - Z(T_0)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.604}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq \quad & t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 435. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 596. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 846. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \ c.s. \tag{23.605}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{23.606}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 228 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \to \infty. \tag{23.607}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1207. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 847. *Supóngase que $n^{-1} T_n \to \mu$ c.s. cuando $n \to \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \ c.s. \tag{23.608}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \ c.s. \tag{23.609}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 229. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \ c.s. \ cuando \ t \to \infty. \tag{23.610}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ T_{N(t)}\leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n)=n$, y

$$N(t)=\max\{n:T_n\leq t\}=\min\{n:T_{n+1}>t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n\leq t\}=F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ P\{N(t)\leq n\} &= 1-F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)$$

Proposición 436. *Para cada $t\geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m]<\infty$, para $m\geq 1$.*

Nota 597. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n\geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G\star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 848. *Para una constante $\mu\leq\infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty}n^{-1}T_n = \mu,\ c.s. \tag{23.611}$$
$$lim_{t\to\infty}t^{-1}N(t) = 1/\mu,\ c.s. \tag{23.612}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 230 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu\leq\infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t)\to 1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t\to\infty. \tag{23.613}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t):t\geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1208. *Para el proceso $\{Z(t):t\geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1},T_n]$:*

$$M_n=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_n}|Z(t)-Z(T_{n-1})|$$

Teorema 849. *Supóngase que* $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ *c.s. cuando* $n \rightarrow \infty$*, donde* $\mu \leq \infty$ *es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando* μ *es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) &= a, \ c.s. && (23.614) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) &= a/\mu, \ c.s. && (23.615) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ *es creciente, o si* $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ *c.s.*

Corolario 231. *Si* $N(t)$ *es un proceso de renovación, y* $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$*, para* $n \geq 1$*, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \quad (23.616)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\} \\ T_{N(t)} \leq & \ t \ < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\} \\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 437. *Para cada* $t \geq 0$*, la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$*, para* $m \geq 1$*.*

Nota 598. *Si el primer tiempo de renovación* ξ_1 *no tiene la misma distribución que el resto de las* ξ_n*, para* $n \geq 2$*, a* $N(t)$ *se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si* ξ *tiene distribución* G*, entonces el tiempo* T_n *de la n-ésima renovación tiene distribución* $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$

Teorema 850. *Para una constante* $\mu \leq \infty$ *(o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \ c.s. && (23.617) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) &= 1/\mu, \ c.s. && (23.618) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 232 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.619}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1209. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 851. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.620}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.621}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 233. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.622}$$

Definición 1210. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.623}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 438. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 852 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1211. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 439. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1212. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 440. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 599. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 853. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 234 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 1213. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.624}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1214. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 600. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 1215. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.625}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1216. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, *para* $n \geq 1$, *son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F, *donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$. *Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 601. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución* F, *con* $F(0) = 0$, *para los tiempos de inter-renovación. La función* F *en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *definidas en este con distribución* F. *Entonces las otras cantidades son* $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *y* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, *donde* $T_n \to \infty$ *casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 441. *Para cada* $t \geq 0$, *la función generadora de momentos* $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ *existe para alguna* α *en una vecindad del 0, y de aquí que* $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, *para* $m \geq 1$.

Ejemplo 23 (**Proceso Poisson**). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación* $N(t)$ *tienen distribución exponencial* $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ *con tasa* λ. *Entonces* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ.

Nota 602. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 854. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \ c.s. \tag{23.626}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \ c.s. \tag{23.627}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 235 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \tag{23.628}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1217. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 855. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \ c.s. \tag{23.629}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \ c.s. \tag{23.630}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 236. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \ c.s. \ cuando \ t \rightarrow \infty. \tag{23.631}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1218. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 442. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 1219. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 443. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 603. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 856. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 237 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 1220. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{23.632}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 444. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 857 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \to 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1221. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 445. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 1222. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 446. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 604. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 858. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 238 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 1223. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s) \, dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.633}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 447. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 859 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Nota 605. *Una función $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) *$h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.*

Teorema 860 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds.$$

Proposición 448. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 1224. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 449. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 861 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

Nota 606. *Una función $h:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t)\geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)|\leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 862 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}}h(s)\,ds.$$

Proposición 450. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 1225. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 451. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 863 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{+}} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Definición 1226. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 607. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 608. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 609. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para $\{X(t) : t \geq 0\}$ proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados S, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_{+}$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1227. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 610. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 864 (Procesos Regenerativos)**.** *Suponga que el proceso*

Definición 1228 (Renewal Process Trinity)**.** *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- *$A(t) = t - T_{N(t)}$, el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- *$B(t) = T_{N(t)+1} - t$, el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- *$L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 611. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_{+}$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t + y) - N((t - x)) = 0\} \tag{23.634}$$

Ejemplo 24 (Tiempos de recurrencia Poisson). *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (??) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x+y$.

Nota 612. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 1229. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1+t), \ldots, X(s_k+t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 613. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 452. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 865. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N es estacionario.

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 614. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 239. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 615. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 616. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1230 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t+R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 1231. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 617. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1232. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 618. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 619. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1233 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 620. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1234. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 621. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1235. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1236. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1237. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 866. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{X} V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1238. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 1239. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1240. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 867. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Sea la función generadora de momentos para L_i, el número de usuarios en la cola $Q_i(z)$ en cualquier momento, está dada por el tiempo promedio de $z^{L_i(t)}$ sobre el ciclo regenerativo definido anteriormente. Entonces

Es decir, es posible determinar las longitudes de las colas a cualquier tiempo t. Entonces, determinando el primer momento es posible ver que

Definición 1241. *El tiempo de Ciclo* C_i *es el periodo de tiempo que comienza cuando la cola* i *es visitada por primera vez en un ciclo, y termina cuando es visitado nuevamente en el próximo ciclo. La duración del mismo está dada por* $\tau_i(m+1) - \tau_i(m)$*, o equivalentemente* $\overline{\tau}_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$ *bajo condiciones de estabilidad.*

Definición 1242. *El tiempo de intervisita I_i es el periodo de tiempo que comienza cuando se ha completado el servicio en un ciclo y termina cuando es visitada nuevamente en el próximo ciclo. Su duración del mismo está dada por $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}_i(m)$.*

La duración del tiempo de intervisita es $\tau_i(m+1) - \overline{\tau}(m)$. Dado que el número de usuarios presentes en Q_i al tiempo $t = \tau_i(m+1)$ es igual al número de arribos durante el intervalo de tiempo $[\overline{\tau}(m), \tau_i(m+1)]$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[z_i^{L_i(\tau_i(m+1))}\right] = \mathbb{E}\left[\{P_i(z_i)\}^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$$

entonces, si $I_i(z) = \mathbb{E}\left[z^{\tau_i(m+1)-\overline{\tau}(m)}\right]$ se tiene que $F_i(z) = I_i[P_i(z)]$ para $i = 1, 2$.

Conforme a la definición dada al principio del capítulo, definición (**??**), sean $T_1, T_2, \ldots$ los puntos donde las longitudes de las colas de la red de sistemas de visitas cíclicas son cero simultáneamente, cuando la cola Q_j es visitada por el servidor para dar servicio, es decir, $L_1(T_i) = 0, L_2(T_i) = 0, \hat{L}_1(T_i) = 0$ y $\hat{L}_2(T_i) = 0$, a estos puntos se les denominará puntos regenerativos. Entonces,

Definición 1243. *Al intervalo de tiempo entre dos puntos regenerativos se le llamará ciclo regenerativo.*

Definición 1244. *Para T_i se define, M_i, el número de ciclos de visita a la cola Q_l, durante el ciclo regenerativo, es decir, M_i es un proceso de renovación.*

Definición 1245. *Para cada uno de los M_i's, se definen a su vez la duración de cada uno de estos ciclos de visita en el ciclo regenerativo, $C_i^{(m)}$, para $m = 1, 2, \ldots, M_i$, que a su vez, también es n proceso de renovación.*

[62]

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1246. *Un elemento aleatorio en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $(E, \mathcal{E})$, es decir, para $A \in \mathcal{E}$, se tiene que $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}$, donde $\{Y \in A\} := \{w \in \Omega : Y(w) \in A\} =: Y^{-1}A$.*

Nota 622. *También se dice que Y está soportado por el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que Y es un mapeo medible de Ω en E, es decir, es $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ medible.*

Definición 1247. *Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Se define el espacio producto $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i) := \left(\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i, \otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i\right)$, donde $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ es el producto cartesiano de los E_i's, y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i$ es la σ-álgebra producto, es decir, es la σ-álgebra más pequeña en $\prod_{i\in\mathbb{I}} E_i$ que hace al i-ésimo mapeo proyección en E_i medible para toda $i \in \mathbb{I}$ es la σ-álgebra inducida por los mapeos proyección.*

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i := \sigma\left\{\{y : y_i \in A\} : i \in \mathbb{I} \text{ y } A \in \mathcal{E}_i\right\}.$$

Definición 1248. *Un espacio de probabilidad $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ es una extensión de otro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ soporta un elemento aleatorio $\xi \in (\Omega, \mathcal{F})$ que tienen a $\mathbb{P}$ como distribución.*

Teorema 868. *Sea $\mathbb{I}$ un conjunto de índices arbitrario. Para cada $i \in \mathbb{I}$ sea P_i una medida de probabilidad en un espacio medible $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Entonces existe una única medida de probabilidad $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ en $\otimes_{i\in\mathbb{I}}(E_i, \mathcal{E}_i)$ tal que*

[62] In Stidham and Heyman [**?**] shows that is sufficient for the regenerative process to be stationary that the mean regenerative cycle time is finite: $\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{M_i} C_i^{(m)}\right] < \infty$,

como cada $C_i^{(m)}$ contiene intervalos de réplica positivos, se tiene que $\mathbb{E}[M_i] < \infty$, además, como $M_i > 0$, se tiene que la condición anterior es equivalente a tener que $\mathbb{E}[C_i] < \infty$, por lo tanto una condición suficiente para la existencia del proceso regenerativo está dada por $\sum_{k=1}^{N} \mu_k < 1$.

$$\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\left(y\in\prod_{i\in\mathbb{I}}E_i : y_i\in A_{i_1},\ldots,y_n\in A_{i_n}\right)=P_{i_1}\left(A_{i_n}\right)\cdots P_{i_n}\left(A_{i_n}\right)$$

para todos los enteros $n>0$, toda $i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{I}$ y todo $A_{i_1}\in\mathcal{E}_{i_1},\ldots,A_{i_n}\in\mathcal{E}_{i_n}$

La medida $\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i$ es llamada la medida producto y $\otimes_{i\in\mathbb{I}}\left(E_i,\mathcal{E}_i,P_i\right):=\left(\prod_{i\in\mathbb{I}},E_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}\mathcal{E}_i,\otimes_{i\in\mathbb{I}}P_i\right)$, es llamado espacio de probabilidad producto.

Definición 1249. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es Polaco si existe una métrica en E tal que E es completo, es decir cada sucesión de Cauchy converge a un límite en E, y separable, E tienen un subconjunto denso numerable, y tal que $\mathcal{E}$ es generado por conjuntos abiertos.*

Definición 1250. *Dos espacios medibles $(E,\mathcal{E})$ y $(G,\mathcal{G})$ son Borel equivalentes isomorfos si existe una biyección $f:E\rightarrow G$ tal que f es $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ medible y su inversa f^{-1} es $\mathcal{G}/\mathcal{E}$ medible. La biyección es una equivalencia de Borel.*

Definición 1251. *Un espacio medible $(E,\mathcal{E})$ es un espacio estándar si es Borel equivalente a $(G,\mathcal{G})$, donde G es un subconjunto de Borel de $[0,1]$ y $\mathcal{G}$ son los subconjuntos de Borel de G.*

Nota 623. *Cualquier espacio Polaco es un espacio estándar.*

Definición 1252. *Un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}$ y espacio de estados $(E,\mathcal{E})$ es una familia $Z=\left(\mathbb{Z}_s\right)_{s\in\mathbb{I}}$ donde $\mathbb{Z}_s$ son elementos aleatorios definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y todos toman valores en $(E,\mathcal{E})$.*

Definición 1253. *Un proceso estocástico one-sided contiuous time **(PEOSCT)** es un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathbb{I}=[0,\infty)$.*

Sea $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ denota el espacio producto $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right):=\otimes_{s\in\mathbb{I}}(E,\mathcal{E})$. Vamos a considerar $\mathbb{Z}$ como un mapeo aleatorio, es decir, como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ definido por $Z(w)=\left(Z_s(w)\right)_{s\in\mathbb{I}}$ y $w\in\Omega$.

Nota 624. *La distribución de un proceso estocástico Z es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$. La distribución de Z esta determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Nota 625. *En particular cuando Z toma valores reales, es decir, $(E,\mathcal{E})=(\mathbb{R},\mathcal{B})$ las distribuciones finito dimensionales están determinadas por las funciones de distribución finito dimensionales*

$$\mathbb{P}\left(Z_{t_1}\leq x_1,\ldots,Z_{t_n}\leq x_n\right),x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R},t_1,\ldots,t_n\in\mathbb{I},n\geq 1.\tag{23.635}$$

Nota 626. *Para espacios polacos $(E,\mathcal{E})$ el Teorema de Consistencia de Kolmogorov asegura que dada una colección de distribuciones finito dimensionales consistentes, siempre existe un proceso estocástico que posee tales distribuciones finito dimensionales.*

Definición 1254. *Las trayectorias de Z son las realizaciones $Z(w)$ para $w\in\Omega$ del mapeo aleatorio Z.*

Nota 627. *Algunas restricciones se imponen sobre las trayectorias, por ejemplo que sean continuas por la derecha, o continuas por la derecha con límites por la izquierda, o de manera más general, se pedirá que caigan en algún subconjunto H de $E^{\mathbb{I}}$. En este caso es natural considerar a Z como un elemento aleatorio que no está en $\left(E^{\mathbb{I}},\mathcal{E}^{\mathbb{I}}\right)$ sino en $(H,\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es la σ-álgebra generada por los mapeos proyección que toman a $z\in H$ a $z_t\in E$ para $t\in\mathbb{I}$. A $\mathcal{H}$ se le conoce como la traza de H en $E^{\mathbb{I}}$, es decir,*

$$\mathcal{H}:=E^{\mathbb{I}}\cap H:=\left\{A\cap H:A\in E^{\mathbb{I}}\right\}.\tag{23.636}$$

Nota 628. *Z tiene trayectorias con valores en H y cada Z_t es un mapeo medible de $(\Omega,\mathcal{F})$ a $(H,\mathcal{H})$. Cuando se considera un espacio de trayectorias en particular H, al espacio $(H,\mathcal{H})$ se le llama el espacio de trayectorias de Z.*

Nota 629. *La distribución del proceso estocástico Z con espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ es la distribución de Z como un elemento aleatorio en $(H, \mathcal{H})$. La distribución, nuevemente, está determinada de manera única por las distribuciones finito dimensionales.*

Definición 1255. *Sea Z un PEOSCT con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y sea T un tiempo aleatorio en $[0, \infty)$. Por Z_T se entiende el mapeo con valores en E definido en Ω en la manera obvia:*

$$Z_T(w) := Z_{T(w)}(w) . w \in \Omega.$$

Definición 1256. *Un PEOSCT Z es conjuntamente medible **(CM)** si el mapeo que toma $(w, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ a $Z_t(w) \in E$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 630. *Un PEOSCT-CM implica que el proceso es medible, dado que Z_T es una composición de dos mapeos continuos: el primero que toma w en $(w, T(w))$ es $\mathcal{F}/\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, mientras que el segundo toma $(w, T(w))$ en $Z_{T(w)}(w)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 1257. *Un PEOSCT con espacio de estados $(H, \mathcal{H})$ es canónicamente conjuntamente medible **(CCM)** si el mapeo $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $Z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Nota 631. *Un PEOSCTCCM implica que el proceso es CM, dado que un PECCM Z es un mapeo de $\Omega \times [0, \infty)$ a E, es la composición de dos mapeos medibles: el primero, toma (w, t) en $(Z(w), t)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty)$ medible, y el segundo que toma $(Z(w), t)$ en $Z_t(w)$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible. Por tanto CCM es una condición más fuerte que CM.*

Definición 1258. *Un conjunto de trayectorias H de un PEOSCT Z, es internamente shift-invariante **(ISI)** si*

$$\left\{ (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)} : z \in H \right\} = H, \ t \in [0, \infty).$$

Definición 1259. *Dado un PEOSCTISI, se define el mapeo-shift θ_t, $t \in [0, \infty)$, de H a H por*

$$\theta_t z = (z_{t+s})_{s \in [0, \infty)}, \ z \in H.$$

Definición 1260. *Se dice que un proceso Z es shift-medible **(SM)** si Z tiene un conjunto de trayectorias H que es ISI y además el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $\theta_t z \in H$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{H}$ medible.*

Nota 632. *Un proceso estocástico con conjunto de trayectorias H ISI es shift-medible si y sólo si es CCM*

Nota 633.

- *Dado el espacio polaco $(E, \mathcal{E})$ se tiene el conjunto de trayectorias $D_E[0, \infty)$ que es ISI, entonces cumpe con ser CCM.*
- *Si G es abierto, podemos cubrirlo por bolas abiertas cuay cerradura este contenida en G, y como G es segundo numerable como subespacio de E, lo podemos cubrir por una cantidad numerable de bolas abiertas.*

Nota 634. *Los procesos estocásticos Z a tiempo discreto con espacio de estados polaco, también tiene un espacio de trayectorias polaco y por tanto tiene distribuciones condicionales regulares.*

Teorema 869. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Definición 1261. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad que soporta al proceso $Z = (Z_s)_{s \in [0, \infty)}$ y $S = (S_k)_0^{\infty}$ donde Z es un PEOSCTM con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$ y espacio de trayectorias $(H, \mathcal{H})$ y además S es una sucesión de tiempos aleatorios one-sided que satisfacen la condición $0 \leq S_0 < S_1 < \cdots \to \infty$. Considerando S como un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ al espacio sucesión $(L, \mathcal{L})$, donde*

$$L = \left\{ (s_k)_0^{\infty} \in [0, \infty)^{\{0, 1, \dots\}} : s_0 < s_1 < \cdots \to \infty \right\},$$

donde $\mathcal{L}$ son los subconjuntos de Borel de L, es decir, $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{B}^{\{0, 1, \dots\}}$.

Así el par (Z, S) es un mapeo medible de $(\Omega, \mathcal{F})$ en $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$. El par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$ denotará la clase de todas las funciones medibles de $(H \times L, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L})$ en $([0, \infty), \mathcal{B}[0, \infty))$.

Definición 1262. *Sea θ_t el mapeo-shift conjunto de $H \times L$ en $H \times L$ dado por*

$$\theta_t \left(z, (s_k)_0^\infty\right) = \theta_t \left(z, \left(s_{n_{t-}+k} - t\right)_0^\infty\right)$$

donde $n_{t-} = inf \{n \geq 1 : s_n \geq t\}$.

Nota 635. *Con la finalidad de poder realizar los shift's sin complicaciones de medibilidad, se supondrá que Z es shit-medible, es decir, el conjunto de trayectorias H es invariante bajo shifts del tiempo y el mapeo que toma $(z, t) \in H \times [0, \infty)$ en $z_t \in E$ es $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}[0, \infty) / \mathcal{E}$ medible.*

Definición 1263. *Dado un proceso **PEOSSM** (Proceso Estocástico One Side Shift Medible) Z, se dice regenerativo clásico con tiempos de regeneración S si*

$$\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0$$

y además $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $((Z_s)\, s \in [0, S_n), S_0, \ldots, S_n)$ Si lo anterior se cumple, al par (Z, S) se le llama regenerativo clásico.

Nota 636. *Si el par (Z, S) es regenerativo clásico, entonces las longitudes de los ciclos $X_1, X_2, \ldots,$ son i.i.d. e independientes de la longitud del retraso S_0, es decir, S es un proceso de renovación. Las longitudes de los ciclos también son llamados tiempos de inter-regeneración y tiempos de ocurrencia.*

Teorema 870. *Supóngase que el par (Z, S) es regenerativo clásico con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S). Además, si X_1 es lattice con span d, entonces (Z^{**}, S^{**}) en el teorema 2.2 es una versión periodicamente estacionaria de (Z, S) con periodo d.*

Definición 1264. *Una variable aleatoria X_1 es spread out si existe una $n \geq 1$ y una función $f \in \mathcal{B}^+$ tal que $\int_\mathbb{R} f(x)\, dx > 0$ con $X_2, X_3, \ldots, X_n$ copias i.i.d de X_1,*

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) \geq \int_B f(x)\, dx$$

para $B \in \mathcal{B}$.

Definición 1265. *Dado un proceso estocástico Z se le llama wide-sense regenerative (**WSR**) con tiempos de regeneración S si $\theta_{S_n}(Z, S) = \left(Z^0, S^0\right)$ para $n \geq 0$ en distribución y $\theta_{S_n}(Z, S)$ es independiente de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ para $n \geq 0$. Se dice que el par (Z, S) es WSR si lo anterior se cumple.*

Nota 637.

- *El proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0, \infty)}$ es WSR con tiempos de regeneración S pero no es regenerativo clásico.*
- *Si Z es cualquier proceso estacionario y S es un proceso de renovación que es independiente de Z, entonces (Z, S) es WSR pero en general no es regenerativo clásico*

Nota 638. *Para cualquier proceso estocástico Z, el proceso de trayectorias $(\theta_s Z)_{s \in [0, \infty)}$ es siempre un proceso de Markov.*

Teorema 871. *Supongase que el par (Z, S) es WSR con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Entonces (Z^*, S^*) en el teorema 2.1 es una versión estacionaria de (Z, S).*

Teorema 872. *Supongase que (Z, S) es cycle-stationary con $\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Sea U distribuida uniformemente en $[0, 1)$ e independiente de $\left(Z^0, S^0\right)$ y sea $\mathbb{P}^*$ la medida de probabilidad en $(\Omega, \mathbb{P})$ definida por*

$$d\mathbb{P}^* = \frac{X_1}{\mathbb{E}[X_1]} d\mathbb{P}$$

. Sea (Z^*, S^*) con distribución $\mathbb{P}^*\left(\theta_{UX_1}\left(Z^0, S^0\right) \in \cdot\right)$. Entonces $(Z*, S^*)$ es estacionario,

$$\mathbb{E}[f(Z^*, S^*)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X_1} f\left(\theta_s\left(Z^0, S^0\right)\right) ds\right] / \mathbb{E}[X_1]$$

$f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^+$, and S_0^* es continuo con función distribución G_∞ definida por

$$G_\infty(x) := \frac{\mathbb{E}[X_1] \wedge x}{\mathbb{E}[X_1]}$$

para $x \geq 0$ y densidad $\mathbb{P}[X_1 > x] / \mathbb{E}[X_1]$, con $x \geq 0$.

Teorema 873. *Sea Z un Proceso Estocástico un lado shift-medible one-sided shift-measurable stochastic process, (PEOSSM), y S_0 y S_1 tiempos aleatorios tales que $0 \leq S_0 < S_1$ y*

$$\theta_{S_1} Z = \theta_{S_0} Z \text{ en distribución.} \tag{23.637}$$

Entonces el espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión de tiempos aleatorios S tales que

$$\theta_{S_n} (Z, S) = \left(Z^0, S^0\right), n \geq 0, \text{ en distribución,} \tag{23.638}$$

$$(Z, S_0, S_1) \text{ depende de } (X_2, X_3, \ldots) \text{ solamente a traves de } \theta_{S_1} Z. \tag{23.639}$$

23.132 Output Process and Regenerative Processes

En Sigman, Thorison y Wolff [?] prueban que para la existencia de un una sucesión infinita no decreciente de tiempos de regeneración $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \cdots$ en los cuales el proceso se regenera, basta un tiempo de regeneración R_1, donde $R_j = \tau_j - \tau_{j-1}$. Para tal efecto se requiere la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ con espacio de estados $(S, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ σ-álgebra.

Proposición 453. *Si existe una variable aleatoria no negativa R_1 tal que $\theta_{R1} X =_D X$, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ puede extenderse para soportar una sucesión estacionaria de variables aleatorias $R = \{R_k : k \geq 1\}$, tal que para $k \geq 1$,*

$$\theta_k (X, R) =_D (X, R).$$

Además, para $k \geq 1$, $\theta_k R$ es condicionalmente independiente de $(X, R_1, \ldots, R_k)$, dado $\theta_{\tau k} X$.

- Doob en 1953 demostró que el estado estacionario de un proceso de partida en un sistema de espera $M/G/\infty$, es Poisson con la misma tasa que el proceso de arribos.
- Burke en 1968, fue el primero en demostrar que el estado estacionario de un proceso de salida de una cola $M/M/s$ es un proceso Poisson.
- Disney en 1973 obtuvo el siguiente resultado:

  Teorema 874. *Para el sistema de espera $M/G/1/L$ con disciplina FIFO, el proceso $\boldsymbol{I}$ es un proceso de renovación si y sólo si el proceso denominado longitud de la cola es estacionario y se cumple cualquiera de los siguientes casos:*

  a) *Los tiempos de servicio son identicamente cero;*
  b) *$L = 0$, para cualquier proceso de servicio S;*
  c) *$L = 1$ y $G = D$;*
  d) *$L = \infty$ y $G = M$.*

  En estos casos, respectivamente, las distribuciones de interpartida $P\{T_{n+1} - T_n \leq t\}$ son

  a) $1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$;
  b) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$;
  c) $1 - e^{-\lambda t} * \mathbb{1}_d(t)$, $t \geq 0$;
  d) $1 - e^{-\lambda t} * F(t)$, $t \geq 0$.

- Finch (1959) mostró que para los sistemas $M/G/1/L$, con $1 \leq L \leq \infty$ con distribuciones de servicio dos veces diferenciable, solamente el sistema $M/M/1/\infty$ tiene proceso de salida de renovación estacionario.
- King (1971) demostro que un sistema de colas estacionario $M/G/1/1$ tiene sus tiempos de interpartida sucesivas D_n y D_{n+1} son independientes, si y sólo si, $G = D$, en cuyo caso le proceso de salida es de renovación.

- Disney (1973) demostró que el único sistema estacionario $M/G/1/L$, que tiene proceso de salida de renovación son los sistemas $M/M/1$ y $M/D/1/1$.
- El siguiente resultado es de Disney y Koning (1985)

  Teorema 875. *En un sistema de espera $M/G/s$, el estado estacionario del proceso de salida es un proceso Poisson para cualquier distribución de los tiempos de servicio si el sistema tiene cualquiera de las siguientes cuatro propiedades.*

  a) $s = \infty$

  b) La disciplina de servicio es de procesador compartido.

  c) La disciplina de servicio es LCFS y preemptive resume, esto se cumple para $L < \infty$

  d) $G = M$.

- El siguiente resultado es de Alamatsaz (1983)

  Teorema 876. *En cualquier sistema de colas $GI/G/1/L$ con $1 \leq L < \infty$ y distribución de interarribos A y distribución de los tiempos de servicio B, tal que $A(0) = 0$, $A(t)(1 - B(t)) > 0$ para alguna $t > 0$ y $B(t)$ para toda $t > 0$, es imposible que el proceso de salida estacionario sea de renovación.*

Definición 1266 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 639. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [**?**].*

Nota 640. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 1267. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 641. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 642. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 643. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 644.

a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1268. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1269. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1270. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 877. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 240. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \to \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\,ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \to \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 1271. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.640}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1272. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 645. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 646. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 878 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \to \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 454. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1273. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T + t) | T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 455. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 879 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} & = & 1 - F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 456. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 647. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 880. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.641}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.642}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 241 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \to 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.643}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1274. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 881. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} & (23.644)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} & (23.645)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 242. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.646)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 457. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 648. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 882. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_{n} &= \mu, \text{ c.s.} && (23.647)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} && (23.648)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 243 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N\left(t\right)\rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t\rightarrow\infty. \tag{23.649}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\left\{Z\left(t\right):t\geq 0\right\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N\left(t\right)$

Definición 1275. *Para el proceso $\left\{Z\left(t\right):t\geq 0\right\}$ se define la fluctuación máxima de $Z\left(t\right)$ en el intervalo $\left(T_{n-1},T_{n}\right]$:*

$$M_{n}=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_{n}}\left|Z\left(t\right)-Z\left(T_{n-1}\right)\right|$$

Teorema 883. *Supóngase que $n^{-1}T_{n}\rightarrow\mu$ c.s. cuando $n\rightarrow\infty$, donde $\mu\leq\infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_{n}\right) &= a, \text{ c.s.} && (23.650)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} && (23.651)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_{n}=0$ c.s.

Corolario 244. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_{n}\right)-Z\left(T_{n-1}\right),M_{n}\right)$, para $n\geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right)\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_{1}\right)-Z\left(T_{0}\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_{1}\right]}, \text{ c.s. cuando } t\rightarrow\infty. \tag{23.652}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned}\left\{N\left(t\right)\geq n\right\} &= \left\{T_{n}\leq t\right\}\\ T_{N(t)}\leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N\left(T_{n}\right)=n$, y

$$N\left(t\right)=\max\left\{n:T_{n}\leq t\right\}=\min\left\{n:T_{n+1}>t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_{n}\leq t\right\}=F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\left\{N\left(t\right)\geq n\right\} &= \left\{T_{n}\leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right)\leq n\right\} &= 1-F^{(n+1)\star}\left(t\right)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{N\left(t\right)\geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 458. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 649. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 884. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \text{ c.s.} &(23.653)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \text{ c.s.} &(23.654)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 245 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.655)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1276. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 885. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} &(23.656)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} &(23.657)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 246. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.658)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ P\{N(t)\leq n\} &= 1-F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)$$

Proposición 459. *Para cada $t\geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right]<\infty$, para $m\geq 1$.*

Nota 650. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n\geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G\star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 886. *Para una constante $\mu\leq\infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n = \mu,\ c.s. \tag{23.659}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N(t) = 1/\mu,\ c.s. \tag{23.660}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 247 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu\leq\infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t)\rightarrow 1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \tag{23.661}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t):t\geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1277. *Para el proceso $\{Z(t):t\geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1},T_n]$:*

$$M_n=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_n}|Z(t)-Z(T_{n-1})|$$

Teorema 887. *Supóngase que $n^{-1}T_n\rightarrow\mu$ c.s. cuando $n\rightarrow\infty$, donde $\mu\leq\infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) = a,\ c.s. \tag{23.662}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) = a/\mu,\ c.s. \tag{23.663}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n=0$ c.s.

Corolario 248. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n)-Z(T_{n-1}),M_n)$, para $n\geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t)\rightarrow\frac{\mathbb{E}[Z(T_1)-Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]},\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \tag{23.664}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ T_{N(t)}\leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N(T_n)=n$, y

$$N(t)=\max\{n:T_n\leq t\}=\min\{n:T_{n+1}>t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n\leq t\}=F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ P\{N(t)\leq n\} &= 1-F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)$$

Proposición 460. *Para cada $t\geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m]<\infty$, para $m\geq 1$.*

Nota 651. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n\geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G\star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 888. *Para una constante $\mu\leq\infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty}n^{-1}T_n = \mu,\ c.s. \tag{23.665}$$

$$lim_{t\to\infty}t^{-1}N(t) = 1/\mu,\ c.s. \tag{23.666}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 249 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu\leq\infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t)\to 1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t\to\infty. \tag{23.667}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t):t\geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1278. *Para el proceso $\{Z(t):t\geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1},T_n]$:*

$$M_n=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_n}|Z(t)-Z(T_{n-1})|$$

Teorema 889. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \ c.s. &(23.668)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \ c.s. &(23.669)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 250. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \ c.s. \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.670)$$

Definición 1279. *Sea $h\left(t\right)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h\left(t\right)$ y la distribución F es*

$$H\left(t\right) = h\left(t\right) + \int_{\left[0,t\right]} H\left(t-s\right)dF\left(s\right), \ t \geq 0, \quad (23.671)$$

donde $H\left(t\right)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H\left(t\right)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 461. *La función $U \star h\left(t\right)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 890 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1280. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N\left(t\right)$, es*

$$U\left(t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right) = \mathbb{1}\left(t \geq 0\right)$.

Proposición 462. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U\left(t\right)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}\left(t\right)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right) > N\left(t-\right)\right\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 1281. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t}dF\left(t\right), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}\left(\alpha\right)^n = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 463. *La Transformada de Laplace $\hat{U}\left(\alpha\right)$ y $\hat{F}\left(\alpha\right)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}\left(\alpha\right) = \frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$.*

Nota 652. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 891. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n|T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s)\,,\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 251 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1]\,,\ t \geq 0,$$

Definición 1282. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)\,, \tag{23.672}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1283. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 653. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \rightarrow \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Definición 1284. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)\,, \tag{23.673}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1285. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 654. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 464. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 25 (**Proceso Poisson**). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 655. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 892. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.674}$$

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.675}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 252 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.676}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1286. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 893. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.677}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.678}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 253. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.679}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1287. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 465. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 1288. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 466. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 656. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 894. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \; t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 254 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \; t \geq 0,$$

Definición 1289. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{23.680}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 467. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 895 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1} U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1290. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \; t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 468. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \; t \geq 0.$$

Definición 1291. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \; \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 469. *La Transformada de Laplace* $\hat{U}(\alpha)$ *y* $\hat{F}(\alpha)$ *determina una a la otra de manera única por la relación* $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.

Nota 657. *Un proceso de renovación* $N(t)$ *cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa* λ *si y sólo sí* $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, *para* $t \geq 0$.

Teorema 896. *Sea* $N(t)$ *un proceso puntual simple con puntos de localización* T_n *tal que* $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ *es finita para cada* t. *Entonces para cualquier función* $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ *son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso* $N(t)$ *tal que* $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, *independiente de* n. *Entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 255 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación* $N(t)$,

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1],\ t \geq 0,$$

Definición 1292. *Sea* $h(t)$ *función de valores reales en* $\mathbb{R}$ *acotada en intervalos finitos e igual a cero para* $t < 0$ *La ecuación de renovación para* $h(t)$ *y la distribución* F *es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{23.681}$$

donde $H(t)$ *es una función de valores reales. Esto es* $H = h + F \star H$. *Decimos que* $H(t)$ *es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para* $t < 0$.

Proposición 470. *La función* $U \star h(t)$ *es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 897 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \rightarrow \infty.$$

Nota 658. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$, *donde* b *es DRI.*

Teorema 898 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 471. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ \textit{donde}\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1293. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 472. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 899 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]$.

Nota 659. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 900 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 473. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1294. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 474. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 901 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\mathbb{1}(T > t)]$.

Definición 1295. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, *sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 660. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 661. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 662. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S, *espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1296. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, *sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 663. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 902 (Procesos Regenerativos). *Suponga que el proceso*

Definición 1297 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación* $N(t)$, *los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 664. *El proceso tridimensional* $(A(t), B(t), L(t))$ *es regenerativo sobre* T_n, *y por ende cada proceso lo es. Cada proceso* $A(t)$ *y* $B(t)$ *son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados* $\mathbb{R}_+$. *Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para* $0 \leq x < t, y \geq 0$

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{23.682}$$

Ejemplo 26 (Tiempos de recurrencia Poisson). *Si* $N(t)$ *es un proceso Poisson con tasa* λ, *entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 665. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo* 0 *es su distribución estacionaria.*

Definición 1298. *Un proceso estocástico a tiempo continuo* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada* $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ *y* $t \geq 0$,

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 666. *Un proceso de Markov es estacionario si* $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 475. *Si* N *es un proceso puntual estacionario y* $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$

Teorema 903. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) El proceso retardado de renovación N *es estacionario.*

ii) EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ *es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, *para* $t, x \geq 0$.

Nota 667. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 256. *El proceso de renovación* $N(t)$ *sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 668. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n, *entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n, *para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$.

Nota 669. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1299 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 1300. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$, *sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned} \overline{X} &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty X(u)\, du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty I_x(u)\, du, \end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 670. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1301. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 671. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 672. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1302 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 673. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1303. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du \\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 674. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1304. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1305. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1306. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 904. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \dots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1307. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x))\, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1308. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \dots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1309. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t,w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 905. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

23.133 Procesos Regenerativos

23.134 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [?]

Definición 1310 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es independiente de $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ es estocásticamente equivalente a $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t+R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 675. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_1, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_1, R_2 \ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [?].*

Nota 676. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_n y son atendidos con tiempos de servicio S_n, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_n = t_n - t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$.*

Definición 1311. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 677. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 678. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 679. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 680.
a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t-s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0,t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1312. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 1313. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1314. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 906. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s) ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

Corolario 257. *Sea* $\{V(t), t \geq 0\}$ *un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si* $\mathbb{E} < \infty$*,* F *es no-aritmética, y para todo* $x \geq 0$*,* $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ *es de variación acotada como función de* t *en cada intervalo finito* $[0, \tau]$*, entonces* $V(t)$ *converge en distribución cuando* $t \rightarrow \infty$ *y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s) ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V *tiene la distribución límite de* $V(t)$ *cuando* $t \rightarrow \infty$*.*

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

Definición 1315. *Sean* $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ *son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos* T_n *en el intervalo* $[0, t)$ *es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.683}$$

para $t \geq 0$*.*

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1316. *Un proceso puntual* $N(t)$ *es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia* $\xi_n = T_n - T_{n-1}$*, para* $n \geq 1$*, son independientes e identicamente distribuidos con distribución* F*, donde* $F(0) = 0$ *y* $T_0 = 0$*. Los* T_n *son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los* ξ_n *son los tiempos de inter-renovación, y* $N(t)$ *es el número de renovaciones en el intervalo* $[0, t)$

Nota 681. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

Nota 682. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 907 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 476. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t),\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1317. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 477. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t),\ donde\ h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 908 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)]$.

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl} \{N(t) \geq n\} & = & \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & t & < T_{N(t)+1}, \end{array}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ P\{N(t)\leq n\} &= 1-F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)$$

Proposición 478. *Para cada $t\geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right]<\infty$, para $m\geq 1$.*

Nota 683. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n\geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G\star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 909. *Para una constante $\mu\leq\infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n = \mu,\ c.s. \tag{23.684}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N(t) = 1/\mu,\ c.s. \tag{23.685}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 258 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu\leq\infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t)\rightarrow 1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \tag{23.686}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t):t\geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1318. *Para el proceso $\{Z(t):t\geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1},T_n]$:*

$$M_n=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_n}|Z(t)-Z(T_{n-1})|$$

Teorema 910. *Supóngase que $n^{-1}T_n\rightarrow\mu$ c.s. cuando $n\rightarrow\infty$, donde $\mu\leq\infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z(T_n) = a,\ c.s. \tag{23.687}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t) = a/\mu,\ c.s. \tag{23.688}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n=0$ c.s.

Corolario 259. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n)-Z(T_{n-1}),M_n)$, para $n\geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z(t)\rightarrow\frac{\mathbb{E}[Z(T_1)-Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]},\ c.s.\ cuando\ t\rightarrow\infty. \tag{23.689}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 479. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 684. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 911. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \; c.s. && (23.690) \\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \; c.s. && (23.691) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 260 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \; c.s. \; cuando \; t \rightarrow \infty. \qquad (23.692)$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1319. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 912. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} \quad (23.693)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (23.694)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 261. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right) - Z\left(T_{n-1}\right), M_n\right)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right) - Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \quad (23.695)$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N\left(t\right)$ por

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1},\end{aligned}$$

además $N\left(T_n\right) = n$, y

$$N\left(t\right) = \max\left\{n : T_n \leq t\right\} = \min\left\{n : T_{n+1} > t\right\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 480. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 685. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 913. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}T_n &= \mu, \text{ c.s.} \quad (23.696)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}N\left(t\right) &= 1/\mu, \text{ c.s.} \quad (23.697)\end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N\,/t)$ la cumple.

Corolario 262 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.698}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1320. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 914. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) &= a, \text{ c.s.} &\quad (23.699)\\ lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) &= a/\mu, \text{ c.s.} &\quad (23.700) \end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 263. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.701}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\}\\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 481. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 686. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 915. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.702}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.703}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 264 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.704}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1321. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 916. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{23.705}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.706}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 265. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.707}$$

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \quad t \quad < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\{N(t)\geq n\} &= \{T_n\leq t\}\\ P\{N(t)\leq n\} &= 1-F^{(n+1)\star}(t)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)$$

Proposición 482. *Para cada $t\geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right]<\infty$, para $m\geq 1$.*

Nota 687. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n\geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G\star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 917. *Para una constante $\mu\leq\infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\to\infty}n^{-1}T_n = \mu,\ c.s. \tag{23.708}$$
$$lim_{t\to\infty}t^{-1}N(t) = 1/\mu,\ c.s. \tag{23.709}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 266 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu\leq\infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t)\to 1/\mu,\ c.s.\ cuando\ t\to\infty. \tag{23.710}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t):t\geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1322. *Para el proceso $\{Z(t):t\geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1},T_n]$:*

$$M_n=\sup_{T_{n-1}<t\leq T_n}|Z(t)-Z(T_{n-1})|$$

Teorema 918. *Supóngase que $n^{-1}T_n\to\mu$ c.s. cuando $n\to\infty$, donde $\mu\leq\infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\to\infty}n^{-1}Z(T_n) = a,\ c.s. \tag{23.711}$$
$$lim_{t\to\infty}t^{-1}Z(t) = a/\mu,\ c.s. \tag{23.712}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\to\infty}n^{-1}M_n=0$ c.s.

Corolario 267. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n)-Z(T_{n-1}),M_n)$, para $n\geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty}t^{-1}Z(t)\to\frac{\mathbb{E}[Z(T_1)-Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]},\ c.s.\ cuando\ t\to\infty. \tag{23.713}$$

Definición 1323. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t)=h(t)+\int_{[0,t]}H(t-s)\,dF(s)\,,\ t\geq 0, \tag{23.714}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 483. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (??).*

Teorema 919 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1324. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 484. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U^{'}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \ t \geq 0.$$

Definición 1325. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 485. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 688. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 920. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 268 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \ t \geq 0,$$

Definición 1326. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.715}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1327. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 689. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes NÃºmeros.*

23.135 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 1328. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{23.716}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ casi seguramente.

Definición 1329. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 690. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq &\quad t < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\left\{T_n \leq t\right\} = F^{n\star}\left(t\right)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned}\left\{N\left(t\right) \geq n\right\} &= \left\{T_n \leq t\right\}\\ P\left\{N\left(t\right) \leq n\right\} &= 1 - F^{(n+1)\star}\left(t\right)\end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{N\left(t\right) \geq n\right\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N\left(t\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}\left(t\right)$$

Proposición 486. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N\left(t\right)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 27 (**Proceso Poisson**)**.** *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N\left(t\right)$ tienen distribución exponencial $F\left(t\right) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N\left(t\right)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 691. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N\left(t\right)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}\left(t\right)$*

Teorema 921. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{23.717}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} N\left(t\right) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.718}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 269 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N\left(t\right) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{23.719}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\left\{Z\left(t\right) : t \geq 0\right\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N\left(t\right)$

Definición 1330. *Para el proceso $\left\{Z\left(t\right) : t \geq 0\right\}$ se define la fluctuación máxima de $Z\left(t\right)$ en el intervalo $\left(T_{n-1}, T_n\right]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} \left|Z\left(t\right) - Z\left(T_{n-1}\right)\right|$$

Teorema 922. *Supóngase que $n^{-1} T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} Z\left(T_n\right) = a, \text{ c.s.} \tag{23.720}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1} Z\left(t\right) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{23.721}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1} M_n = 0$ c.s.

Corolario 270. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\to\infty} t^{-1} Z(t) \to \frac{\mathbb{E}[Z(T_1) - Z(T_0)]}{\mathbb{E}[T_1]}, \text{ c.s. cuando } t \to \infty. \tag{23.722}$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1331. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t), \ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 487. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\{N(t) > N(t-)\} = 0, \, t \geq 0.$$

Definición 1332. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t), \ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1 - \hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 488. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 692. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}[U(t)] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 923. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}[N()]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}[X_n | T_n = s] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s) \, d\eta(s), \ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 271 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}[N(t) + 1], \, t \geq 0,$$

Definición 1333. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t<0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t)=h(t)+\int_{[0,t]}H(t-s)\,dF(s)\,,\ t\geq 0, \tag{23.723}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H=h+F\star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t<0$.

Proposición 489. *La función $U\star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 924 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t)\rightarrow 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t\rightarrow\infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1334. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)\,,\ t\geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t)=\mathbb{1}(t\geq 0)$.

Proposición 490. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t>0$, y es $U^{'}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t)>N(t-)\right\}=0,\ t\geq 0.$$

Definición 1335. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha)=\int_{\mathbb{R}_{+}}e^{-\alpha t}dF(t)\,,\ \alpha\geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F^{n\star}}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F}(\alpha)^{n}=\frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 491. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha)=\frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 693. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right]=\lambda t$, para $t\geq 0$.*

Teorema 925. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t)=\mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()}f(T_n)\right]=\int_{(0,t]}f(s)\,d\eta(s)\,,\ t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1,X_2,\ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n|T_n=s\right]=f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)}X_n\right]=\int_{(0,t]}f(s)\,d\eta(s)\,,\ t\geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 272 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación* $N(t)$*,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right],\ t \geq 0,$$

Definición 1336. *Sea* $h(t)$ *función de valores reales en* $\mathbb{R}$ *acotada en intervalos finitos e igual a cero para* $t < 0$ *La ecuación de renovación para* $h(t)$ *y la distribución* F *es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\,dF(s)\,,\ t \geq 0, \tag{23.724}$$

donde $H(t)$ *es una función de valores reales. Esto es* $H = h + F \star H$*. Decimos que* $H(t)$ *es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para* $t < 0$*.*

Proposición 492. *La función* $U \star h(t)$ *es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 926 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \to \infty.$$

Nota 694. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) h *es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 927 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 493. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ \textit{donde}\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1337. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ \textit{para}\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 494. *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\,,\ \textit{donde}\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 928 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$*.*

Nota 695. *Una función* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ *es decreciente y Riemann Integrable.*

b) *h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y* $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 929 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t \to \infty} U \star h = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 495. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1338. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}[X(T+t)|T] = \mathbb{E}[X(t)], \text{ para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 496. *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}[X(t)] = U \star h(t), \text{ donde } h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)].$$

Teorema 930 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t \to \infty} \mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}[X(t)\, \mathbb{1}(T > t)]$*.*

Definición 1339. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 696. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \to S$*.*

Nota 697. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 698. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1340. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 699. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 931 (Procesos Regenerativos). *Suponga que el proceso*

Definición 1341 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 700. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{23.725}$$

Ejemplo 28 (Tiempos de recurrencia Poisson). *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 701. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 1342. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 702. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 497. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 932. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación N es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 703. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 273. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

Nota 704. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 705. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1343 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 1344. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 706. *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_{∞}

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1345. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 707. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 708. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1346 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 709. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1347. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 710. *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_∞

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1348. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^*(t), t \geq 0\}$*, para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A*.*

Definición 1349. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1350. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$*, es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$*,* S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$*.*

Teorema 933. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$*. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t*, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$*, equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$*,entonces*

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$*.*

24 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [?]

Definición 1351 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 711. *La existencia de un primer tiempo de regeneración,* R_1*, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos* $R_1, R_2 \ldots,$ *que satisfacen la propiedad deseada [?].*

Nota 712. *Para la cola* $GI/GI/1$ *los usuarios arriban con tiempos* t_n *y son atendidos con tiempos de servicio* S_n*, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)*$T_n = t_n - t_{n-1}$*, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que* $\mathbb{E}S_n < \mathbb{E}T_n < \infty$*.*

Definición 1352. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\overline{X} = lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty X(u)\,du$$

$$\mathbb{P}(X_\infty \leq x) = lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty I_x(u)\,du,$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}\left[R_1\right]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 713. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 714. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 715. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 716.

a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

Definición 1353. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{24.1}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 1354. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 717. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

24.1 Teorema Principal de Renovación

Nota 718. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 934 (Teorema Principal de Renovación). *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}U\star h=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+}h(s)\,ds.$$

Proposición 498. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t<0$ puede expresarse como*

$$H(t)=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=H(t)-F\star H(t)$$

Definición 1355. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right]=\mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t\geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 499. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right]=U\star h(t)\,,\ donde\ h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right].$$

Teorema 935 (Regeneración Cruda). *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M=\sup\{|X(t)|:t\leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right]=\frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+}h(s)\,ds,$$

donde $h(t)=\mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T>t)\right]$.

24.2 Propiedades de los Procesos de Renovación

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{array}{rcl}\{N(t)\geq n\} &=& \{T_n\leq t\}\\ T_{N(t)}\leq & t & <T_{N(t)+1},\end{array}$$

además $N(T_n)=n$, y

$$N(t)=\max\{n:T_n\leq t\}=\min\{n:T_{n+1}>t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n\leq t\}=F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{array}{rcl}\{N(t)\geq n\} &=& \{T_n\leq t\}\\ P\{N(t)\leq n\} &=& 1-F^{(n+1)\star}(t)\end{array}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[N(t)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}(t)$$

Proposición 500. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}\left[N(t)^m\right] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Nota 719. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 936. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}T_n = \mu, \text{ c.s.} \tag{24.2}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}N(t) = 1/\mu, \text{ c.s.} \tag{24.3}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N /t)$ la cumple.

Corolario 274 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1}N(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{24.4}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1356. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 937. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}Z(T_n) = a, \text{ c.s.} \tag{24.5}$$
$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) = a/\mu, \text{ c.s.} \tag{24.6}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z(t)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty} n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 275. *Si $N(t)$ es un proceso de renovación, y $(Z(T_n) - Z(T_{n-1}), M_n)$, para $n \geq 1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{-1}Z(t) \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[Z(T_1) - Z(T_0)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t \rightarrow \infty. \tag{24.7}$$

24.3 Función de Renovación

Definición 1357. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{24.8}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 501. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (**??**).*

Teorema 938 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \rightarrow 1/\mu, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

24.4 Procesos de Renovación

Definición 1358. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{24.9}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 1359. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 720. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

24.5 Renewal and Regenerative Processes: Serfozo[?]

Definición 1360. *Sean $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$ son tiempos aleatorios infinitos en los cuales ocurren ciertos eventos. El número de tiempos T_n en el intervalo $[0, t)$ es*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t), \tag{24.10}$$

para $t \geq 0$.

Si se consideran los puntos T_n como elementos de $\mathbb{R}_+$, y $N(t)$ es el número de puntos en $\mathbb{R}$. El proceso denotado por $\{N(t) : t \geq 0\}$, denotado por $N(t)$, es un proceso puntual en $\mathbb{R}_+$. Los T_n son los tiempos de ocurrencia, el proceso puntual $N(t)$ es simple si su número de ocurrencias son distintas: $0 < T_1 < T_2 < \dots$ casi seguramente.

Definición 1361. *Un proceso puntual $N(t)$ es un proceso de renovación si los tiempos de interocurrencia $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, para $n \geq 1$, son independientes e identicamente distribuidos con distribución F, donde $F(0) = 0$ y $T_0 = 0$. Los T_n son llamados tiempos de renovación, referente a la independencia o renovación de la información estocástica en estos tiempos. Los ξ_n son los tiempos de inter-renovación, y $N(t)$ es el número de renovaciones en el intervalo $[0, t)$*

Nota 721. *Para definir un proceso de renovación para cualquier contexto, solamente hay que especificar una distribución F, con $F(0) = 0$, para los tiempos de inter-renovación. La función F en turno degune las otra variables aleatorias. De manera formal, existe un espacio de probabilidad y una sucesión de variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ definidas en este con distribución F. Entonces las otras cantidades son $T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ y $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, donde $T_n \to \infty$ casi seguramente por la Ley Fuerte de los Grandes Números.*

Los tiempos T_n están relacionados con los conteos de $N(t)$ por

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ T_{N(t)} \leq & \; t \; < T_{N(t)+1}, \end{aligned}$$

además $N(T_n) = n$, y

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\} = \min\{n : T_{n+1} > t\}$$

Por propiedades de la convolución se sabe que

$$P\{T_n \leq t\} = F^{n\star}(t)$$

que es la n-ésima convolución de F. Entonces

$$\begin{aligned} \{N(t) \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ P\{N(t) \leq n\} &= 1 - F^{(n+1)\star}(t) \end{aligned}$$

Además usando el hecho de que $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geq n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t)$$

Proposición 502. *Para cada $t \geq 0$, la función generadora de momentos $\mathbb{E}\left[e^{\alpha N(t)}\right]$ existe para alguna α en una vecindad del 0, y de aquí que $\mathbb{E}[N(t)^m] < \infty$, para $m \geq 1$.*

Ejemplo 29 (Proceso Poisson). *Suponga que se tienen tiempos de inter-renovación i.i.d. del proceso de renovación $N(t)$ tienen distribución exponencial $F(t) = q - e^{-\lambda t}$ con tasa λ. Entonces $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ.*

Nota 722. *Si el primer tiempo de renovación ξ_1 no tiene la misma distribución que el resto de las ξ_n, para $n \geq 2$, a $N(t)$ se le llama Proceso de Renovación retardado, donde si ξ tiene distribución G, entonces el tiempo T_n de la n-ésima renovación tiene distribución $G \star F^{(n-1)\star}(t)$*

Teorema 939. *Para una constante $\mu \leq \infty$ (o variable aleatoria), las siguientes expresiones son equivalentes:*

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} n^{-1} T_n &= \mu, \; c.s. && (24.11) \\ lim_{t\to\infty} t^{-1} N(t) &= 1/\mu, \; c.s. && (24.12) \end{aligned}$$

Es decir, T_n satisface la Ley Fuerte de los Grandes Números sí y sólo sí $N/t)$ la cumple.

Corolario 276 (Ley Fuerte de los Grandes Números para Procesos de Renovación)**.** *Si $N(t)$ es un proceso de renovación cuyos tiempos de inter-renovación tienen media $\mu \leq \infty$, entonces*

$$t^{-1} N(t) \to 1/\mu, \; c.s. \; cuando \; t \to \infty. \tag{24.13}$$

Considerar el proceso estocástico de valores reales $\{Z(t) : t \geq 0\}$ en el mismo espacio de probabilidad que $N(t)$

Definición 1362. *Para el proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ se define la fluctuación máxima de $Z(t)$ en el intervalo $(T_{n-1}, T_n]$:*

$$M_n = \sup_{T_{n-1} < t \leq T_n} |Z(t) - Z(T_{n-1})|$$

Teorema 940. *Supóngase que $n^{-1}T_n \rightarrow \mu$ c.s. cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\mu \leq \infty$ es una constante o variable aleatoria. Sea a una constante o variable aleatoria que puede ser infinita cuando μ es finita, y considere las expresiones límite:*

$$\begin{aligned} lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}Z\left(T_n\right) &= a, \text{ c.s.} \quad (24.14)\\ lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right) &= a/\mu, \text{ c.s.} \quad (24.15)\end{aligned}$$

La segunda expresión implica la primera. Conversamente, la primera implica la segunda si el proceso $Z\left(t\right)$ es creciente, o si $lim_{n\rightarrow\infty}n^{-1}M_n = 0$ c.s.

Corolario 277. *Si $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación, y $\left(Z\left(T_n\right)-Z\left(T_{n-1}\right),M_n\right)$, para $n\geq1$, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, entonces,*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{-1}Z\left(t\right)\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[Z\left(T_1\right)-Z\left(T_0\right)\right]}{\mathbb{E}\left[T_1\right]}, \text{ c.s. cuando } t\rightarrow\infty. \quad (24.16)$$

Supóngase que $N\left(t\right)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1363. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N\left(t\right)$, es*

$$U\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n\star}\left(t\right),\ t\geq0,$$

donde $F^{0\star}\left(t\right)=\mathbb{1}\left(t\geq0\right)$.

Proposición 503. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U\left(t\right)$ también tiene densidad, para $t>0$, y es $U^{'}\left(t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{n\star}\left(t\right)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N\left(t\right)>N\left(t-\right)\right\}=0,\ t\geq0.$$

Definición 1364. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}\left(\alpha\right)=\int_{\mathbb{R}_{+}}e^{-\alpha t}dF\left(t\right),\ \alpha\geq0.$$

Entonces

$$\hat{U}\left(\alpha\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F^{n\star}}\left(\alpha\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F}\left(\alpha\right)^n=\frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}.$$

Proposición 504. *La Transformada de Laplace $\hat{U}\left(\alpha\right)$ y $\hat{F}\left(\alpha\right)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}\left(\alpha\right)=\frac{1}{1-\hat{F}\left(\alpha\right)}$.*

Nota 723. *Un proceso de renovación $N\left(t\right)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U\left(t\right)\right]=\lambda t$, para $t\geq0$.*

Teorema 941. *Sea $N\left(t\right)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta\left(t\right)=\mathbb{E}\left[N\left(\right)\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N\left(\right)}f\left(T_n\right)\right]=\int_{\left(0,t\right]}f\left(s\right)d\eta\left(s\right),\ t\geq0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1,X_2,\ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N\left(t\right)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n|T_n=s\right]=f\left(s\right)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N\left(t\right)}X_n\right]=\int_{\left(0,t\right]}f\left(s\right)d\eta\left(s\right),\ t\geq0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 278 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu \mathbb{E}\left[N(t)+1\right],\ t \geq 0,$$

Definición 1365. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s),\ t \geq 0, \tag{24.17}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 505. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (??).*

Teorema 942 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu,\ \textit{cuando}\ t \to \infty.$$

Supóngase que $N(t)$ es un proceso de renovación con distribución F con media finita μ.

Definición 1366. *La función de renovación asociada con la distribución F, del proceso $N(t)$, es*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n\star}(t),\ t \geq 0,$$

donde $F^{0\star}(t) = \mathbb{1}(t \geq 0)$.

Proposición 506. *Supóngase que la distribución de inter-renovación F tiene densidad f. Entonces $U(t)$ también tiene densidad, para $t > 0$, y es $U'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{n\star}(t)$. Además*

$$\mathbb{P}\left\{N(t) > N(t-)\right\} = 0,\ t \geq 0.$$

Definición 1367. *La Transformada de Laplace-Stieljes de F está dada por*

$$\hat{F}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} dF(t),\ \alpha \geq 0.$$

Entonces

$$\hat{U}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F^{n\star}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\alpha)^n = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}.$$

Proposición 507. *La Transformada de Laplace $\hat{U}(\alpha)$ y $\hat{F}(\alpha)$ determina una a la otra de manera única por la relación $\hat{U}(\alpha) = \frac{1}{1-\hat{F}(\alpha)}$.*

Nota 724. *Un proceso de renovación $N(t)$ cuyos tiempos de inter-renovación tienen media finita, es un proceso Poisson con tasa λ si y sólo sí $\mathbb{E}\left[U(t)\right] = \lambda t$, para $t \geq 0$.*

Teorema 943. *Sea $N(t)$ un proceso puntual simple con puntos de localización T_n tal que $\eta(t) = \mathbb{E}\left[N()\right]$ es finita para cada t. Entonces para cualquier función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N()} f(T_n)\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista. Además si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad que el proceso $N(t)$ tal que $\mathbb{E}\left[X_n | T_n = s\right] = f(s)$, independiente de n. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)} X_n\right] = \int_{(0,t]} f(s)\, d\eta(s),\ t \geq 0,$$

suponiendo que la integral exista.

Corolario 279 (Identidad de Wald para Renovaciones)**.** *Para el proceso de renovación $N(t)$,*

$$\mathbb{E}\left[T_{N(t)+1}\right] = \mu\mathbb{E}\left[N(t)+1\right], \; t \geq 0,$$

Definición 1368. *Sea $h(t)$ función de valores reales en $\mathbb{R}$ acotada en intervalos finitos e igual a cero para $t < 0$ La ecuación de renovación para $h(t)$ y la distribución F es*

$$H(t) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)\, dF(s), \; t \geq 0, \tag{24.18}$$

donde $H(t)$ es una función de valores reales. Esto es $H = h + F \star H$. Decimos que $H(t)$ es solución de esta ecuación si satisface la ecuación, y es acotada en intervalos finitos e iguales a cero para $t < 0$.

Proposición 508. *La función $U \star h(t)$ es la única solución de la ecuación de renovación (??).*

Teorema 944 (Teorema Renovación Elemental)**.**

$$t^{-1}U(t) \to 1/\mu, \; \textit{cuando } t \to \infty.$$

Nota 725. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$, donde b es DRI.

Teorema 945 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si F es no aritmética y $h(t)$ es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\to\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds.$$

Proposición 509. *Cualquier función $H(t)$ acotada en intervalos finitos y que es 0 para $t < 0$ puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t), \; \textit{donde } h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1369. *Un proceso estocástico $X(t)$ es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo T si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right], \; \textit{para } t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 510. *Supóngase que $X(t)$ es un proceso crudamente regenerativo en T, que tiene distribución F. Si $\mathbb{E}[X(t)]$ es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t), \; \textit{donde } h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 946 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que $X(t)$ es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en T, y defínase $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$. Si T es no aritmético y M y MT tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\, ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$.

Nota 726. *Una función $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es Directamente Riemann Integrable en los siguientes casos:*

a) $h(t) \geq 0$ es decreciente y Riemann Integrable.

b) h es continua excepto posiblemente en un conjunto de Lebesgue de medida 0, y $|h(t)| \leq b(t)$*, donde* b *es DRI.*

Teorema 947 (Teorema Principal de Renovación)**.** *Si* F *es no aritmética y* $h(t)$ *es Directamente Riemann Integrable (DRI), entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty} U \star h = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds.$$

Proposición 511. *Cualquier función* $H(t)$ *acotada en intervalos finitos y que es 0 para* $t < 0$ *puede expresarse como*

$$H(t) = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = H(t) - F \star H(t)$$

Definición 1370. *Un proceso estocástico* $X(t)$ *es crudamente regenerativo en un tiempo aleatorio positivo* T *si*

$$\mathbb{E}\left[X(T+t)\,|T\right] = \mathbb{E}\left[X(t)\right],\ para\ t \geq 0,$$

y con las esperanzas anteriores finitas.

Proposición 512. *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso crudamente regenerativo en* T*, que tiene distribución* F*. Si* $\mathbb{E}[X(t)]$ *es acotado en intervalos finitos, entonces*

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = U \star h(t)\,,\ donde\ h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right].$$

Teorema 948 (Regeneración Cruda)**.** *Supóngase que* $X(t)$ *es un proceso con valores positivo crudamente regenerativo en* T*, y defínase* $M = \sup\{|X(t)| : t \leq T\}$*. Si* T *es no aritmético y* M *y* MT *tienen media finita, entonces*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_+} h(s)\,ds,$$

donde $h(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\,\mathbb{1}(T > t)\right]$*.*

Definición 1371. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 727. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 728. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Nota 729. *Un proceso estocástico a tiempo continuo o discreto es regenerativo si existe un proceso de renovación tal que los segmentos del proceso entre tiempos de renovación sucesivos son i.i.d., es decir, para* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *proceso estocástico a tiempo continuo con espacio de estados* S*, espacio métrico.*

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1372. *Para el proceso* $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$*, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo* $[T_{n-1}, T_n)$ *están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1}+t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n *es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos* T_n *si sus segmentos* ζ_n *son independientes e idénticamennte distribuidos.*

Nota 730. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Teorema 949 (Procesos Regenerativos). *Suponga que el proceso*

Definición 1373 (Renewal Process Trinity). *Para un proceso de renovación $N(t)$, los siguientes procesos proveen de información sobre los tiempos de renovación.*

- $A(t) = t - T_{N(t)}$, *el tiempo de recurrencia hacia atrás al tiempo t, que es el tiempo desde la última renovación para t.*
- $B(t) = T_{N(t)+1} - t$, *el tiempo de recurrencia hacia adelante al tiempo t, residual del tiempo de renovación, que es el tiempo para la próxima renovación después de t.*
- $L(t) = \xi_{N(t)+1} = A(t) + B(t)$, *la longitud del intervalo de renovación que contiene a t.*

Nota 731. *El proceso tridimensional $(A(t), B(t), L(t))$ es regenerativo sobre T_n, y por ende cada proceso lo es. Cada proceso $A(t)$ y $B(t)$ son procesos de MArkov a tiempo continuo con trayectorias continuas por partes en el espacio de estados $\mathbb{R}_+$. Una expresión conveniente para su distribución conjunta es, para $0 \leq x < t, y \geq 0$*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = P\{N(t+y) - N((t-x)) = 0\} \tag{24.19}$$

Ejemplo 30 (Tiempos de recurrencia Poisson). *Si $N(t)$ es un proceso Poisson con tasa λ, entonces de la expresión (**??**) se tiene que*

$$P\{A(t) > x, B(t) > y\} = e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < t, y \geq 0,$$

que es la probabilidad Poisson de no renovaciones en un intervalo de longitud $x + y$.

Nota 732. *Una cadena de Markov ergódica tiene la propiedad de ser estacionaria si la distribución de su estado al tiempo 0 es su distribución estacionaria.*

Definición 1374. *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ en un espacio general es estacionario si sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo cualquier traslado: para cada $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ y $t \geq 0$,*

$$(X(s_1 + t), \ldots, X(s_k + t)) =_d (X(s_1), \ldots, X(s_k)).$$

Nota 733. *Un proceso de Markov es estacionario si $X(t) =_d X(0)$, $t \geq 0$.*

Considerese el proceso $N(t) = \sum_n \mathbb{1}(\tau_n \leq t)$ en $\mathbb{R}_+$, con puntos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

Proposición 513. *Si N es un proceso puntual estacionario y $\mathbb{E}[N(1)] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = t\mathbb{E}[N(1)]$, $t \geq 0$*

Teorema 950. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) *El proceso retardado de renovación N es estacionario.*

ii) *EL proceso de tiempos de recurrencia hacia adelante $B(t)$ es estacionario.*

iii) $\mathbb{E}[N(t)] = t/\mu$,

iv) $G(t) = F_e(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds$

Cuando estos enunciados son ciertos, $P\{B(t) \leq x\} = F_e(x)$, para $t, x \geq 0$.

Nota 734. *Una consecuencia del teorema anterior es que el Proceso Poisson es el único proceso sin retardo que es estacionario.*

Corolario 280. *El proceso de renovación $N(t)$ sin retardo, y cuyos tiempos de inter renonación tienen media finita, es estacionario si y sólo si es un proceso Poisson.*

24.6 Procesos Regenerativos

Nota 735. *Si $\tilde{X}(t)$ con espacio de estados $\tilde{S}$ es regenerativo sobre T_n, entonces $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ también es regenerativo sobre T_n, para cualquier función $f : \tilde{S} \rightarrow S$.*

Nota 736. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1375 (Definición Clásica). *Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_1 > 0$ tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\},\}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Definición 1376. *Para x fijo y para cada $t \geq 0$, sea $I_x(t) = 1$ si $X(t) \leq x$, $I_x(t) = 0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du \\
\mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,
\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 737. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_{∞}

24.7 Procesos Regenerativos

Para $\{X(t) : t \geq 0\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N(t)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_+$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X(t)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_n = T_n - T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

Definición 1377. *Para el proceso $\{(N(t), X(t)) : t \geq 0\}$, sus trayectoria muestrales en el intervalo de tiempo $[T_{n-1}, T_n)$ están descritas por*

$$\zeta_n = (\xi_n, \{X(T_{n-1} + t) : 0 \leq t < \xi_n\})$$

Este ζ_n es el n-ésimo segmento del proceso. El proceso es regenerativo sobre los tiempos T_n si sus segmentos ζ_n son independientes e idénticamennte distribuidos.

Nota 738. *Si* $\tilde{X}(t)$ *con espacio de estados* $\tilde{S}$ *es regenerativo sobre* T_n*, entonces* $X(t) = f\left(\tilde{X}(t)\right)$ *también es regenerativo sobre* T_n*, para cualquier función* $f : \tilde{S} \rightarrow S$*.*

Nota 739. *Los procesos regenerativos son crudamente regenerativos, pero no al revés.*

Definición 1378 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria* $R_1 > 0$ *tal que*

i) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es independiente de* $\{\{X(t) : t < R_1\}, \}$

ii) $\{X(t + R_1) : t \geq 0\}$ *es estocásticamente equivalente a* $\{X(t) : t > 0\}$

Llamamos a R_1 *tiempo de regeneración, y decimos que* X *se regenera en este punto.*

$\{X(t + R_1)\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_2, independiente de R_1 pero con la misma distribución que R_1. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{R_n\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_k \equiv R_1 + R_2 + \cdots + R_k$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 740. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Definición 1379. *Para* x *fijo y para cada* $t \geq 0$*, sea* $I_x(t) = 1$ *si* $X(t) \leq x$*,* $I_x(t) = 0$ *en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} X(u)\,du\\ \mathbb{P}(X_{\infty} \leq x) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} I_x(u)\,du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^{R_1} X(t)\,dt\right]}{\mathbb{E}[R_1]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 741. *a) Si el proceso regenerativo* X *es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X *es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso,* $X_e = \{X_e(t)\}$*, donde* X_e *es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como* X_{∞}

24.8 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t - s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1380. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^{*}(t), t \geq 0\}$, *para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_{0}^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 1381. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1382. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$, *es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$, S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 951. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$. *Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t, *además*

i)

$$\mathbb{E}[V^{*}(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^{*}(0)] < \infty$, *equivalentemente, si* $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s) \, ds\right] < \infty$,*entonces*

$$\frac{\int_{0}^{t} V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X} V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

24.9 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1383. *Se define el proceso estacionario,* $\{V^{*}(t), t \geq 0\}$, *para* $\{V(t), t \geq 0\}$ *por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_{0}^{\infty} \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ *y todo conjunto de Borel* A.

Definición 1384. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma* $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ *para alguna* $\lambda > 0$ *entera.*

Definición 1385. *Una modificación medible de un proceso* $\{V(t), t \geq 0\}$, *es una versión de este,* $\{V(t, w)\}$ *conjuntamente medible para* $t \geq 0$ *y para* $w \in S$, S *espacio de estados para* $\{V(t), t \geq 0\}$.

Teorema 952. *Sea* $\{V(t), t \geq\}$ *un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea* $\mathbb{E}[X] < \infty$. *Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de* t, *además*

i)

$$\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

ii) Si $\mathbb{E}\left[V^{*}\left(0\right)\right]<\infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]<\infty$,entonces

$$\frac{\int_{0}^{t}V\left(s\right)ds}{t}\rightarrow\frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{X}V\left(s\right)ds\right]}{\mathbb{E}\left[X\right]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t\rightarrow\infty$.

Para $\left\{X\left(t\right):t\geq0\right\}$ Proceso Estocástico a tiempo continuo con estado de espacios S, que es un espacio métrico, con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda c.s. Sea $N\left(t\right)$ un proceso de renovación en $\mathbb{R}_{+}$ definido en el mismo espacio de probabilidad que $X\left(t\right)$, con tiempos de renovación T y tiempos de inter-renovación $\xi_{n}=T_{n}-T_{n-1}$, con misma distribución F de media finita μ.

24.10 Procesos Regenerativos

24.11 Procesos Regenerativos Sigman, Thorisson y Wolff [?]

Definición 1386 (Definición Clásica)**.** *Un proceso estocástico $X=\left\{X\left(t\right):t\geq0\right\}$ es llamado regenerativo is existe una variable aleatoria $R_{1}>0$ tal que*

i) $\left\{X\left(t+R_{1}\right):t\geq0\right\}$ es independiente de $\left\{\left\{X\left(t\right):t<R_{1}\right\},\right\}$

ii) $\left\{X\left(t+R_{1}\right):t\geq0\right\}$ es estocásticamente equivalente a $\left\{X\left(t\right):t>0\right\}$

Llamamos a R_{1} tiempo de regeneración, y decimos que X se regenera en este punto.

$\left\{X\left(t+R_{1}\right)\right\}$ es regenerativo con tiempo de regeneración R_{2}, independiente de R_{1} pero con la misma distribución que R_{1}. Procediendo de esta manera se obtiene una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\left\{R_{n}\right\}$ llamados longitudes de ciclo. Si definimos a $Z_{k}\equiv R_{1}+R_{2}+\cdots+R_{k}$, se tiene un proceso de renovación llamado proceso de renovación encajado para X.

Nota 742. *La existencia de un primer tiempo de regeneración, R_{1}, implica la existencia de una sucesión completa de estos tiempos $R_{1},R_{2}\ldots,$ que satisfacen la propiedad deseada [?].*

Nota 743. *Para la cola $GI/GI/1$ los usuarios arriban con tiempos t_{n} y son atendidos con tiempos de servicio S_{n}, los tiempos de arribo forman un proceso de renovación con tiempos entre arribos independientes e identicamente distribuidos (`i.i.d.`)$T_{n}=t_{n}-t_{n-1}$, además los tiempos de servicio son `i.i.d.` e independientes de los procesos de arribo. Por estable se entiende que $\mathbb{E}S_{n}<\mathbb{E}T_{n}<\infty$.*

Definición 1387. *Para x fijo y para cada $t\geq0$, sea $I_{x}\left(t\right)=1$ si $X\left(t\right)\leq x$, $I_{x}\left(t\right)=0$ en caso contrario, y defínanse los tiempos promedio*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{\infty}X\left(u\right)du\\ \mathbb{P}\left(X_{\infty}\leq x\right) &= lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{\infty}I_{x}\left(u\right)du,\end{aligned}$$

cuando estos límites existan.

Como consecuencia del teorema de Renovación-Recompensa, se tiene que el primer límite existe y es igual a la constante

$$\overline{X} = \frac{\mathbb{E}\left[\int_{0}^{R_{1}}X\left(t\right)dt\right]}{\mathbb{E}\left[R_{1}\right]},$$

suponiendo que ambas esperanzas son finitas.

Nota 744. *Funciones de procesos regenerativos son regenerativas, es decir, si $X(t)$ es regenerativo y se define el proceso $Y(t)$ por $Y(t) = f(X(t))$ para alguna función Borel medible $f(\cdot)$. Además Y es regenerativo con los mismos tiempos de renovación que X.*

En general, los tiempos de renovación, Z_k de un proceso regenerativo no requieren ser tiempos de paro con respecto a la evolución de $X(t)$.

Nota 745. *Una función de un proceso de Markov, usualmente no será un proceso de Markov, sin embargo será regenerativo si el proceso de Markov lo es.*

Nota 746. *Un proceso regenerativo con media de la longitud de ciclo finita es llamado positivo recurrente.*

Nota 747. *a) Si el proceso regenerativo X es positivo recurrente y tiene trayectorias muestrales no negativas, entonces la ecuación anterior es válida.*

b) Si X es positivo recurrente regenerativo, podemos construir una única versión estacionaria de este proceso, $X_e = \{X_e(t)\}$, donde X_e es un proceso estocástico regenerativo y estrictamente estacionario, con distribución marginal distribuida como X_∞

24.12 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1388. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\} (1 - F(x)) \, dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1389. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1390. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 953. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s) \, ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s) \, ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 281. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\,ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

24.13 Procesos Regenerativos Estacionarios - Stidham [?]

Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{V(t), t \geq 0\}$ es un proceso regenerativo si existe una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_1, X_2, \ldots\}$, sucesión de renovación, tal que para cualquier conjunto de Borel A,

$$\mathbb{P}\left\{V(t) \in A | X_1 + X_2 + \cdots + X_{R(t)} = s, \{V(\tau), \tau < s\}\right\} = \mathbb{P}\left\{V(t-s) \in A | X_1 > t - s\right\},$$

para todo $0 \leq s \leq t$, donde $R(t) = \max\{X_1 + X_2 + \cdots + X_j \leq t\}$ =número de renovaciones (*puntos de regeneración*) que ocurren en $[0, t]$. El intervalo $[0, X_1)$ es llamado *primer ciclo de regeneración* de $\{V(t), t \geq 0\}$, $[X_1, X_1 + X_2)$ el *segundo ciclo de regeneración*, y así sucesivamente.

Sea $X = X_1$ y sea F la función de distrbución de X

Definición 1391. *Se define el proceso estacionario, $\{V^*(t), t \geq 0\}$, para $\{V(t), t \geq 0\}$ por*

$$\mathbb{P}\{V(t) \in A\} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}\int_0^\infty \mathbb{P}\{V(t+x) \in A | X > x\}(1 - F(x))\,dx,$$

para todo $t \geq 0$ y todo conjunto de Borel A.

Definición 1392. *Una distribución se dice que es* aritmética *si todos sus puntos de incremento son múltiplos de la forma $0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ para alguna $\lambda > 0$ entera.*

Definición 1393. *Una modificación medible de un proceso $\{V(t), t \geq 0\}$, es una versión de este, $\{V(t, w)\}$ conjuntamente medible para $t \geq 0$ y para $w \in S$, S espacio de estados para $\{V(t), t \geq 0\}$.*

Teorema 954. *Sea $\{V(t), t \geq\}$ un proceso regenerativo no negativo con modificación medible. Sea $\mathbb{E}[X] < \infty$. Entonces el proceso estacionario dado por la ecuación anterior está bien definido y tiene función de distribución independiente de t, además*

i)

$$\mathbb{E}[V^*(0)] = \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

ii) Si $\mathbb{E}[V^*(0)] < \infty$, equivalentemente, si $\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right] < \infty$,entonces

$$\frac{\int_0^t V(s)\,ds}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^X V(s)\,ds\right]}{\mathbb{E}[X]}$$

con probabilidad 1 y en media, cuando $t \rightarrow \infty$.

Corolario 282. *Sea $\{V(t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo no negativo, con modificación medible. Si $\mathbb{E} < \infty$, F es no-aritmética, y para todo $x \geq 0$, $P\{V(t) \leq x, C > x\}$ es de variación acotada como función de t en cada intervalo finito $[0, \tau]$, entonces $V(t)$ converge en distribución cuando $t \rightarrow \infty$ y*

$$\mathbb{E}V = \frac{\mathbb{E}\int_0^X V(s)\,ds}{\mathbb{E}X}$$

Donde V tiene la distribución límite de $V(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para el caso discreto se tienen resultados similares.

24.14 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in X$, sea $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \dots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{24.20}$$

para $m = 1, 2, \dots, M$, cuando $x \to \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{24.21}$$

para $k = 1, 2, \dots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \dots, K, \tag{24.22}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{24.23}$$

para $k = 1, 2, \dots, K$ y $m = 1, 2, \dots, M$,

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \dots, M. \tag{24.24}$$

De acuerdo a Dai [?], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (??)-(??), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 1394 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, *se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 955 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t) \tag{24.25}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1395 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 51 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por ??-?? es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 956 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p, \tag{24.26}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{24.27}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right] = 0. \tag{24.28}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{24.29}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 957 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K}\rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{24.30}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema ??.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema ??

Teorema 958. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,\ m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty|\mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{24.31}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{24.32}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{24.33}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{24.34}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf \{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \left\{ \begin{array}{ll} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{array} \right. \tag{24.35}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[63]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \left\{ \begin{array}{ll} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{array} \right.$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

[63] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

Supuestos 17 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0,t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}\left[N_t\right] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{24.36}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1396. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1397. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1398. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \textit{ es compacto en } E\right\}. \tag{24.37}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 959. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1399. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*[64]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B). \tag{24.38}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[65] (??) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{24.40}$$

Definición 1400. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 748. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (??) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\right\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{24.41}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (??) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

[64] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[65]

$$\mathbb{P}\left\{H | \mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H | X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{24.39}$$

Definición 1401. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 1402 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1403. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E, \mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$;

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{24.42}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 1404 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1405. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 109 (Lema 4.2, Dai[?])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$*, conforme* $n \rightarrow \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$*, casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'}t, \text{ u.o.c.,} \tag{24.43}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{24.44}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{24.45}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 110 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0)=\overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0)=\overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t)=_k^x(0)+E_k^x(t)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t)))-S_k^x(T_k^x(t)) \tag{24.46}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_i^x(t)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x(t)\right)dI_i^x(t)=0, \tag{24.47}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x(t)=\left(T_1^x(t),\ldots,T_K^x(t)\right)^{'},$$

$$I^x(t)=\left(I_1^x(t),\ldots,I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x(T^x(t))=\left(S_1^x(T_1^x(t)),\ldots,S_K^x(T_K^x(t))\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{24.48}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{24.49}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{24.50}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{24.51}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{24.52}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{24.53}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 960 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{24.54}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{24.55}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{24.56}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{24.57}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{24.58}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente}, \tag{24.59}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{24.60}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{24.61}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 514. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) *Los vectores de tiempo ocupado* $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) *Para todo* $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) *Para todo* k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 111 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 961 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$, *para toda* $t \geq t_0$.

Lema 112 (Lema 5.2 [?]). *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{24.62}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) *Para cualquier* $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) *Las variables aleatorias* $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 962 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \to \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \to \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \to \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 515 (Proposición 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{24.63}$$

Proposición 516 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{24.64}$$

Proposición 517 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{24.65}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 963 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{24.66}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq k_p \tag{24.67}$$

Teorema 964 (Teorema 6.2 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \to 0$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 965 (Teorema 6.3 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]\right| = 0.$$

Proposición 518 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{24.68}$$

Lema 52 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{24.69}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 966 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p \left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{24.70}$$

para $t > 0$ *y* $x \in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 967 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{24.71}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 968 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con* $f(x) = f_1(x)$ *se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{24.72}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0.$$

Teorema 969 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea* ν *cualquier distribución de probabilidad en* $(X, \mathcal{B}_X)$, *y* π *la distribución estacionaria de* X.

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\, ds = \pi(f) := \int f(x)\pi(dx) \tag{24.73}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *con* $\pi(|f|) < \infty$, *la ecuación anterior se cumple.*

Teorema 970 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{24.74}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, *con* $|Q(0)| = 1$. *Entonces para cualquier* $0 < q \leq 1$, *existe* $B < 0$ *tal que para cualquier* $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{24.75}$$

Definición 1406. *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{F}$ *una* σ-*álgebra de subconjuntos de* X, *la pareja* $(X, \mathcal{F})$ *es llamado espacio medible. Un subconjunto* A *de* X *es llamado medible, o medible con respecto a* $\mathcal{F}$, *si* $A \in \mathcal{F}$.

Definición 1407. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *espacio de medida. Se dice que la medida* μ *es* σ-*finita si se puede escribir* $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ *con* $X_n \in \mathcal{F}$ *y* $\mu(X_n) < \infty$.

Definición 1408. *Sea X el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1409. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a $\mathcal{F}$. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1410. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1411. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1412. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1413. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1414. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{24.76}$$

Nota 749. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{24.77}$$

24.15 Procesos de Estados de Markov

Teorema 971. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots,\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{24.78}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{ \bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v \right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \to \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \to [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{24.79}$$

y

$$\partial^* M_v = \left\{ z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v \right\}. \tag{24.80}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{24.81}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf \left\{ t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v \right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \to \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \\ exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) \, ds \right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{24.82}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 18 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{24.83}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[66] se cumple para cualquier tiempo de paro.

[66] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

24.16 Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1415. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda\left(E\right)=sup\left\{\lambda\left(K\right):K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{24.84}$$

Definición 1416. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $\left(E,\mathcal{B}\left(E\right)\right)$ es regular interior o cerrada,* tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 972. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en $\left(E,\mathcal{B}\left(E\right)\right)$ es cerrada.*

24.17 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}\left(E\right)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $\left(X,\mathcal{G},\mathbb{P}\right)$ espacio de probabilidad, $I\subset\mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f\left(X_{r}\right):r\in I, r\leq t,f\in\mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[67], $\left(\mathcal{G}_{t}\right)$ tal que $\left(X_{t}\right)$ sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1417. *Una familia $\left(P_{s,t}\right)$ de kernels de Markov en $\left(E,\mathcal{E}\right)$ indexada por pares $s,t\in I$, con $s\leq t$ es una función de transición en $\left(E,\mathcal{E}\right)$, si para todo $r\leq s< t$ en I y todo $x\in E$, $B\in\mathcal{E}$*

$$P_{r,t}\left(x,B\right)=\int_{E}P_{r,s}\left(x,dy\right)P_{s,t}\left(y,B\right)^{68}. \tag{24.85}$$

Se dice que la función de transición $\left(P_{s,t}\right)$ en $\left(E,\mathcal{E}\right)$ es la función de transición para un proceso $\left(X_{t}\right)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[69] (**??**) relativa a $\left(\mathcal{G}_{t}\right)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_{t}\right)|\mathcal{G}_{s}\right\}=P_{s,t}f\left(X_{t}\right)\;\; s\leq t\in I,\; f\in b\mathcal{E}. \tag{24.87}$$

Definición 1418. *Una familia $\left(P_{t}\right)_{t\geq0}$ de kernels de Markov en $\left(E,\mathcal{E}\right)$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f\left(x\right)=P_{t}\left(P_{s}f\right)\left(x\right),\;t,s\geq0,\;x\in E\;f\in b\mathcal{E}^{70}.$$

Nota 750. *Si la función de transición $\left(P_{s,t}\right)$ es llamada homogénea si $P_{s,t}=P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea $\left(P_{t}\right)$ tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_{t+s}\right)|\mathcal{G}_{t}\right\}=P_{s}f\left(X_{t}\right)\;t,s\geq0,\;f\in b\mathcal{E}. \tag{24.88}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a $\left(P_{t}\right)$.

En este sentido el proceso $\left(X_{t}\right)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $\left(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_{t},\mathbb{P}\right)$ con semigrupo de transición $\left(P_{t}\right)$.

[67] qué se quiere decir con el término: más general?

[68] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[69]
$$\mathbb{P}\left\{H|\mathcal{G}_{t}\right\}=\mathbb{P}\left\{H|X_{t}\right\}\;\;H\in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{24.86}$$

[70] Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

24.18 Primer Condición de Regularidad

Definición 1419. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 1420 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1421. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E, \mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$*,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{24.89}$$

iii) Para cualquier $x \in E$*,*$\mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 1422 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1423. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

24.19 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 113 (Lema 4.2, Dai[?])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$*, conforme* $n \rightarrow \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$*, casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'} t, \text{ u.o.c.,} \tag{24.90}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{24.91}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{24.92}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 114 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x(t)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_k^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{24.93}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j\in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{24.94}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$

$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = \left(S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t))\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{24.95}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{24.96}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \tag{24.97}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{24.98}$$

$$\int_0^{\infty} \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{24.99}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{24.100}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 973 (Teorema 4.1, Dai [?])**.** *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{24.101}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{24.102}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I - P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{24.103}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{24.104}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{24.105}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{24.106}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{24.107}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{24.108}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 519. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x \to \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) *Los vectores de tiempo ocupado* $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) *Para todo* $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) *Para todo* k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) *Para todo* $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Teorema 974 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 520 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{24.109}$$

Proposición 521 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{24.110}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

24.20 Estabilidad

Definición 1424 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??**, *junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P'\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{24.111}$$

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 1425 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)'$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)'$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk}\mu_l \overline{T}_l(t) \tag{24.112}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{24.113}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{24.114}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{24.115}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{24.116}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{24.117}$$

Lema 115 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 975 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$*, para toda* $t \geq t_0$.

Proposición 522 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0 \tag{24.118}$$

Lema 53 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea* $\{\zeta(k) : k \in F\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $(0, \infty)$*, y sea* $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$*. Si* $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$*, entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t \to \infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \tag{24.119}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t \geq \delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{ \left(\frac{E(t)}{t} \right)^r : t \geq 1 \right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 976 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p \right] ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{24.120}$$

para $t > 0$ *y* $x \in X$*. En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p \right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 977 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\| P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot) \right\|_{f_p}, \; t \to \infty, x \in X. \tag{24.121}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}_x \left[|Q(t)|^p \right] = \mathbb{E}_\pi \left[|Q(0)|^p \right] \leq \kappa_r$$

Teorema 978 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} \left\| P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{24.122}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 979 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{24.123}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 980 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{24.124}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{24.125}$$

Definición 1426. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 1427. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 1428. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1429. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1430. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_i$.*

Definición 1431. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1432. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1433. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1434. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{24.126}$$

Nota 751. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{24.127}$$

Teorema 981. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots, m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{24.128}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{24.129}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{24.130}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{24.131}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v,\zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s,\zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0,\epsilon)$. La medida de transición $Q(A;\mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E,\mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n,\mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} \\ exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s,\mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{24.132}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N,Z) con distribuición $Q(\cdot;\phi_n(T_1,\mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[71]

$$\mathbf{x}_t = (v_t,\zeta_t) = \begin{cases} (n,\phi_n(t,\mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N,\mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 19 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea* $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ *el número de saltos en* $[0,t]$. *Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{24.133}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1435. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1436. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1437. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1438. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{24.134}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 982. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

24.21 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X,\mathcal{G},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1439. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ indexada por pares $s,t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E,\mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x,B) = \int_E P_{r,s}(x,dy)\, P_{s,t}(y,B)^{72}. \tag{24.135}$$

[71] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].
[72] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[73] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t)|\mathcal{G}_s\} = P_{s,t}f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{24.137}$$

Definición 1440. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 752. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{24.138}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

24.22 Primer Condición de Regularidad

Definición 1441. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1442 (HD1). *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1443. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t, s \geq 0$,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{24.139}$$

*iii) Para cualquier $x \in E$,$\mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.*

Definición 1444 (HD2). *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^\alpha$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1445. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

73

$$\mathbb{P}\{H|\mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H|X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{24.136}$$

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 116 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'} t, \ u.o.c., \tag{24.140}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{24.141}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{24.142}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 117 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) *Conforme* $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) *Para cada* $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{24.143}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{24.144}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{24.145}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{24.146}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{24.147}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{24.148}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{24.149}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{24.150}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 983 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{24.151}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)\ u.o.c. \tag{24.152}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{24.153}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0, \tag{24.154}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\ \textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{24.155}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right)\ \textit{es no decreciente}, \tag{24.156}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0, \tag{24.157}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)\textit{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{24.158}$$

Definición 1446 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta>0$ que depende de μ,α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv0$.*

Teorema 984 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{24.159}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1447 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$, con $t\geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 54 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por **??**-**??** es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0>0$ tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$ para cualquier $t\geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 523. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 118 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 985 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 986 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$, *para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 119 (Lema 5.2 [?]). *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r}\tag{24.160}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 987 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$*..*

Proposición 524 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{24.161}$$

Proposición 525 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{24.162}$$

Proposición 526 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{24.163}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 988 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{24.164}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{24.165}$$

Teorema 989 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 990 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 527 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{24.166}$$

Lema 55 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^{r}. \tag{24.167}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 991 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^{p}\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{24.168}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^{p}\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 992 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x \in X. \tag{24.169}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^{p}\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^{p}\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 993 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f} = 0. \tag{24.170}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0.$$

Teorema 994 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f(X(s))ds = \pi(f) := \int f(x)\pi(dx) \tag{24.171}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 995 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{24.172}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{24.173}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\left\{\xi_k\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)\right]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$,
- también se define $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.

24.23 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [?].

24.23.1 Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [?]

.

24.24 Procesos Harris Recurrentes Positivos

Sea el proceso de Markov $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] y Meyn y Down [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

24.25 Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X\left(t\right) = \left(Q\left(t\right), U\left(t\right), V\left(t\right)\right), \tag{24.174}$$

donde $Q\left(t\right)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U\left(t\right)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V\left(t\right)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U\left(t\right)$ como $V\left(t\right)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = \left(Q\left(0\right), U\left(0\right), V\left(0\right)\right) = \left(q, a, b\right)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \ldots, K$ se define

$$\begin{array}{rcl}
E_l^x\left(t\right) &=& max\left\{r : U_l\left(0\right) + \xi_l\left(1\right) + \cdots + \xi_l\left(r-1\right) \leq t\right\} \;\; t \geq 0,\\
S_k^x\left(t\right) &=& max\left\{r : V_k\left(0\right) + \eta_k\left(1\right) + \cdots + \eta_k\left(r-1\right) \leq t\right\} \;\; t \geq 0.
\end{array}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k\left(n\right) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k\left(i\right).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s-éima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \left\{\phi^k(n), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \ldots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 120 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'}t, \ u.o.c., \tag{24.175}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k\left(t - \overline{U}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{24.176}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k\left(t - \overline{V}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{24.177}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 121 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x \left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x \left(T_k^x(t)\right) \tag{24.178}$$

para $k = 1, \dots, K$. Para $i = 1, \dots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{24.179}$$

para $i = 1, \dots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \dots, T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \dots, I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \dots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{24.180}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{24.181}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \tag{24.182}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{24.183}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{24.184}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{24.185}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 996 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right), U^{x_{n_j}}\left(0\right), V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right) \to \left(\overline{Q}\left(0\right), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{24.186}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right) \text{ u.o.c.} \tag{24.187}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right) = Q\left(0\right) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - \left(I - P\right)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{24.188}$$

$$\overline{Q}\left(t\right) \geq 0, \tag{24.189}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{24.190}$$

$$\overline{I}\left(t\right) = et - C\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente,} \tag{24.191}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right) d\overline{I}\left(t\right) = 0, \tag{24.192}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{24.193}$$

Definición 1448 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.*

Teorema 997 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|} Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{24.194}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1449 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}\left(t\right) = \left(\overline{Q}_1\left(t\right), \ldots, \overline{Q}_K\left(t\right)\right)^{'}$ y $\overline{T}\left(t\right) = \left(\overline{T}_1\left(t\right), \ldots, \overline{T}_K\left(t\right)\right)^{'}$*

$$\overline{Q}_k\left(t\right) = \overline{Q}_k\left(0\right) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k\left(t\right) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk}\mu_l \overline{T}_l\left(t\right) \tag{24.195}$$

$$\overline{Q}_k\left(t\right) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{24.196}$$

$$\overline{T}_k\left(0\right) = 0, \text{ y } \overline{T}_k\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente,} \tag{24.197}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k\in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{24.198}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k\in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{24.199}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{24.200}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1450 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??**, *junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{24.201}$$

Definición 1451 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 56 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

24.26 Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad

24.27 Teorema 2.1

El resultado principal de Down [?] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 998 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, *y para cada condición inicial* $x \in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \sup \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{24.202}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{24.203}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$. *Donde* π *es la probabilidad invariante para* $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right] = 0. \tag{24.204}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right], \; \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{24.205}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

Proposición 528 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{24.206}$$

Lema 57 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta\left(k\right):k\in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq 1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{24.207}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r:t\geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 999 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{24.208}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 1000 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{24.209}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q\left(0\right)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 1001 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_f=0. \tag{24.210}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 1002 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{24.211}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

24.28 Teorema 2.2

Teorema 1003 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{24.212}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{24.213}$$

24.29 Teorema 2.3

Teorema 1004 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{24.214}$$

*i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema **??**.*

*ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema **??***

24.30 Definiciones Básicas

Definición 1452. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 1453. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 1454. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1455. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1456. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1457. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1458. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1459. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1460. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{24.215}$$

Nota 753. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{24.216}$$

Teorema 1005. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{24.217}$$

en $\{T < \infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 529. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ y $\overline{T}^0(t)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 122 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1006 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1007 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 123 (Lema 5.2 [?]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{24.218}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1008 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 530 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{24.219}$$

Proposición 531 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{24.220}$$

Proposición 532 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{24.221}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1009 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{24.222}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[|Q(s)|^p]\,ds \leq k_p \tag{24.223}$$

Teorema 1010 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^{t}\left(c,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_{p}}\rightarrow 0$$

para $t\rightarrow\infty$ y $x\in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[\left|Q_{t}\right|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[\left|Q_{0}\right|^{p}\right]<\infty$$

Teorema 1011 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^{t}(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_{f}=0},$$

para $x\in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{t}\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{0}\right]\right|=0}.$$

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_{s}\left(x\right)=N\left(x\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]=\overline{N}>0. \tag{24.224}$$

(S2.)
$$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]\leq\overline{N}, \tag{24.225}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]\geq 0$.
- Se define
$$\delta^{*}:=\sum_{j,j+1}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]. \tag{24.226}$$
- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$
- también se define $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde es necesario que $\rho<1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $\left(X\left(t\right)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t\geq 0$ está dado por

$$X\left(t\right)=\left(Q\left(t\right),A\left(t\right),H\left(t\right),B\left(t\right),B^{0}\left(t\right),C\left(t\right)\right) \tag{24.227}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X}=\mathbb{Z}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}^{K}, \tag{24.228}$$

- $Q\left(t\right)=\left(Q_{k}\left(t\right),1\leq k\leq K\right)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.

- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([?])

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

24.31 Preliminares

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0$
2) $\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}$para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^m = r_{j,j^{'}}$
- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.
- Finalmente, se define
$$\delta^* := \sum_{j,j^{'}} p_j r_{j,j^{'}} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(i)\right]. \tag{24.229}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m, se denota por $B_m(t)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t; $B_m^0(t)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t, finalmente sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{24.230}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{24.231}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{24.232}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto $A2$) para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3'$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

24.32 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (**??**), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([?], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [?]

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\{X(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la σ-algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D)$$

Definición 1461. *Una medida no cero π en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ es* **invariante** *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbf{X}} P^t(x, D)\, \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1462. *El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 754. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama Proceso Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\, \pi(dx)$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente.

Definición 1463. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 124 (Lema 3.1, Dai[?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{24.233}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris Recurrente Positivo.

Lema 125 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{|x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1012 (Teorema 3.1, Dai[?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^{x}\left(|x|\delta\right)| = 0, \tag{24.234}$$

entonces la ecuación (??) se cumple para $B = \{|x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.

Nota 755. *En Meyn and Tweedie [?] muestran que si $P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1$ incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

24.33 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in$ X, sea $Q_k^x\left(t\right)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^x\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}_m\left(\cdot\right), \overline{T}_m^0\left(\cdot\right)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x\left(|x|t\right), \frac{1}{|x|}T_m^x\left(|x|t\right), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}\left(|x|t\right)\right) \tag{24.235}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}_m\left(t\right), \overline{T}_m^0\left(t\right)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k\left(t\right) = \overline{Q}_k\left(0\right) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M}\mu_k\overline{T}_{m,k}\left(t\right) \tag{24.236}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k\left(t\right) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{24.237}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente,} \tag{24.238}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$,

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^0\left(t\right) + \overline{T}_{m,k}\left(t\right) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{24.239}$$

De acuerdo a Dai [?], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right), \overline{T}^0\left(\cdot\right)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (??)-(??), se le llama *Modelo de Flujo*.

Definición 1464 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.*

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??-??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1013 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{24.240}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1465 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 58 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por **??**-**??** es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1014 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p \right] ds \leq \kappa_p, \tag{24.241}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x \left[Q_k(t)^r \right] = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right] \leq \kappa_r, \tag{24.242}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x \left[Q_k(t) \right] - \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0) \right] = 0. \tag{24.243}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right], \; \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{24.244}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1015 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1\leq j\leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{24.245}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema **??**.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema **??**

Teorema 1016. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots, m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{24.246}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v\in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v\in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v\in K} \partial^* M_v. \tag{24.247}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{24.248}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{24.249}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^*\mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{24.250}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[74]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 20 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea* $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ *el número de saltos en* $[0, t]$. *Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{24.251}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1466. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1467. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1468. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \textit{ es compacto en } E\}. \tag{24.252}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1017. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1469. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*[75]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B). \tag{24.253}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[76] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{24.255}$$

[74]Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

[75]Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[76]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{24.254}$$

Definición 1470. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x),\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 756. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t}=P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\right\} = P_s f(X_t)\ t,s\geq 0,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{24.256}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 1471. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t\rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 1472 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}^*$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *tal que* $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0=x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 1473. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E,\mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t,s\geq 0$,

$$\theta_t\circ\theta_s = \theta_{t+s}\ y\ X_t\circ\theta_t = X_{t+s}; \tag{24.257}$$

iii) Para cualquier $x\in E,\mathbf{P}^x\{X_0=x\}=1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.

Definición 1474 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha>0$ *y cualquier* $f\in S^\alpha$*, el proceso* $t\rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1475. *Un sistema* $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 126 (Lema 4.2, Dai[**?**])**.** *Sea* $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ *con* $|x_n|\rightarrow\infty$*, conforme* $n\rightarrow\infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n\rightarrow\infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^{k}\left(\left[|x_n|t\right]\right)\rightarrow P_{k}^{'}t,\ u.o.c.,\tag{24.258}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow\alpha_{k}\left(t-\overline{U}_{k}\right)^{+},\ u.o.c.,\tag{24.259}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow\mu_{k}\left(t-\overline{V}_{k}\right)^{+},\ u.o.c.,\tag{24.260}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_{k}=1/m_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$.

Lema 127 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ con $|x_n|\rightarrow\infty$, conforme $n\rightarrow\infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}_{k}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}_{k}.$$

a) Conforme $n\rightarrow\infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_{k}-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_{k}-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t\geq0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_{l}^{x}\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_{l}^{x}\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_{l}^{x}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_{k}^{x}\left(t\right)=_{k}^{x}\left(0\right)+E_{k}^{x}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_{k}^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)-S_{k}^{x}\left(T_{k}^{x}\left(t\right)\right)\tag{24.261}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_{i}^{x}\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_{i}}T_{k}^{x}\left(t\right).$$

Entonces $I_{i}^{x}\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_{0}^{\infty}\left(\sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0, \tag{24.262}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^{x}\left(t\right)=\left(T_{1}^{x}\left(t\right),\ldots,T_{K}^{x}\left(t\right)\right)^{'},$$
$$I^{x}\left(t\right)=\left(I_{1}^{x}\left(t\right),\ldots,I_{K}^{x}\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^{x}\left(T^{x}\left(t\right)\right)=\left(S_{1}^{x}\left(T_{1}^{x}\left(t\right)\right),\ldots,S_{K}^{x}\left(T_{K}^{x}\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^{x}\left(t\right)=Q^{x}\left(0\right)+E^{x}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)-S^{x}\left(T^{x}\left(t\right)\right), \tag{24.263}$$

$$Q^{x}\left(t\right)\geq0, \tag{24.264}$$

$$T^{x}\left(0\right)=0,\text{ y }\overline{T}^{x}\left(t\right)\text{ es no decreciente}, \tag{24.265}$$

$$I^{x}\left(t\right)=et-CT^{x}\left(t\right)\text{ es no decreciente} \tag{24.266}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(CQ^{x}\left(t\right)\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0, \tag{24.267}$$

$$\text{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}^{x}\left(\cdot\right),\overline{T}^{x}\left(\cdot\right)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{24.268}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{cc}1, & S\left(k\right)=i,\\ 0, & \text{en otro caso}.\end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1018 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right),U^{x_{n_j}}\left(0\right),V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(0\right),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{24.269}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)\ \textit{u.o.c.} \tag{24.270}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{24.271}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq0, \tag{24.272}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\textit{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{24.273}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{24.274}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{24.275}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{24.276}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 533. *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x \to \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K \left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 128 (Lema 3.1 [?])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 1019 (Teorema 5.1 [?])**.** *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$, *para toda* $t \geq t_0$.

Lema 129 (Lema 5.2 [?])**.** *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{24.277}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1020 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 534 (Proposición 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{24.278}$$

Proposición 535 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{24.279}$$

Proposición 536 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{24.280}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 1021 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{24.281}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{24.282}$$

Teorema 1022 (Teorema 6.2 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1023 (Teorema 6.3 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_x\left[Q_t\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_0\right]\right| = 0.$$

Proposición 537 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{24.283}$$

Lema 59 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^{r}. \tag{24.284}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1024 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{24.285}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 1025 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{24.286}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q\left(0\right)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 1026 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_f=0. \tag{24.287}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 1027 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{24.288}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1028 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{24.289}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{24.290}$$

Definición 1476. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 1477. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 1478. *Sea X el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1479. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a $\mathcal{F}$. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1480. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1481. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1482. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1483. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1484. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{24.291}$$

Nota 757. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{24.292}$$

24.34 Procesos de Estados de Markov

Teorema 1029. *Sea* $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ *Proceso de Markov con espacio de estados* (S_0, χ_0) *generado por una distribuición inicial* P_o *y probabilidad de transición* p_{mn}*, para* $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$*, que por notación se escribirá como* $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$*. Sea* S *tiempo de paro relativo a la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_n$*. Sea* T *función medible,* $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$*. Supóngase que* $T \geq S$*, entonces* T *es tiempo de paro. Si* $B \in \chi_0$*, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{24.293}$$

en $\{T < \infty\}$*.*

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \bigcup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{ \bigcup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v \right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \bigcup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{24.294}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{24.295}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{24.296}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) \, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{24.297}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 21 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{24.298}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov[77] se cumple para cualquier tiempo de paro.

24.35 Teoría General de Procesos Estocásticos

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1485. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{24.299}$$

Definición 1486. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1030. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es de Radón si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

24.36 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general[78], $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1487. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{79}. \tag{24.300}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[80] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{24.302}$$

[77] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].
[78] qué se quiere decir con el término: más general?
[79] Ecuación de Chapman-Kolmogorov
[80]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{24.301}$$

Definición 1488. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E, \mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x), \ t, s \geq 0, \ x \in E \ f \in b\mathcal{E}^{81}.$$

Nota 758. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \ t, s \geq 0, \ f \in b\mathcal{E}. \tag{24.303}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

24.37 Primer Condición de Regularidad

Definición 1489. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \to X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 1490 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1491. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E, \mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{24.304}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 1492 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \to f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1493. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

[81] Definir los término $b\mathcal{E}$ y $p\mathcal{E}$

24.38 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 130 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k ([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \ u.o.c., \tag{24.305}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n} (|x_n| t) \to \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{24.306}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n} (|x_n| t) \to \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{24.307}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 131 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n} (|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n} (|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n} (|x_n| t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

y

$$\left\{ \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n} (|x_n| t), |x_n| \geq 1 \right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x(t)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_k^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l (S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{24.308}$$

para $k=1,\dots,K$. Para $i=1,\dots,d$, sea

$$I_i^x(t)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x(t)\right)dI_i^x(t)=0, \tag{24.309}$$

para $i=1,\dots,d$.

Hacer

$$T^x(t)=\left(T_1^x(t),\dots,T_K^x(t)\right)^{'},$$
$$I^x(t)=\left(I_1^x(t),\dots,I_K^x(t)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right),\dots,S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t)=Q^x(0)+E^x(t)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right)-S^x\left(T^x(t)\right), \tag{24.310}$$

$$Q^x(t)\geq 0, \tag{24.311}$$

$$T^x(0)=0,\text{ y }\overline{T}^x(t)\text{ es no decreciente}, \tag{24.312}$$

$$I^x(t)=et-CT^x(t)\text{ es no decreciente} \tag{24.313}$$

$$\int_0^\infty\left(CQ^x(t)\right)dI_i^x(t)=0, \tag{24.314}$$

$$\text{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}^x(\cdot),\overline{T}^x(\cdot)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{24.315}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\begin{cases}1, & S(k)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1031 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\to\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\to\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0),U^{x_{n_j}}(0),V^{x_{n_j}}(0)\right)\to\left(\overline{Q}(0),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{24.316}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\to\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)\ \textit{u.o.c.} \tag{24.317}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{24.318}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0, \tag{24.319}$$

$$\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{24.320}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right) \text{ es no decreciente,} \tag{24.321}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0, \tag{24.322}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{24.323}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 538. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{\left|x\right|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{\left|x\right|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{\left|x\right|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{\left|x\right|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq 0$
$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$
$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$
$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$
para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j
$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$
$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$
para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Teorema 1032 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right)\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r}\rightarrow\frac{1}{\mu^{r}}$*, cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$..

Proposición 539 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{24.324}$$

Proposición 540 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{24.325}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

24.39 Estabilidad

Definición 1494 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ se define como el conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??**, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{24.326}$$

entonces si el modelo de flujo retrasado también es estable:

Definición 1495 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ de las siguientes ecuaciones, donde $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ y $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$*

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk} \mu_l \overline{T}_l(t) \tag{24.327}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{24.328}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{24.329}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{24.330}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{24.331}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{24.332}$$

Lema 132 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1033 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Proposición 541 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0 |x|)|^{p+1} \right] = 0 \tag{24.333}$$

Lema 60 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^{r}. \tag{24.334}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1034 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{24.335}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1035 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{24.336}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 1036 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{24.337}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 1037 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\, ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{24.338}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1038 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{24.339}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{24.340}$$

Definición 1496. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X,\mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A\in\mathcal{F}$.*

Definición 1497. *Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X=\bigcup_{n\geq 1}X_n$ con $X_n\in\mathcal{F}$ y $\mu(X_n)<\infty$.*

Definición 1498. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b)\in\mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1499. *Una función $f:X\rightarrow\mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x\in X: f(x)>\alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha,\infty))=\{x\in X: f(x)>\alpha\}\in\mathcal{F}.$$

Definición 1500. *Sean $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$, $i=1,2,\ldots,$ espacios medibles y $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1,\omega_2,\ldots,)$ tales que $\omega_i\in\Omega_i$, $i=1,2,\ldots,$. Si $B^n\subset\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$, definimos $B_n=\{\omega\in\Omega:(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_i$.*

Definición 1501. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t),t\geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t\geq 0$, si para $s<t$ implica que $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s),s\leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s\leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1502. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t),t\geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s)\subset\mathcal{F}(t)$ para $s\leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T:\Omega\rightarrow[0,\infty]$ tal que $\{T\leq t\}\in\mathcal{F}(t)$ para cada $t\geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t),t\geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t)=\mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1503. *Sea $X(t),t\geq 0$ proceso estocástico, con (S,χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s,t\in I$, I conjunto de índices, $s<t$, se tiene que $\mathcal{F}(s)\subset\mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1504. *Sea $X(t),t\geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t),\mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B\in\chi$, y $s,t\in I$, $s<t$ se cumple que*

$$P\{X(t)\in B|\mathcal{F}(s)\}=P\{X(t)\in B|X(s)\}. \tag{24.341}$$

Nota 759. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t)=\mathcal{F}_0(t)=\mathcal{F}(X(r),r\leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t)\in B|X(r),r\leq s\}=P\{X(t)\in B|X(s)\} \tag{24.342}$$

Teorema 1039. *Sea $(X_n,\mathcal{F}_n,n=0,1,\ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0,χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m,n=0,1,\ldots,$ $m<n$, que por notación se escribirá como $p(m,n,x,B)\rightarrow p_{mn}(x,B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T:\Omega\rightarrow\{0,1,\ldots,\}$. Supóngase que $T\geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B\in\chi_0$, entonces*

$$P\{X(T)\in B,T<\infty|\mathcal{F}(S)\}=p(S,T,X(s),B) \tag{24.343}$$

en $\{T<\infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{24.344}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{24.345}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{24.346}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \left\{ \begin{array}{ll} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z})) ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{array} \right. \tag{24.347}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[82]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \left\{ \begin{array}{ll} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{array} \right.$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

[82] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

Supuestos 22 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea* $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ *el número de saltos en* $[0,t]$. *Entonces*

$$\mathbb{E}\left[N_t\right] < \infty \text{ para toda } t. \tag{24.348}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1505. *Un espacio topológico* E *es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1506. *Un espacio topológico* E *es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1507. E *es un espacio de Radón si cada medida finita en* $(E, \mathcal{B}(E))$ *es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1508. *Una medida finita,* λ *en la* σ*-álgebra de Borel de un espacio metrizable* E *se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{24.349}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1040. *Sea* E *espacio separable metrizable. Entonces* E *es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en* $(E, \mathcal{B}(E))$ *es cerrada.*

24.40 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1509. *Una familia* $(P_{s,t})$ *de kernels de Markov en* $(E, \mathcal{E})$ *indexada por pares* $s, t \in I$*, con* $s \leq t$ *es una función de transición en* $(E, \mathcal{E})$*, si para todo* $r \leq s < t$ *en* I *y todo* $x \in E$*,* $B \in \mathcal{E}$

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) \, P_{s,t}(y, B)^{83}. \tag{24.350}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[84] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \; f \in b\mathcal{E}. \tag{24.352}$$

Definición 1510. *Una familia* $(P_t)_{t \geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E, \mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t (P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 760. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\right\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{24.353}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

[83] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[84]

$$\mathbb{P}\left\{H | \mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H | X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{24.351}$$

24.41 Primer Condición de Regularidad

Definición 1511. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t\rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1512 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*)\subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ tal que $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 1513. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E,\mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) *$(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) *$(\theta_t)_{t\geq0}$ es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t,s\geq0$,*

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s}\text{ y }X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{24.354}$$

iii) *Para cualquier $x\in E$,$\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}=1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.*

Definición 1514 (HD2)**.** *Para cualquier $\alpha>0$ y cualquier $f\in S^\alpha$, el proceso $t\rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1515. *Un sistema $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) *$\mathbf{X}$ es una realización continua por la derecha, **??**, de (P_t).*

ii) *$\mathbf{X}$ satisface la condicion HD2, **??**, relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) *$\mathcal{G}_t$ es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 133 (Lema 4.2, Dai[?])**.** *Sea $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$ con $|x_n|\rightarrow\infty$, conforme $n\rightarrow\infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0)=\overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n\rightarrow\infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t])\rightarrow P_k^{'}t,\ u.o.c., \tag{24.355}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{24.356}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t)\rightarrow\mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+,\ u.o.c., \tag{24.357}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k=1/m_k=1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 134 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+}, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right)=_k^x\left(0\right)+E_k^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{24.358}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_i^x\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_{0}^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{24.359}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right)=\left(T_1^x\left(t\right),\ldots,T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$

$$I^x\left(t\right)=\left(I_1^x\left(t\right),\ldots,I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right),\ldots,S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x \left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{24.360}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{24.361}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{24.362}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{24.363}$$

$$\int_0^{\infty} \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{24.364}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{24.365}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1041 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{24.366}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{24.367}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I - P)^{'} M^{-1} \left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{24.368}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{24.369}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{24.370}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente}, \tag{24.371}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{24.372}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{24.373}$$

Definición 1516 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en **??** es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 1042 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{\left|x\right|}Q^{x}\left(\left|x\right|t\right) \tag{24.374}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $\left|q\right|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $\left|x\right|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1517 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_{0} tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$, con $t\geq t_{0}$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ que cumple con $\left|\overline{Q}\left(0\right)\right|=1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 61 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por **??**-**??** es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_{0}>0$ tal que $\overline{Q}\left(t\right)=0$ para cualquier $t\geq t_{0}$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $\left|\overline{x}\right|=\left|\overline{Q}\left(0\right)\right|+\left|\overline{A}\left(0\right)\right|+\left|\overline{B}\left(0\right)\right|\leq1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 542. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{\left|x\right|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{\left|x\right|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{\left|x\right|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{\left|x\right|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ y $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 135 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1043 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1044 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante t_0 que depende de (α, μ, T, U) y V que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5), $Z(t) = 0$, para toda $t \geq t_0$.*

Lema 136 (Lema 5.2 [?]). *Sea $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t)$ el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{24.375}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1045 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ a.s., cuando $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $r > 0$..

Proposición 543 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{24.376}$$

Proposición 544 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}(1 + |X(t)|^p)\,dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{24.377}$$

Proposición 545 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\,dt\right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\,ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{24.378}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1046 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{24.379}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq k_p \tag{24.380}$$

Teorema 1047 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1048 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 546 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{24.381}$$

Lema 62 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1)+\cdots+\zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{24.382}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1049 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{24.383}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1050 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{24.384}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[\left|Q\left(t\right)\right|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[\left|Q\left(0\right)\right|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 1051 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{24.385}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]\right|=0.$$

Teorema 1052 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_{X}\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{24.386}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1053 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$\left|Q\left(T\right)\right|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ T\geq0, \tag{24.387}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $\left|Q\left(0\right)\right|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{24.388}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$,
- también se define $\rho_{k}:=\lambda_{k}/\mu_{k}$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho<1$ para cuestiones de estabilidad.

24.42 Procesos de Estados Markoviano para el Sistema

24.43 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X=\left\{X\left(t\right),t\geq0\right\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [?].

24.43.1 Construcción de un Proceso Determinista por partes, Davis [?]

.

24.44 Procesos Harris Recurrentes Positivos

Sea el proceso de Markov $X = \{X(t), t \geq 0\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] y Meyn y Down [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

24.45 Construcción de un Modelo de Flujo Límite

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X(t) = (Q(t), U(t), V(t)), \tag{24.389}$$

donde $Q(t)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U(t)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V(t)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U(t)$ como $V(t)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = (Q(0), U(0), V(0)) = (q, a, b)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \ldots, K$ se define

$$\begin{aligned} E_l^x(t) &= max\{r : U_l(0) + \xi_l(1) + \cdots + \xi_l(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0, \\ S_k^x(t) &= max\{r : V_k(0) + \eta_k(1) + \cdots + \eta_k(r-1) \leq t\} \;\; t \geq 0. \end{aligned}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k(n) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k(i).$$

donde $\phi^k(n)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s(k)$, la s-éima componente de $\phi^k(n)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k(n)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = (P_{kl})$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k(n) = \left\{\phi^k(n), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1(n), \ldots, \phi^K(n)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 137 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \to \infty$, conforme $n \to \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \to P_k^{'} t, \; u.o.c., \tag{24.390}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \to \alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{24.391}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \to \mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{24.392}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$.

Lema 138 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right) =_k^x\left(0\right) + E_k^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{24.393}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x\left(t\right) = t - \sum_{j\in C_i}T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{24.394}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^{x}(t) = \left(T_{1}^{x}(t), \ldots, T_{K}^{x}(t)\right)^{'},$$
$$I^{x}(t) = \left(I_{1}^{x}(t), \ldots, I_{K}^{x}(t)\right)^{'}$$

y

$$S^{x}\left(T^{x}(t)\right) = \left(S_{1}^{x}\left(T_{1}^{x}(t)\right), \ldots, S_{K}^{x}\left(T_{K}^{x}(t)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^{x}(t) = Q^{x}(0) + E^{x}(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}(t)\right)\right) - S^{x}\left(T^{x}(t)\right), \tag{24.395}$$

$$Q^{x}(t) \geq 0, \tag{24.396}$$

$$T^{x}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^{x}(t) \text{ es no decreciente}, \tag{24.397}$$

$$I^{x}(t) = et - CT^{x}(t) \text{ es no decreciente} \tag{24.398}$$

$$\int_{0}^{\infty} \left(CQ^{x}(t)\right) dI_{i}^{x}(t) = 0, \tag{24.399}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^{x}(\cdot), \overline{T}^{x}(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{24.400}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso}. \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1054 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{24.401}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \text{ u.o.c.} \tag{24.402}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I - P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{24.403}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{24.404}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{24.405}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente}, \tag{24.406}$$

$$\int_{0}^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{24.407}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{24.408}$$

Definición 1518 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta>0$ *que depende de* μ,α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv0$.

Teorema 1055 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{24.409}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1519 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}\left(t\right)=\left(\overline{Q}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{Q}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}\left(t\right)=\left(\overline{T}_{1}\left(t\right),\ldots,\overline{T}_{K}\left(t\right)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{k}P_{lk}\mu_{l}\overline{T}_{l}\left(t\right) \tag{24.410}$$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)\geq0 \text{ para } k=1,2,\ldots,K, \tag{24.411}$$

$$\overline{T}_{k}\left(0\right)=0, \text{ y } \overline{T}_{k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente,} \tag{24.412}$$

$$\overline{I}_{i}\left(t\right)=t-\sum_{k\in C_{i}}\overline{T}_{k}\left(t\right) \text{ es no decreciente} \tag{24.413}$$

$$\overline{I}_{i}\left(\cdot\right) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0 \tag{24.414}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{24.415}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1520 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}\left(0\right),\overline{B}\left(0\right)\right)\in\mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??***, junto con la condición:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=\overline{Q}\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{A}\left(0\right)\right)^{+}-\left(I-P^{'}\right)M\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{B}\left(0\right)\right)^{+} \tag{24.416}$$

Definición 1521 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_{0} *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$*, con* $t\geq t_{0}$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 63 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_{0}>0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$ *para cualquier* $t\geq t_{0}$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq1$.

24.46 Modelo de Visitas Cíclicas con un Servidor: Estabilidad

24.47 Teorema 2.1

El resultado principal de Down [?] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 1056 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\sup\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}, \tag{24.417}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right]\leq\kappa_{r}, \tag{24.418}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]=0. \tag{24.419}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-}c.s. \tag{24.420}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ y $k=1,2,\ldots,K$.

Proposición 547 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{24.421}$$

Lema 64 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\left\{\zeta\left(k\right):k\in F\right\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $\left(0,\infty\right)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{24.422}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1057 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{24.423}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 1058 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{24.424}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 1059 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x)=f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)\right\|_f=0. \tag{24.425}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 1060 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds=\pi(f):=\int f(x)\,\pi(dx) \tag{24.426}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

24.48 Teorema 2.2

Teorema 1061 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0,c_0\geq0$,*

$$|Q(T)|\geq\epsilon_0T-c_0,\ T\geq0, \tag{24.427}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{24.428}$$

24.49 Teorema 2.3

Teorema 1062 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^K\rho_k+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{24.429}$$

i) Si $\rho<1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema **??**.

ii) Si $\rho<1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema **??**

24.50 Definiciones Básicas

Definición 1522. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 1523. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 1524. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1525. *Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1526. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1527. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1528. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1529. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1530. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{24.430}$$

Nota 761. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

entonces la ecuación (??) se puede escribir como

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{24.431}$$

Teorema 1063. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots,\}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots,\}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{24.432}$$

en $\{T < \infty\}$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 548. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 139 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1064 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1065 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* (α,μ,T,U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$, *para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 140 (Lema 5.2 [?]). *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$, *y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r}\tag{24.433}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1066 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 549 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{24.434}$$

Proposición 550 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{24.435}$$

Proposición 551 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{24.436}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 1067 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{24.437}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{24.438}$$

Teorema 1068 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1069 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

24.51 Proceso de Estados Markoviano para el Sistema

Sean $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ el tiempo residual de arribos a la cola k, para cada servidor m, sea $H_m(t)$ par ordenado que consiste en la cola que está siendo atendida y la política de servicio que se está utilizando. $B_m(t)$ los tiempos de servicio residuales, $B_m^0(t)$ el tiempo residual de traslado, $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H_m(t)$.

El proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{24.439}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{24.440}$$
$$P(\xi_k(1) + \ldots \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\, dx0 \text{ y} \tag{24.441}$$
$$\int_0^\infty q_k(x)\, dx > 0 \tag{24.442}$$

24.52 Procesos Fuerte de Markov

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho, Sharpe [?], en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$.

Se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable.

Definición 1531. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1532. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1533. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1534. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{24.443}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1070. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

24.53 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1535. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B)\,^{85}. \tag{24.444}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov [86] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{24.446}$$

Definición 1536. *Una familia $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t (P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 762. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{24.447}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

24.54 Primer Condición de Regularidad

Definición 1537. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \rightarrow X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1538 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t \in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1539. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E, \mathcal{E})$. La colección $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;

[85] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[86]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{24.445}$$

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \text{ y } X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{24.448}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x \{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

Definición 1540 (HD2). *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \to f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1541. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, **??**, de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, **??**, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Definición 1542. *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{F}$ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* X*, la pareja* $(X, \mathcal{F})$ *es llamado espacio medible. Un subconjunto* A *de* X *es llamado medible, o medible con respecto a* $\mathcal{F}$*, si* $A \in \mathcal{F}$.

Definición 1543. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *espacio de medida. Se dice que la medida* μ *es* σ*-finita si se puede escribir* $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ *con* $X_n \in \mathcal{F}$ *y* $\mu(X_n) < \infty$.

Definición 1544. *Sea* X *el conjunto de los úmeros reales* $\mathbb{R}$*. El álgebra de Borel es la* σ*-álgebra* B *generada por los intervalos abiertos* $(a, b) \in \mathbb{R}$*. Cualquier conjunto en* B *es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1545. *Una función* $f : X \to \mathbb{R}$*, es medible si para cualquier número real* α *el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X*. Equivalentemente, se dice que* f *es medible si*

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1546. *Sean* $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$*,* $i = 1, 2, \ldots,$ *espacios medibles y* $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ *el conjunto de todas las sucesiones* $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ *tales que* $\omega_i \in \Omega_i$*,* $i = 1, 2, \ldots,$*. Si* $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$*, definimos* $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$*. Al conjunto* B_n *se le llama* cilindro *con base* B^n*, el cilindro es llamado medible si* $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.

Definición 1547. *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de* σ*-álgebras* $\mathcal{F}_t$*, para* $t \geq 0$*, si para* $s < t$ *implica que* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$*, y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}_t$*-medible para cada* t*. Si no se especifica* $\mathcal{F}_t$ *entonces se toma* $\mathcal{F}_t$ *como* $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$*, la más pequeña* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω *que hace que cada* $X(s)$*, con* $s \leq t$ *sea Borel medible.*

Definición 1548. *[TSP, Ash [**?**]] Sea* $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ *familia creciente de sub* σ*-álgebras. es decir,* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *para* $s \leq t$*. Un tiempo de paro para* $\mathcal{F}(t)$ *es una función* $T : \Omega \to [0, \infty]$ *tal que* $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ *para cada* $t \geq 0$*. Un tiempo de paro para el proceso estocástico* $X(t), t \geq 0$ *es un tiempo de paro para las* σ*-álgebras* $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.

Definición 1549. *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, con* (S, χ) *espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a* $\{\mathcal{F}(t)\}$*, es decir, si para cualquier* $s, t \in I$*,* I *conjunto de índices,* $s < t$*, se tiene que* $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *y* $X(t)$ *es* $\mathcal{F}(t)$*-medible,*

Definición 1550. *Sea* $X(t), t \geq 0$ *proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a* $\mathcal{F}(t)$ *o que* $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ *es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto* $B \in \chi$*, y* $s, t \in I$*,* $s < t$ *se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{24.449}$$

Nota 763. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{24.450}$$

Teorema 1071. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{24.451}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{24.452}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{24.453}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{24.454}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t)=\begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda\left(n,\phi_n\left(s,\mathbf{z}\right)\right)ds\right), & t<t^*\left(\mathbf{x}\right),\\ 0, & t\geq t^*\left(\mathbf{x}\right)\end{cases} \tag{24.455}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1>t]=F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N,Z) con distribuición $Q(\cdot;\phi_n(T_1,\mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t\leq T_1$ es[87]

$$\mathbf{x}_t=(v_t,\zeta_t)=\begin{cases}(n,\phi_n(t,\mathbf{z})), & t<T_1,\\ (N,\mathbf{Z}), & t=t_1.\end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto T_2-T_1 lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1,T_2,\ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1>0$ y $T_1-T_2>0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 23 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t:=\sum_t \mathbb{1}_{(t\geq t)}$ el número de saltos en $[0,t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t]<\infty \textit{ para toda } t. \tag{24.456}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1551. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1552. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1553. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1554. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E)=sup\left\{\lambda(K): K \textit{ es compacto en } E\right\}. \tag{24.457}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1072. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E,\mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

24.55 Propiedades de Markov

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X,\mathcal{G},\mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I\subset\mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f(X_r): r\in I, rleqt, f\in\mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1555. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E,\mathcal{E})$ indexada por pares $s,t\in I$, con $s\leq t$ es una función de transición en $(E,\mathcal{E})$, si para todo $r\leq s<t$ en I y todo $x\in E$, $B\in\mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x,B)=\int_E P_{r,s}(x,dy)\,P_{s,t}(y,B)\,^{88}. \tag{24.458}$$

[87]Revisar página 362, y 364 de Davis [?].
[88]Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E,\mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[89] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_t\right)|\mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t}f\left(X_t\right) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{24.460}$$

Definición 1556. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f\left(x\right) = P_t\left(P_s f\right)\left(x\right), \;\; t,s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 764. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$*.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_{t+s}\right)|\mathcal{G}_t\right\} = P_s f\left(X_t\right) \;\; t,s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{24.461}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

24.56 Primer Condición de Regularidad

Definición 1557. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \rightarrow X_t\left(w\right)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E*.*

Definición 1558 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* $/P_t)$ *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ *y* $P_t\left(b\mathcal{E}^*\right) \subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ*.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1559. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E,\mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X} = (\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t,s \geq 0$*,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \;\; y \;\; X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{24.462}$$

iii) Para cualquier $x \in E$*,*$\mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$*.*

Definición 1560 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^{\alpha}$*, el proceso* $t \rightarrow f\left(X_t\right)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1561. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

[89]
$$\mathbb{P}\left\{H|\mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H|X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{24.459}$$

i) **X** *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t).

ii) **X** *satisface la condicion HD2,* **??***, relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 141 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$*, casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'}t, \text{ u.o.c.}, \tag{24.463}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k\left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{24.464}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k\left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{24.465}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 142 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$*, conforme* $n \to \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{24.466}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{24.467}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x\left(T^x(t)\right) = \left(S_1^x\left(T_1^x(t)\right), \ldots, S_K^x\left(T_K^x(t)\right)\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l \left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x\left(T^x(t)\right), \tag{24.468}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{24.469}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{24.470}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{24.471}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{24.472}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{24.473}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1073 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{24.474}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)\ u.o.c. \tag{24.475}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+}, \tag{24.476}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0, \tag{24.477}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\ \textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{24.478}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right)\ \textit{es no decreciente}, \tag{24.479}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0, \tag{24.480}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)\textit{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{24.481}$$

Definición 1562 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ *en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (*??*)-(*??*) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta>0$ *que depende de* μ,α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{U}|+|\overline{V}|=1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot+\delta\right)\equiv 0$.

Teorema 1074 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right)=\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{24.482}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q|\rightarrow\infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x|\rightarrow\infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1563 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$*, con* $t\geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right)\in\mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)|=1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 65 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0>0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right)=0$ *para cualquier* $t\geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}|=|\overline{Q}\left(0\right)|+|\overline{A}\left(0\right)|+|\overline{B}\left(0\right)|\leq 1$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 552. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$
$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$
$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$
$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$
para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j
$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$
$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$
para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 143 (Lema 3.1 [?])**.** *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1075 (Teorema 5.2 [?])**.** *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1076 (Teorema 5.1 [?])**.** *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$*, para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 144 (Lema 5.2 [?])**.** *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$*, y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$*, entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r}\qquad(24.483)$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1077 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?])**.** *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$*. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 553 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{24.484}$$

Proposición 554 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{24.485}$$

Proposición 555 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{24.486}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 1078 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{24.487}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{24.488}$$

Teorema 1079 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1080 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 556 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{24.489}$$

Lema 66 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max\,(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^r. \tag{24.490}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1081 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{24.491}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1082 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{24.492}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 1083 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{24.493}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 1084 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{24.494}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1085 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{24.495}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{24.496}$$

24.57 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]=\overline{N}>0$;
2) $\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(1)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}^{m}r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(i)\right]. \tag{24.497}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}(n)\right\}_{n\geq1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}(n)\right\}_{n\geq1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}<1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [?].

Si denotamos por

- $Q_{k}(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^{T}=\left(Q_{k}(t),A_{k}(t),B_{m}(t),B_{m}^{0}(t),C_{m}(t)\right), \tag{24.498}$$

para $k=1,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X}=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\})^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

24.57.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_l\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k\left(1\right) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{24.499}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k\left(i\right) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k\left(x\right) dx, \; 0 \leq a < b. \tag{24.500}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

24.58 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x, x \in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1,$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right) | \mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right),$$

en $\left\{\tau < \infty\right\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right).$$

Definición 1564. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right)=\int_{\mathbb{X}}P^{t}\left(x,D\right)\pi\left(dx\right),$$

para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t\geq 0$.

Definición 1565. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu\left(D\right)>0$ y $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_{x}\left\{\tau_{D}<\infty\right\}\equiv 1,$$

cuando $\tau_{D}=inf\left\{t\geq 0:X_{t}\in D\right\}$.

Nota 765. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}\left(\cdot\right)=\int_{\mathbf{X}}P_{x}\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right),$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 1566. *Un conjunto $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t>0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta>0$ tal que*

$$P^{t}\left(x,A\right)\geq\delta\nu\left(A\right),$$

para $x\in D,A\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 145 (Lema 3.1, Dai [?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_{x}\left(\tau_{B}<\infty\right)\equiv 1$ y que para algún $\delta>0$ se cumple que*

$$\sup\mathbb{E}_{x}\left[\tau_{B}\left(\delta\right)\right]<\infty, \tag{24.501}$$

donde $\tau_{B}\left(\delta\right)=inf\left\{t\geq\delta:X\left(t\right)\in B\right\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 146 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B=\left\{x\in\mathbb{X}:|x|\leq k\right\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k>0$.*

Teorema 1086 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^{x}\left(|x|\delta\right)|=0, \tag{24.502}$$

donde X^{x} se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B=\left\{x\in\mathbb{X}:|x|\leq k\right\}$ con algún $k>0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

24.59 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x\in\mathbb{X}$, sea

- $Q_{k}^{x}\left(t\right)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^{x}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.

- $T^{x,0}_{m,k}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}^0_m(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^x_m(|x|t), \frac{1}{|x|}T^{x,0}_m(|x|t)\right) \tag{24.503}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}^0_m(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{24.504}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{24.505}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{24.506}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}^0_{m,k}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{24.507}$$

Definición 1567 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1568. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1087 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{24.508}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1569 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 67 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1088 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{24.509}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{24.510}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{24.511}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{24.512}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1089 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{24.513}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

Dado el proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ definido en (**??**) que describe la dinámica del sistema de visitas cíclicas, si $U(t)$ es el residual de los tiempos de llegada al tiempo t entre dos usuarios consecutivos y $V(t)$ es el residual de los tiempos de servicio al tiempo t para el usuario que estás siendo atendido por el servidor. Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados que puede tomar el proceso X.

Lema 147 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k,$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_k-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_k-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t\geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea e es un vector de unos, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{cc}1, & S\left(k\right)=i,\\ 0, & \text{en otro caso}.\end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema (**??**):

Teorema 1090 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\to\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\to\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right),U^{x_{n_j}}\left(0\right),V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right)\to\left(\overline{Q}\left(0\right),\overline{U},\overline{V}\right),\tag{24.514}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\to\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)\ u.o.c.\tag{24.515}$$

Además, $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}\left(t\right)=Q\left(0\right)+\left(\alpha t-\overline{U}\right)^{+}-\left(I-P\right)^{'}M^{-1}\left(\overline{T}\left(t\right)-\overline{V}\right)^{+},\tag{24.516}$$

$$\overline{Q}\left(t\right)\geq 0,\tag{24.517}$$

$$\overline{T}\left(t\right)\ \text{es no decreciente y comienza en cero},\tag{24.518}$$

$$\overline{I}\left(t\right)=et-C\overline{T}\left(t\right)\ \text{es no decreciente},\tag{24.519}$$

$$\int_{0}^{\infty}\left(C\overline{Q}\left(t\right)\right)d\overline{I}\left(t\right)=0,\tag{24.520}$$

$$\text{Condiciones en }\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola},\tag{24.521}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 557 (Proposición 4.2, Dai [?]). *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de **??** y suponga que cuando $x\to\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_k^x\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_k^x\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_k^{x,0}\left(0\right)\right)\to\left(\overline{Q}_k\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. El flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) *Los vectores de tiempo ocupado* $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^{0}(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0)=\overline{T}^{0}(0)=0$.

ii) *Para todo* $t\geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}(t)+\overline{T}_{k}^{0}(t)\right]=t.$$

iii) *Para todo* $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}(t)=\overline{Q}_{k}(0)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}(t).$$

iv) *Para todo* $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}(t)=\rho_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}(t)=0$.

v) *Para todo* k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}(t)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}(t).$$

vi) *Para todo* $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}(t)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}(t),$$

para $\overline{Q}_{k}(t)>0$.

Lema 148 (Lema 3.1, Chen [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Lema 149 (Lema 5.2, Gut [?]). *Sea* $\{\xi(k):k\in\mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0,\infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t)=max\left\{n\geq 1:\xi(1)+\cdots+\xi(n-1)\leq t\right\}.$$

Si $E[\xi(1)]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E[\xi_{1}]}\right)^{r}, \tag{24.522}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) *Para cualquier* $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$.

b) *Las variables aleatorias* $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1091 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo, Gut [?]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}(X_{1}]\leq\infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r}\rightarrow\frac{1}{\mu^{r}}$, *cuando* $t\rightarrow\infty$ *para todo* $r>0$.

Proposición 558 (Proposición 5.1, Dai y Sean [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_{0}>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X(t_{0}|x|)|^{p+1}\right]=0. \tag{24.523}$$

Proposición 559 (Proposición 5.3, Dai y Sean [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1}<\infty$, $\delta>0$ *y un conjunto compacto* $C\subset X$.

$$\mathbb{E}_{x}\left[\int_{0}^{\tau_{C}(\delta)}\left(1+|X(t)|^{p}\right)dt\right]\leq C_{p+1}\left(1+|x|^{p+1}\right). \tag{24.524}$$

Proposición 560 (Proposición 5.4, Dai y Sean [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right],$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{24.525}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1092 (Teorema 5.5, Dai y Sean [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\}, \tag{24.526}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p. \tag{24.527}$$

Teorema 1093 (Teorema 6.2 Dai y Sean [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \to 0,$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty,$$

donde

$$\parallel P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \parallel_f = sup_{|g\leq f|} |\int \pi(dy)\, g(y) - \int P^t(x,dy)\, g(y)\,|,$$

para $x \in \mathbb{X}$.

Teorema 1094 (Teorema 6.3, Dai y Sean [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)} \left| P^t(c,\cdot) - \pi(\cdot) \right|_f = 0,$$

para $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)} |\mathbb{E}_x [Q_t] - \mathbb{E}_\pi [Q_0]| = 0.$$

Proposición 561 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0. \tag{24.528}$$

Teorema 1095 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\}, \tag{24.529}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1096 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right), \tag{24.530}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1097 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0}, c_{0}\geq 0$,*

$$|Q\left(T\right)|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\, T\geq0, \tag{24.531}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{24.532}$$

Demostración 5 (Teorema ??). *La demostración de este teorema se da a continuación:*

*i) Utilizando la proposición **??** se tiene que la proposición **??** es cierta para $f\left(x\right)=1+|x|^{p}$.*

*i) es consecuencia directa del Teorema **??**.*

iii) ver la demostración dada en Dai y Sean [?] páginas 1901-1902.

iv) ver Dai y Sean [?] páginas 1902-1903 ó [?].

24.59.1 Modelo de Flujo y Estabilidad

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^{k}\left(n\right):=\sum_{i=1}^{n}\phi^{k}\left(i\right). \tag{24.533}$$

suponiendo que el estado inicial de la red es $x=\left(q,a,b\right)\in X$, entonces para cada k

$$E_{k}^{x}\left(t\right):=\max\left\{n\geq0:A_{k}^{x}\left(0\right)+\psi_{k}\left(1\right)+\cdots+\psi_{k}\left(n-1\right)\leq t\right\} \tag{24.534}$$
$$S_{k}^{x}\left(t\right):=\max\left\{n\geq0:B_{k}^{x}\left(0\right)+\eta_{k}\left(1\right)+\cdots+\eta_{k}\left(n-1\right)\leq t\right\} \tag{24.535}$$

Sea $T_{k}^{x}\left(t\right)$ el tiempo acumulado que el servidor $s\left(k\right)$ ha utilizado en los usuarios de la clase k en el intervalo $\left[0,t\right]$. Entonces se tienen las siguientes ecuaciones:

$$Q_{k}^{x}\left(t\right)=Q_{k}^{x}\left(0\right)+E_{k}^{x}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{k}\Phi_{k}^{l}S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\right)-S_{k}^{x}\left(T_{k}^{x}\right) \tag{24.536}$$

$$Q^{x}\left(t\right)=\left(Q_{1}^{x}\left(t\right),\ldots,Q_{K}^{x}\left(t\right)\right)^{'}\geq0, \tag{24.537}$$

$$T^{x}\left(t\right)=\left(T_{1}^{x}\left(t\right),\ldots,T_{K}^{x}\left(t\right)\right)^{'}\geq0,\text{ es no decreciente} \tag{24.538}$$

$$I_{i}^{x}\left(t\right)=t-\sum_{k\in C_{i}}T_{k}^{x}\left(t\right)\text{ es no decreciente} \tag{24.539}$$

$$\int_{0}^{\infty}\sum_{k\in C_{i}}Q_{k}^{x}\left(t\right)dI_{i}^{x}\left(t\right)=0 \tag{24.540}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre }\left(Q^{x}\left(\cdot\right),T^{x}\left(\cdot\right)\right)\text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{24.541}$$

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{24.542}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola. Si se hace $|q| \rightarrow \infty$ y se mantienen las componentes restantes fijas, de la condición inicial x, cualquier punto límite del proceso normalizado $\overline{Q}^{x}$ es una solución del siguiente modelo de flujo, ver [?].

Definición 1570. *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $(Q^{x}(\cdot), T^{x}(\cdot))$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk}\mu_l \overline{T}_l(t) \tag{24.543}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{24.544}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{24.545}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{24.546}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempot cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^{x}(t)\, dI_i^{x}(t) = 0 \tag{24.547}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } (Q^{x}(\cdot), T^{x}(\cdot)) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{24.548}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1571. *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??**, *junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^{+} - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^{+} \tag{24.549}$$

Definición 1572. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en [?].

Lema 68. *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|overlinex| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

24.59.2 Resultados principales

Supuestos necesarios sobre la red

Supuestos 24. *A1)* $\psi_1, \ldots, \psi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ *son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\psi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\psi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{24.550}$$

$$P(\psi_k(1) + \dots \psi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\,dx0 \text{ y} \tag{24.551}$$

$$\int_0^\infty q_k(x)\,dx > 0 \tag{24.552}$$

El argumento dado en [?] en el lema **??** se puede aplicar para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños.Entonces la condición $A3$) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 1098. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right]ds \leq \kappa_p \tag{24.553}$$

donde p es el entero dado por A2). Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r \tag{24.554}$$

para $r = 1, \dots, p$ y $k = 1, \dots, K$.

iii) EL primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0. \tag{24.555}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \tag{24.556}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r = 1, \dots, p$ y $k = 1, \dots, K$.

Demostración 6. *La demostración de este resultado se da aplicando los teoremas* **??**, **??**, **??** *y* **??**

24.59.3 Definiciones Generales

Definimos un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada. Bajo cualquier *preemptive buffer priority* disciplina de servicio, el estado $\mathbb{X}(t)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}(t) = (Q_k(t), A_l(t), B_k(t) : k = 1, 2, \dots, K, l \in \mathcal{A}) \tag{24.557}$$

donde $Q_k(t)$ es la longitud de la cola para los usuarios de la clase k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k(t)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio. Los tiempos de arribo residuales, que son iguales al tiempo que queda hasta que el próximo usuario de la clase k llega, se denotan por $A_k(t)$. Tanto $B_k(t)$ como $A_k(t)$ se suponen continuos por la derecha.

Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x = (q, a, b)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = (q, a, b) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x\| = |q| + |a| + |b|$. En [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho en el espacio de estadio medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, est definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y est adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; $\{P_x, x \in X\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in X$

$$P_x \{\mathbb{X}(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{\mathbb{X}(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la sigma algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(\mathbb{X}(t) \in D)$$

Definición 1573. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_X P^t(x, D) \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1574. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

- Si X es Harris recurrente, entonces una única medida invariante π existe ([?]).
- Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama *Harris recurrente positiva.*
- Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria y hacemos

  $$P_\pi(\cdot) [= \int_X P_x(\cdot) \pi(dx)$$

  y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, as, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π

Definición 1575. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.[90]

24.59.4 Definiciones y Descripción del Modelo

El modelo está compuesto por c colas de capacidad infinita, etiquetadas de 1 a c las cuales son atendidas por s servidores. Los servidores atienden de acuerdo a una cadena de Markov independiente $\left(X_n^i\right)_n$ con $1 \leq i \leq s$ y $n \in \{1, 2, \ldots, c\}$ con la misma matriz de transición $r_{k,l}$ y única medida invariante (p_k). Cada servidor permanece atendiendo en la cola un periodo llamado de visita y determinada por la política de servicio asignada a la cola.

Los usuarios llegan a la cola k con una tasa λ_k y son atendidos a una razón μ_k. Las sucesiones de tiempos de interarribo $(\tau_k(n))_n$, la de tiempos de servicio $\left(\sigma_k^i(n)\right)_n$ y la de tiempos de cambio $\left(\sigma_{k,l}^{0,i}(n)\right)_n$ requeridas en la cola k para el servidor i son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas con distribución general independiente de i, con media $\sigma_k = \frac{1}{\mu_k}$, respectivamente $\sigma_{k,l}^0 = \frac{1}{\mu_{k,l}^0}$, e independiente de las cadenas de Markov $\left(X_n^i\right)_n$. Además se supone que los tiempos de interarribo se asume son acotados, para cada $\rho_k = \lambda_k \sigma_k < s$ para asegurar la estabilidad de la cola k cuando opera como una cola $M/GM/1$.

[90]En [?] muestran que si $P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ solamente para uno conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris recurrente

24.59.5 Políticas de Servicio

Una política de servicio determina el número de usuarios que serán atendidos sin interrupción en periodo de servicio por los servidores que atienden a la cola. Para un solo servidor esta se define a través de una función f donde $f(x,a)$ es el número de usuarios que son atendidos sin interrupción cuando el servidor llega a la cola y encuentra x usuarios esperando dado el tiempo transcurrido de interarribo a. Sea $v(x,a)$ la duración del periodo de servicio para una sola condición inicial (x,a).

Las políticas de servicio consideradas satisfacen las siguientes propiedades:

i) Hay conservación del trabajo, es decir

$$v(x,a) = \sum_{l=1}^{f(x,a)} \sigma(l)$$

con $f(0,a) = v(0,a) = 0$, donde $(\sigma(l))_l$ es una sucesión independiente e idénticamente distribuida de los tiempos de servicio solicitados.

ii) La selección de usuarios para se atendidos es independiente de sus correspondientes tiempos de servicio y del pasado hasta el inicio del periodo de servicio. Así las distribución (f,v) no depende del orden en el cuál son atendidos los usuarios.

iii) La política de servicio es monótona en el sentido de que para cada $a \geq 0$ los números $f(x,a)$ son monótonos en distribución en x y su límite en distribución cuando $x \to \infty$ es una variable aleatoria F^{*0} que no depende de a.

iv) El número de usuarios atendidos por cada servidor es acotado por $f^{min}(x)$ de la longitud de la cola x que además converge monótonamente en distribución a F^{*} cuando $x \to \infty$

24.59.6 Proceso de Estados

El sistema de colas se describe por medio del proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ como se define a continuación. El estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = (Q(t), P(t), A(t), R(t), C(t))$$

donde

- $Q(t) = (Q_k(t))_{k=1}^{c}$, número de usuarios en la cola k al tiempo t.
- $P(t) = \left(P^i(t)\right)_{i=1}^{s}$, es la posición del servidor i.
- $A(t) = (A_k(t))_{k=1}^{c}$, es el residual del tiempo de arribo en la cola k al tiempo t.
- $R(t) = \left(R_k^i(t), R_{k,l}^{0,i}(t)\right)_{k,l,i=1}^{c,c,s}$, el primero es el residual del tiempo de servicio del usuario atendido por servidor i en la cola k al tiempo t, la segunda componente es el residual del tiempo de cambio del servidor i de la cola k a la cola l al tiempo t.
- $C(t) = \left(C_k^i(t)\right)_{k,i=1}^{c,s}$, es la componente correspondiente a la cola k y al servidor i que está determinada por la política de servicio en la cola k y que hace al proceso $X(t)$ un proceso de Markov.

Todos los procesos definidos arriba se suponen continuos por la derecha.

El proceso X tiene la propiedad fuerte de Markov y su espacio de estados es el espacio producto

$$\mathcal{X} = \mathbb{N}^c \times E^s \times \mathbb{R}_+^c \times \mathbb{R}_+^{cs} \times \mathbb{R}_+^{c^2 s} \times \mathcal{C}$$

donde $E = \{1,2,\ldots,c\}^2 \cup \{1,2,\ldots,c\}$ y $\mathcal{C}$ depende de las políticas de servicio.

24.59.7 Introducción

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1. $$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0 \tag{24.558}$$

2. $$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N} \tag{24.559}$$

   para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m} = r_{j,j^{'}}$
- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.
- Finalmente, se define $$\delta^{*} := \sum_{j,j^{'}} p_j r_{j,j^{'}}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right]. \tag{24.560}$$

24.59.8 Colas Cíclicas

El *token passing ring* es una estación de un solo servidor con K clases de usuarios. Cada clase tiene su propio regulador en la estación. Los usuarios llegan al regulador con razón α_k y son atendidos con taza μ_k.

La red se puede modelar como un Proceso de Markov con espacio de estados continuo, continuo en el tiempo:
$$X(t)^{T} = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t), B_k^{0}(t), C(t) : k = 1, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right) \tag{24.561}$$
donde $Q_k(t), B_k(t)$ y $A_k(t)$ se define como en **??**, $B_k^{0}(t)$ es el tiempo residual de cambio de la clase k a la clase $k+1\,(modK)$; $C(t)$ indica el número de servicios que han sido comenzados y/o completados durante la sesión activa del buffer.

Los parámetros cruciales son la carga nominal de la cola k: $\beta_k = \alpha_k/\mu_k$ y la carga total es $\rho_0 = \sum\beta_k$, la media total del tiempo de cambio en un ciclo del token está definido por

$$u^{0} = \sum_{k=1}^{K}\mathbb{E}\left[\eta_k^{0}(1)\right] = \sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\mu_k^{0}} \tag{24.562}$$

El proceso de la longitud de la cola $Q_k^{x}(t)$ y el proceso de acumulación del tiempo de servicio $T_k^{x}(t)$ para el buffer k y para el estado inicial x se definen como antes. Sea $T_k^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el token tarda en cambiar del buffer k al $k+1 \mod K$. Suponga que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^{0}(\cdot)\right)$ es un punto límite de
$$\left(\frac{1}{|x|}Q^{x}(|x|t), \frac{1}{|x|}T^{x}(|x|t), \frac{1}{|x|}T^{x,0}(|x|t)\right) \tag{24.563}$$
cuando $|x| \rightarrow \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t), \overline{T}^{0}(t)\right)$ es un flujo límite retrasado del token ring.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado

Proposición 562. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

24.59.9 Resultados Previos

Lema 69. *El proceso estocástico* Φ *es un proceso de markov fuerte, temporalmente homogéneo, con trayectorias muestrales continuas por la derecha, cuyo espacio de estados* Y *es igual a* $X\times\mathbb{R}$

Proposición 563. *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0>0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \qquad (24.564)$$

Lema 70. *Sea* $\{\zeta\left(k\right):k\in F\}$ *una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en* $(0,\infty)$, *y sea* $E\left(t\right)=max\left(n\geq1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. *Si* $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, *entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \qquad (24.565)$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1099. *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \qquad (24.566)$$

para $t>0$ *y* $x\in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds\leq\kappa_{p}.$$

Teorema 1100. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$||P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)||_{f_p},\ t\to\infty, x\in X. \tag{24.567}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 1101. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x)=f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\to\infty}t^{p-1}||P^t(x,\cdot)-\pi(\cdot)||_f=0. \tag{24.568}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\to\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]|=0.$$

Teorema 1102. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds=\pi(f):=\int f(x)\,\pi(dx) \tag{24.569}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

24.59.10 Teorema de Estabilidad: Descripción

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x)=N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1. $$lim_{x\to\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right]=\overline{N}>0 \tag{24.570}$$

2. $$\mathbb{E}\left[N(x)\right]\leq\overline{N} \tag{24.571}$$

   para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}=r_{j,j^{'}}$
- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right]\geq0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}\right)$.
- Finalmente, se define
  $$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_jr_{j,j^{'}}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}(1)\right]. \tag{24.572}$$

24.60 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N\left(\omega\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]=\overline{N}>0$;
2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(1\right)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}^{m}r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(i\right)\right]. \tag{24.573}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}<1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [?].

Si denotamos por

- $Q_{k}\left(t\right)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}\left(t\right)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}\left(t\right)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X\left(t\right)^{T}=\left(Q_{k}\left(t\right),A_{k}\left(t\right),B_{m}\left(t\right),B_{m}^{0}\left(t\right),C_{m}\left(t\right)\right), \tag{24.574}$$

para $k=1,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X}=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

24.60.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_l\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k\left(\cdot\right)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k\left(1\right) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0, \quad (24.575)$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k\left(i\right) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k\left(x\right) dx, \; 0 \leq a < b. \quad (24.576)$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición ??.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

24.61 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x, x \in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1,$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right) | \mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right),$$

en $\left\{\tau < \infty\right\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right).$$

Definición 1576. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D)\, \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1577. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 766. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot)\, \pi(dx),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 1578. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 150 (Lema 3.1, Dai [?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{24.577}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 151 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1103 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{24.578}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

24.62 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.

- $T^{x,0}_{m,k}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}^0_m(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^x_m(|x|t), \frac{1}{|x|}T^{x,0}_m(|x|t)\right) \tag{24.579}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}^0_m(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{24.580}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{24.581}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{24.582}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}^0_{m,k}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{24.583}$$

Definición 1579 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1580. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1104 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{24.584}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1581 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 71 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1105 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p*, y para cada condición inicial* $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{24.585}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{24.586}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$*. Donde* π *es la probabilidad invariante para* X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}*:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{24.587}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{24.588}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1106 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{24.589}$$

i) Si $\rho < 1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema* **??**.

ii) Si $\rho > 1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema* **??**

24.63 Modelo de Flujo

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Sea x el número de usuarios en la cola esperando por servicio y $N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política dada y fija mientras el servidor permanece dando servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0. \tag{24.590}$$

(S2.)
$$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right] \leq \overline{N}, \tag{24.591}$$

para cualquier valor de x.

El tiempo que tarda un servidor en volver a dar servicio después de abandonar la cola inmediata anterior y llegar a la próxima se llama tiempo de traslado o de cambio de cola, al momento de la n-ésima visita del servidor a la cola j se genera una sucesión de variables aleatorias $\delta_{j,j+1}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con la propiedad de que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right] \geq 0$.

Se define
$$\delta^{*} := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}\left(1\right)\right]. \tag{24.592}$$

Los tiempos entre arribos a la cola k, son de la forma $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos. Los tiempos de servicio $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k} = \lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Para el caso más sencillo podemos definir un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada, el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$ a cualquier tiempo t puede definirse como
$$\mathbb{X}\left(t\right) = \left(Q_{k}\left(t\right), A_{l}\left(t\right), B_{k}\left(t\right) : k = 1, 2, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right), \tag{24.593}$$

donde $Q_{k}\left(t\right)$ es la longitud de la cola k para los usuarios esperando servicio, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_{k}\left(t\right)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio.

Los tiempos entre arribos residuales, que son el tiempo que queda hasta que el próximo usuario llega a la cola para recibir servicio, se denotan por $A_{k}\left(t\right)$. Tanto $B_{k}\left(t\right)$ como $A_{k}\left(t\right)$ se suponen continuos por la derecha [?].

Sea $\mathcal{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}\left(t\right)$, y sea $x = \left(q, a, b\right)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = \left(q, a, b\right) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x\| = |q| + |a| + |b|$. En [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que
$$\left(\left(\Omega, \mathcal{F}\right), \mathcal{F}_{t}, \mathbb{X}\left(t\right), \theta_{t}, P_{x}\right)$$
es un proceso de *Borel Derecho* en el espacio de estados medible $\left(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}\right)$.

Sea $P^{t}\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como
$$P^{t}\left(x, D\right) = P_{x}\left(\mathbb{X}\left(t\right) \in D\right).$$

Definición 1582. *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*
$$\pi\left(D\right) = \int_{X} P^{t}\left(x, D\right) \pi\left(dx\right),$$
para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1583. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$, tal que si $\nu\left(D\right) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*
$$P_{x}\left\{\tau_{D} < \infty\right\} \equiv 1,$$
cuando $\tau_{D} = inf\left\{t \geq 0 : \mathbb{X}_{t} \in D\right\}$.

Definición 1584. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

Nota 767. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π ([?]).*

*ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso a la medida se le llama **Harris recurrente positiva**.*

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria; se define

$$P_\pi(\cdot) = \int_X P_x(\cdot)\,\pi(dx).$$

Se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, así, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π.

iv) En [?] se muestra que si $P_x\{\tau_D < \infty\} = 1$ incluso para solamente un conjunto pequeño, entonces el proceso de Harris es recurrente.

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\right) \tag{24.594}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{24.595}$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([?]).

Dada una condición inicial $x \in \mathcal{X}$, $Q_k^x(t)$ es la longitud de la cola k al tiempo t y $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en atender a los usuarios de la cola k. De igual manera se define $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en cambiar de cola para volver a atender a los usuarios.

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t), \tag{24.596}$$

$$\overline{T}_m^x(t) = \frac{1}{|x|} T_m^x(|x|t), \tag{24.597}$$

$$\overline{T}_m^{x,0}(t) = \frac{1}{|x|} T_m^{x,0}(|x|t). \tag{24.598}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola, al conjunto de todos los posibles flujos límite se le llamará **modelo de flujo**, ([?]).

Definición 1585. *Un flujo límite para un sistema de visitas bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{24.599}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{24.600}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{24.601}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ param} = 1, 2, \ldots, M \tag{24.602}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en (??)-(??) se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Definición 1586. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

24.64 Estabilidad de los Sistemas de Visitas Cíclicas

Es necesario realizar los siguientes supuestos, ver ([?]) y ([?]):

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{24.603}$$

$$P(\xi_k(1) + \ldots \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\, dx0 \text{ y} \tag{24.604}$$

$$\int_0^\infty q_k(x)\, dx > 0 \tag{24.605}$$

En [?] ser da un argumento para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños. Entonces la condición A3) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 1107. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, *y para cada condición inicial* $x \in X$

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] ds \leq \kappa_p \tag{24.606}$$

donde p es el entero dado por A2).

Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_{k}\left(t\right)^{r}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right]\leq\kappa_{r} \tag{24.607}$$

para $r=1,\ldots,p$ y $k=1,\ldots,K$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0. \tag{24.608}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right] \tag{24.609}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r=1,\ldots,p$ y $k=1,\ldots,K$.

Teorema 1108. *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$|Q\left(T\right)|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ con\ T\geq0, \tag{24.610}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{24.611}$$

24.65 Resultados principales

En el caso particular de un modelo con un solo servidor, $M=1$, se tiene que si se define

Definición 1587.

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}+\max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_{j}}{\overline{N}}\right)\delta^{*}. \tag{24.612}$$

entonces

Teorema 1109. *i) Si $\rho<1$, entonces la red es estable, es decir el teorema (**??**) se cumple.*

*ii) De lo contrario, es decir, si $\rho>1$ entonces la red es inestable, es decir, el teorema (**??**).*

24.66 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N\left(\omega\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]=\overline{N}>0$;

2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$

- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta^{m}_{j,j'}(n)$, con $\delta^{m}_{j,j'}(n)$, $n \geq 1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta^{m}_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\left\{p^{m}_{j}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r^{m}_{j,j'}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*} := \sum_{j,j'} p^{m}_{j} r^{m}_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta^{m}_{j,j'}(i)\right]. \tag{24.613}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}(n)\right\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}(n)\right\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k} = 1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k} = \lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_{k} < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [?].

Si denotamos por

- $Q_{k}(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B^{0}_{m}(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^{T} = \left(Q_{k}(t), A_{k}(t), B_{m}(t), B^{0}_{m}(t), C_{m}(t)\right), \tag{24.614}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}^{K}_{+} \times \mathbb{R}^{K}_{+} \times \left(\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\}\right)^{M} \times \mathbb{R}^{K}_{+} \times \mathbb{Z}^{K}_{+}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

24.66.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_{1}, \ldots, \xi_{K}, \eta_{1}, \ldots, \eta_{K}$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_{l}(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_{k}(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_{k}(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_{+}$, y un entero j_{k}, tal que

$$P\left(\xi_{k}(1) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{24.615}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_{k}} \xi_{k}(i) \leq b\right\} \geq \int_{a}^{b} q_{k}(x)\,dx, \; 0 \leq a < b. \tag{24.616}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

24.67 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_{t},X\left(t\right),\theta_{t},P_{x}\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X=\left\{X\left(t\right),t\geq0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_{t},t\geq0\right\}$; la colección $\left\{P_{x},x\in\mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x\in\mathbb{X}$

$$P_{x}\left\{X\left(0\right)=x\right\}=1,$$

y

$$E_{x}\left\{f\left(X\circ\theta_{t}\right)|\mathcal{F}_{t}\right\}=E_{X}\left(\tau\right)f\left(X\right),$$

en $\left\{\tau<\infty\right\}$, P_{x}-c.s., con θ_{t} definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_{t}$-tiempo de paro

$$\left(X\circ\theta_{\tau}\right)\left(w\right)=\left\{X\left(\tau\left(w\right)+t,w\right),t\geq0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^{t}\left(x,D\right)$, $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t\geq0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^{t}\left(x,D\right)=P_{x}\left(X\left(t\right)\in D\right).$$

Definición 1588. *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right)=\int_{\mathbb{X}}P^{t}\left(x,D\right)\pi\left(dx\right),$$

para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t\geq0$.

Definición 1589. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$, tal que si $\nu\left(D\right)>0$ y $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_{x}\left\{\tau_{D}<\infty\right\}\equiv1,$$

cuando $\tau_{D}=inf\left\{t\geq0:X_{t}\in D\right\}$.

Nota 768. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}\left(\cdot\right)=\int_{\mathbf{X}}P_{x}\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right),$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 1590. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^{t}(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 152 (Lema 3.1, Dai [?])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x[\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{24.617}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 153 (Lema 3.1, Dai [?])**.** *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1110 (Teorema 3.1, Dai [?])**.** *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^{x}(|x|\delta)| = 0, \tag{24.618}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

24.68 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^{x}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^{x}(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x}(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{24.619}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M}\mu_k\overline{T}_{m,k}(t), \tag{24.620}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{24.621}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{24.622}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}^{0}_{m,k}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{24.623}$$

Definición 1591 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^{0}(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1592. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1111 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x| t). \tag{24.624}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1593 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 72 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1112 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_{0}^{t} \mathbb{E}_{x}\left[|Q(s)|^{p}\right] ds \leq \kappa_p, \tag{24.625}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t \to \infty} \mathbb{E}_{x}\left[Q_k(t)^{r}\right] = \mathbb{E}_{\pi}\left[Q_k(0)^{r}\right] \leq \kappa_r, \tag{24.626}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t \to \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_{x}\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_{\pi}\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{24.627}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds=\mathbb{E}_{\pi}\left[Q_{k}\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-}c.s. \tag{24.628}$$

para $r=1,2,\ldots,p$ *y* $k=1,2,\ldots,K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1113 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_{j}}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_{s}}\right)\delta^{*} \tag{24.629}$$

i) Si $\rho<1$ *entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema* **??**.

ii) Si $\rho>1$ *entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema* **??**

24.69 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N\left(\omega\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]=\overline{N}>0$;

2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(1\right)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}^{m}r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(i\right)\right]. \tag{24.630}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho = \sum_{k=1}^{K}\rho_k < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [?].

Si denotamos por

- $Q_k(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_m(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_m^0(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right), \tag{24.631}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

24.69.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\
\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{24.632}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{24.633}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición ??.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

24.70 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x, x \in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1,$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right) | \mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right),$$

en $\left\{\tau < \infty\right\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right).$$

Definición 1594. *Una medida no cero π en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right) = \int_{\mathbb{X}} P^t\left(x, D\right) \pi\left(dx\right),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1595. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$, tal que si $\nu\left(D\right) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\left\{t \geq 0 : X_t \in D\right\}$.

Nota 769. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi\left(\cdot\right) = \int_{\mathbf{X}} P_x\left(\cdot\right) \pi\left(dx\right),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 1596. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t\left(x, A\right) \geq \delta\nu\left(A\right),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 154 (Lema 3.1, Dai [?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x\left[\tau_B(\delta)\right] < \infty, \tag{24.634}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 155 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1114 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{24.635}$$

donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

24.71 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{24.636}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M}\mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{24.637}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{24.638}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{24.639}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{24.640}$$

Definición 1597 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1598. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, λ *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1115 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right). \tag{24.641}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1599 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$.

Lema 73 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1116 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p*, y para cada condición inicial* $x \in X$

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q\left(s\right)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{24.642}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t \to \infty} \mathbb{E}_x \left[Q_k\left(t\right)^r\right] = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k\left(0\right)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{24.643}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$*. Donde* π *es la probabilidad invariante para* X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}*:*

$$lim_{t \to \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x \left[Q_k\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_\pi \left[Q_k\left(0\right)\right]| = 0. \tag{24.644}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r\left(s\right) ds = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k\left(0\right)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{24.645}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ *y* $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1117 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_{j}}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_{s}}\right)\delta^{*} \tag{24.646}$$

i) Si $\rho<1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho>1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

24.71.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_{1},\dots,\xi_{K},\eta_{1},\dots,\eta_{K}$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p\geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_{l}\left(1\right)^{p+1}\right]&<\infty \text{ para } l=1,\dots,K \text{ y}\\ \mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)^{p+1}\right]&<\infty \text{ para } k=1,\dots,K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k=1,2,\dots,K$ existe una función positiva $q_{k}\left(\cdot\right)$ definida en $\mathbb{R}_{+}$, y un entero j_{k}, tal que

$$P\left(\xi_{k}\left(1\right)\geq x\right) > 0, \text{ para todo } x>0, \tag{24.647}$$

$$P\left\{a\leq\sum_{i=1}^{j_{k}}\xi_{k}\left(i\right)\leq b\right\} \geq \int_{a}^{b}q_{k}\left(x\right)dx,\ 0\leq a<b. \tag{24.648}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

24.72 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_{t},X\left(t\right),\theta_{t},P_{x}\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X=\left\{X\left(t\right),t\geq0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$ y está

adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x \{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 1600. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D) \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1601. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf \{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 770. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot) \pi(dx),$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 1602. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta \nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 156 (Lema 3.1, Dai [?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x [\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{24.649}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf \{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 157 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1118 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{24.650}$$

*donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

24.73 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.
- $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t)\right) \tag{24.651}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}_m^0(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{24.652}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{24.653}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{24.654}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{24.655}$$

Definición 1603 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1604. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1119 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{24.656}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1605 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 74 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1120 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{24.657}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{24.658}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{24.659}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{24.660}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1121 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{24.661}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

24.74 Supuestos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]=\overline{N}>0$;

2) $\mathbb{E}\left[N(\omega)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}(n)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(1)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}^{m}r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}(i)\right]. \tag{24.662}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}(n)\right\}_{n\geq1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}(n)\right\}_{n\geq1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}<1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [?].

Si denotamos por

- $Q_{k}(t)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}(t)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}(t)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^{T}=\left(Q_{k}(t),A_{k}(t),B_{m}(t),B_{m}^{0}(t),C_{m}(t)\right), \tag{24.663}$$

para $k=1,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X}=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\})^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

24.74.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_l\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l = 1, \ldots, K \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k\left(\cdot\right)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P\left(\xi_k\left(1\right) \geq x\right) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{24.664}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k\left(i\right) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k\left(x\right) dx, \ 0 \leq a < b. \tag{24.665}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición ??.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'}$) es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

24.75 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $\left(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}}\right)$. El Proceso $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x, x \in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1,$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right) | \mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right),$$

en $\left\{\tau < \infty\right\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [?, ?].

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right).$$

Definición 1606. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right)=\int_{\mathbb{X}}P^{t}\left(x,D\right)\pi\left(dx\right),$$

para todo $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t\geq0$.

Definición 1607. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X},\mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu\left(D\right)>0$ y $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_{x}\left\{\tau_{D}<\infty\right\}\equiv1,$$

cuando $\tau_{D}=inf\left\{t\geq0:X_{t}\in D\right\}$.

Nota 771. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_{\pi}\left(\cdot\right)=\int_{\mathbf{X}}P_{x}\left(\cdot\right)\pi\left(dx\right),$$

y se utiliza E_{π} para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [?].

Definición 1608. *Un conjunto $D\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t>0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta>0$ tal que*

$$P^{t}\left(x,A\right)\geq\delta\nu\left(A\right),$$

para $x\in D,A\in\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [?]:

Lema 158 (Lema 3.1, Dai [?]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_{x}\left(\tau_{B}<\infty\right)\equiv1$ y que para algún $\delta>0$ se cumple que*

$$\sup\mathbb{E}_{x}\left[\tau_{B}\left(\delta\right)\right]<\infty, \tag{24.666}$$

donde $\tau_{B}\left(\delta\right)=inf\left\{t\geq\delta:X\left(t\right)\in B\right\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 159 (Lema 3.1, Dai [?]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B=\left\{x\in\mathbb{X}:|x|\leq k\right\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k>0$.*

Teorema 1122 (Teorema 3.1, Dai [?]). *Si existe un $\delta>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^{x}\left(|x|\delta\right)|=0, \tag{24.667}$$

donde X^{x} se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (??) se cumple para $B=\left\{x\in\mathbb{X}:|x|\leq k\right\}$ con algún $k>0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

24.76 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x\in\mathbb{X}$, sea

- $Q_{k}^{x}\left(t\right)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^{x}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.

- $T^{x,0}_{m,k}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}^0_m(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^x_m(|x|t), \frac{1}{|x|}T^{x,0}_m(|x|t)\right) \tag{24.668}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}^0_m(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{24.669}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{24.670}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{24.671}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}^0_{m,k}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{24.672}$$

Definición 1609 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1610. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1123 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{24.673}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1611 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 75 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1124 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{24.674}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{24.675}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{24.676}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\, ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{24.677}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1125 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{24.678}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

25 Preliminares: Modelos de Flujo

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.

Si ω es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N(\omega)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política en específico durante el periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{\omega\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]=\overline{N}>0$;

2) $\mathbb{E}\left[N\left(\omega\right)\right]\leq\overline{N}$ para cualquier valor de ω.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^{m}$
- La n-ésima vez que el servidor cambia de la cola j a j', va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, con $\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(n\right)$, $n\geq1$, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(1\right)\right]\geq0$.
- Sea $\left\{p_{j}^{m}\right\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j^{'}}^{m}\right)$, se supone que ésta existe.
- Finalmente, se define el tiempo promedio total de traslado entre las colas como

$$\delta^{*}:=\sum_{j,j^{'}}p_{j}^{m}r_{j,j^{'}}^{m}\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}^{m}\left(i\right)\right]. \tag{25.1}$$

Consideremos el caso donde los tiempos entre arribo a cada una de las colas, $\left\{\xi_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$ son variables aleatorias independientes a idénticamente distribuidas, y los tiempos de servicio en cada una de las colas se distribuyen de manera independiente e idénticamente distribuidas $\left\{\eta_{k}\left(n\right)\right\}_{n\geq1}$; además ambos procesos cumplen la condición de ser independientes entre sí. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo por $\lambda_{k}=1/\mathbb{E}\left[\xi_{k}\left(1\right)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_{k}=\lambda_{k}/\mu_{k}$, donde se pide que $\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}<1$, para garantizar la estabilidad del sistema, esto es cierto para las políticas de servicio exhaustiva y cerrada, ver Geetor [**?**].

Si denotamos por

- $Q_{k}\left(t\right)$ el número de usuarios presentes en la cola k al tiempo t;
- $A_{k}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m;
- $B_{m}\left(t\right)$ denota a los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t;
- $B_{m}^{0}\left(t\right)$ los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender al tiempo t,
- sea $C_{m}\left(t\right)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido, el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X\left(t\right)^{T}=\left(Q_{k}\left(t\right),A_{k}\left(t\right),B_{m}\left(t\right),B_{m}^{0}\left(t\right),C_{m}\left(t\right)\right), \tag{25.2}$$

para $k=1,\ldots,K$ y $m=1,2,\ldots,M$, donde T indica que es el transpuesto del vector que se está definiendo. El proceso X evoluciona en el espacio de estados: $\mathbb{X}=\mathbb{Z}_{+}^{K}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\left(\left\{1,2,\ldots,K\right\}\times\left\{1,2,\ldots,S\right\}\right)^{M}\times\mathbb{R}_{+}^{K}\times\mathbb{Z}_{+}^{K}$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas:

25.1 Supuestos Básicos

A1) Los procesos $\xi_{1},\ldots,\xi_{K},\eta_{1},\ldots,\eta_{K}$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p\geq1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_{l}\left(1\right)^{p+1}\right]&<\infty\text{ para }l=1,\ldots,K\text{ y}\\\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)^{p+1}\right]&<\infty\text{ para }k=1,\ldots,K.\end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para cada $k = 1, 2, \dots, K$ existe una función positiva $q_k(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0, \tag{25.3}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{25.4}$$

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto del espacio de estados de X es un conjunto pequeño, ver definición ??.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente, ver [?, ?].

25.2 Procesos Regenerativos

Consideremos el caso en el que se tienen varias colas a las cuales llegan uno o varios servidores para dar servicio a los usuarios que se encuentran presentes en la cola, como ya se mencionó hay varios tipos de políticas de servicio, incluso podría ocurrir que la manera en que atiende al resto de las colas sea distinta a como lo hizo en las anteriores.

Para ejemplificar los sistemas de visitas cíclicas se considerará el caso en que a las colas los usuarios son atendidos con una sóla política de servicio.
Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0. \tag{25.5}$$

(S2.)

$$\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}, \tag{25.6}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)] \geq 0$.
- Se define
$$\delta^* := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}[\delta_{j,j+1}(1)]. \tag{25.7}$$
- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\right) \tag{25.8}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{25.9}$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([**?**])

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

25.3 Preliminares

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1) $lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0$
2) $\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}$para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j'}^m = r_{j,j'}$
- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la distribución invariante estacionaria única para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define

$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(i)\right]. \tag{25.10}$$

Veamos un caso muy específico en el cual los tiempos de arribo a cada una de las colas se comportan de acuerdo a un proceso Poisson de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, y los tiempos de servicio en cada una de las colas son variables aleatorias distribuidas exponencialmente e idénticamente distribuidas $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$, donde ambos procesos además cumplen la condición de ser independientes entre si. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Se denotará por $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ los residuales de los tiempos entre arribos a la cola k; para cada servidor m, se denota por $B_m(t)$ los residuales de los tiempos de servicio al tiempo t; $B_m^0(t)$ son los residuales de los tiempos de traslado de la cola k a la próxima por atender, al tiempo t, finalmente sea $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola k al tiempo t.

En este sentido el proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{25.11}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

El sistema aquí descrito debe de cumplir con los siguientes supuestos básicos de un sistema de visitas: Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{25.12}$$

$$P\left\{a \leq \sum_{i=1}^{j_k} \xi_k(i) \leq b\right\} \geq \int_a^b q_k(x)\,dx,\ 0 \leq a < b. \tag{25.13}$$

En particular los procesos de tiempo entre arribos y de servicio considerados con fines de ilustración de la metodología cumplen con el supuesto $A2)$ para $p = 1$, es decir, ambos procesos tienen primer y segundo momento finito.

En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño, ver definición **??**.

Es por esta razón que con la finalidad de poder hacer uso de $A3^{'})$ es necesario recurrir a los Procesos de Harris y en particular a los Procesos Harris Recurrente:

25.4 Procesos Harris Recurrente

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (**??**), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, ([?], páginas 362-364).

Entonces se tiene un espacio de estados Markoviano. El espacio de Markov descrito en Dai y Meyn [**?**]

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X\left(t\right), \theta_t, P_x\right)$$

es un proceso de Borel Derecho (Sharpe [**?**]) en el espacio de estados medible $\left(X, \mathcal{B}_X\right)$. El Proceso $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definida en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ y está adaptado a $\left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}$; la colección $\left\{P_x, x \in \mathbb{X}\right\}$ son medidas de probabilidad en $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x\left\{X\left(0\right) = x\right\} = 1$$

y

$$E_x\left\{f\left(X \circ \theta_t\right) | \mathcal{F}_t\right\} = E_X\left(\tau\right) f\left(X\right)$$

en $\left\{\tau < \infty\right\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$\left(X \circ \theta_\tau\right)\left(w\right) = \left\{X\left(\tau\left(w\right) + t, w\right), t \geq 0\right\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la σ-algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t\left(x, D\right)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t\left(x, D\right) = P_x\left(X\left(t\right) \in D\right)$$

Definición 1612. *Una medida no cero π en $\left(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}}\right)$ es* **invariante** *para X si π es σ-finita y*

$$\pi\left(D\right) = \int_{\mathbf{X}} P^t\left(x, D\right) \pi\left(dx\right)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1613. *El proceso de Markov X es llamado Harris recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $\left(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}}\right)$, tal que si $\nu\left(D\right) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*

$$P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = inf\left\{t \geq 0 : X_t \in D\right\}$.

Nota 772. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [**?**]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama Proceso Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi\left(\cdot\right) = \int_{\mathbf{X}} P_x\left(\cdot\right) \pi\left(dx\right)$$

y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente.

Definición 1614. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t\left(x, A\right) \geq \delta\nu\left(A\right)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [**?**]:

Lema 160 (Lema 3.1, Dai[**?**])**.** *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x\left(\tau_B < \infty\right) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x\left[\tau_B\left(\delta\right)\right] < \infty, \tag{25.14}$$

donde $\tau_B\left(\delta\right) = inf\left\{t \geq \delta : X\left(t\right) \in B\right\}$. Entonces, X es un proceso Harris Recurrente Positivo.

Lema 161 (Lema 3.1, Dai [**?**]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{|x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1126 (Teorema 3.1, Dai[**?**]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|}\mathbb{E}|X^{x}\left(|x|\delta\right)| = 0, \tag{25.15}$$

*entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B = \{|x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris Recurrente Positivo.*

Nota 773. *En Meyn and Tweedie [**?**] muestran que si $P_x\left\{\tau_D < \infty\right\} \equiv 1$ incluso para solo un conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris Recurrente.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

26 Modelo de Flujo

Dada una condición inicial $x \in \mathrm{X}$, sea $Q_k^x\left(t\right)$ la longitud de la cola al tiempo t, $T_{m,k}^x\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k. Finalmente sea $T_{m,k}^{x,0}\left(t\right)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}_m\left(\cdot\right), \overline{T}_m^0\left(\cdot\right)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x\left(|x|t\right), \frac{1}{|x|}T_m^x\left(|x|t\right), \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}\left(|x|t\right)\right) \tag{26.1}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \rightarrow \infty$. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right), \overline{T}_m\left(t\right), \overline{T}_m^0\left(t\right)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama **Modelo de Flujo**.

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k\left(t\right) = \overline{Q}_k\left(0\right) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M}\mu_k\overline{T}_{m,k}\left(t\right) \tag{26.2}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k\left(t\right) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{26.3}$$

$$\overline{T}_{m,k}\left(0\right) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}\left(\cdot\right) \text{ es no decreciente,} \tag{26.4}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$,

$$\sum_{k=1}^{K}\overline{T}_{m,k}^0\left(t\right) + \overline{T}_{m,k}\left(t\right) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{26.5}$$

De acuerdo a Dai [**?**], se tiene que el conjunto de posibles límites $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right), \overline{T}^0\left(\cdot\right)\right)$, en el sentido de que deben de satisfacer las ecuaciones (**??**)-(**??**), se le llama *Modelo de Flujo.*

Definición 1615 (Definición 4.1, , Dai [**?**]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ en (**??**) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}\left(\cdot + \delta\right) \equiv 0$.*

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right), \overline{T}\left(\cdot\right)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1127 (Teorema 4.2, Dai[**?**]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1))-(A3)). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}\left(t\right) = \frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right) \tag{26.6}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}\left(t\right)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1616 (Definición 3.3, Dai y Meyn [**?**]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}\left(t\right) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}\left(\cdot\right) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}\left(0\right)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [**?**].

Lema 76 (Lema 3.1, Dai y Meyn [**?**]). *Si el modelo de flujo definido por **??**-**??** es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}\left(t\right) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}\left(0\right)| + |\overline{A}\left(0\right)| + |\overline{B}\left(0\right)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1128 (Teorema 2.1, Down [**?**]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(s\right)|^{p}\right]ds \leq \kappa_p, \tag{26.7}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[Q_k\left(t\right)^{r}\right] = \mathbb{E}_{\pi}\left[Q_k\left(0\right)^{r}\right] \leq \kappa_r, \tag{26.8}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q_k\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_{\pi}\left[Q_k\left(0\right)\right] = 0. \tag{26.9}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}Q_{k}^{r}\left(s\right)ds = \mathbb{E}_{\pi}\left[Q_k\left(0\right)^{r}\right],\ \mathbb{P}_{x}\text{-}c.s. \tag{26.10}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los Sistemas de Visitas Cíclicas, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1129 (Teorema 2.3, Down [**?**]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \rho_k + max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^{S} p_{js} \overline{N}_s} \right) \delta^* \tag{26.11}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema **??**.

ii) Si $\rho < 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema **??**

Teorema 1130. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\left\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\right\} = p\left(S, T, X(s), B\right) \tag{26.12}$$

en $\{T < \infty\}$.

26.1 Teorá de Procesos Estocásticos y Medibilidad

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \left\{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\right\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \left\{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\right\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{26.13}$$

y

$$\partial^* M_v = \left\{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\right\}. \tag{26.14}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{26.15}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\left\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\right\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{26.16}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[91]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 25 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \text{ para toda } t. \tag{26.17}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

Sea E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1617. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1618. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1619. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\}. \tag{26.18}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1131. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1620. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*[92]

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B). \tag{26.19}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[93] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\} = P_{s,t} f(X_t) \quad s \leq t \in I, \; f \in b\mathcal{E}. \tag{26.21}$$

[91] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].
[92] Ecuación de Chapman-Kolmogorov
[93]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \quad H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{26.20}$$

Definición 1621. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x), \ t,s \geq 0, \ x \in E \ f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 774. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\} = P_s f(X_t) \ t,s \geq 0, \ f \in b\mathcal{E}. \tag{26.22}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 1622. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 1623 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* (P_t) *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1624. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E,\mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X} = (\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t,s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \ y \ X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{26.23}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.

Definición 1625 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1626. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 162 (Lema 4.2, Dai[**?**])**.** *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$*, conforme* $n \rightarrow \infty$*. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}.$$

Entonces, conforme $n\rightarrow\infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^{k}\left(\left[|x_n|t\right]\right)\rightarrow P_{k}^{'}t,\ u.o.c.,\tag{26.24}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow\alpha_{k}\left(t-\overline{U}_{k}\right)^{+},\ u.o.c.,\tag{26.25}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)\rightarrow\mu_{k}\left(t-\overline{V}_{k}\right)^{+},\ u.o.c.,\tag{26.26}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_{k}=1/m_{k}=1/\mathbb{E}\left[\eta_{k}\left(1\right)\right]$.

Lema 163 (Lema 4.3, Dai[?])**.** *Sea $\{x_n\}\subset \mathbf{X}$ con $|x_n|\rightarrow\infty$, conforme $n\rightarrow\infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right)=\overline{U}_{k}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right)=\overline{V}_{k}.$$

a) Conforme $n\rightarrow\infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{U}_{k}-t\right)^{+},\ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right)=\left(\overline{V}_{k}-t\right)^{+}.$$

b) Para cada $t\geq0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_{k}^{x_n}\left(|x_n|t\right),|x_n|\geq1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_{l}^{x}\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_{l}^{x}\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_{l}^{x}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_{k}^{x}\left(t\right)=_{k}^{x}\left(0\right)+E_{k}^{x}\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi_{k}^{l}\left(S_{l}^{x}\left(T_{l}^{x}\left(t\right)\right)\right)-S_{k}^{x}\left(T_{k}^{x}\left(t\right)\right)\tag{26.27}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_{i}^{x}\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_{i}}T_{k}^{x}\left(t\right).$$

Entonces $I_{i}^{x}\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{26.28}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = \left(S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t))\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x(T^x(t)), \tag{26.29}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{26.30}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \tag{26.31}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{26.32}$$

$$\int_0^\infty (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{26.33}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{26.34}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1132 (Teorema 4.1, Dai [**?**])**.** *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{26.35}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \;\; u.o.c. \tag{26.36}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I - P)' M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{26.37}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{26.38}$$

$$\overline{T}(t) \;\; \textit{es no decreciente y comienza en cero,} \tag{26.39}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{26.40}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{26.41}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{26.42}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 564. *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x \rightarrow \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K} \left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 164 (Lema 3.1 [**?**]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado también es estable.*

Teorema 1133 (Teorema 5.1 [**?**]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$, *para toda* $t \geq t_0$.

Lema 165 (Lema 5.2 [**?**]). *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{26.43}$$

de aquí, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1134 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 565 (Proposición 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{26.44}$$

Proposición 566 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{26.45}$$

Proposición 567 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{26.46}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 1135 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), además suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{26.47}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{26.48}$$

Teorema 1136 (Teorema 6.2 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1137 (Teorema 6.3 [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condición inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)}\left|\mathbb{E}_x\left[Q_t\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_0\right]\right| = 0.$$

Proposición 568 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{26.49}$$

Lema 77 (Lema 5.2, Dai y Meyn, [?]). *Sea $\{\zeta\left(k\right):k\in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0,\infty)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{26.50}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r:t\geq1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1138 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{26.51}$$

para $t>0$ y $x\in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds\leq\kappa_p.$$

Teorema 1139 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_p},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{26.52}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q\left(0\right)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 1140 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_f=0. \tag{26.53}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 1141 (Teorema 6.4, Dai y Meyn, [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X,\mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{26.54}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1142 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0,c_0\geq0$,*

$$|Q\left(T\right)|\geq\epsilon_0T-c_0,\ T\geq0, \tag{26.55}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{26.56}$$

26.2 Construcción del Modelo de Flujo

Lema 166 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'}t, \text{ u.o.c.,} \tag{26.57}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k\left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{26.58}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k\left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{26.59}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 167 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

Sea $S_l^x(t)$ el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_k^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{26.60}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{26.61}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = \left(S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t))\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x(T^x(t)), \tag{26.62}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{26.63}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{26.64}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{26.65}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{26.66}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola}, \tag{26.67}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso}. \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1143 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{26.68}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \;\; u.o.c. \tag{26.69}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)' M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{26.70}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{26.71}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero}, \tag{26.72}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente}, \tag{26.73}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{26.74}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{26.75}$$

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 569. *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x \to \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^K \left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Teorema 1144 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [**?**]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1) \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \to \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \to \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \to \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 570 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{26.76}$$

Proposición 571 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x[V(x)] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x[f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t}V(x) + k, \tag{26.77}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Definición 1627. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X, \mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A \in \mathcal{F}$.*

Definición 1628. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ con $X_n \in \mathcal{F}$ y $\mu(X_n) < \infty$.*

Definición 1629. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a, b) \in \mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1630. *Una función $f : X \to \mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

Definición 1631. *Sean $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ espacios medibles y $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1, \omega_2, \ldots,)$ tales que $\omega_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$. Si $B^n \subset \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, definimos $B_n = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.*

Definición 1632. *[TSP, Ash [?]] Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t \geq 0$, si para $s < t$ implica que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s \leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s \leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1633. *[TSP, Ash [?]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t \geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ para $s \leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ para cada $t \geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t \geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1634. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, con (S, χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s, t \in I$, I conjunto de índices, $s < t$, se tiene que $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1635. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B | \mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B | X(s)\}. \tag{26.78}$$

Nota 775. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B | X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B | X(s)\} \tag{26.79}$$

Teorema 1145. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{26.80}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \rightarrow \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \rightarrow [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{26.81}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{26.82}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{26.83}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \rightarrow \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{26.84}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[94]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siquiente condición.

Supuestos 26 (Supuesto 3.1, Davis [?]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{26.85}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1636. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1637. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1638. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1639. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \textit{ es compacto en } E\right\}. \tag{26.86}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1146. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1640. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B)^{95}. \tag{26.87}$$

[94] Revisar página 362, y 364 de Davis [?].

[95] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E,\mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[96] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_t\right)|\mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t}f\left(X_t\right)\ \ s\leq t\in I,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{26.89}$$

Definición 1641. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E,\mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f\left(x\right) = P_t\left(P_sf\right)\left(x\right),\ t,s\geq 0,\ x\in E\ f\in b\mathcal{E}.$$

Nota 776. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_{t+s}\right)|\mathcal{G}_t\right\} = P_sf\left(X_t\right)\ t,s\geq 0,\ f\in b\mathcal{E}. \tag{26.90}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).
En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 1642. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t\rightarrow X_t\left(w\right)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 1643 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* $/P_t)$ *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E, *existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}$ *y* $P_t\left(b\mathcal{E}^*\right)\subset b\mathcal{E}^*$, *y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *tal que* $X=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0=x$.

Definición 1644. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E,\mathcal{E})$. *La colección* $\mathbf{X} = (\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$;

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X, *es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t,s\geq 0$,

$$\theta_t\circ\theta_s = \theta_{t+s}\ \text{y}\ X_t\circ\theta_t = X_{t+s}; \tag{26.91}$$

iii) Para cualquier $x\in E, \mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}=1$, *y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.

Definición 1645 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha>0$ *y cualquier* $f\in S^\alpha$, *el proceso* $t\rightarrow f\left(X_t\right)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1646. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de* (P_t).

[96]
$$\mathbb{P}\left\{H|\mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H|X_t\right\}\ \ H\in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{26.88}$$

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 168 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \to \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t]) \to P_k^{'}t, \text{ u.o.c.}, \tag{26.92}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t) \to \alpha_k\left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{26.93}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t) \to \mu_k\left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.}, \tag{26.94}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 169 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \to \infty$, *conforme* $n \to \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \to \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x(t)\right) \tag{26.95}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_i^x(t)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x(t)\right)dI_i^x(t)=0, \tag{26.96}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x(t)=\left(T_1^x(t),\ldots,T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t)=\left(I_1^x(t),\ldots,I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x(T^x(t))=\left(S_1^x(T_1^x(t)),\ldots,S_K^x(T_K^x(t))\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t)=Q^x(0)+E^x(t)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x(T_l^x(t))\right)-S^x(T^x(t)), \tag{26.97}$$

$$Q^x(t)\geq 0, \tag{26.98}$$

$$T^x(0)=0,\ \text{y } \overline{T}^x(t)\ \text{ es no decreciente}, \tag{26.99}$$

$$I^x(t)=et-CT^x(t)\ \text{ es no decreciente} \tag{26.100}$$

$$\int_0^{\infty}(CQ^x(t))\,dI_i^x(t)=0, \tag{26.101}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot),\overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{26.102}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\begin{cases}1, & S(k)=i,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1147 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\to\infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}|\to\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0),U^{x_{n_j}}(0),V^{x_{n_j}}(0)\right)\to\left(\overline{Q}(0),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{26.103}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\to\left(\overline{Q}(t),\overline{T}(t)\right)\ \ u.o.c. \tag{26.104}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{26.105}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{26.106}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{26.107}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{26.108}$$

$$\int_{0}^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{26.109}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{26.110}$$

Definición 1647 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Teorema 1148 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x|t) \tag{26.111}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \rightarrow \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1648 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 78 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 572. *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x \rightarrow \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 170 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1149 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1150 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$, *para toda* $t \geq t_0$.

Lema 171 (Lema 5.2 [?]). *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{26.112}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1151 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 573 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{26.113}$$

Proposición 574 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{26.114}$$

Proposición 575 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{26.115}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1152 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{26.116}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \tag{26.117}$$

Teorema 1153 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \to 0$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t \to \infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 1154 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t \to \infty} t^{(p-1)\left|P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot)\right|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t \to \infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]| = 0}.$$

Proposición 576 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0 \tag{26.118}$$

Lema 79 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t \to \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \tag{26.119}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1155 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{26.120}$$

para $t > 0$ *y* $x \in X$*. En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1156 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{26.121}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 1157 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con* $f(x) = f_1(x)$ *se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{26.122}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0.$$

Teorema 1158 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea* ν *cualquier distribución de probabilidad en* $(X, \mathcal{B}_X)$*, y* π *la distribución estacionaria de* X*.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\, ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{26.123}$$

$\mathbb{P}$-*c.s.*

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *con* $\pi(|f|) < \infty$*, la ecuación anterior se cumple.*

Teorema 1159 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna* $\epsilon_0, c_0 \geq 0$*,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{26.124}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$*, con* $|Q(0)| = 1$*. Entonces para cualquier* $0 < q \leq 1$*, existe* $B < 0$ *tal que para cualquier* $|x| \geq B$*,*

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{26.125}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,

- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k\left(1\right)\right]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$,
- también se define $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

Para establecer que $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ es un Proceso Fuerte de Markov, se siguen las secciones 2.3 y 2.4 de Kaspi and Mandelbaum [?].

Sea el proceso de Markov $X = \left\{X\left(t\right), t \geq 0\right\}$ que describe la dinámica de la red de colas. En lo que respecta al supuesto (A3), en Dai y Meyn [?] y Meyn y Down [?] hacen ver que este se puede sustituir por

A3') Para el Proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es un conjunto pequeño.

Este supuesto es importante pues es un requisito para deducir la ergodicidad de la red.

Consideremos un caso más simple para poner en contexto lo anterior: para un sistema de visitas cíclicas se tiene que el estado al tiempo t es

$$X\left(t\right) = \left(Q\left(t\right), U\left(t\right), V\left(t\right)\right), \tag{26.126}$$

donde $Q\left(t\right)$ es el número de usuarios formados en cada estación. $U\left(t\right)$ es el tiempo restante antes de que la siguiente clase k de usuarios lleguen desde fuera del sistema, $V\left(t\right)$ es el tiempo restante de servicio para la clase k de usuarios que están siendo atendidos. Tanto $U\left(t\right)$ como $V\left(t\right)$ se puede asumir que son continuas por la derecha.

Sea $x = \left(Q\left(0\right), U\left(0\right), V\left(0\right)\right) = \left(q, a, b\right)$, el estado inicial de la red bajo una disciplina específica para la cola. Para $l \in \mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es el conjunto de clases de arribos externos, y $k = 1, \ldots, K$ se define

$$\begin{array}{rcl}
E_l^x\left(t\right) & = & max\left\{r : U_l\left(0\right) + \xi_l\left(1\right) + \cdots + \xi_l\left(r-1\right) \leq t\right\} \;\; t \geq 0,\\
S_k^x\left(t\right) & = & max\left\{r : V_k\left(0\right) + \eta_k\left(1\right) + \cdots + \eta_k\left(r-1\right) \leq t\right\} \;\; t \geq 0.
\end{array}$$

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^k\left(n\right) := \sum_{i=1}^{n} \phi^k\left(i\right).$$

donde $\phi^k\left(n\right)$ se define como el vector de ruta para el n-ésimo usuario de la clase k que termina en la estación $s\left(k\right)$, la s-éima componente de $\phi^k\left(n\right)$ es uno si estos usuarios se convierten en usuarios de la clase l y cero en otro caso, por lo tanto $\phi^k\left(n\right)$ es un vector *Bernoulli* de dimensión K con parámetro $P_k^{'}$, donde P_k denota el k-ésimo renglón de $P = \left(P_{kl}\right)$.

Se asume que cada para cada k la sucesión $\phi^k\left(n\right) = \left\{\phi^k\left(n\right), n \geq 1\right\}$ es independiente e idénticamente distribuida y que las $\phi^1\left(n\right), \ldots, \phi^K\left(n\right)$ son mutuamente independientes, además de independientes de los procesos de arribo y de servicio.

Lema 172 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea $\left\{x_n\right\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U\left(0\right) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V\left(0\right) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k\left([|x_n|t]\right) \rightarrow P_k^{'}t, \; u.o.c., \tag{26.127}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \alpha_k\left(t-\overline{U}_k\right)^+, \; u.o.c., \tag{26.128}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) \rightarrow \mu_k\left(t-\overline{V}_k\right)^+, \; u.o.c., \tag{26.129}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k\left(1\right)\right]$.

Lema 173 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U\left(0\right) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V\left(0\right) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \; u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}\left(|x_n|t\right), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x\left(t\right)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x\left(x\right)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s\left(l\right)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x\left(t\right) =_k^x\left(0\right) + E_k^x\left(t\right) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right) - S_k^x\left(T_k^x\left(t\right)\right) \tag{26.130}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x\left(t\right) = t - \sum_{j\in C_i}T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right) = 0, \tag{26.131}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)',$$
$$I^x(t) = \left(I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t)\right)'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = \left(S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t))\right)'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x(t)\right)\right) - S^x(T^x(t)), \tag{26.132}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{26.133}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente}, \tag{26.134}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{26.135}$$

$$\int_0^\infty \left(CQ^x(t)\right) dI_i^x(t) = 0, \tag{26.136}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{26.137}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1160 (Teorema 4.1, Dai [**?**]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{26.138}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \ \textit{u.o.c.} \tag{26.139}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^+ - (I - P)' M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^+, \tag{26.140}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{26.141}$$

$$\overline{T}(t) \ \textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{26.142}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \ \textit{es no decreciente}, \tag{26.143}$$

$$\int_0^\infty \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{26.144}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{26.145}$$

Definición 1649 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (*??*)-(*??*) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$*, se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Teorema 1161 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x| t) \tag{26.146}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1650 (Definición 3.1, Dai y Meyn [?]). *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk} \mu_l \overline{T}_l(t) \tag{26.147}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{26.148}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{26.149}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{26.150}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempo } t \text{ cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^{x}(t) \, dI_i^{x}(t) = 0 \tag{26.151}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^{x}(\cdot), T^{x}(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{26.152}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1651 (Definición 3.2, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_{+}^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??***, junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^{+} - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^{+} \tag{26.153}$$

Definición 1652 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$*, con* $t \geq t_0$*, para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 80 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$*, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

El resultado principal de Down [?] que relaciona la estabilidad del modelo de flujo con la estabilidad del sistema original

Teorema 1162 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$lim_{t\rightarrow\infty} \sup \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{26.154}$$

donde p es el entero dado en (A2). Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{26.155}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para $\mathbf{X}$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k\left(t\right)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right] = 0. \tag{26.156}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r\left(s\right) ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k\left(0\right)^r\right],\ \mathbb{P}_x\text{-}c.s. \tag{26.157}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

Proposición 577 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{26.158}$$

Lema 81 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\left\{\zeta\left(k\right) : k \in \digamma\right\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $\left(0, \infty\right)$, y sea $E\left(t\right) = max\left(n \geq 1 : \zeta\left(1\right) + \cdots + \zeta\left(n-1\right) \leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_1\right]}\right)^r. \tag{26.159}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1163 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right] ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{26.160}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1164 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f_{p}},\ t\rightarrow\infty,x\in X. \tag{26.161}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_{x}\left[|Q\left(t\right)|^{p}\right]=\mathbb{E}_{\pi}\left[|Q\left(0\right)|^{p}\right]\leq\kappa_{r}$$

Teorema 1165 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f\left(x\right)=f_{1}\left(x\right)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^{t}\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right\|_{f}=0. \tag{26.162}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_{x}\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_{\pi}\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 1166 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $\left(X,\mathcal{B}_{X}\right)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_{o}^{t}f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{26.163}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_{+}$ con $\pi\left(|f|\right)<\infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1167 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_{0},c_{0}\geq0$,*

$$|Q\left(T\right)|\geq\epsilon_{0}T-c_{0},\ T\geq0, \tag{26.164}$$

para cualquier condición inicial $Q\left(0\right)$, con $|Q\left(0\right)|=1$. Entonces para cualquier $0<q\leq1$, existe $B<0$ tal que para cualquier $|x|\geq B$,

$$\mathbb{P}_{x}\left\{\mathbb{X}\rightarrow\infty\right\}\geq q. \tag{26.165}$$

Teorema 1168 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho=\sum_{k=1}^{K}\rho_{k}+max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_{j}}{\sum_{s=1}^{S}p_{js}\overline{N}_{s}}\right)\delta^{*} \tag{26.166}$$

i) Si $\rho<1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el teorema **??**.

ii) Si $\rho<1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el teorema **??**

Para cada k y cada n se define

$$\Phi^{k}\left(n\right):=\sum_{i=1}^{n}\phi^{k}\left(i\right). \tag{26.167}$$

suponiendo que el estado inicial de la red es $x=\left(q,a,b\right)\in X$, entonces para cada k

$$E_{k}^{x}\left(t\right):=\max\left\{n\geq0:A_{k}^{x}\left(0\right)+\psi_{k}\left(1\right)+\cdots+\psi_{k}\left(n-1\right)\leq t\right\} \tag{26.168}$$
$$S_{k}^{x}\left(t\right):=\max\left\{n\geq0:B_{k}^{x}\left(0\right)+\eta_{k}\left(1\right)+\cdots+\eta_{k}\left(n-1\right)\leq t\right\} \tag{26.169}$$

Sea $T_{k}^{x}\left(t\right)$ el tiempo acumulado que el servidor $s\left(k\right)$ ha utilizado en los usuarios de la clase k en el intervalo $\left[0,t\right]$. Entonces se tienen las siguientes ecuaciones:

$$Q_k^x(t) = Q_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{k} \Phi_k^l S_l^x(T_l^x) - S_k^x(T_k^x) \tag{26.170}$$

$$Q^x(t) = \left(Q_1^x(t), \ldots, Q_K^x(t)\right)^{'} \geq 0, \tag{26.171}$$

$$T^x(t) = \left(T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t)\right)^{'} \geq 0, \text{ es no decreciente} \tag{26.172}$$

$$I_i^x(t) = t - \sum_{k \in C_i} T_k^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{26.173}$$

$$\int_0^{\infty} \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{26.174}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{26.175}$$

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|} Q^x(|x|t) \tag{26.176}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola. Si se hace $|q| \rightarrow \infty$ y se mantienen las componentes restantes fijas, de la condición inicial x, cualquier punto límite del proceso normalizado $\overline{Q}^x$ es una solución del siguiente modelo de flujo, ver [**?**].

Definición 1653. *Un flujo límite (retrasado) para una red bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)^{'}$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)^{'}$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t) + \sum_{l=1}^{k} P_{lk} \mu_l \overline{T}_l(t) \tag{26.177}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{26.178}$$

$$\overline{T}_k(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_k(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{26.179}$$

$$\overline{I}_i(t) = t - \sum_{k \in C_i} \overline{T}_k(t) \text{ es no decreciente} \tag{26.180}$$

$$\overline{I}_i(\cdot) \text{ se incrementa al tiempot cuando } \sum_{k \in C_i} Q_k^x(t)\, dI_i^x(t) = 0 \tag{26.181}$$

$$\text{condiciones adicionales sobre } \left(Q^x(\cdot), T^x(\cdot)\right) \text{ referentes a la disciplina de servicio} \tag{26.182}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \rightarrow \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1654. *El modelo de flujo retrasado de una disciplina de servicio en una red con retraso* $\left(\overline{A}(0), \overline{B}(0)\right) \in \mathbb{R}_+^{K+|A|}$ *se define como el conjunto de ecuaciones dadas en* **??**-**??**, *junto con la condición:*

$$\overline{Q}(t) = \overline{Q}(0) + \left(\alpha t - \overline{A}(0)\right)^+ - \left(I - P^{'}\right) M \left(\overline{T}(t) - \overline{B}(0)\right)^+ \tag{26.183}$$

Definición 1655. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en [**?**].

Lema 82. *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|overlinex| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Supuestos necesarios sobre la red

Supuestos 27. *A1) $\psi_1, \ldots, \psi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.*

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\psi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\psi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{26.184}$$
$$P(\psi_k(1) + \ldots \psi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\,dx0 \text{ y} \tag{26.185}$$
$$\int_0^\infty q_k(x)\,dx > 0 \tag{26.186}$$

El argumento dado en [?] en el lema **??** se puede aplicar para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños.Entonces la condición $A3$) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 1169. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] ds \leq \kappa_p \tag{26.187}$$

donde p es el entero dado por A2). Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r \tag{26.188}$$

para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

iii) EL primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]| = 0. \tag{26.189}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \tag{26.190}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

Demostración 7. *La demostración de este resultado se da aplicando los teoremas* **??**, **??**, **??** *y* **??**

Definimos un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada. Bajo cualquier *preemptive buffer priority* disciplina de servicio, el estado $\mathbb{X}(t)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}(t) = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t) : k = 1, 2, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right) \tag{26.191}$$

donde $Q_k(t)$ es la longitud de la cola para los usuarios de la clase k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k(t)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio. Los tiempos de arribo residuales, que son iguales al tiempo que queda hasta que el próximo usuario de la clase k llega, se denotan por $A_k(t)$. Tanto $B_k(t)$ como $A_k(t)$ se suponen continuos por la derecha.

Sea $\mathbb{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x = (q, a, b)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = (q, a, b) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x| = |q| + |a| + |b|$. En [**?**] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$\left((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}(t), \theta_t, P_x\right)$$

es un proceso de Borel Derecho en el espacio de estadio medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, est definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ y est adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; $\{P_x, x \in X\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in X$

$$P_x\{\mathbb{X}(0) = x\} = 1$$

y

$$E_x\{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X)$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s. Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{\mathbb{X}(\tau(w) + t, w), t \geq 0\}$$

y f es una función de valores reales acotada y medible con la sigma algebra de Kolmogorov generada por los cilindros.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(\mathbb{X}(t) \in D)$$

Definición 1656. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_X P^t(x, D)\, \pi(dx)$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1657. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$$

cuando $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

- Si X es Harris recurrente, entonces una única medida invariante π existe ([**?**]).
- Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso se le llama *Harris recurrente positiva.*
- Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria y hacemos

  $$P_\pi(\cdot) [= \int_X P_x(\cdot)\, \pi(dx)$$

  y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, as, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π

Definición 1658. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A)$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.[97]

El modelo está compuesto por c colas de capacidad infinita, etiquetadas de 1 a c las cuales son atendidas por s servidores. Los servidores atienden de acuerdo a una cadena de Markov independiente $\left(X_n^i\right)_n$ con $1 \leq i \leq s$ y $n \in \{1, 2, \ldots, c\}$ con la misma matriz de transición $r_{k,l}$ y única medida invariante (p_k). Cada servidor permanece atendiendo en la cola un periodo llamado de visita y determinada por la política de servicio asignada a la cola.

Los usuarios llegan a la cola k con una tasa λ_k y son atendidos a una razón μ_k. Las sucesiones de tiempos de interarribo $(\tau_k(n))_n$, la de tiempos de servicio $\left(\sigma_k^i(n)\right)_n$ y la de tiempos de cambio $\left(\sigma_{k,l}^{0,i}(n)\right)_n$ requeridas en la cola k para el servidor i son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas con distribución general independiente de i, con media $\sigma_k = \frac{1}{\mu_k}$, respectivamente $\sigma_{k,l}^0 = \frac{1}{\mu_{k,l}^0}$, e independiente de las cadenas de Markov $\left(X_n^i\right)_n$. Además se supone que los tiempos de interarribo se asume son acotados, para cada $\rho_k = \lambda_k\sigma_k < s$ para asegurar la estabilidad de la cola k cuando opera como una cola $M/GM/1$. Una política de servicio determina el número de usuarios que serán atendidos sin interrupción en periodo de servicio por los servidores que atienden a la cola. Para un solo servidor esta se define a través de una función f donde $f(x, a)$ es el número de usuarios que son atendidos sin interrupción cuando el servidor llega a la cola y encuentra x usuarios esperando dado el tiempo transcurrido de interarribo a. Sea $v(x, a)$ la duración del periodo de servicio para una sola condición inicial (x, a).

Las políticas de servicio consideradas satisfacen las siguientes propiedades:

i) Hay conservación del trabajo, es decir

$$v(x, a) = \sum_{l=1}^{f(x,a)} \sigma(l)$$

con $f(0, a) = v(0, a) = 0$, donde $(\sigma(l))_l$ es una sucesión independiente e idénticamente distribuida de los tiempos de servicio solicitados.

ii) La selección de usuarios para se atendidos es independiente de sus correspondientes tiempos de servicio y del pasado hasta el inicio del periodo de servicio. Así las distribución (f, v) no depende del orden en el cuál son atendidos los usuarios.

iii) La política de servicio es monótona en el sentido de que para cada $a \geq 0$ los números $f(x, a)$ son monótonos en distribución en x y su límite en distribución cuando $x \to \infty$ es una variable aleatoria F^{*0} que no depende de a.

iv) El número de usuarios atendidos por cada servidor es acotado por $f^{min}(x)$ de la longitud de la cola x que además converge monótonamente en distribución a F^* cuando $x \to \infty$

El sistema de colas se describe por medio del proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ como se define a continuación. El estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = (Q(t), P(t), A(t), R(t), C(t))$$

donde

- $Q(t) = (Q_k(t))_{k=1}^c$, número de usuarios en la cola k al tiempo t.
- $P(t) = \left(P^i(t)\right)_{i=1}^s$, es la posición del servidor i.
- $A(t) = (A_k(t))_{k=1}^c$, es el residual del tiempo de arribo en la cola k al tiempo t.

[97] En [?] muestran que si $P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1$ solamente para uno conjunto pequeño, entonces el proceso es Harris recurrente

- $R(t) = \left(R_k^i(t), R_{k,l}^{0,i}(t)\right)_{k,l,i=1}^{c,c,s}$, el primero es el residual del tiempo de servicio del usuario atendido por servidor i en la cola k al tiempo t, la segunda componente es el residual del tiempo de cambio del servidor i de la cola k a la cola l al tiempo t.
- $C(t) = \left(C_k^i(t)\right)_{k,i=1}^{c,s}$, es la componente correspondiente a la cola k y al servidor i que está determinada por la política de servicio en la cola k y que hace al proceso $X(t)$ un proceso de Markov.

Todos los procesos definidos arriba se suponen continuos por la derecha.

El proceso X tiene la propiedad fuerte de Markov y su espacio de estados es el espacio producto

$$\mathcal{X} = \mathbb{N}^c \times E^s \times \mathbb{R}_+^c \times \mathbb{R}_+^{cs} \times \mathbb{R}_+^{c^2 s} \times \mathcal{C}$$

donde $E = \{1, 2, \ldots, c\}^2 \cup \{1, 2, \ldots, c\}$ y $\mathcal{C}$ depende de las políticas de servicio.

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1.
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0 \tag{26.192}$$

2.
$$\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N} \tag{26.193}$$

para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j'}^m = r_{j,j'}$
- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j'}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right] \geq 0$.
- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define
$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right]. \tag{26.194}$$

El *token passing ring* es una estación de un solo servidor con K clases de usuarios. Cada clase tiene su propio regulador en la estación. Los usuarios llegan al regulador con razón α_k y son atendidos con taza μ_k.

La red se puede modelar como un Proceso de Markov con espacio de estados continuo, continuo en el tiempo:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t), B_k^0(t), C(t) : k = 1, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right) \tag{26.195}$$

donde $Q_k(t), B_k(t)$ y $A_k(t)$ se define como en **??**, $B_k^0(t)$ es el tiempo residual de cambio de la clase k a la clase $k+1\,(modK)$; $C(t)$ indica el número de servicios que han sido comenzados y/o completados durante la sesión activa del buffer.

Los parámetros cruciales son la carga nominal de la cola k: $\beta_k = \alpha_k/\mu_k$ y la carga total es $\rho_0 = \sum \beta_k$, la media total del tiempo de cambio en un ciclo del token está definido por

$$u^0 = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}\left[\eta_k^0(1)\right] = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\mu_k^0} \tag{26.196}$$

El proceso de la longitud de la cola $Q_k^x(t)$ y el proceso de acumulación del tiempo de servicio $T_k^x(t)$ para el buffer k y para el estado inicial x se definen como antes. Sea $T_k^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo

t que el token tarda en cambiar del buffer k al $k+1 \mod K$. Suponga que la función $\left(\overline{Q}\left(\cdot\right),\overline{T}\left(\cdot\right),\overline{T}^{0}\left(\cdot\right)\right)$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T^{x}\left(|x|t\right),\frac{1}{|x|}T^{x,0}\left(|x|t\right)\right) \tag{26.197}$$

cuando $|x|\rightarrow\infty$. Entonces $\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right),\overline{T}^{0}\left(t\right)\right)$ es un flujo límite retrasado del token ring.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado

Proposición 578. *Sea $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando $x\rightarrow\infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ y $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ son crecientes y continuas con $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 83. *El proceso estocástico Φ es un proceso de markov fuerte, temporalmente homogéneo, con trayectorias muestrales continuas por la derecha, cuyo espacio de estados Y es igual a $X\times\mathbb{R}$*

Proposición 579. *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_{0}>0$ tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_{x}\left[|X\left(t_{0}|x|\right)|^{p+1}\right]=0 \tag{26.198}$$

Lema 84. *Sea $\left\{\zeta\left(k\right):k\in F\right\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $\left(0,\infty\right)$, y sea $E\left(t\right)=max\left(n\geq1:\zeta\left(1\right)+\cdots+\zeta\left(n-1\right)\leq t\right)$. Si $\mathbb{E}\left[\zeta\left(1\right)\right]<\infty$, entonces para cualquier entero $r\geq1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{\mathbb{E}\left[\zeta_{1}\right]}\right)^{r}. \tag{26.199}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta>0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]<\infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1170. *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* κ_p *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1}+1\right\} \tag{26.200}$$

para $t>0$ *y* $x\in X$*. En particular, para cada condición inicial*

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1171. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$|\left|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right||_{f_p},\ t\rightarrow\infty, x\in X. \tag{26.201}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q\left(t\right)|^p\right]=\mathbb{E}_\pi\left[|Q\left(0\right)|^p\right]\leq\kappa_r$$

Teorema 1172. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con* $f\left(x\right)=f_1\left(x\right)$ *se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\left|P^t\left(x,\cdot\right)-\pi\left(\cdot\right)\right||_f=0. \tag{26.202}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q\left(t\right)\right]-\mathbb{E}_\pi\left[Q\left(0\right)\right]|=0.$$

Teorema 1173. *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea* ν *cualquier distribución de probabilidad en* $\left(X,\mathcal{B}_X\right)$*, y* π *la distribución estacionaria de* X*.*

i) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f\left(X\left(s\right)\right)ds=\pi\left(f\right):=\int f\left(x\right)\pi\left(dx\right) \tag{26.203}$$

$\mathbb{P}$*-c.s.*

ii) Para cualquier $f:X\leftarrow\mathbb{R}_+$ *con* $\pi\left(|f|\right)<\infty$*, la ecuación anterior se cumple.*

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s\left(x\right)=N\left(x\right)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

1. $$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]=\overline{N}>0 \tag{26.204}$$

2. $$\mathbb{E}\left[N\left(x\right)\right]\leq\overline{N} \tag{26.205}$$

   para cualquier valor de x.

La manera en que atiende el servidor m-ésimo, en este caso en específico solo lo ilustraremos con un sólo servidor, es la siguiente:

- Al término de la visita a la cola j, el servidor se cambia a la cola $j^{'}$ con probabilidad $r_{j,j^{'}}^m=r_{j,j^{'}}$
- La n-ésima ocurencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j^{'}}\left(n\right)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j^{'}}\left(1\right)\right]\geq0$.

- Sea $\{p_j\}$ la única distribución invariante estacionaria para la Cadena de Markov con matriz de transición $\left(r_{j,j'}\right)$.
- Finalmente, se define
$$\delta^* := \sum_{j,j'} p_j r_{j,j'} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j'}(1)\right]. \qquad (26.206)$$

Supóngase que el sistema consta de varias colas a los cuales llegan uno o varios servidores a dar servicio a los usuarios esperando en la cola.

Sea x el número de usuarios en la cola esperando por servicio y $N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con una política dada y fija mientras el servidor permanece dando servicio, entonces se asume que:

(S1.)
$$lim_{x\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[N(x)\right] = \overline{N} > 0. \qquad (26.207)$$

(S2.)
$$\mathbb{E}\left[N(x)\right] \leq \overline{N}, \qquad (26.208)$$

para cualquier valor de x.

El tiempo que tarda un servidor en volver a dar servicio después de abandonar la cola inmediata anterior y llegar a la próxima se llama tiempo de traslado o de cambio de cola, al momento de la n-ésima visita del servidor a la cola j se genera una sucesión de variables aleatorias $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con la propiedad de que $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right] \geq 0$.

Se define
$$\delta^* := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right]. \qquad (26.209)$$

Los tiempos entre arribos a la cola k, son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos. Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos. Para la k-ésima cola se define la tasa de arribo a la como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ y la tasa de servicio como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$, finalmente se define la carga de la cola como $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde se pide que $\rho < 1$, para garantizar la estabilidad del sistema.

Para el caso más sencillo podemos definir un proceso de estados para la red que depende de la política de servicio utilizada, el estado $\mathbb{X}(t)$ a cualquier tiempo t puede definirse como

$$\mathbb{X}(t) = \left(Q_k(t), A_l(t), B_k(t) : k = 1, 2, \ldots, K, l \in \mathcal{A}\right), \qquad (26.210)$$

donde $Q_k(t)$ es la longitud de la cola k para los usuarios esperando servicio, incluyendo aquellos que están siendo atendidos, $B_k(t)$ son los tiempos de servicio residuales para los usuarios de la clase k que están en servicio.

Los tiempos entre arribos residuales, que son el tiempo que queda hasta que el próximo usuario llega a la cola para recibir servicio, se denotan por $A_k(t)$. Tanto $B_k(t)$ como $A_k(t)$ se suponen continuos por la derecha [?].

Sea $\mathcal{X}$ el espacio de estados para el proceso de estados que por definición es igual al conjunto de posibles valores para el estado $\mathbb{X}(t)$, y sea $x = (q, a, b)$ un estado genérico en $\mathbb{X}$, la componente q determina la posición del usuario en la red, $|q|$ denota la longitud total de la cola en la red.

Para un estado $x = (q, a, b) \in \mathbb{X}$ definimos la *norma* de x como $\|x\| = |q| + |a| + |b|$. En [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso $\mathbb{X}$ es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$\left((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, \mathbb{X}(t), \theta_t, P_x\right)$$

es un proceso de *Borel Derecho* en el espacio de estados medible $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$.

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ probabilidad de transición de X definida como

$$P^t(x, D) = P_x(\mathbb{X}(t) \in D).$$

Definición 1659. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es* invariante *para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_X P^t(x, D)\, \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1660. *El proceso de Markov X es llamado* Harris recurrente *si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x\{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \in D\}$.

Definición 1661. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

Nota 777. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π ([?]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso a la medida se le llama ***Harris recurrente positiva****.*

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la ditribución estacionaria; se define

$$P_\pi(\cdot) = \int_X P_x(\cdot)\, \pi(dx).$$

Se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, así, el proceso $X = \{\mathbb{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso estrictamente estacionario bajo P_π.

iv) En [?] se muestra que si $P_x\{\tau_D < \infty\} = 1$ incluso para solamente un conjunto pequeño, entonces el proceso de Harris es recurrente.

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por

$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\right) \tag{26.211}$$

definido en el espacio producto:

$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{26.212}$$

- $Q(t) = (Q_k(t), 1 \leq k \leq K)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = (A_k(t), 1 \leq k \leq K)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.

- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([?]).

Dada una condición inicial $x \in \mathcal{X}$, $Q_k^x(t)$ es la longitud de la cola k al tiempo t y $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en atender a los usuarios de la cola k. De igual manera se define $T_{m,k}^{x,0}(t)$ el tiempo acumulado al tiempo t que el servidor tarda en cambiar de cola para volver a atender a los usuarios.

Para reducir la fluctuación del modelo se escala tanto el espacio como el tiempo, entonces se tiene el proceso:

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \tag{26.213}$$

$$\overline{T}_m^x(t) = \frac{1}{|x|}T_m^x(|x|t), \tag{26.214}$$

$$\overline{T}_m^{x,0}(t) = \frac{1}{|x|}T_m^{x,0}(|x|t). \tag{26.215}$$

Cualquier límite $\overline{Q}(t)$ es llamado un flujo límite del proceso longitud de la cola, al conjunto de todos los posibles flujos límite se le llamará **modelo de flujo**, ([?]).

Definición 1662. *Un flujo límite para un sistema de visitas bajo una disciplina de servicio específica se define como cualquier solución* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}_m^0(\cdot)\right)$ *de las siguientes ecuaciones, donde* $\overline{Q}(t) = \left(\overline{Q}_1(t), \ldots, \overline{Q}_K(t)\right)$ *y* $\overline{T}(t) = \left(\overline{T}_1(t), \ldots, \overline{T}_K(t)\right)$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t) \tag{26.216}$$

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K, \tag{26.217}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente}, \tag{26.218}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}_{m,k}^0(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para} m = 1, 2, \ldots, M \tag{26.219}$$

Al conjunto de ecuaciones dadas en (??)-(??) se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Definición 1663. *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Es necesario realizar los siguientes supuestos, ver ([?]) y ([?]):

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y} \\ \mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] &< \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

A3) El conjunto $\{x \in X : |x| = 0\}$ es un singleton, y para cada $k \in \mathcal{A}$, existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{26.220}$$

$$P(\xi_k(1) + \ldots \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\,dx0 \text{ y} \tag{26.221}$$

$$\int_0^\infty q_k(x)\,dx > 0 \tag{26.222}$$

En [?] ser da un argumento para deducir que todos los subconjuntos compactos de X son pequeños. Entonces la condición A3) se puede generalizar a

A3') Para el proceso de Markov X, cada subconjunto compacto de X es pequeño.

Teorema 1174. *Suponga que el modelo de flujo para una disciplina de servicio es estable, y suponga además que las condiciones A1) y A2) se satisfacen. Entonces:*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(t)|^p \right] ds \leq \kappa_p \tag{26.223}$$

donde p es el entero dado por A2).

Suponga además que A3) o A3') se cumple, entonces la disciplina de servicio es estable y además para cada condición inicial se tiene lo siguiente:

ii) Los momentos transitorios convergen a sus valores en estado estacionario:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x \left[Q_k(t)^r \right] = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right] \leq \kappa_r \tag{26.224}$$

para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} |\mathbb{E}_x \left[Q(t) \right] - \mathbb{E}_\pi \left[Q(0) \right]| = 0. \tag{26.225}$$

iv) Se cumple la Ley Fuerte de los Grandes Números:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q_k^r(s) \, ds = \mathbb{E}_\pi \left[Q_k(0)^r \right] \tag{26.226}$$

$\mathbb{P}$-c.s., para $r = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, K$.

Teorema 1175. *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \text{ con } T \geq 0, \tag{26.227}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x \left\{ \mathbb{X} \rightarrow \infty \right\} \geq q. \tag{26.228}$$

En el caso particular de un modelo con un solo servidor, $M = 1$, se tiene que si se define

Definición 1664.

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + \max_{1 \leq j \leq K} \left(\frac{\lambda_j}{\overline{\overline{N}}} \right) \delta^*. \tag{26.229}$$

entonces

Teorema 1176. *i) Si $\rho < 1$, entonces la red es estable, es decir el teorema (??) se cumple.*

ii) De lo contrario, es decir, si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, el teorema (??).

Proposición 580. *Sea $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0 \right)$ un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando $x \rightarrow \infty$ a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^x(0), \frac{1}{|x|} A_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^x(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0) \right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0 \right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^{0}(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^{0}(0) = 0$.

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K} \left[\overline{T}_{k}(t) + \overline{T}_{k}^{0}(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_{k}(t) = \overline{Q}_{k}(0) + \alpha_{k} t - \mu_{k} \overline{T}_{k}(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}(t) = \beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}(t) = 0$.

v) Para todo k, j

$$\mu_{k}^{0} \overline{T}_{k}^{0}(t) = \mu_{j}^{0} \overline{T}_{j}^{0}(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_{k} \dot{\overline{T}}_{k}(t) = l_{k} \mu_{k}^{0} \dot{\overline{T}}_{k}^{0}(t)$$

para $\overline{Q}_{k}(t) > 0$.

Lema 174 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1177 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1178 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$*, para toda* $t \geq t_0$.

Lema 175 (Lema 5.2 [?]). *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$*, y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$*, entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_{1}]}\right)^{r} \tag{26.230}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t \geq \delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1179 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r} \rightarrow \frac{1}{\mu^{r}}$*, cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 581 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_{x}\left[|X(t_{0}|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{26.231}$$

Proposición 582 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{26.232}$$

Proposición 583 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t)) \, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t} \mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s)) \, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{26.233}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1180 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p \right] ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t} |x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{26.234}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$Limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x \left[|Q(s)|^p \right] ds \leq k_p \tag{26.235}$$

Teorema 1181 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \parallel_{f_p} \to 0$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t \to \infty} \mathbb{E}_x \left[|Q_t|^p \right] = \mathbb{E}_\pi \left[|Q_0|^p \right] < \infty$$

Teorema 1182 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t \to \infty} t^{(p-1)\left| P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \right|_f = 0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t \to \infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t] - \mathbb{E}_\pi[Q_0]| = 0}.$$

Si x es el número de usuarios en la cola al comienzo del periodo de servicio y $N_s(x) = N(x)$ es el número de usuarios que son atendidos con la política s, única en nuestro caso, durante un periodo de servicio, entonces se asume que:

(S1.)

$$lim_{x \to \infty} \mathbb{E}[N(x)] = \overline{N} > 0. \tag{26.236}$$

(S2.)

$$\mathbb{E}[N(x)] \leq \overline{N}, \tag{26.237}$$

para cualquier valor de x.

- La n-ésima ocurrencia va acompañada con el tiempo de cambio de longitud $\delta_{j,j+1}(n)$, independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right] \geq 0$.
- Se define
$$\delta^* := \sum_{j,j+1} \mathbb{E}\left[\delta_{j,j+1}(1)\right]. \tag{26.238}$$
- Los tiempos de inter-arribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Las Colas Cíclicas se pueden describir por medio de un proceso de Markov $\left(X(t)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, donde el estado del sistema al tiempo $t \geq 0$ está dado por
$$X(t) = \left(Q(t), A(t), H(t), B(t), B^0(t), C(t)\right) \tag{26.239}$$
definido en el espacio producto:
$$\mathcal{X} = \mathbb{Z}^K \times \mathbb{R}_+^K \times \left(\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\}\right)^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}^K, \tag{26.240}$$

- $Q(t) = \left(Q_k(t), 1 \leq k \leq K\right)$, es el número de usuarios en la cola k, incluyendo aquellos que están siendo atendidos provenientes de la k-ésima cola.
- $A(t) = \left(A_k(t), 1 \leq k \leq K\right)$, son los residuales de los tiempos de arribo en la cola k.
- $H(t)$ es el par ordenado que consiste en la cola que esta siendo atendida y la política de servicio que se utilizará.
- $B(t)$ es el tiempo de servicio residual.
- $B^0(t)$ es el tiempo residual del cambio de cola.
- $C(t)$ indica el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H(t)$.

$A_k(t), B_m(t)$ y $B_m^0(t)$ se suponen continuas por la derecha y que satisfacen la propiedad fuerte de Markov, ([**?**])

- Los tiempos de interarribo a la cola k,son de la forma $\left\{\xi_k(n)\right\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos.
- Los tiempos de servicio $\left\{\eta_k(n)\right\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos.
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}\left[\xi_k(1)\right]$ y además se define
- la tasa de servicio para la k-ésima cola como $\mu_k = 1/\mathbb{E}\left[\eta_k(1)\right]$
- también se define $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.
- De las políticas posibles solamente consideraremos la política cerrada (Gated).

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1665. *Una familia* $(P_{s,t})$ *de kernels de Markov en* $(E, \mathcal{E})$ *indexada por pares* $s, t \in I$, *con* $s \leq t$ *es una función de transición en* $(E, \mathcal{E})$, *si para todo* $r \leq s < t$ *en* I *y todo* $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) \, P_{s,t}(y, B)^{98}. \qquad (26.241)$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t \in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[99] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f(X_t) | \mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t} f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \qquad (26.243)$$

Definición 1666. *Una familia* $(P_t)_{t \geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E, \mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s} f(x) = P_t (P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 778. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_t\right\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \qquad (26.244)$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t \in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 1667. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t \in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E.

Definición 1668 (HD1). *Un semigrupo de Markov* $/P_t)$ *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E, *existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, *y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t \in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ.

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1669. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E, \mathcal{E})$. *La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$;

ii) $(\theta_t)_{t \geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X, *es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$,

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \;\; y \;\; X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \qquad (26.245)$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, *y el proceso* $(X_t)_{t \in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$.

[98] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[99]

$$\mathbb{P}\{H | \mathcal{G}_t\} = \mathbb{P}\{H | X_t\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \qquad (26.242)$$

Definición 1670 (HD2). *Para cualquier $\alpha > 0$ y cualquier $f \in S^{\alpha}$, el proceso $t \rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1671. *Un sistema $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??**, *de (P_t).*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 176 (Lema 4.2, Dai[**?**]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, casi seguramente

$$\frac{1}{|x_n|} \Phi^k([|x_n| t]) \rightarrow P_k^{'} t, \text{ u.o.c.,} \tag{26.246}$$

$$\frac{1}{|x_n|} E_k^{x_n}(|x_n| t) \rightarrow \alpha_k \left(t - \overline{U}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{26.247}$$

$$\frac{1}{|x_n|} S_k^{x_n}(|x_n| t) \rightarrow \mu_k \left(t - \overline{V}_k\right)^+, \text{ u.o.c.,} \tag{26.248}$$

donde $[t]$ es la parte entera de t y $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 177 (Lema 4.3, Dai[**?**]). *Sea $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ con $|x_n| \rightarrow \infty$, conforme $n \rightarrow \infty$. Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ casi seguramente,

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \text{ u.o.c.}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ fijo,

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} U_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|} V_k^{x_n}(|x_n| t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x(0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{26.249}$$

para $k = 1, \ldots, K$. Para $i = 1, \ldots, d$, sea

$$I_i^x(t) = t - \sum_{j \in C_i} T_k^x(t).$$

Entonces $I_i^x(t)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{k \in C_i} Q_k^x(t) \right) dI_i^x(t) = 0, \tag{26.250}$$

para $i = 1, \ldots, d$.

Hacer

$$T^x(t) = (T_1^x(t), \ldots, T_K^x(t))',$$
$$I^x(t) = (I_1^x(t), \ldots, I_K^x(t))'$$

y

$$S^x(T^x(t)) = (S_1^x(T_1^x(t)), \ldots, S_K^x(T_K^x(t)))'.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x(t) = Q^x(0) + E^x(t) + \sum_{l=1}^{K} \Phi^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S^x(T^x(t)), \tag{26.251}$$

$$Q^x(t) \geq 0, \tag{26.252}$$

$$T^x(0) = 0, \text{ y } \overline{T}^x(t) \text{ es no decreciente,} \tag{26.253}$$

$$I^x(t) = et - CT^x(t) \text{ es no decreciente} \tag{26.254}$$

$$\int_0^{\infty} (CQ^x(t))\, dI_i^x(t) = 0, \tag{26.255}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}^x(\cdot), \overline{T}^x(\cdot)\right) \text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{26.256}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik} = \begin{cases} 1, & S(k) = i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1183 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$, con $|x_n| \to \infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}| \to \infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}(0), U^{x_{n_j}}(0), V^{x_{n_j}}(0)\right) \to \left(\overline{Q}(0), \overline{U}, \overline{V}\right), \tag{26.257}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right), T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right) \to \left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right) \ \ u.o.c. \tag{26.258}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{26.259}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{26.260}$$

$$\overline{T}(t) \ \ \textit{es no decreciente y comienza en cero}, \tag{26.261}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \ \ \textit{es no decreciente}, \tag{26.262}$$

$$\int_0^{\infty}\left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{26.263}$$

$$\textit{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \textit{ especficas de la disciplina de la cola}, \tag{26.264}$$

Definición 1672 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (*??*)-(*??*) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, α y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Teorema 1184 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|}Q^{x}(|x|t) \tag{26.265}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1673 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 85 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 584. *Sea* $\left(\overline{Q},\overline{T},\overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x\rightarrow\infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}A_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x}\left(0\right),\frac{1}{|x|}B_{k}^{x,0}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}_{k}\left(0\right),0,0,0\right)$$

para $k=1,\ldots,K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}\left(t\right)$ *y* $\overline{T}^{0}\left(t\right)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}\left(0\right)=\overline{T}^{0}\left(0\right)=0$.

ii) Para todo $t\geq0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_{k}\left(t\right)+\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)\right]=t$$

iii) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\overline{Q}_{k}\left(t\right)=\overline{Q}_{k}\left(0\right)+\alpha_{k}t-\mu_{k}\overline{T}_{k}\left(t\right)$$

iv) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=\beta_{k}$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)=0$.

v) Para todo k,j

$$\mu_{k}^{0}\overline{T}_{k}^{0}\left(t\right)=\mu_{j}^{0}\overline{T}_{j}^{0}\left(t\right)$$

vi) Para todo $1\leq k\leq K$

$$\mu_{k}\dot{\overline{T}}_{k}\left(t\right)=l_{k}\mu_{k}^{0}\dot{\overline{T}}_{k}^{0}\left(t\right)$$

para $\overline{Q}_{k}\left(t\right)>0$.

Lema 178 (Lema 3.1 [**?**]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1185 (Teorema 5.2 [**?**]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1186 (Teorema 5.1 [**?**]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_{0} *que depende de* $\left(\alpha,\mu,T,U\right)$ *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z\left(t\right)=0$*, para toda* $t\geq t_{0}$.

Lema 179 (Lema 5.2 [**?**]). *Sea* $\left\{\xi\left(k\right):k\in\mathbb{Z}\right\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $\left(0,\infty\right)$*, y sea* $E\left(t\right)$ *el proceso de conteo*

$$E\left(t\right)=max\left\{n\geq1:\xi\left(1\right)+\cdots+\xi\left(n-1\right)\leq t\right\}.$$

Si $E\left[\xi\left(1\right)\right]<\infty$*, entonces para cualquier entero* $r\geq1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E\left(t\right)}{t}\right)^{r}\right]=\left(\frac{1}{E\left[\xi_{1}\right]}\right)^{r}\qquad(26.266)$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t>0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}:t\geq1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1187 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [**?**]). *Sea* $0<\mu<\mathbb{E}\left(X_{1}\right]\leq\infty$*. entonces*

a) $\frac{N(t)}{t}\rightarrow\frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t\rightarrow\infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 585 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{26.267}$$

Proposición 586 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{26.268}$$

Proposición 587 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{26.269}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 1188 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{26.270}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condición inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{26.271}$$

Teorema 1189 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p}\rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1190 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con* $f\left(x\right) = f_1\left(x\right)$, *se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. *En particular, para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 588 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0 \tag{26.272}$$

Lema 86 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]}\right)^{r}. \tag{26.273}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1191 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{26.274}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right]ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1192 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p},\ t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{26.275}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 1193 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{26.276}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x[Q(t)] - \mathbb{E}_\pi[Q(0)]| = 0.$$

Teorema 1194 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [?]). *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\,ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{26.277}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1195 (Teorema 2.2, Down [?]). *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0,\ T \geq 0, \tag{26.278}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\} \geq q. \tag{26.279}$$

Es necesario hacer los siguientes supuestos sobre el comportamiento del sistema de visitas cíclicas:

- Los tiempos de interarribo a la k-ésima cola, son de la forma $\{\xi_k(n)\}_{n\geq 1}$, con la propiedad de que son independientes e idénticamente distribuidos,
- Los tiempos de servicio $\{\eta_k(n)\}_{n\geq 1}$ tienen la propiedad de ser independientes e idénticamente distribuidos,
- Se define la tasa de arribo a la k-ésima cola como $\lambda_k = 1/\mathbb{E}[\xi_k(1)]$,
- la tasa de servicio para la k-ésima cola se define como $\mu_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$,
- también se define $\rho_k := \lambda_k/\mu_k$, la intensidad de tráfico del sistema o carga de la red, donde es necesario que $\rho < 1$ para cuestiones de estabilidad.

Definición 1674. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X,\mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A\in\mathcal{F}$.*

Definición 1675. *Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X=\bigcup_{n\geq 1}X_n$ con $X_n\in\mathcal{F}$ y $\mu(X_n)<\infty$.*

Definición 1676. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b)\in\mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1677. *Una función $f: X\rightarrow\mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\{x\in X : f(x)>\alpha\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}((\alpha,\infty)) = \{x\in X : f(x)>\alpha\}\in\mathcal{F}.$$

Definición 1678. *Sean $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$, $i=1,2,\ldots,$ espacios medibles y $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1,\omega_2,\ldots,)$ tales que $\omega_i\in\Omega_i$, $i=1,2,\ldots,$. Si $B^n\subset\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$, definimos $B_n=\{\omega\in\Omega : (\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\in B^n\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_i$.*

Definición 1679. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t\geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t\geq 0$, si para $s<t$ implica que $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s\leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s\leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1680. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\{\mathcal{F}(t), t\geq 0\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s)\subset\mathcal{F}(t)$ para $s\leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T:\Omega\rightarrow[0,\infty]$ tal que $\{T\leq t\}\in\mathcal{F}(t)$ para cada $t\geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t\geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t)=\mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1681. *Sea $X(t), t\geq 0$ proceso estocástico, con (S,χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\{\mathcal{F}(t)\}$, es decir, si para cualquier $s,t\in I$, I conjunto de índices, $s<t$, se tiene que $\mathcal{F}(s)\subset\mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1682. *Sea $X(t), t\geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t),\mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B\in\chi$, y $s,t\in I$, $s<t$ se cumple que*

$$P\{X(t)\in B|\mathcal{F}(s)\} = P\{X(t)\in B|X(s)\}. \tag{26.280}$$

Nota 779. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t)=\mathcal{F}_0(t)=\mathcal{F}(X(r), r\leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t)\in B|X(r), r\leq s\} = P\{X(t)\in B|X(s)\} \tag{26.281}$$

Teorema 1196. *Sea* $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ *Proceso de Markov con espacio de estados* (S_0, χ_0) *generado por una distribuición inicial* P_o *y probabilidad de transición* p_{mn}*, para* $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$*, que por notación se escribirá como* $p(m, n, x, B) \rightarrow p_{mn}(x, B)$*. Sea* S *tiempo de paro relativo a la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_n$*. Sea* T *función medible,* $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, \ldots, \}$*. Supóngase que* $T \geq S$*, entonces* T *es tiempo de paro. Si* $B \in \chi_0$*, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty | \mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{26.282}$$

en $\{T < \infty\}$*.*

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 589. *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^0\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x \rightarrow \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|}Q_k^x(0), \frac{1}{|x|}A_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^x(0), \frac{1}{|x|}B_k^{x,0}(0)\right) \rightarrow \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$*. EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) Los vectores de tiempo ocupado $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$*.*

ii) Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$

para $\overline{Q}_k(t) = 0$*.*

v) Para todo k, j

$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) Para todo $1 \leq k \leq K$

$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$

para $\overline{Q}_k(t) > 0$*.*

Lema 180 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1197 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1198 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$*, para toda* $t \geq t_0$*.*

Lema 181 (Lema 5.2 [?]). *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$*, y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*

$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$

Si $E[\xi(1)] < \infty$*, entonces para cualquier entero* $r \geq 1$

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{26.283}$$

de aqu, bajo estas condiciones

a) Para cualquier $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r}\right]$

b) Las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^{r} : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1199 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^{r} \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 590 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*

$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X\left(t_0|x|\right)|^{p+1}\right] = 0. \tag{26.284}$$

Proposición 591 (Proposición 5.3 [?]). *Sea* X *proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva* $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ *y un conjunto compacto* $C \subset X$.

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)}\left(1 + |X\left(t\right)|^p\right)dt\right] \leq C_{p+1}\left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{26.285}$$

Proposición 592 (Proposición 5.4 [?]). *Sea* X *un proceso de Markov Borel Derecho en* X, *sea* $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ *y defina para alguna* $\delta > 0$, *y un conjunto cerrado* $C \subset X$

$$V\left(x\right) := \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f\left(X\left(t\right)\right)dt\right]$$

para $x \in X$. *Si* V *es finito en todas partes y uniformemente acotada en* C, *entonces existe* $k < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x\left[V\left(x\right)\right] + \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[f\left(X\left(s\right)\right)ds\right] \leq \frac{1}{t}V\left(x\right) + k, \tag{26.286}$$

para $x \in X$ *y* $t > 0$.

Teorema 1200 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante* $k_p < \infty$ *tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p\left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{26.287}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$Limsup_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q\left(s\right)|^p\right]ds \leq k_p \tag{26.288}$$

Teorema 1201 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\parallel P^t\left(c,\cdot\right) - \pi\left(\cdot\right)\parallel_{f_p} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow \infty$ *y* $x \in X$. *En particular para cada condicin inicial*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[|Q_t|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q_0|^p\right] < \infty$$

Teorema 1202 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)\left|P^{t}(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_{f}=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\rightarrow\infty} t^{(p-1)\left|\mathbb{E}_{x}[Q_{t}]-\mathbb{E}_{\pi}[Q_{0}]\right|=0}.$$

Sean $Q_k(t)$ el número de usuarios en la cola k, $A_k(t)$ el tiempo residual de arribos a la cola k, para cada servidor m, sea $H_m(t)$ par ordenado que consiste en la cola que está siendo atendida y la política de servicio que se está utilizando. $B_m(t)$ los tiempos de servicio residuales, $B_m^0(t)$ el tiempo residual de traslado, $C_m(t)$ el número de usuarios atendidos durante la visita del servidor a la cola dada en $H_m(t)$.

El proceso para el sistema de visitas se puede definir como:

$$X(t)^T = \left(Q_k(t), A_k(t), B_m(t), B_m^0(t), C_m(t)\right) \tag{26.289}$$

para $k = 1, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$. X evoluciona en el espacio de estados: $X = \mathbb{Z}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times (\{1, 2, \ldots, K\} \times \{1, 2, \ldots, S\})^M \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{Z}_+^K$.

Antes enunciemos los supuestos que regirán en la red.

A1) $\xi_1, \ldots, \xi_K, \eta_1, \ldots, \eta_K$ son mutuamente independientes y son sucesiones independientes e idénticamente distribuidas.

A2) Para algún entero $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\xi_l(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } l \in \mathcal{A} \text{ y}$$
$$\mathbb{E}\left[\eta_k(1)^{p+1}\right] < \infty \text{ para } k = 1, \ldots, K.$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de posibles arribos.

A3) Para $k = 1, 2, \ldots, K$ existe una función positiva $q_k(x)$ definida en $\mathbb{R}_+$, y un entero j_k, tal que

$$P(\xi_k(1) \geq x) > 0, \text{ para todo } x > 0 \tag{26.290}$$
$$P(\xi_k(1) + \ldots \xi_k(j_k) \in dx) \geq q_k(x)\, dx0 \text{ y} \tag{26.291}$$
$$\int_0^\infty q_k(x)\, dx > 0 \tag{26.292}$$

En Dai [?] se muestra que para una amplia serie de disciplinas de servicio el proceso X es un Proceso Fuerte de Markov, y por tanto se puede asumir que

$$((\Omega, \mathcal{F}), \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x)$$

es un proceso de Borel Derecho, Sharpe [?], en el espacio de estados medible $(X, \mathcal{B}_X)$.

Se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable.

Definición 1683. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1684. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1685. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1686. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*
$$\lambda(E) = sup\left\{\lambda(K) : K \text{ es compacto en } E\right\}. \tag{26.293}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1203. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\left\{f(X_r) : r \in I, r \leq t, f \in \mathcal{E}\right\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1687. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy) P_{s,t}(y, B)^{100}. \tag{26.294}$$

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov [101] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f(X_t)|\mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t}f(X_t) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{26.296}$$

Definición 1688. *Una familia $(P_t)_{t\geq 0}$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 780. *Si la función de transición $(P_{s,t})$ es llamada homogénea si $P_{s,t} = P_{t-s}$.*

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f(X_{t+s})|\mathcal{G}_t\right\} = P_s f(X_t) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{26.297}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 1689. *Un proceso estocástico $(X_t)_{t\in I}$ definido en $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ con valores en el espacio topológico E es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral $t \to X_t(w)$ es un mapeo continuo por la derecha de I en E.*

Definición 1690 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov $/P_t)$ en un espacio de Radón E se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad μ en E, existe una σ-álgebra $\mathcal{E}^*$ con $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$, y un $\mathcal{E}^*$-proceso E-valuado continuo por la derecha $(X_t)_{t\in I}$ en algún espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ tal que $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición (P_t) y distribución inicial μ.*

Considérese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

[100] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

[101]
$$\mathbb{P}\left\{H|\mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H|X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{26.295}$$

Definición 1691. *Sea E espacio de Radón, (P_t) semigrupo de Markov en $(E,\mathcal{E})$. La colección* $\mathbf{X} = (\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ *es un proceso $\mathcal{E}$-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados E y semigrupo de transición (P_t) en caso de que $\mathbf{X}$ satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y X_t es un proceso E-valuado continuo por la derecha $\mathcal{E}^*$-adaptado a $(\mathcal{G}_t)$;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para X, es decir, mapea Ω en sí mismo satisfaciendo para $t,s\geq 0$,*

$$\theta_t\circ\theta_s=\theta_{t+s} \text{ y } X_t\circ\theta_t=X_{t+s}; \tag{26.298}$$

*iii) Para cualquier $x\in E$,$\mathbf{P}^x\left\{X_0=x\right\}=1$, y el proceso $(X_t)_{t\in I}$ tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición (P_t) relativo a $(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,\mathbf{P}^x)$.*

Definición 1692 (HD2). *Para cualquier $\alpha>0$ y cualquier $f\in S^\alpha$, el proceso $t\rightarrow f(X_t)$ es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1693. *Un sistema $\mathbf{X}=(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\theta_t,\mathbf{P}^x)$ es un proceso derecho en el espacio de Radón E con semigrupo de transición (P_t) provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha, **??**, de (P_t).*

ii) $\mathbf{X}$ *satisface la condicion HD2, **??**, relativa a $\mathcal{G}_t$.*

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Definición 1694. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, la pareja $(X,\mathcal{F})$ es llamado espacio medible. Un subconjunto A de X es llamado medible, o medible con respecto a $\mathcal{F}$, si $A\in\mathcal{F}$.*

Definición 1695. *Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ espacio de medida. Se dice que la medida μ es σ-finita si se puede escribir $X=\bigcup_{n\geq 1}X_n$ con $X_n\in\mathcal{F}$ y $\mu(X_n)<\infty$.*

Definición 1696. *Sea X el conjunto de los úmeros reales $\mathbb{R}$. El álgebra de Borel es la σ-álgebra B generada por los intervalos abiertos $(a,b)\in\mathbb{R}$. Cualquier conjunto en B es llamado* Conjunto de Borel.

Definición 1697. *Una función $f:X\rightarrow\mathbb{R}$, es medible si para cualquier número real α el conjunto*

$$\left\{x\in X: f(x)>\alpha\right\}$$

pertenece a X. Equivalentemente, se dice que f es medible si

$$f^{-1}\left((\alpha,\infty)\right)=\left\{x\in X: f(x)>\alpha\right\}\in\mathcal{F}.$$

Definición 1698. *Sean $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$, $i=1,2,\ldots$, espacios medibles y $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$ el conjunto de todas las sucesiones $(\omega_1,\omega_2,\ldots,)$ tales que $\omega_i\in\Omega_i$, $i=1,2,\ldots,$. Si $B^n\subset\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$, definimos $B_n=\left\{\omega\in\Omega:(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\in B^n\right\}$. Al conjunto B_n se le llama* cilindro *con base B^n, el cilindro es llamado medible si $B^n\in\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_i$.*

Definición 1699. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $X(t), t\geq 0$ proceso estocástico, el proceso es adaptado a la familia de σ-álgebras $\mathcal{F}_t$, para $t\geq 0$, si para $s<t$ implica que $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$, y $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada t. Si no se especifica $\mathcal{F}_t$ entonces se toma $\mathcal{F}_t$ como $\mathcal{F}(X(s), s\leq t)$, la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de Ω que hace que cada $X(s)$, con $s\leq t$ sea Borel medible.*

Definición 1700. *[TSP, Ash [**?**]] Sea $\left\{\mathcal{F}(t), t\geq 0\right\}$ familia creciente de sub σ-álgebras. es decir, $\mathcal{F}(s)\subset\mathcal{F}(t)$ para $s\leq t$. Un tiempo de paro para $\mathcal{F}(t)$ es una función $T:\Omega\rightarrow[0,\infty]$ tal que $\left\{T\leq t\right\}\in\mathcal{F}(t)$ para cada $t\geq 0$. Un tiempo de paro para el proceso estocástico $X(t), t\geq 0$ es un tiempo de paro para las σ-álgebras $\mathcal{F}(t)=\mathcal{F}(X(s))$.*

Definición 1701. *Sea $X(t), t\geq 0$ proceso estocástico, con (S,χ) espacio de estados. Se dice que el proceso es adaptado a $\left\{\mathcal{F}(t)\right\}$, es decir, si para cualquier $s,t\in I$, I conjunto de índices, $s<t$, se tiene que $\mathcal{F}(s)\subset\mathcal{F}(t)$ y $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$-medible,*

Definición 1702. *Sea $X(t), t \geq 0$ proceso estocástico, se dice que es un Proceso de Markov relativo a $\mathcal{F}(t)$ o que $\{X(t), \mathcal{F}(t)\}$ es de Markov si y sólo si para cualquier conjunto $B \in \chi$, y $s, t \in I$, $s < t$ se cumple que*

$$P\{X(t) \in B|\mathcal{F}(s)\} = P\{X(t) \in B|X(s)\}. \tag{26.299}$$

Nota 781. *Si se dice que $\{X(t)\}$ es un Proceso de Markov sin mencionar $\mathcal{F}(t)$, se asumirá que*

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0(t) = \mathcal{F}(X(r), r \leq t),$$

*entonces la ecuación (**??**) se puede escribir como*

$$P\{X(t) \in B|X(r), r \leq s\} = P\{X(t) \in B|X(s)\} \tag{26.300}$$

Teorema 1204. *Sea $(X_n, \mathcal{F}_n, n = 0, 1, \ldots, \}$ Proceso de Markov con espacio de estados (S_0, χ_0) generado por una distribuición inicial P_o y probabilidad de transición p_{mn}, para $m, n = 0, 1, \ldots,$ $m < n$, que por notación se escribirá como $p(m, n, x, B) \to p_{mn}(x, B)$. Sea S tiempo de paro relativo a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Sea T función medible, $T : \Omega \to \{0, 1, \ldots, \}$. Supóngase que $T \geq S$, entonces T es tiempo de paro. Si $B \in \chi_0$, entonces*

$$P\{X(T) \in B, T < \infty|\mathcal{F}(S)\} = p(S, T, X(s), B) \tag{26.301}$$

en $\{T < \infty\}$.

Sea K conjunto numerable y sea $d : K \to \mathbb{N}$ función. Para $v \in K$, M_v es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{d(v)}$. Entonces

$$E = \cup_{v \in K} M_v = \{(v, \zeta) : v \in K, \zeta \in M_v\}.$$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de conjuntos medibles en E:

$$\mathcal{E} = \{\cup_{v \in K} A_v : A_v \in \mathcal{M}_v\}.$$

donde $\mathcal{M}$ son los conjuntos de Borel de M_v. Entonces $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. El estado del proceso se denotará por $\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t)$. La distribución de $(\mathbf{x}_t)$ está determinada por por los siguientes objetos:

i) Los campos vectoriales $(\mathcal{H}_v, v \in K)$.

ii) Una función medible $\lambda : E \to \mathbb{R}_+$.

iii) Una medida de transición $Q : \mathcal{E} \times (E \cup \Gamma^*) \to [0, 1]$ donde

$$\Gamma^* = \cup_{v \in K} \partial^* M_v. \tag{26.302}$$

y

$$\partial^* M_v = \{z \in \partial M_v : \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{t}, \zeta) = \mathbf{z} \text{ para alguna } (t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times M_v\}. \tag{26.303}$$

∂M_v denota la frontera de M_v.

El campo vectorial $(\mathcal{H}_v, v \in K)$ se supone tal que para cada $\mathbf{z} \in M_v$ existe una única curva integral $\phi_v(t, \zeta)$ que satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt} f(\zeta_t) = \mathcal{H} f(\zeta_t), \tag{26.304}$$

con $\zeta_0 = \mathbf{z}$, para cualquier función suave $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $\mathcal{H}$ denota el operador diferencial de primer orden, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_v$ y $\zeta_t = \phi(t, \mathbf{z})$. Además se supone que $\mathcal{H}_v$ es conservativo, es decir, las curvas integrales están definidas para todo $t > 0$.

Para $\mathbf{x} = (v, \zeta) \in E$ se denota

$$t^* \mathbf{x} = inf\{t > 0 : \phi_v(t, \zeta) \in \partial^* M_v\}$$

En lo que respecta a la función λ, se supondrá que para cada $(v, \zeta) \in E$ existe un $\epsilon > 0$ tal que la función $s \to \lambda(v, \phi_v(s, \zeta)) \in E$ es integrable para $s \in [0, \epsilon)$. La medida de transición $Q(A; \mathbf{x})$ es una función medible de $\mathbf{x}$ para cada $A \in \mathcal{E}$, definida para $\mathbf{x} \in E \cup \Gamma^*$ y es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$ para cada $\mathbf{x} \in E$.

El movimiento del proceso $(\mathbf{x}_t)$ comenzando en $\mathbf{x} = (n, \mathbf{z}) \in E$ se puede construir de la siguiente manera, defínase la función F por

$$F(t) = \begin{cases} exp\left(-\int_0^t \lambda(n, \phi_n(s, \mathbf{z}))\, ds\right), & t < t^*(\mathbf{x}), \\ 0, & t \geq t^*(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{26.305}$$

Sea T_1 una variable aleatoria tal que $\mathbb{P}[T_1 > t] = F(t)$, ahora sea la variable aleatoria (N, Z) con distribuición $Q(\cdot; \phi_n(T_1, \mathbf{z}))$. La trayectoria de $(\mathbf{x}_t)$ para $t \leq T_1$ es[102]

$$\mathbf{x}_t = (v_t, \zeta_t) = \begin{cases} (n, \phi_n(t, \mathbf{z})), & t < T_1, \\ (N, \mathbf{Z}), & t = t_1. \end{cases}$$

Comenzando en $\mathbf{x}_{T_1}$ se selecciona el siguiente tiempo de intersalto $T_2 - T_1$ lugar del post-salto $\mathbf{x}_{T_2}$ de manera similar y así sucesivamente. Este procedimiento nos da una trayectoria determinista por partes $\mathbf{x}_t$ con tiempos de salto $T_1, T_2, \ldots$. Bajo las condiciones enunciadas para $\lambda, T_1 > 0$ y $T_1 - T_2 > 0$ para cada i, con probabilidad 1. Se supone que se cumple la siguiente condición.

Supuestos 28 (Supuesto 3.1, Davis [**?**]). *Sea $N_t := \sum_t \mathbb{1}_{(t \geq t)}$ el número de saltos en $[0, t]$. Entonces*

$$\mathbb{E}[N_t] < \infty \textit{ para toda } t. \tag{26.306}$$

es un proceso de Markov, más aún, es un Proceso Fuerte de Markov, es decir, la Propiedad Fuerte de Markov se cumple para cualquier tiempo de paro.

En esta sección se harán las siguientes consideraciones: E es un espacio métrico separable y la métrica d es compatible con la topología.

Definición 1703. *Un espacio topológico E es llamado* Luisin *si es homeomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio métrico compacto.*

Definición 1704. *Un espacio topológico E es llamado de* Radón *si es homeomorfo a un subconjunto universalmente medible de un espacio métrico compacto.*

Equivalentemente, la definición de un espacio de Radón puede encontrarse en los siguientes términos:

Definición 1705. *E es un espacio de Radón si cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es regular interior o cerrada,* tight.

Definición 1706. *Una medida finita, λ en la σ-álgebra de Borel de un espacio metrizable E se dice cerrada si*

$$\lambda(E) = sup\{\lambda(K) : K \textit{ es compacto en } E\}. \tag{26.307}$$

El siguiente teorema nos permite tener una mejor caracterización de los espacios de Radón:

Teorema 1205. *Sea E espacio separable metrizable. Entonces E es Radoniano si y sólo sí cada medida finita en $(E, \mathcal{B}(E))$ es cerrada.*

Sea E espacio de estados, tal que E es un espacio de Radón, $\mathcal{B}(E)$ σ-álgebra de Borel en E, que se denotará por $\mathcal{E}$.

Sea $(X, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$ conjunto de índices. Sea $\mathcal{F}_{\leq t}$ la σ-álgebra natural definida como $\sigma\{f(X_r) : r \in I, rleqt, f \in \mathcal{E}\}$. Se considerará una σ-álgebra más general, $(\mathcal{G}_t)$ tal que (X_t) sea $\mathcal{E}$-adaptado.

Definición 1707. *Una familia $(P_{s,t})$ de kernels de Markov en $(E, \mathcal{E})$ indexada por pares $s, t \in I$, con $s \leq t$ es una función de transición en $(E, \mathcal{E})$, si para todo $r \leq s < t$ en I y todo $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$*

$$P_{r,t}(x, B) = \int_E P_{r,s}(x, dy)\, P_{s,t}(y, B)^{103}. \tag{26.308}$$

[102] Revisar página 362, y 364 de Davis [**?**].
[103] Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Se dice que la función de transición $(P_{s,t})$ en $(E, \mathcal{E})$ es la función de transición para un proceso $(X_t)_{t\in I}$ con valores en E y que satisface la propiedad de Markov[104] (**??**) relativa a $(\mathcal{G}_t)$ si

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_t\right)|\mathcal{G}_s\right\} = P_{s,t}f\left(X_t\right) \;\; s \leq t \in I, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{26.310}$$

Definición 1708. *Una familia* $(P_t)_{t\geq 0}$ *de kernels de Markov en* $(E, \mathcal{E})$ *es llamada* Semigrupo de Transición de Markov *o* Semigrupo de Transición *si*

$$P_{t+s}f\left(x\right) = P_t\left(P_s f\right)\left(x\right), \;\; t, s \geq 0, \;\; x \in E \;\; f \in b\mathcal{E}.$$

Nota 782. *Si la función de transición* $(P_{s,t})$ *es llamada homogénea si* $P_{s,t} = P_{t-s}$.

Un proceso de Markov que satisface la ecuación (**??**) con función de transición homogénea (P_t) tiene la propiedad característica

$$\mathbb{P}\left\{f\left(X_{t+s}\right)|\mathcal{G}_t\right\} = P_s f\left(X_t\right) \;\; t, s \geq 0, \;\; f \in b\mathcal{E}. \tag{26.311}$$

La ecuación anterior es la *Propiedad Simple de Markov* de X relativa a (P_t).

En este sentido el proceso $(X_t)_{t\in I}$ cumple con la propiedad de Markov (**??**) relativa a $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ con semigrupo de transición (P_t).

Definición 1709. *Un proceso estocástico* $(X_t)_{t\in I}$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *con valores en el espacio topológico* E *es continuo por la derecha si cada trayectoria muestral* $t \rightarrow X_t(w)$ *es un mapeo continuo por la derecha de* I *en* E*.*

Definición 1710 (HD1)**.** *Un semigrupo de Markov* $/P_t)$ *en un espacio de Radón* E *se dice que satisface la condición* HD1 *si, dada una medida de probabilidad* μ *en* E*, existe una* σ*-álgebra* $\mathcal{E}^*$ *con* $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ *y* $P_t(b\mathcal{E}^*) \subset b\mathcal{E}^*$*, y un* $\mathcal{E}^*$*-proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $(X_t)_{t\in I}$ *en algún espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *tal que* $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbb{P})$ *es de Markov (Homogéneo) con semigrupo de transición* (P_t) *y distribución inicial* μ*.*

Considerese la colección de variables aleatorias X_t definidas en algún espacio de probabilidad, y una colección de medidas $\mathbf{P}^x$ tales que $\mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\}$, y bajo cualquier $\mathbf{P}^x$, X_t es de Markov con semigrupo (P_t). $\mathbf{P}^x$ puede considerarse como la distribución condicional de $\mathbf{P}$ dado $X_0 = x$.

Definición 1711. *Sea* E *espacio de Radón,* (P_t) *semigrupo de Markov en* $(E, \mathcal{E})$*. La colección* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso* $\mathcal{E}$*-Markov continuo por la derecha simple, con espacio de estados* E *y semigrupo de transición* (P_t) *en caso de que* $\mathbf{X}$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

i) $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ *es un espacio de medida filtrado, y* X_t *es un proceso* E*-valuado continuo por la derecha* $\mathcal{E}^*$*-adaptado a* $(\mathcal{G}_t)$*;*

ii) $(\theta_t)_{t\geq 0}$ *es una colección de operadores* shift *para* X*, es decir, mapea* Ω *en sí mismo satisfaciendo para* $t, s \geq 0$*,*

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \;\; y \;\; X_t \circ \theta_t = X_{t+s}; \tag{26.312}$$

iii) Para cualquier $x \in E, \mathbf{P}^x\left\{X_0 = x\right\} = 1$*, y el proceso* $(X_t)_{t\in I}$ *tiene la propiedad de Markov (**??**) con semigrupo de transición* (P_t) *relativo a* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$*.*

Definición 1712 (HD2)**.** *Para cualquier* $\alpha > 0$ *y cualquier* $f \in S^\alpha$*, el proceso* $t \rightarrow f(X_t)$ *es continuo por la derecha casi seguramente.*

Definición 1713. *Un sistema* $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ *es un proceso derecho en el espacio de Radón* E *con semigrupo de transición* (P_t) *provisto de:*

i) $\mathbf{X}$ *es una realización continua por la derecha,* **??***, de* (P_t)*.*

[104]
$$\mathbb{P}\left\{H|\mathcal{G}_t\right\} = \mathbb{P}\left\{H|X_t\right\} \;\; H \in p\mathcal{F}_{\geq t}. \tag{26.309}$$

ii) **X** *satisface la condicion HD2,* **??**, *relativa a* $\mathcal{G}_t$.

iii) $\mathcal{G}_t$ *es aumentado y continuo por la derecha.*

Lema 182 (Lema 4.2, Dai[?]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}.$$

Entonces, conforme $n \rightarrow \infty$, *casi seguramente*

$$\frac{1}{|x_n|}\Phi^k([|x_n|t]) \rightarrow P_k^{'}t, \ u.o.c., \tag{26.313}$$

$$\frac{1}{|x_n|}E_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \alpha_k\left(t - \overline{U}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{26.314}$$

$$\frac{1}{|x_n|}S_k^{x_n}(|x_n|t) \rightarrow \mu_k\left(t - \overline{V}_k\right)^+, \ u.o.c., \tag{26.315}$$

donde $[t]$ *es la parte entera de* t *y* $\mu_k = 1/m_k = 1/\mathbb{E}[\eta_k(1)]$.

Lema 183 (Lema 4.3, Dai[?]). *Sea* $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ *con* $|x_n| \rightarrow \infty$, *conforme* $n \rightarrow \infty$. *Suponga que*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U(0) = \overline{U}_k$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V(0) = \overline{V}_k.$$

a) Conforme $n \rightarrow \infty$ *casi seguramente,*

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{U}_k - t\right)^+, \ u.o.c.$$

y

$$lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t) = \left(\overline{V}_k - t\right)^+.$$

b) Para cada $t \geq 0$ *fijo,*

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}U_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

y

$$\left\{\frac{1}{|x_n|}V_k^{x_n}(|x_n|t), |x_n| \geq 1\right\}$$

son uniformemente convergentes.

$S_l^x(t)$ es el número total de servicios completados de la clase l, si la clase l está dando t unidades de tiempo de servicio. Sea $T_l^x(x)$ el monto acumulado del tiempo de servicio que el servidor $s(l)$ gasta en los usuarios de la clase l al tiempo t. Entonces $S_l^x(T_l^x(t))$ es el número total de servicios completados para la clase l al tiempo t. Una fracción de estos usuarios, $\Phi_l^x(S_l^x(T_l^x(t)))$, se convierte en usuarios de la clase k.

Entonces, dado lo anterior, se tiene la siguiente representación para el proceso de la longitud de la cola:

$$Q_k^x(t) =_k^x (0) + E_k^x(t) + \sum_{l=1}^{K}\Phi_k^l(S_l^x(T_l^x(t))) - S_k^x(T_k^x(t)) \tag{26.316}$$

para $k=1,\ldots,K$. Para $i=1,\ldots,d$, sea

$$I_i^x\left(t\right)=t-\sum_{j\in C_i}T_k^x\left(t\right).$$

Entonces $I_i^x\left(t\right)$ es el monto acumulado del tiempo que el servidor i ha estado desocupado al tiempo t. Se está asumiendo que las disciplinas satisfacen la ley de conservación del trabajo, es decir, el servidor i está en pausa solamente cuando no hay usuarios en la estación i. Entonces, se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\in C_i}Q_k^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{26.317}$$

para $i=1,\ldots,d$.

Hacer

$$T^x\left(t\right)=\left(T_1^x\left(t\right),\ldots,T_K^x\left(t\right)\right)^{'},$$
$$I^x\left(t\right)=\left(I_1^x\left(t\right),\ldots,I_K^x\left(t\right)\right)^{'}$$

y

$$S^x\left(T^x\left(t\right)\right)=\left(S_1^x\left(T_1^x\left(t\right)\right),\ldots,S_K^x\left(T_K^x\left(t\right)\right)\right)^{'}.$$

Para una disciplina que cumple con la ley de conservación del trabajo, en forma vectorial, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$Q^x\left(t\right)=Q^x\left(0\right)+E^x\left(t\right)+\sum_{l=1}^{K}\Phi^l\left(S_l^x\left(T_l^x\left(t\right)\right)\right)-S^x\left(T^x\left(t\right)\right), \tag{26.318}$$

$$Q^x\left(t\right)\geq0, \tag{26.319}$$

$$T^x\left(0\right)=0,\text{ y }\overline{T}^x\left(t\right)\text{ es no decreciente,} \tag{26.320}$$

$$I^x\left(t\right)=et-CT^x\left(t\right)\text{ es no decreciente} \tag{26.321}$$

$$\int_0^{\infty}\left(CQ^x\left(t\right)\right)dI_i^x\left(t\right)=0, \tag{26.322}$$

$$\text{Condiciones adicionales en }\left(\overline{Q}^x\left(\cdot\right),\overline{T}^x\left(\cdot\right)\right)\text{ específicas de la disciplina de la cola,} \tag{26.323}$$

donde e es un vector de unos de dimensión d, C es la matriz definida por

$$C_{ik}=\left\{\begin{array}{ll}1, & S\left(k\right)=i,\\ 0, & \text{en otro caso}.\end{array}\right.$$

Es necesario enunciar el siguiente Teorema que se utilizará para el Teorema **??**:

Teorema 1206 (Teorema 4.1, Dai [?]). *Considere una disciplina que cumpla la ley de conservación del trabajo, para casi todas las trayectorias muestrales ω y cualquier sucesión de estados iniciales $\left\{x_n\right\}\subset\mathbf{X}$, con $|x_n|\rightarrow\infty$, existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ con $|x_{n_j}|\rightarrow\infty$ tal que*

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(0\right),U^{x_{n_j}}\left(0\right),V^{x_{n_j}}\left(0\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(0\right),\overline{U},\overline{V}\right), \tag{26.324}$$

$$\frac{1}{|x_{n_j}|}\left(Q^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right),T^{x_{n_j}}\left(|x_{n_j}|t\right)\right)\rightarrow\left(\overline{Q}\left(t\right),\overline{T}\left(t\right)\right)\ \ u.o.c. \tag{26.325}$$

Además, $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}(t)\right)$ *satisface las siguientes ecuaciones:*

$$\overline{Q}(t) = Q(0) + \left(\alpha t - \overline{U}\right)^{+} - (I-P)^{'} M^{-1}\left(\overline{T}(t) - \overline{V}\right)^{+}, \tag{26.326}$$

$$\overline{Q}(t) \geq 0, \tag{26.327}$$

$$\overline{T}(t) \text{ es no decreciente y comienza en cero,} \tag{26.328}$$

$$\overline{I}(t) = et - C\overline{T}(t) \text{ es no decreciente,} \tag{26.329}$$

$$\int_0^{\infty} \left(C\overline{Q}(t)\right) d\overline{I}(t) = 0, \tag{26.330}$$

$$\text{Condiciones adicionales en } \left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right) \text{ especficas de la disciplina de la cola,} \tag{26.331}$$

Definición 1714 (Definición 4.1, , Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ *en* **??** *es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (**??**)-(**??**) es llamado flujo solución de la disciplina. Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante* $\delta > 0$ *que depende de* μ, α *y* P *solamente, tal que cualquier flujo límite con* $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, *se tiene que* $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.

Teorema 1207 (Teorema 4.2, Dai[?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (1.2)-(1.5). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov* X *que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^{x}(t) = \frac{1}{|x|} Q^{x}(|x| t) \tag{26.332}$$

A este proceso se le conoce como el fluido escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^{x}(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^{x}$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Al conjunto de ecuaciones dadas en **??**-**??** se le llama *Modelo de flujo* y al conjunto de todas las soluciones del modelo de flujo $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot)\right)$ se le denotará por $\mathcal{Q}$.

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Definición 1715 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo* t_0 *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$, *con* $t \geq t_0$, *para cualquier* $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ *que cumple con* $|\overline{Q}(0)| = 1$.

El siguiente resultado se encuentra en Chen [?].

Lema 87 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por* **??**-**??** *es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe* $t_0 > 0$ *tal que* $\overline{Q}(t) = 0$ *para cualquier* $t \geq t_0$, *para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial* $\overline{x}$ *satisface que* $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.

Propiedades importantes para el modelo de flujo retrasado:

Proposición 593. *Sea* $\left(\overline{Q}, \overline{T}, \overline{T}^{0}\right)$ *un flujo límite de* **??** *y suponga que cuando* $x \to \infty$ *a lo largo de una subsucesión*

$$\left(\frac{1}{|x|} Q_k^{x}(0), \frac{1}{|x|} A_k^{x}(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x}(0), \frac{1}{|x|} B_k^{x,0}(0)\right) \to \left(\overline{Q}_k(0), 0, 0, 0\right)$$

para $k = 1, \ldots, K$. *EL flujo límite tiene las siguientes propiedades, donde las propiedades de la derivada se cumplen donde la derivada exista:*

i) *Los vectores de tiempo ocupado* $\overline{T}(t)$ *y* $\overline{T}^0(t)$ *son crecientes y continuas con* $\overline{T}(0) = \overline{T}^0(0) = 0$.

ii) *Para todo* $t \geq 0$
$$\sum_{k=1}^{K}\left[\overline{T}_k(t) + \overline{T}_k^0(t)\right] = t$$

iii) *Para todo* $1 \leq k \leq K$
$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \alpha_k t - \mu_k \overline{T}_k(t)$$

iv) *Para todo* $1 \leq k \leq K$
$$\dot{\overline{T}}_k(t) = \beta_k$$
para $\overline{Q}_k(t) = 0$.

v) *Para todo* k, j
$$\mu_k^0 \overline{T}_k^0(t) = \mu_j^0 \overline{T}_j^0(t)$$

vi) *Para todo* $1 \leq k \leq K$
$$\mu_k \dot{\overline{T}}_k(t) = l_k \mu_k^0 \dot{\overline{T}}_k^0(t)$$
para $\overline{Q}_k(t) > 0$.

Lema 184 (Lema 3.1 [?]). *Si el modelo de flujo es estable, definido por las ecuaciones (3.8)-(3.13), entonces el modelo de flujo retrasado tambin es estable.*

Teorema 1208 (Teorema 5.2 [?]). *Si el modelo de flujo lineal correspondiente a la red de cola es estable, entonces la red de colas es estable.*

Teorema 1209 (Teorema 5.1 [?]). *La red de colas es estable si existe una constante* t_0 *que depende de* (α, μ, T, U) *y* V *que satisfagan las ecuaciones (5.1)-(5.5),* $Z(t) = 0$, *para toda* $t \geq t_0$.

Lema 185 (Lema 5.2 [?]). *Sea* $\{\xi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *sucesin de variables aleatorias i.i.d. con valores en* $(0, \infty)$, *y sea* $E(t)$ *el proceso de conteo*
$$E(t) = max\{n \geq 1 : \xi(1) + \cdots + \xi(n-1) \leq t\}.$$
Si $E[\xi(1)] < \infty$, *entonces para cualquier entero* $r \geq 1$
$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] = \left(\frac{1}{E[\xi_1]}\right)^r \tag{26.333}$$
de aqu, bajo estas condiciones

a) *Para cualquier* $t > 0$, $sup_{t\geq\delta}\mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right]$

b) *Las variables aleatorias* $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ *son uniformemente integrables.*

Teorema 1210 (Teorema 5.1: Ley Fuerte para Procesos de Conteo [?]). *Sea* $0 < \mu < \mathbb{E}(X_1] \leq \infty$. *entonces*

a) $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ *a.s., cuando* $t \rightarrow \infty$.

b) $\mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right]^r \rightarrow \frac{1}{\mu^r}$, *cuando* $t \rightarrow \infty$ *para todo* $r > 0$..

Proposición 594 (Proposicin 5.1 [?]). *Suponga que los supuestos (A1) y (A2) se cumplen, adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe* $t_0 > 0$ *tal que*
$$lim_{|x|\rightarrow\infty}\frac{1}{|x|^{p+1}}\mathbb{E}_x\left[|X(t_0|x|)|^{p+1}\right] = 0. \tag{26.334}$$

Proposición 595 (Proposición 5.3 [?]). *Sea X proceso de estados para la red de colas, y suponga que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces para alguna constante positiva $C_{p+1} < \infty$, $\delta > 0$ y un conjunto compacto $C \subset X$.*

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} \left(1 + |X(t)|^p\right) dt \right] \leq C_{p+1} \left(1 + |x|^{p+1}\right) \tag{26.335}$$

Proposición 596 (Proposición 5.4 [?]). *Sea X un proceso de Markov Borel Derecho en X, sea $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ y defina para alguna $\delta > 0$, y un conjunto cerrado $C \subset X$*

$$V(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_C(\delta)} f(X(t))\, dt \right]$$

para $x \in X$. Si V es finito en todas partes y uniformemente acotada en C, entonces existe $k < \infty$ tal que

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_x [V(x)] + \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [f(X(s))\, ds] \leq \frac{1}{t} V(x) + k, \tag{26.336}$$

para $x \in X$ y $t > 0$.

Teorema 1211 (Teorema 5.5 [?]). *Suponga que se cumplen (A1) y (A2), adems suponga que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante $k_p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \left\{ \frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1 \right\} \tag{26.337}$$

para $t \geq 0$, $x \in X$. En particular para cada condición inicial

$$Limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_x [|Q(s)|^p]\, ds \leq k_p \tag{26.338}$$

Teorema 1212 (Teorema 6.2[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces se tiene que*

$$\| P^t(c, \cdot) - \pi(\cdot) \|_{f_p} \to 0$$

para $t \to \infty$ y $x \in X$. En particular para cada condicin inicial

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_x [|Q_t|^p] = \mathbb{E}_\pi [|Q_0|^p] < \infty$$

Teorema 1213 (Teorema 6.3[?]). *Suponga que se cumplen los supuestos (A1)-(A3) y que el modelo de flujo es estable, entonces con $f(x) = f_1(x)$, se tiene que*

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)\left|P^t(c,\cdot)-\pi(\cdot)\right|_f=0},$$

para $x \in X$. En particular, para cada condicin inicial

$$lim_{t\to\infty} t^{(p-1)|\mathbb{E}_x[Q_t]-\mathbb{E}_\pi[Q_0]|=0}.$$

Proposición 597 (Proposición 5.1, Dai y Meyn [?]). *Suponga que los supuestos A1) y A2) son ciertos y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que*

$$lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^{p+1}} \mathbb{E}_x \left[|X(t_0|x|)|^{p+1} \right] = 0 \tag{26.339}$$

Lema 88 (Lema 5.2, Dai y Meyn [?]). *Sea $\{\zeta(k) : k \in F\}$ una sucesión independiente e idénticamente distribuida que toma valores en $(0, \infty)$, y sea $E(t) = max(n \geq 1 : \zeta(1) + \cdots + \zeta(n-1) \leq t)$. Si $\mathbb{E}[\zeta(1)] < \infty$, entonces para cualquier entero $r \geq 1$*

$$lim_{t\to\infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{E(t)}{t} \right)^r \right] = \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\zeta_1]} \right)^r. \tag{26.340}$$

Luego, bajo estas condiciones:

a) para cualquier $\delta > 0$, $\sup_{t\geq\delta} \mathbb{E}\left[\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r\right] < \infty$

b) las variables aleatorias $\left\{\left(\frac{E(t)}{t}\right)^r : t \geq 1\right\}$ son uniformemente integrables.

Teorema 1214 (Teorema 5.5, Dai y Meyn [**?**])**.** *Suponga que los supuestos A1) y A2) se cumplen y que el modelo de flujo es estable. Entonces existe una constante κ_p tal que*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p \left\{\frac{1}{t}|x|^{p+1} + 1\right\} \tag{26.341}$$

para $t > 0$ y $x \in X$. En particular, para cada condición inicial

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p.$$

Teorema 1215 (Teorema 6.2, Dai y Meyn [**?**])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces se tiene que*

$$\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_{f_p}, \; t \rightarrow \infty, x \in X. \tag{26.342}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \mathbb{E}_x\left[|Q(t)|^p\right] = \mathbb{E}_\pi\left[|Q(0)|^p\right] \leq \kappa_r$$

Teorema 1216 (Teorema 6.3, Dai y Meyn [**?**])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Entonces con $f(x) = f_1(x)$ se tiene*

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}\left\|P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)\right\|_f = 0. \tag{26.343}$$

En particular para cada condición inicial

$$\lim_{t\rightarrow\infty} t^{p-1}\left|\mathbb{E}_x\left[Q(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q(0)\right]\right| = 0.$$

Teorema 1217 (Teorema 6.4, Dai y Meyn [**?**])**.** *Suponga que se cumplen los supuestos A1), A2) y A3) y que el modelo de flujo es estable. Sea ν cualquier distribución de probabilidad en $(X, \mathcal{B}_X)$, y π la distribución estacionaria de X.*

i) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_o^t f(X(s))\, ds = \pi(f) := \int f(x)\,\pi(dx) \tag{26.344}$$

$\mathbb{P}$-c.s.

ii) Para cualquier $f : X \leftarrow \mathbb{R}_+$ con $\pi(|f|) < \infty$, la ecuación anterior se cumple.

Teorema 1218 (Teorema 2.2, Down [**?**])**.** *Suponga que el fluido modelo es inestable en el sentido de que para alguna $\epsilon_0, c_0 \geq 0$,*

$$|Q(T)| \geq \epsilon_0 T - c_0, \; T \geq 0, \tag{26.345}$$

para cualquier condición inicial $Q(0)$, con $|Q(0)| = 1$. Entonces para cualquier $0 < q \leq 1$, existe $B < 0$ tal que para cualquier $|x| \geq B$,

$$\mathbb{P}_x\left\{\mathbb{X} \rightarrow \infty\right\} \geq q. \tag{26.346}$$

Dada una condición inicial $x \in \mathbb{X}$, sea

- $Q_k^x(t)$ la longitud de la cola al tiempo t,
- $T_{m,k}^x(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en atender a los usuarios de la cola k.

- $T^{x,0}_{m,k}(t)$ el tiempo acumulado, al tiempo t, que tarda el servidor m en trasladarse a otra cola a partir de la k-ésima.

Supóngase que la función $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}_m(\cdot), \overline{T}^0_m(\cdot)\right)$ para $m = 1, 2, \ldots, M$ es un punto límite de

$$\left(\frac{1}{|x|}Q^x(|x|t), \frac{1}{|x|}T^x_m(|x|t), \frac{1}{|x|}T^{x,0}_m(|x|t)\right) \tag{26.347}$$

para $m = 1, 2, \ldots, M$, cuando $x \to \infty$, ver [?]. Entonces $\left(\overline{Q}(t), \overline{T}_m(t), \overline{T}^0_m(t)\right)$ es un flujo límite del sistema. Al conjunto de todos las posibles flujos límite se le llama *Modelo de Flujo* y se le denotará por $\mathcal{Q}$, ver [?, ?, ?].

El modelo de flujo satisface el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\overline{Q}_k(t) = \overline{Q}_k(0) + \lambda_k t - \sum_{m=1}^{M} \mu_k \overline{T}_{m,k}(t), \tag{26.348}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$.

$$\overline{Q}_k(t) \geq 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, K. \tag{26.349}$$

$$\overline{T}_{m,k}(0) = 0, \text{ y } \overline{T}_{m,k}(\cdot) \text{ es no decreciente,} \tag{26.350}$$

para $k = 1, 2, \ldots, K$ y $m = 1, 2, \ldots, M$.

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{T}^0_{m,k}(t) + \overline{T}_{m,k}(t) = t \text{ para } m = 1, 2, \ldots, M. \tag{26.351}$$

Definición 1716 (Definición 4.1, Dai [?]). *Sea una disciplina de servicio específica. Cualquier límite* $\left(\overline{Q}(\cdot), \overline{T}(\cdot), \overline{T}^0(\cdot)\right)$ *en (??) es un* flujo límite *de la disciplina. Cualquier solución (??)-(??) es llamado flujo solución de la disciplina.*

Definición 1717. *Se dice que el modelo de flujo límite, modelo de flujo, de la disciplina de la cola es estable si existe una constante $\delta > 0$ que depende de μ, λ y P solamente, tal que cualquier flujo límite con $|\overline{Q}(0)| + |\overline{U}| + |\overline{V}| = 1$, se tiene que $\overline{Q}(\cdot + \delta) \equiv 0$.*

Si se hace $|x| \to \infty$ sin restringir ninguna de las componentes, también se obtienen un modelo de flujo, pero en este caso el residual de los procesos de arribo y servicio introducen un retraso:

Teorema 1219 (Teorema 4.2, Dai [?]). *Sea una disciplina fija para la cola, suponga que se cumplen las condiciones (A1)-(A3). Si el modelo de flujo límite de la disciplina de la cola es estable, entonces la cadena de Markov X que describe la dinámica de la red bajo la disciplina es Harris recurrente positiva.*

Ahora se procede a escalar el espacio y el tiempo para reducir la aparente fluctuación del modelo. Considérese el proceso

$$\overline{Q}^x(t) = \frac{1}{|x|}Q^x(|x|t). \tag{26.352}$$

A este proceso se le conoce como el flujo escalado, y cualquier límite $\overline{Q}^x(t)$ es llamado flujo límite del proceso de longitud de la cola. Haciendo $|q| \to \infty$ mientras se mantiene el resto de las componentes fijas, cualquier punto límite del proceso de longitud de la cola normalizado $\overline{Q}^x$ es solución del siguiente modelo de flujo.

Definición 1718 (Definición 3.3, Dai y Meyn [?]). *El modelo de flujo es estable si existe un tiempo fijo t_0 tal que $\overline{Q}(t) = 0$, con $t \geq t_0$, para cualquier $\overline{Q}(\cdot) \in \mathcal{Q}$ que cumple con $|\overline{Q}(0)| = 1$.*

Lema 89 (Lema 3.1, Dai y Meyn [?]). *Si el modelo de flujo definido por (??)-(??) es estable, entonces el modelo de flujo retrasado es también estable, es decir, existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{Q}(t) = 0$ para cualquier $t \geq t_0$, para cualquier solución del modelo de flujo retrasado cuya condición inicial $\overline{x}$ satisface que $|\overline{x}| = |\overline{Q}(0)| + |\overline{A}(0)| + |\overline{B}(0)| \leq 1$.*

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar los resultados principales:

Teorema 1220 (Teorema 2.1, Down [?]). *Suponga que el modelo de flujo es estable, y que se cumplen los supuestos (A1) y (A2), entonces*

i) Para alguna constante κ_p, y para cada condición inicial $x \in X$

$$\limsup_{t\rightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\left[|Q(s)|^p\right] ds \leq \kappa_p, \tag{26.353}$$

donde p es el entero dado en (A2).

Si además se cumple la condición (A3), entonces para cada condición inicial:

ii) Los momentos transitorios convergen a su estado estacionario:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)^r\right] = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right] \leq \kappa_r, \tag{26.354}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$. Donde π es la probabilidad invariante para X.

iii) El primer momento converge con razón t^{p-1}:

$$lim_{t\rightarrow\infty}t^{p-1}|\mathbb{E}_x\left[Q_k(t)\right] - \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)\right]| = 0. \tag{26.355}$$

iv) La Ley Fuerte de los grandes números *se cumple:*

$$lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Q_k^r(s)\,ds = \mathbb{E}_\pi\left[Q_k(0)^r\right], \ \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{26.356}$$

para $r = 1, 2, \ldots, p$ y $k = 1, 2, \ldots, K$.

La contribución de Down a la teoría de los *sistemas de visitas cíclicas*, es la relación que hay entre la estabilidad del sistema con el comportamiento de las medidas de desempeño, es decir, la condición suficiente para poder garantizar la convergencia del proceso de la longitud de la cola así como de por los menos los dos primeros momentos además de una versión de la Ley Fuerte de los Grandes Números para los sistemas de visitas.

Teorema 1221 (Teorema 2.3, Down [?]). *Considere el siguiente valor:*

$$\rho = \sum_{k=1}^K \rho_k + max_{1\leq j\leq K}\left(\frac{\lambda_j}{\sum_{s=1}^S p_{js}\overline{N}_s}\right)\delta^* \tag{26.357}$$

i) Si $\rho < 1$ entonces la red es estable, es decir, se cumple el Teorema **??**.

ii) Si $\rho > 1$ entonces la red es inestable, es decir, se cumple el Teorema **??**

Por el supuesto (A1) conforme a Davis [?], se puede definir el proceso de saltos correspondiente de manera tal que satisfaga el supuesto (A3'), de hecho la demostración está basada en la línea de argumentación de Davis, [?], páginas 362-364.

Entonces se tiene un espacio de estados en el cual el proceso X satisface la Propiedad Fuerte de Markov, ver Dai y Meyn [?], dado por

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, P_x\right),$$

además de ser un proceso de Borel Derecho (Sharpe [?]) en el espacio de estados medible $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$. El Proceso $X = \{X(t), t \geq 0\}$ tiene trayectorias continuas por la derecha, está definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ y está

adaptado a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; la colección $\{P_x, x \in \mathbb{X}\}$ son medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que para todo $x \in \mathbb{X}$

$$P_x \{X(0) = x\} = 1,$$

y

$$E_x \{f(X \circ \theta_t) | \mathcal{F}_t\} = E_X(\tau) f(X),$$

en $\{\tau < \infty\}$, P_x-c.s., con θ_t definido como el operador shift.

Donde τ es un $\mathcal{F}_t$-tiempo de paro

$$(X \circ \theta_\tau)(w) = \{X(\tau(w) + t, w), t \geq 0\},$$

y f es una función de valores reales acotada y medible, ver [**?**, **?**].

Sea $P^t(x, D)$, $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, $t \geq 0$ la probabilidad de transición de X queda definida como:

$$P^t(x, D) = P_x(X(t) \in D).$$

Definición 1719. *Una medida no cero π en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ es invariante para X si π es σ-finita y*

$$\pi(D) = \int_{\mathbb{X}} P^t(x, D) \pi(dx),$$

para todo $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, con $t \geq 0$.

Definición 1720. *El proceso de Markov X es llamado Harris Recurrente si existe una medida de probabilidad ν en $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$, tal que si $\nu(D) > 0$ y $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$*

$$P_x \{\tau_D < \infty\} \equiv 1,$$

cuando $\tau_D = inf\{t \geq 0 : X_t \in D\}$.

Nota 783. *i) Si X es Harris recurrente, entonces existe una única medida invariante π (Getoor [**?**]).*

ii) Si la medida invariante es finita, entonces puede normalizarse a una medida de probabilidad, en este caso al proceso X se le llama Harris recurrente positivo.

iii) Cuando X es Harris recurrente positivo se dice que la disciplina de servicio es estable. En este caso π denota la distribución estacionaria y hacemos

$$P_\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{X}} P_x(\cdot) \pi(dx),$$

*y se utiliza E_π para denotar el operador esperanza correspondiente, ver [**?**].*

Definición 1721. *Un conjunto $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ es llamado pequeño si existe un $t > 0$, una medida de probabilidad ν en $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, y un $\delta > 0$ tal que*

$$P^t(x, A) \geq \delta\nu(A),$$

para $x \in D, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$.

La siguiente serie de resultados vienen enunciados y demostrados en Dai [**?**]:

Lema 186 (Lema 3.1, Dai [**?**]). *Sea B conjunto pequeño cerrado, supongamos que $P_x(\tau_B < \infty) \equiv 1$ y que para algún $\delta > 0$ se cumple que*

$$\sup \mathbb{E}_x [\tau_B(\delta)] < \infty, \tag{26.358}$$

donde $\tau_B(\delta) = inf\{t \geq \delta : X(t) \in B\}$. Entonces, X es un proceso Harris recurrente positivo.

Lema 187 (Lema 3.1, Dai [**?**]). *Bajo el supuesto (A3), el conjunto $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ es un conjunto pequeño cerrado para cualquier $k > 0$.*

Teorema 1222 (Teorema 3.1, Dai [**?**]). *Si existe un $\delta > 0$ tal que*

$$lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{|x|} \mathbb{E}|X^x(|x|\delta)| = 0, \tag{26.359}$$

*donde X^x se utiliza para denotar que el proceso X comienza a partir de x, entonces la ecuación (**??**) se cumple para $B = \{x \in \mathbb{X} : |x| \leq k\}$ con algún $k > 0$. En particular, X es Harris recurrente positivo.*

Entonces, tenemos que el proceso X es un proceso de Markov que cumple con los supuestos $A1$)-$A3$), lo que falta de hacer es construir el Modelo de Flujo basándonos en lo hasta ahora presentado.

References

[1] Asmussen, S. (1987). *Applied Probability and Queues.* John Wiley and Sons.

[2] Bhat, N. (2008). *An Introduction to Queueing Theory: Modelling and Analysis in Applications.* Birkhauser.

[3] Boxma, J. O. (1987). Pseudoconservation Laws in Cyclic Service Systems. *Journal of Applied Probability*, 24, 949-964.

[4] Borovkov, A. A., and Schassberger, R. (1995). Ergodicity of a Polling Network. *Stochastic Processes and their Applications*, 50(2), 253-262.

[5] van den Bos, L., and Boon, M. (2013). *Networks of Polling Systems* (report). Eindhoven University of Technology.

[6] Boon, M. A. A., van der Mei, R. D., and Winands, E. M. M. (2011). Applications of Polling Systems. February 24, 2011.

[7] Ng, C. H., and Soong, B. H. (2008). *Queueing Modelling Fundamentals with Applications in Communications Networks.* John Wiley and Sons.

[8] Chen, H. (1995). Fluid Approximations and Stability of Multiclass Queueing Networks I: Work-conserving Disciplines. *Annals of Applied Probability.*

[9] Cooper, R. B. (1970). Queues Served in Cyclic Order: Waiting Times. *The Bell System Technical Journal*, 49, 399-413.

[10] Dai, J. G. (1995). On Positive Harris Recurrence of Multiclass Queueing Networks: A Unified Approach Via Fluid Limit Models. *The Annals of Applied Probability*, 5(1), 49-77.

[11] Dai, J. G., and Meyn, S. P. (1995). Stability and Convergence of Moments for Multiclass Queueing Networks Via Fluid Limit Models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(11), 1889-1904.

[12] Dai, J. G., and Weiss, G. (1996). Stability and Instability of Fluid Models for Reentrant Lines. *Mathematics of Operations Research*, 21(1), 115-134.

[13] Daley, D. J. (1968). The Correlation Structure of the Output Process of Some Single Server Queueing Systems. *The Annals of Mathematical Statistics*, 39(3), 1007-1019.

[14] Davis, M. H. A. (1984). Piecewise Deterministic Markov Processes: A General Class of Nondiffusion Stochastic Models. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 46(3), 353-388.

[15] Down, D. (1998). On the Stability of Polling Models with Multiple Servers. *Journal of Applied Probability*, 35(3), 925-935.

[16] Disney, R. L., Farrell, R. L., and Morais, P. R. (1973). A Characterization of $M/G/1$ Queues with Renewal Departure Processes. *Management Science*, 19(11), Theory Series, 1222-1228.

[17] Eisenberg, M. (1972). Queues with Periodic Service and Changeover Time. *Operations Research*, 20(2), 440-451.

[18] Fricker, C., and Jaïbi, M. R. (1994). Monotonicity and Stability of Periodic Polling Models. *Queueing Systems*, 15(1-4), 211-238.

[19] Getoor, R. K. (1979). Transience and Recurrence of Markov Processes. In J. Azema and M. Yor (Eds.), *Seminaire de Probabilités XIV* (pp. 397-409). New York: Springer-Verlag.

[20] Gut, A. (1995). *Stopped Random Walks: Limit Theorems and Applications.* Applied Probability.

[21] Kaspi, H., and Mandelbaum, A. (1992). Regenerative Closed Queueing Networks. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 39(4), 239-258.

[22] Kleinrock, L. (1975). *Queueing Systems: Theory, Volume 1*. Wiley-Interscience.

[23] Konheim, A. G., Levy, H., and Srinivasan, M. M. (1994). Descendant Set: An Efficient Approach for the Analysis of Polling Systems. *IEEE Transactions on Communications*, 42(2-4), 1245-1253.

[24] Lang, S. (1973). *Calculus of Several Variables*. Addison-Wesley Publishing Company.

[25] Levy, H., and Sidi, M. (1990). Polling Systems: Applications, Modeling, and Optimization. *IEEE Transactions on Communications*, 30(10), 1750-1760.

[26] Fricker, C., and Jaïbi, M. R. (1998). Stability of Multi-server Polling Models. Institute National de Recherche en Informatique et en Automatique.

[27] Meyn, S. P., and Tweedie, R. L. (1993). *Markov Chains and Stochastic Stability*. Springer-Verlag.

[28] Meyn, S. P., and Down, D. (1994). Stability of Generalized Jackson Networks. *The Annals of Applied Probability*.

[29] van der Mei, R. D., and Borst, S. C. (1997). Analysis of Multiple-server Polling Systems by Means of the Power-Series Algorithm. *Stochastic Models*, 13(2), 339-369.

[30] Meyn, S. P. (1995). Transience of Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models. *The Annals of Applied Probability*, 5(4), 946-957.

[31] Adan, I. J. B. F., van Leeuwaarden, J. S. H., and Winands, E. M. M. (2006). On the Application of Rouche's Theorem in Queueing Theory. *Operations Research Letters*, 34(3), 355-360.

[32] Roubos, A. (2007). *Polling Systems and their Applications*. Vrije Universiteit Amsterdam.

[33] Saavedra, B. P. (2011). Informe Técnico del Microsimulador. Departamento de Matemáticas.

[34] Vishnevskii, V. M., and Semenova, O. V. (2006). Mathematical Methods to Study the Polling Systems. *Automation and Remote Control*, 67(2), 173-220.

[35] Serfozo, R. (2009). *Basics of Applied Stochastic Processes*. Springer-Verlag.

[36] Sharpe, M. (1998). *General Theory of Markov Processes*. Academic.

[37] Sigman, K. (1990). The Stability of Open Queueing Networks. *Stochastic Processes and their Applications*, 35(1), 11-15.

[38] Sidi, M., and Levy, H. (1990). Customer Routing in Polling Systems. In P. King, I. Mitrani, and R. Pooley (Eds.), *Proceedings Performance '90*. North-Holland, Amsterdam.

[39] Sidi, M., and Levy, H. (1991). Polling Systems with Simultaneous Arrivals. *IEEE Transactions on Communications*, 39(6), 823-827.

[40] Sigman, K., Thorisson, H., and Wolff, R. W. (1994). A Note on the Existence of Regeneration Times. *Journal of Applied Probability*, 31, 1116-1122.

[41] Stidham, S. Jr. (1972). Regenerative Processes in the Theory of Queues, with Applications to the Alternating Priority Queue. *Advances in Applied Probability*, 4(3), 542-577.

[42] Takagi, H. (1986). *Analysis of Polling Systems*. Cambridge: MIT Press.

[43] Takagi, H., and Kleinrock. (1986). Analysis of Polling Systems. Cambridge: MIT Press.

[44] Takagi, H. (1988). Queueing Analysis of Polling Models. *ACM Computing Surveys*, 20(1), 5-28.

[45] Thorisson, H. (2000). *Coupling, Stationarity, and Regeneration*. Probability and its Applications. Springer-Verlag.

[46] Winands, E. M. M., Adan, I. J. B. F., and van Houtum, G. J. (2006). Mean Value Analysis for Polling Systems. *Queueing Systems*, 54, 35-44.

[47] James, G., Witten, D., Hastie, T., and Tibshirani, R. (2013). *An Introduction to Statistical Learning: with Applications in R*. Springer.

[48] Hosmer, D. W., Lemeshow, S., and Sturdivant, R. X. (2013). *Applied Logistic Regression* (3rd ed.). Wiley.

[49] Bishop, C. M. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer.

[50] Harrell, F. E. (2015). *Regression Modeling Strategies: With Applications to Linear Models, Logistic and Ordinal Regression, and Survival Analysis*. Springer.

[51] R Documentation and Tutorials: `https://cran.r-project.org/manuals.html`

[52] Tutorials on R-bloggers: `https://www.r-bloggers.com/`

[53] Coursera: *Machine Learning* by Andrew Ng.

[54] edX: *Data Science and Machine Learning Essentials* by Microsoft.

[55] Ross, S. M. (2014). *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*. Academic Press.

[56] DeGroot, M. H., and Schervish, M. J. (2012). *Probability and Statistics* (4th ed.). Pearson.

[57] Hogg, R. V., McKean, J., and Craig, A. T. (2019). *Introduction to Mathematical Statistics* (8th ed.). Pearson.

[58] Kleinbaum, D. G., and Klein, M. (2010). *Logistic Regression: A Self-Learning Text* (3rd ed.). Springer.

[59] Wasserman, L. (2004). *All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference*. Springer.

[60] Probability and Statistics Tutorials on Khan Academy: `https://www.khanacademy.org/math/statistics-probability`

[61] Online Statistics Education: `http://onlinestatbook.com/`

[62] Peng, C. Y. J., Lee, K. L., and Ingersoll, G. M. (2002). *An Introduction to Logistic Regression Analysis and Reporting*. The Journal of Educational Research.

[63] Agresti, A. (2007). *An Introduction to Categorical Data Analysis* (2nd ed.). Wiley.

[64] Han, J., Pei, J., and Kamber, M. (2011). *Data Mining: Concepts and Techniques*. Morgan Kaufmann.

[65] Data Cleaning and Preprocessing on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/data-cleaning-and-preprocessing`

[66] Molinaro, A. M., Simon, R., and Pfeiffer, R. M. (2005). *Prediction Error Estimation: A Comparison of Resampling Methods*. Bioinformatics.

[67] Evaluating Machine Learning Models on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/evaluating-machine-learning-models`

[68] Practical Guide to Logistic Regression in R on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/practical-guide-to-logistic-regression-in-r`

[69] Coursera: *Statistics with R* by Duke University.

[70] edX: *Data Science: Probability* by Harvard University.

[71] Coursera: *Logistic Regression* by Stanford University.

[72] edX: *Data Science: Inference and Modeling* by Harvard University.

[73] Coursera: *Data Science: Wrangling and Cleaning* by Johns Hopkins University.

[74] edX: *Data Science: R Basics* by Harvard University.

[75] Coursera: *Regression Models* by Johns Hopkins University.

[76] edX: *Data Science: Statistical Inference* by Harvard University.

[77] An Introduction to Survival Analysis on Towards Data Science: `https://towardsdatascience.com/an-introduction-to-survival-analysis`

[78] Multinomial Logistic Regression on DataCamp: `https://www.datacamp.com/community/tutorials/multinomial-logistic-regression-R`

[79] Coursera: *Survival Analysis* by Johns Hopkins University.

[80] edX: *Data Science: Statistical Inference and Modeling for High-throughput Experiments* by Harvard University.

[81] Sigman, K., and Wolff, R. W. (1993). A Review of Regenerative Processes. *SIAM Review*, 38(2), 269-288.

[82] I.J.B.F. Adan, J.S.H. van Leeuwaarden, and E.M.M. Winands. On the application of Rouches theorem in queueing theory. Operations Research Letters, 34(3):355-360, 2006.

[83] Asmussen Soren, Applied Probability and Queues, John Wiley and Sons, 1987.

[84] Bhat Narayan, An Introduction to Queueing Theory Modelling and Analysis in Applications, Birkhauser, 2008.

[85] Boxma J. O., Analysis and Optimization of Polling Systems, Queueing, Performance and Control in ATM, pp. 173-183, 1991.

[86] Boxma J. O., Pseudoconservation Laws in Cyclic Service Systems, Journal of Applied Probability, vol. 24, 1987, pp. 949-964.

[87] Boon M.A.A., Van der Mei R.D. and Winands E.M.M., Applications of Polling Systems, 2011.

[88] Borovkov. A. A. and Schassberger R., Ergodicity of a Polling Network, Stochastic Processes and their Applications, vol. 50, no. 2, 1995, pp. 253-262.

[89] Laurent van den Bos and Marko Boon, Networks of Polling Systems (report), Eindhoven University of Technology, 2013.

[90] Chee-Hook Ng. y Boon-Hee Soong, Queueing Modelling Fundemantals with Applications in Communications Networks, John-Wiley and Sons, Ltd, 2008.

[91] Chen H., Fluid Approximations and Stability of Multiclass Queueing Networks I: Work-Conserving Disciplines, Annals Applied Probabability, vol. 5, no. 3, 1995, pp. 637-665.

[92] R.B. Cooper, G. Murray, Queues served in cyclic order (The Bell System Technical Journal, 48 (1969) 675-689).

[93] R.B. Cooper, Queues served in cyclic order: waiting times (The Bell System Technical Journal, 49 (1970) 399-413).

[94] Dai Jean G., On positive Harris Recurrence of Multiclass Queueing Networks: A Unified Approach Via Fluid Limit Models, The Annals of Applied Probability, vol. 5, No. 1, 1995, pp. 49-77.

[95] Dai Jim G. and Meyn Sean P., Stability and Convergence of Moments for Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models, IEEE transactions on Automatic Control, vol. 40, No. 11, 1995, pp. 1889-1904.

[96] Dai Jim G. and Weiss G., Stability and Inestability of Fluid Models for Reentrant Lines, Mathematics of Operation Research, vol. 21, no. 1, 1996, pp. 115-134.

[97] D.J. Daley, The correlation structure of the output process of some single server queueing systems, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 39. No. 3, pp. 1007-1019, 1968.

[98] Davis, M. H. A., Piecewise Deterministic Markov Processes: A General Class of Nondifussion Stochastic Models. Journal of Royal Statistics Society Serie B, vol. 46, no. 3, 1984, pp. 353-388.

[99] Down D., On the Stability of Polling Models with Multiple Servers, Journal of Applied Probability, vol. 35, no. 3, 1998, pp. 925-935.

[100] D.J. Daley, The correlation structure of the output process of some single server queueing systems, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 39. No. 3, pp. 1007-1019, 1968.

[101] Ralpjh L. Disney, Robert L. Farrell and Paulo Renato Morais, A Characterization of $M/G/1$ Queues with Renewal Departure Processes, Manage of Science, Vol. 19, No. 11, Theory Series, pp. 1222-1228, 1973.

[102] M. Eisenberg, Queues with periodic service and changeover time (Operations Research, 20 (2)(1972) 440-451).

[103] Fricker Christine and Jaïbi M.R., Monotonicity and Stability of Periodic Polling Models, Queueing Systems, vol. 15, no. 1-4, 1994, pp. 211-238.

[104] Fricker Christine and Jaïbi M.R., Stability of Multi-Server Polling Models, Institute National de Recherche en Informatique et en Automatique, Issue 3347, 1998.

[105] Getoor R. K., Transience and recurrence of Markov processes, Siminaire de Probabilitis XIV, J. Azema and M Yor, Eds. New York Springer-Verlag, 1979.

[106] Gut A., Stopped Random Walks: Limit Theorems and Applications, Applied Probability, 1995.

[107] Chee-Hook Ng. y Boon-Hee Soong, Queueing Modelling Fundemantals with Applications in Communications Networks, John-Wiley and Sons, Ltd, 2008.

[108] Kaspi H. and Mandelbaum A., Regenerative Closed Queueing Networks, Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, vol. 39, no. 4, 1992, pp. 239-258.

[109] A.G. Konheim, H. Levy, M.M. Srinivasan, Descendant set: an efficient approach for the analysis of polling systems (IEEE Transactions on Communications, 42 (2/3/4)(1994) 1245-1253).

[110] Leonard Kleinrock, Theory, Volume 1, Queueing Systems Wiley-Interscience, 1975,

[111] A. G. Konheim, h. Levy and M. M. Srinivasan. Descendant set: an efficient approach for the analysis of polling systems. IEEE Trabsanctions on Communications, 42(2-4): pp. 1245-1253, 1994.

[112] Serge Lang, Calculus of Several Variables, Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

[113] Levy Hanoch y Sidi Moshe , Polling Systems: Applications, Modeling, and Optimization, IEEE Transactions on Communications, vol. 30, no. 10, 1990, pp. 1750-1760.

[114] van der Mei, R.D. and Borst, S. C., Analysis of Multiple-Server Polling Systems by Means of the Power-Series Algorithm, Stochastic Models, vol. 13, no. 2, 1997, pp. 339-369.

[115] Meyn Sean P., Transience of Multiclass Queueing Networks via Fluid Limit Models, The Annals of Applied Probability, vol. 5, no. 4, 1995, pp.946-957.

[116] Meyn S. P. and Tweedie R. L., Stability of Markovian Processes II:Continuous Time Processes and Sample Chains, Advanced Applied Pobability, vol. 25, 1993, pp. 487-517.

[117] Meyn S. P. and Tweedie R. L., Markov Chains and Stochastic Stability, 1993.

[118] Meyn, S.P. and Down, D., Stability of Generalized Jackson Networks, The Annals of Applied Probability, 1994.

[119] Roubos Alex, Polling Systems and their Applications, Vrije Universiteit Amsterdam, 2007.

[120] Saavedra B. P., Informe Técnico del Microsimulador, Departamento de Matemátias, 2011.

[121] Vishnevskii V.M. and Semenova O.V., Mathematical Methods to Study the Polling Systems, Automation and Remote Control, vol. 67, no. 2, 2006, pp. 173-220.

[122] Richard Serfozo, Basics of Applied Stochastic Processes, Springer-Verlag, 2009.

[123] Sharpe Michael , General Theory of Markov Processes. Boston, M.A. Academic, 1998.

[124] Sigman Karl, The Stability of Open Queueing Networks, Stochastic Processes and their Applications, vol. 35, no. 1, 1990, pp. 11-15.

[125] Sidi M. and Levy H., Customer Routing in Polling Systems, In: P. King, I. Mitrani, and R. Pooley (Eds.), Proceedings Performance '90, North-Holland, Amsterdam, 1990.

[126] Sidi M. and Levy H., Polling Systems with Simultaneus Arrivals. IEEE Transactions on Communications, vol. 39, no. 6, 1991, pp. 823-827.

[127] Karl Sigman, Hermann Thorisson and Ronald W. Wolff, A Note on the Existence of Regeneration Times, Journal of Applied Probability, vol. 31, pp. 1116-1122, 1994.

[128] Shaler Stidham, Jr., Regenerative Processes in the theory ow queues, with applications to the alternating priority queue, Advances in Applied Probability, Vol. 4, no. 3, 1972,pp. 542-577.

[129] Takagi H., Analysis of Polling Systems, Cambdrige: MIT Press, 1986

[130] Takagi H. and Kleinrock, Analysis of Polling Systems, Cambdrige: MIT Press, 1986

[131] Takagi Hideaki, Queueing Analysis of Polling Models, ACM computing Surveys, vol. 20, no. 1, 1988, pp. 5-28.

[132] Hermann Thorisson, Coupling, Stationarity, and Regeneration, Probability and its Applications, Springer-Verlag, 2000.

[133] E.M.M. Winands, I.J.B.F. Adan adn G.J. van Houtum, Mean value analysis for polling systems, Queueing Systems (2006), 54:35-44,

[134] Konheim, A.G. and Meister, B., Waiting Lines and Times in a System with Polling, J. ACM, 1974, vol. 21, n0. 3, pp. 470-490.

[135] Levy, H. and Kleinrock, L., Polling Systems with Zero Switch-over Periods: A General Method for Analysis the Expected DElay, Performance Evaluat., 1991, vol. 13, no. 2, pp. 97-107.

[136] Yechiali, U., Analysis and Control of Polling systems, in Performance Evaluation of Computer and Communications Systems, Donatiello, L. and Nelson R., Eds. Berlin: Springer Verlag, 1993, pp. 630-650.